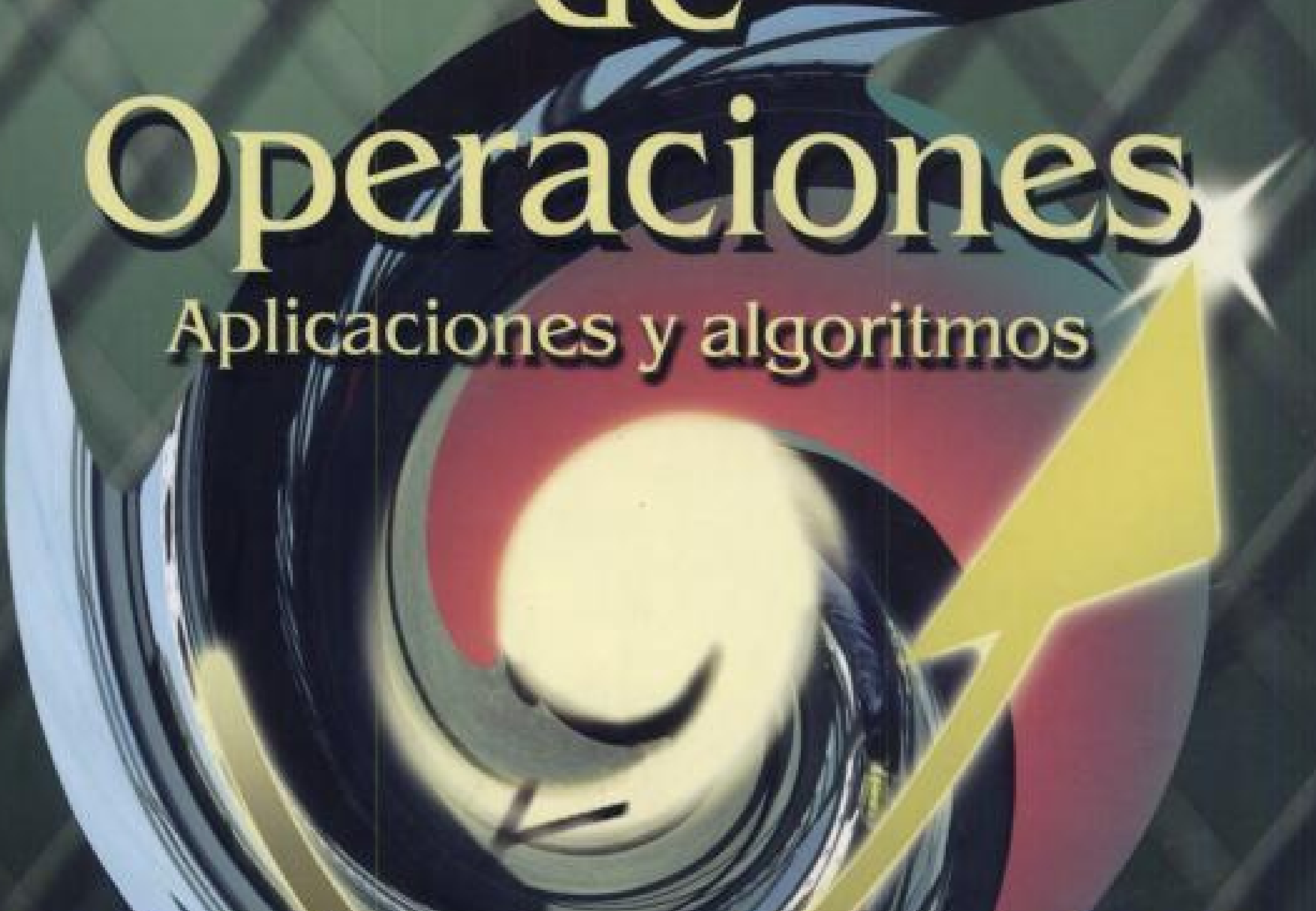
THOMSON

Investigación de Operaciones

Aplicaciones y algoritmos



Wayne L. Winston

Cuarta edición

Investigación de operaciones

APLICACIONES Y ALGORITMOS

Investigación de operaciones

APLICACIONES Y ALGORITMOS

CUARTA EDICIÓN

Wayne L. Winston

INDIANA UNIVERSITY

REVISIÓN TÉCNICA

Adolfo Andrés Velasco Reyes

UNAM-Facultad de Ingeniería

THOMSON

Australia • Brasil • Canadá • España • Estados Unidos • México • Reino Unido • Singapur

THOMSON

Investigación de operaciones
Aplicaciones y Algoritmos, 4a. Ed.
Wayne L. Winston

Director General:
Miguel Ángel Toledo Castellanos

Director editorial y de producción:
José Tomás Pérez Bonilla

Editor de desarrollo:
Pedro de la Garza Rosales

Traducción:
María Bruna Anzures y
Francisco Sánchez Fragoso

Gerente de producción:
René Garay Argueta

Editor de producción:
Alma Castrejón Alcocer

Supervisora de manufactura:
Claudia Calderón Valderrama

Revisión Técnica:
Adolfo Andrés Velasco Reyes
UNAM-Facultad de ingeniería

Diseño de portada:
Alfredo Jaimes

Impreso en México
Printed in Mexico
2 3 4 06 05

Para mayor información contáctenos
en:
Séneca 53 Col. Polanco
México, D. F. 11560

Puede visitar nuestro sitio en
http://www.thomsonlearning.com.mx

Traducido del libro *Operations
Research, Applications and
Algorithms 4th.*, publicado en inglés
por Brooks Cole © 2004
ISBN 0-534-38058-1
Datos para catalogación
bibliográfica:
Winston, Wayne L. *Investigación de
operaciones, aplicaciones y
algoritmos*, 4a edición.
ISBN 970-686-362-1
1. Investigación de operaciones. 2.
Aplicaciones y algoritmos.

División Iberoamericana

México y América Central:
Thomson Learning
Séneca 53
Col. Polanco
México, D.F. 11560
Tel. (52-55) 1500 6000
Fax (52-55) 5281 26 56
editor@thomsonlearning.com.mx

El Caribe:
Thomson Learning
598 Aldebarán
Altamira San Juan
Puerto Rico
Zip code: 00920
Tel. (787) 641-1112
Fax (787) 641-1119

Cono Sur:
Buenos Aires, Argentina
thomson@thomsonlearning.com.ar

América del Sur:
Thomson Learning
Calle 39 No. 24-09
La Soledad
Bogotá, Colombia
Tel. (571) 340-9470
Fax (571) 340-9475
cliente@thomsonlearning.com.co

España:
Thomson Learning
Calle Magallanes 25
28015 Madrid, España
Tel. 34 (0) 91 446-3350
Fax 34 (0) 91 445-6218
clientes@paraninfo.es

**Esta obra se terminó de
imprimir Abril del 2005 en
Programas Educativos S.A. de C.V.
Calz.Chabacano No. 65-A
Col. Asturias C.P.06850 Méx. D.F.**

Contenido

Contenido

10 Temas avanzados de programación lineal 562

11 Programación no lineal 610

12 Repaso de cálculo y probabilidad 707

13 Toma de decisiones bajo incertidumbre 737

14 Teoría de juegos 803

15 Modelos determinísticos de inventario 846

- Para proporcionar retroalimentación inmediata a los estudiantes, los problemas se presentan al final de las secciones; la mayor parte de los capítulos terminan con problemas de repaso. Hay alrededor de 1 500 problemas, agrupados por grado de dificultad: el Grupo A comprende la práctica de las técnicas básicas, el Grupo B abarca los conceptos fundamentales y el Grupo C se relaciona sólo con la teoría.
- En el libro se evitan los ejercicios teóricos en exceso, y se prefieren los problemas de aplicación. Muchos problemas se basan en aplicaciones publicadas. La exposición es muy esmerada, mediante varios ejemplos en cada capítulo, para guiar al estudiante paso a paso inclusive hasta en los temas más complicados.
- Con el fin de ayudar a los alumnos a estudiar para los exámenes, en la mayoría de los capítulos hay un resumen de conceptos y de fórmulas. La respuesta a los problemas seleccionados se encuentra en un apéndice.

Complementos

Este libro cuenta con una serie de complementos para el profesor, los cuales están en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que adopten la presente obra como texto para sus cursos. Para mayor información, favor de comunicarse con las oficinas de nuestros representantes o a los siguientes correos electrónicos:

Thomson México y Centroamérica
clientes@thomsonlearning.com.mx.
Thomson América del Sur
clithomson@andinet.com
Thomson Caribe
amy.reyes@thomsonlearning.com

Archivos

En el sitio **www.thomsonlearning.com.mx** están los archivos de software que complementan este libro. Es necesa.io entrar en el catálogo de ingenierías y buscar este título para llegar a la opción de descargar el material.

Cobertura y organización

La sección de programación lineal del libro es independiente por completo; todo lo que se requiere de antecedentes matemáticos se encuentra en el capítulo 2. Los estudiantes que saben multiplicar matrices no deberán tener problemas con los capítulos 2 a 11. Para las partes de los capítulos restantes, se requiere un conocimiento básico de cálculo y probabilidad equivalente al que se logra con cursos de cálculo y de estadística de un semestre cada uno. Todos los temas de cálculo y probabilidad que se usan en los capítulos 13 a 24 se repasan en el capítulo 12.

Como no todos los estudiantes necesitan un tratamiento teórico completo de análisis de sensibilidad, hay dos capítulos sobre el tema. El capítulo 5 es un enfoque aplicado al análisis de sensibilidad, en el que se destaca la interpretación de los resultados que da la computadora. En el capítulo 6, se estudia por completo el análisis de sensibilidad, dualidad y el método dual simplex. El profesor debe cubrir el capítulo 5 o el 6, pero no ambos. Los grupos de clase en los que se enfaticen habilidades para construcción y formulación de modelos, deben estudiar el capítulo 5. Las clases en las que se destaquen los algoritmos de la programación matemática (en particular las clases en las que los estudiantes seguirán más adelante con el estudio de investigación de operaciones), deben estudiar el capítulo 6. Si se estudia el capítulo 5 y no el capítulo 6, entonces se podría omitir el capítulo 2.

Cambios en la cuarta edición

La cuarta edición de esta obra contiene varios cambios sustanciales. El más importante es la inclusión del Modelo de procesos (Cap. 22) para desarrollar simulación de colas, y @Risk (Cap. 23) para ejecutar simulaciones basadas en hojas de cálculo. Entre otros cambios, están los siguientes:

- Se añadieron más de 200 nuevos problemas.
- Se utiliza especialmente Microsoft Excel. Las hojas de cálculo de Lotus que aparecían en la edición anterior, se convirtieron en Excel.
- Se analiza más la optimización mediante las hojas de cálculo. Se cambió el método para resolver problemas de optimización con hojas de cálculo por el de *What's Best to the Excel Solver*.
- Se añadió el análisis de funciones importantes de Excel, como MMULT, OFFSET, MINVERSE y NPV.
- En el capítulo 4 hay más instrucciones para el uso de LINDO y LINGO.
- En el mismo capítulo 4 se analiza con más detalle la geometría de la programación lineal.
- Nuevas aplicaciones de programación no lineal para problemas de precios, se presentan en el capítulo 11.
- Se incluyen 11 nuevos casos para los que se requiere programación matemática. El profesor Jeff Goldberg, de la Universidad de Arizona, escribió los casos.
- En el capítulo 12 hay un análisis de las funciones de distribución normal y de las transformadas z de Excel.

- En el capítulo 13, se tratan las aplicaciones de los efectos de la teoría y del contexto en la toma de decisiones.
- Las políticas de inventario POWER-OF-TWO y modelos EOQ de productos múltiples se tratan en el capítulo 15.
- Ahora se trata, en el capítulo 20, el cálculo de probabilidades de Poisson y exponencial con Excel, el método de Buzen para redes de colas cerradas, aproximaciones para sistemas de colas *G/G/s*, el uso de tablas de datos en optimización de colas y cálculo de probabilidades transitorias para sistemas de colas.
- En el capítulo 22, se ilustra cómo usar el Modelo Process del paquete de simulación amigable con el usuario para simular los sistemas de colas.
- El capítulo 23 trata del @Risk para Excel para la simulación de Monte Carlo. Entre las áreas de aplicación se encuentran presupuestos, de capital administración de proyectos y confiabilidad.
- Las tablas de datos de Excel y la función OFFSET, se usan para optimizar el número de periodos en un pronóstico de promedios móviles en el capítulo 24.

Uso de computadora

En deferencia al uso casi universal de Excel, se da una atención especial a este *software* a través de todo el libro cuando es apropiado. Cuando las capacidades originales de Excel están limitadas, en el texto se analiza el *software* complementario que confía en las posibilidades de Excel, o se usa *software* independiente.

Las ilustraciones del *software*, con todas las instrucciones paso a paso, se encuentran al final de las secciones, con el fin de proporcionar la máxima flexibilidad a los profesores que desean emplear distintos paquetes de *software* en sus cursos.

Agradecimientos

Varias personas desempeñaron papeles importantes en la edición de esta cuarta edición. Mis opiniones acerca de la enseñanza de investigación de operaciones recibieron gran influencia por parte de varios maestros excelentes que he tenido, entre otros Gordon Bradley, Eric Denardo, George Fishman, Gordon Kaufman, Richard Larson, John Little, Robert Mifflin, Martin Shubik, Matthew Sobel, Arthur Veinott, Jr., Harvey Wagner y Ward Whitt. En especial, quiero mostrar mi reconocimiento a la obra *Principles de Operations Research*, del profesor Wagner, en donde aprendí más sobre la investigación de operaciones que en cualquier otra.

Doy las gracias a las siguientes personas:

- Linus Schrage, Mark Wiley y Kevin Cunningham, de *LINDO Systems*, por haber permitido incluir LINDO y LINGO.
- Dan Fylstra y Edwin Straver, de *Frontline Systems*, por permitirme incluir *Premium Solver*.
- Sam McLafferty de Palisade por autorizar el uso de *@Risk*.
- Matthew Jorgensen de Process Model Inc., por dar permiso para incluir *Process Model*.

Gracias a todas las personas de Duxbury Press que trabajaron en el libro, sobre todo al editor, Curt Hinrichs, por su incansable apoyo editorial.

Aprecio en todo lo que vale la capacidad de corrección y producción de David Hoyt, y la excelente formación de *ATLIS Graphics*.

Agradezco a las 146 personas que contestaron una encuesta. Su información fue valiosa retroalimentación sobre el libro, el curso y las necesidades que surgían. Entre ellas se encuentran Nikolaos Adamou, University of Athens & Sage Graduate School; Jeffrey Adler, Rensselaer Polytechnic Institute; Victor K. Akatsa, Chicago State University; Steven Andelin, Kutztown University of Pennsylvania; Badiollah R. Asrabadi, Nicholls State University; Rhonda Aull-Hyde, University of Delaware; Jonathan Bard, Mechanical Engineering; John Barnes, Virginia Commonwealth University; Harold P. Benson, University of Florida; Elinor Berger, Columbus College; Richard H. Bernhard, North Carolina State University; R. L. Bulfin, Auburn University; Laura Burke, Lehigh University; Jonathan Caulkins, Carnegie Mellon University; Beth Chance, University of the Pacific; Alan Chesen, Wright State University; Young Chun, Louisiana State University; Chia-Shin Chung, Cleveland State University; Ken Currie, Tennessee Technological University; Ani Dasgupta, Pennsylvania State University; Nirmil Devi, Embry-Riddle Aeronautical University; James Falk, George Washington University; Kambiz Farahmand, Texas A. & M. University–Kingsville; Yahya Fathi, North Carolina State University; Steve Fisk, Bowdoin College; William P. Fox, United States Military Academy; Michael C. Fu, University of Maryland; Saul I. Gass, University of Maryland; Ronald Gathro, Western New England College; Perakis Georgia, Massachusetts Institute of Technology; Alan Goldberg, California State University–Hayward; Jerold Griggs, University of South Carolina; David Grimmett, Austin Peay State University; Melike Baykal Gursoy, Rutgers University; Jorge Haddock, Rensselaer Polytechnic Institute; Jane Hagstrom, University of Illinois; Carl Harris, George Mason University; Miriam Heller, University of Hous-

ton; Sundresh S. Heragu, Rensselaer Polytechnic Insitute; Rebecca E. Hill, Rochester Institute of Technology; David Holdsworth, Alaska Pacific University; Elained Hubbard, Kennesaw State College; Robert Hull, Western Illinois University; Jeffrey Jarrett, University of Rhode Island; David Kaufman, University of Massachusetts; Davook Khalili, San Jose University; Morton Klein, Columbia University; S. Kumar, Rochester Institute of Technology; David Larsen, University of New Orleans; Mark Lawley, University of Alabama; Kenneth D. Lawrence, New Jersey Institute of Technology; Andreas Lazari, Valdosta State University; Jon Lee, University of Kentucky; Luanne Lohr, University of Georgia; Joseph Malkovitch, York College; Masud Mansuri, California State University–Fresno; Steven C. McKelvey, Saint Olaf College; Ojjat Mehri, Youngstown State University; Robert Mifflin, Washington State University; Katya Mints, Columbia University; Rafael Moras, St. Mary's University; James G. Morris, University of Wisconsin, Madison; Frederic Murphy, Temple University; David Olson, Texas A & M University; Mufit Ozden, Miami University; R. Gary Parker, Georgia Institute of Technology; Barry Pasternack, California State University, Fullerton; Walter M. Patterson, Lander University; James E Pratt, Cornell University; B. Madhu Rao, Bowling Green State University; T. E. S. Raghavan, University of Illinois–Chicago; Gary Reeves, University of South Carolina; Gaspard Rizzuto, University of Southwestern; David Ronen, University of Missouri–St. Louis; Paul Savory, University of Nebraska, Lincoln; Jon Schlosser, New Mexico Highlands University; Delray Schultz, Millersville University; Richard Serfozo, Georgia Technological Institute; Morteza Shafi-Mousavi, Indiana University–South Bend; Dooyoung Shin, Mankato State University; Ronald L. Shubert, Elizabethtown College; Joel Sobel, University of California, San Diego; Manbir S. Sodhi, University of Rhode Island; Ariela Sofer, George Mason University; Toni M. Somers, Wayne State University; Robert Stark, University of Delaware; Joseph A. Svestka, Cleveland State University; Alexander Sze, Concordia College; Roman Sznajder, University of Maryland–Baltimore County; Bijan Vasigh, Embry-Riddle Aeronautical University; John H. Vande Vate, Georgia Technological University; Richard G. Vinson, University of South Alabama; Jin Wang, Valdodsta State University; Zhongxian Wang, Montclair State University; Robert C. Williams, Alfred University; Arthur Neal Willoughby, Morgan State; Shmuel Yahalom, SUNY–Maritime College; James Yates, University of Central Oklahoma; Bill Yurcik, University of Pittsburgh.

Gracias a los que revisaron las ediciones anteriores: Esther Arkin, Sant Arora, Harold Benson, Warren J. Boe, Bruce Bowerman, James W. Chrissis, Jerald Dauer, S. Selcuk Erenguc, Yahya Fathi, Robert Freund, Irwin Greenberg, Rebecca E. Hill, John Hooker, Sidney Lawrence, Patrick Lee, Edward Minieka, James G. Morris, Joel A. Nachlas, David L. Olson, Sudhakar Pandit, David W. Pentico, Bruce Pollack-Johnson, Michael Richey, Gary D. Scudder, Lawrence Seiford, Michael Sinchcomb y Paul Stiebitz.

Son de mi responsabilidad todos los errores que haya, y agradeceré a los lectores que me hagan llegar su opinión a la dirección siguiente:

Indiana University
Department of Operations and Decision Technology
Kelley School of Business
Room 570
Bloomington, IN 47405

Wayne Winston (Winston@indiana.edu)

Acerca del autor

Wayne Winston

Wayne L. Winston es profesor de Tecnologías de operaciones y decisiones en la Escuela de Negocios Kelley, de la Universidad de Indiana, de donde es docente desde 1975. Wayne es egresado del MIT, en donde obtuvo su grado de licenciatura en Matemáticas; su grado de doctor lo obtuvo en Yale. Es autor de los exitosos libros de texto *Operations Research: Applications and Algorithms; Introduction to Mathematical Programming; Simulation Modeling with @Risk; Practical Management Science;* y *Financial Models Using Simulation and Optimization.* Además, ha publicado más de 20 artículos en revistas importantes y ha sido galardonado con varios premios a la enseñanza, entre otros, el premio de todas las escuelas que ofrecen la maestría en Administración de Empresas, que ha ganado cuatro veces. Su interés actual es mostrar cómo los modelos con hojas de cálculo se pueden usar para resolver problemas de las empresas en todas las disciplinas, principalmente en finanzas y mercadotecnia.

Sus deportes favoritos son la natación y el basquetbol, y su pasión por los concursos lo llevó a aparecer varios años en el programa de televisión *Jeopardy*, en donde ganó dos juegos. Está casado con la talentosa y amorosa Vivian. Tienen dos niños: Gregory y Jennifer.

1

Introducción a la construcción de modelos

1.1 Introducción a los modelos

La **investigación de operaciones** (con frecuencia llamada **ciencia de la administración**) es, simplemente, un enfoque científico en la toma de decisiones que busca el mejor diseño y operar un sistema, por lo regular en condiciones que requieren la asignación de recursos escasos.

Por **sistema**, se quiere dar a entender una organización de componentes interdependientes, que trabajan juntos para lograr un objetivo del sistema. Por ejemplo, *Ford Motor Company* es un sistema cuya meta es maximizar las utilidades que se pueden ganar mediante la producción de vehículos de calidad.

El término *investigación de operaciones* se acuñó durante la Segunda Guerra Mundial, cuando los comandantes militares británicos solicitaron a los científicos e ingenieros analizar varios problemas militares, como el despliegue de los radares y el control de convoyes, bombardeos, operaciones antisubmarinas y colocación de minas.

En el enfoque científico de toma de decisiones, se requiere el uso de uno o más **modelos matemáticos**. Éstos son representaciones matemáticas de situaciones reales que se podrían usar para tomar mejores decisiones, o bien, simplemente para entender mejor la situación real. El ejemplo siguiente debe aclarar muchos de los términos importantes que se usan para explicar los modelos matemáticos.

EJEMPLO 1 **Maximización de la producción de Wozac**

Eli Daisy fabrica Wozac en enormes cargas, mediante el calentamiento de una mezcla química en un contenedor presurizado. Cada vez que se procesa una carga, se produce una cantidad distinta de Wozac. La cantidad producida es el *rendimiento del proceso* (medido en libras). A Daisy le interesa comprender los factores que influyen en el rendimiento del proceso de producción de Wozac. Describa un proceso de construcción de modelos para esta situación.

Solución Lo primero que le interesa a Daisy es determinar los factores que influyen en el rendimiento del proceso. A esto se le podría llamar *modelo descriptivo*, porque describe el comportamiento del rendimiento real como una función de varios factores. Daisy podría determinar (mediante métodos de regresión que se estudian en el capítulo 24) cual de los factores siguientes influyen en el rendimiento:

- Volumen del contenedor en litros (V).
- Presión del contenedor en mililitros (P).
- Temperatura del contenedor en grados Celsius (T).
- Composición química de la mezcla procesada.

Si A, B y C son los porcentajes de la mezcla compuesta por los productos químicos A, B y C, entonces, Daisy podría descubrir, por ejemplo, que

$$\text{rendimiento (1)} = 300 + 0.8V + 0.01P + 0.06T + 0.001T*P - 0.01T^2 - 0.001P^2 + 11.7A + 9.4B + 16.4C + 19A*B + 11.4A*C - 9.6B*C$$

Para determinar esta relación, se tendría que medir el rendimiento del proceso para muchas combinaciones distintas de los factores mencionados. Si Daisy conociera esta ecuación, podría describir el rendimiento del proceso de producción una vez que conociera el volumen, presión, temperatura y composición química.

Modelos prescriptivos o de optimización

La mayor parte de los modelos que se analizan en este libro, son **prescriptivos** o de **optimización**. Un modelo de este tipo "dicta" el comportamiento para una organización que le permitirá a ésta alcanzar mejor su(s) meta(s). Entre los elementos de un modelo prescriptivo están:

- Función(es) objetivo.
- Variables de decisión.
- Restricciones.

En pocas palabras, un modelo de optimización trata de encontrar valores, entre el conjunto de todos los valores para las variables de decisión, que optimicen (maximicen o minimicen) una función objetivo que satisfagan las restricciones dadas.

La función objetivo

Como es natural, a Daisy le gustaría maximizar el rendimiento del proceso. En la mayoría de los modelos hay una función que deseamos maximizar o minimizar. Esta función se llama *función objetivo* del modelo. Pero para maximizar el rendimiento del proceso, se requiere encontrar los valores de V, P, T, A, B y C, que hacen que (1) sea tan elevado como sea posible.

En muchas situaciones, una empresa puede tener más de un objetivo. Por ejemplo, para asignar estudiantes a las dos escuelas de bachillerato de Bloomington, Indiana, la Junta Escolar del Condado de Monroe estableció que la asignación de estudiantes tenía los siguientes objetivos:

- Igualar la cantidad de estudiantes en las dos escuelas.
- Reducir al mínimo la distancia promedio de viaje a la escuela.
- Tener un conjunto de estudiantes variado en ambas escuelas.

Se analizan problemas de toma de decisiones con objetivos múltiples en las secciones 4.14 y 11.13.

Variables de decisión

Las variables cuyos valores están bajo nuestro control e influyen en el desempeño del sistema, se denominan *variables de decisión*. En el ejemplo, V, P, T, A, B y C son variables de decisión. La mayor parte de este libro se destina a un análisis de cómo determinar el valor de las variables de decisión que maximiza (a veces, minimiza) una función objetivo.

Restricciones

En la mayor parte de las situaciones, sólo son posibles ciertos valores de las variables de decisión. Por ejemplo, ciertas combinaciones de volumen, presión y temperatura, podrían ser peligrosas. Además, A, B y C deben ser números positivos que se añaden a 1. Las restricciones de los valores de las variables de decisión se denominan *restricciones*. Supóngase lo siguiente:

- El volumen debe estar entre 1 y 5 litros.
- La presión debe ser de entre 200 y 400 mililitros.
- La temperatura debe estar entre 100 y 200 grados Celsius.
- La mezcla debe estar compuesta sólo de A, B, y C.
- Para que el fármaco se comporte de manera adecuada, sólo la mitad de la mezcla cuando mucho puede ser del producto A.

Estas restricciones se expresan en forma matemática como sigue:

$$\begin{aligned} V &\le 5 \\ V &\ge 1 \\ P &\le 400 \\ P &\ge 200 \\ T &\le 200 \\ T &\ge 100 \\ A &\ge 0 \\ B &\ge 0 \\ A + B + C &= 1 \\ A &\le 5 \end{aligned}$$

Modelo de optimización completo

Después de hacer que z represente el valor de la función objetivo, el modelo completo de optimización se escribe como sigue:

$$\text{Maximizar } z = 300 + 0.8V + 0.01P + 0.06T + 0.001T^*P - 0.01T^2 - 0.001P^2$$
$$+ 11.7A + 9.4B + 16.4C + 19A^*B + 11.4A^*C - 9.6B^*C$$

Sujeto a (s.a.)

$$\begin{aligned} V &\le 5 \\ V &\ge 1 \\ P &\le 400 \\ P &\ge 200 \\ T &\le 200 \\ T &\ge 100 \\ A &\ge 0 \\ B &\ge 0 \\ C &\ge 0 \\ A + B + C &= 1 \\ A &\le 5 \end{aligned}$$

Se dice que cualquier especificación de las variables de decisión que cumple con todas las restricciones del modelo se encuentra en la **región factible**. Por ejemplo, $V = 2$, $P = 300$, $T = 150$, $A = 0.4$, $B = 0.3$, y $C = 0.1$ están en la región factible. Una **solución óptima** para un modelo de optimización es cualquier punto en la región factible que optimice (en este caso *maximice*) la función objetivo. Mediante el paquete LINGO que viene con este libro, se establece que la solución óptima para este modelo es $V = 5$, $P = 200$, $T = 100$, $A = 0.294$, $B = 0$, $C = 0.706$ y $z = 183.38$. Por consiguiente, un rendimiento máximo de 183.38 libras se obtiene con un contenedor de 5 litros, presión de 200 mililitros, temperatura de 100 grados Celsius y 29% de A y 71% de C. Esto quiere decir que con ninguna otra combinación factible de las variables de decisión es posible obtener un rendimiento que sobrepase 183.38 libras.

Modelos estáticos y dinámicos

Un **modelo estático** es uno en el cual las variables de decisión no requieren sucesiones de decisiones para periodos múltiples. Un **modelo dinámico** es uno en el cual las variables de decisión sí requieren sucesiones de decisiones para periodos múltiples. En esencia, en el modelo estático se resuelve un problema luego de un solo intento, cuyas soluciones dictan valores óptimos de las variables de decisión en todos los puntos del tiempo. El ejemplo 1 es una muestra de un modelo estático; la solución óptima le indicará a Daisy cómo maximizar el rendimiento en todos los puntos del tiempo.

Como ejemplo de un modelo dinámico, considérese una compañía (llámela Sailco) que debe determinar cómo maximizar el costo de cumplir (justo a tiempo) la demanda de botes de vela durante el próximo año. Es evidente que Sailco debe determinar cuántos botes debe producir durante cada uno de los siguientes cuatro trimestres. En las decisiones de Sailco se consideran periodos múltiples, de aquí que un modelo para el problema de Sailco (véase sección 3.10) sería un modelo dinámico.

Modelos lineales y no lineales

Supóngase que siempre que las variables de decisión aparecen en la función objetivo y en las restricciones de un modelo de optimización, están multiplicadas por constantes y acomodadas en forma de suma. Un modelo de esta forma es un **modelo lineal**. Si un modelo de optimización no es lineal, entonces es un **modelo no lineal**. En las restricciones del ejemplo 1, las variables de decisión siempre están multiplicadas por constantes y acomodadas en forma de suma. Por consiguiente, las restricciones del ejemplo 1 pasan la prueba del modelo lineal. No obstante, los términos $0.001T{*}P$, $-0.01T^2$, $19A{*}B$, $11.4A{*}C$ y $-9.6B{*}C$ hacen que el modelo sea no lineal en la función objetivo del ejemplo 1. Por lo regular, los modelos no lineales son mucho más difíciles de resolver que los lineales. Estos últimos se estudian del capítulo 2 al 10. Los modelos no lineales se tratan en el capítulo 11.

Modelos enteros y no enteros

Si una o más variables de decisión deben ser enteros, entonces se dice que un modelo de optimización es un **modelo entero**. Si todas las variables de decisión son libres para asumir valores fraccionarios, entonces el modelo de optimización es un **modelo no entero**. Es evidente que el volumen, temperatura, presión y composición del porcentaje de nuestros datos, pueden tomar valores fraccionarios. Entonces, el ejemplo 1 es un modelo no entero. Si en un modelo las variables de decisión representan el número de trabajadores que empieza a laborar durante cada turno en un restaurante que sirve bocadillos, entonces es claro que se tiene un modelo entero. Los modelos enteros son mucho más difíciles de resolver que los modelos no lineales. Se tratan con detalle en el capítulo 9.

Modelos determinísticos y estocásticos

Supóngase que para cualquier valor de las variables de decisión, se conoce con certeza el valor de la función objetivo y si las restricciones se cumplen o no. Entonces se tiene un **modelo determinístico**; de no ser así, se tiene un **modelo estocástico**. Todos los modelos de los primeros doce capítulos son determinísticos. Los modelos estocásticos se tratan en los capítulos 13, 16, 17 y 19 al 24.

Si se considera al ejemplo 1 como un modelo determinístico, entonces se está haciendo la suposición (irreal) que para los valores dados de V, P, T, A, B y C, el rendimiento del proceso siempre será el mismo. Esto es muy improbable. Es posible ver a (1) como una representación del rendimiento promedio del proceso para valores dados de las variables de decisión. Por consiguiente, el objetivo es determinar valores de las variables de decisión que maximicen el rendimiento promedio del proceso.

Se puede ganar con frecuencia conocimiento profundo y útil dentro de las decisiones óptimas aplicando un modelo determinístico en una situación donde es más apropiado un modelo estocástico. Considérese el problema de Sailco de minimizar el costo de cumplir con la demanda (justo a tiempo) de botes de vela. La incertidumbre respecto a la demanda futura de botes de vela, quiere decir que para un programa de producción dado, no se sabe si se cumplirá a tiempo con la demanda. Esto lleva a pensar que es necesario un modelo estocástico para modelar la situación de Sailco. Es posible desarrollar un modelo determinístico para esta situación que da lugar a buenas decisiones para Sailco, como se ve en la sección 3.10.

1.2 El proceso de construcción de modelos de los siete pasos

Cuando la investigación de operaciones se utiliza para resolver un problema de una empresa se debe practicar el siguiente procedimiento de construcción de modelos de siete pasos:

Paso 1: Plantear el problema El investigador de operaciones define primero el problema de la empresa. En dicha definición se incluyen los objetivos específicos de la firma y las partes de ésta que se deben estudiar antes de poder resolver el problema. En el ejemplo 1, el problema es determinar cómo maximizar el rendimiento de un lote de Wozac.

Paso 2: Observar el sistema El investigador de operaciones reúne luego información para estimar el valor de parámetros que afectan el problema de la empresa. Estas estimaciones se utilizan para elaborar (en el paso 3) y evaluar (en el paso 4) un modelo matemático del problema. En el ejemplo 1, los datos se reunirían en un intento para determinar cómo influyen los valores de T, P, V, A, B y C, en el rendimiento del proceso.

Paso 3: Formular un modelo matemático del problema En este paso, el investigador de operaciones elabora un modelo matemático del problema. En este libro se explican varias técnicas matemáticas que se pueden usar para modelar sistemas. En el ejemplo 1, el modelo de optimización sería el resultado del paso 3.

Paso 4: Verificar el modelo y usar el modelo para predecir El investigador de operaciones trata de determinar si el modelo matemático elaborado en el paso 3 es una representación exacta de la realidad. Por ejemplo, para validar el modelo, se tendría que verificar y observar si (1) representa exactamente el rendimiento para valores de las variables de decisión que no fueron usados para estimar (1). Incluso si un modelo es válido para la situación actual, debemos estar conscientes de no aplicarlo a ciegas. Por ejemplo, si el gobierno impone nuevas restricciones a Wozac, entonces se tendría que añadir nuevas restricciones al modelo, con lo cual podría cambiar el rendimiento del proceso [y la ecuación (1)].

Paso 5: Seleccionar una opción adecuada El investigador de operaciones, dado un modelo y un conjunto de opciones, selecciona ahora la opción que cumple mejor con los objetivos de la empresa. (¡Puede haber más de una!). Por ejemplo, nuestro modelo permite determinar que el rendimiento se maximiza con $V = 5$, $P = 200$, $T = 100$, $A = 0.294$, $B = 0$, $C = 0.706$ y $z = 183.38$.

Paso 6: Presentar los resultados y la conclusión del estudio a la empresa Aquí, el investigador de operaciones presenta el modelo y las recomendaciones surgidas del paso 5 a la persona o al grupo que toma las decisiones. En algunas situaciones, uno podría presentar varias opciones, y dejar que la empresa seleccione la que mejor cumple con sus necesidades. Después de presentar los resultados del estudio de investigación de operaciones, el analista podría encontrar que la empresa no aprueba la recomendación. Lo anterior podría ser el resultado de una definición incorrecta de los problemas de la empresa o del fracaso para hacer intervenir a quien toma las decisiones desde el inicio del proyecto. En este caso, el investigador de operaciones debe regresar al paso 1, 2 o 3.

Paso 7: Poner en marcha y evaluar las recomendaciones Si la empresa acepta el estudio, entonces el analista ayuda a poner en marcha las recomendaciones. Se debe monitorear (y actualizar de manera dinámica a medida que el entorno se modifique) en forma continua el sistema, para tener la certeza de que las recomendaciones permiten que la empresa cumpla con sus objetivos.

A continuación, se estudian tres aplicaciones exitosas de la ciencia de la administración. Se proporciona una descripción detallada (pero no cuantitativa) de cada una. El análisis de cada aplicación se liga con el proceso de construcción de modelos en siete pasos que se describió en la sección 1.2.

1.3 CITGO Petroleum

Klingman y col. (1987), aplicaron una variedad de técnicas de la ciencia de la administración a CITGO Petroleum. Mediante su trabajo, la compañía ahorró unos 70 millones de dólares por año. CITGO es una compañía que refina y comercializa petróleo; la compró *Southland Corporation* (los propietarios de las tiendas *7-Eleven*). Se tratan los dos aspectos de la investigación del equipo de CITGO:

1 Un modelo matemático para optimizar la operación de las refinerías de CITGO.

2 Un modelo matemático –sistema de abastecimiento, distribución y comercialización (ADC)– que se usó para elaborar un plan de 11 semanas para comercializar, distribuir y abastecer, que funcionara para toda la empresa.

Optimización de las operaciones de refinación

Paso 1: Klingman y col., querían minimizar el costo de operación de las refinerías de CITGO.

Paso 2: La refinería Lake Charles, de Louisiana, fue sometida a estrecha observación en un intento por estimar las relaciones clave, como:

1 Cuánto depende el costo de producción de cada uno de los productos de CITGO (lubricante para motores, aceite combustible número 2, turbosina, gasolina y varios lubricantes para motor mezclados) en los insumos usados para manufacturar cada producto.

2 Cantidad de energía necesaria para producir cada producto. Esto requiere la instalación de un sistema nuevo de medición.

3 El rendimiento asociado con cada combinación de insumos-producto. Por ejemplo, si un galón de aceite crudo rinde 0.52 galones de lubricante, entonces el rendimiento sería igual a 52 por ciento.

4 Para disminuir los costos de mantenimiento, la información se reunió a partir de inventarios de piezas y fallas de equipo. Para obtener datos precisos, se requirió la instalación de un sistema nuevo de administración de bases de datos y de un sistema integrado de información de mantenimiento. También se instaló un sistema de control de procesos, con el fin de monitorear con toda seguridad los insumos y recursos usados para elaborar cada producto.

Paso 3: Se ideó un modelo para optimizar las operaciones de las refinerías usando programación lineal. El modelo establece el método para minimizar los costos de combinar todos los insumos para manufacturar los productos deseados. El modelo contiene **restricciones** que aseguran que los insumos se mezclan de tal manera, que cada producto es de la calidad especificada. La combinación de restricciones se estudia en la sección 3.8. El modelo impide que se exceda la capacidad de la planta, y facilita a todas las refinerías llevar un inventario de cada producto final. Las secciones 3.10 y 4.12 tratan sobre las restricciones del inventario.

Paso 4: Se reunieron los insumos y productos de un mes en la refinería de Lake Charles, para validar el modelo, y dados los insumos reales en la refinería en dicho mes, el rendimiento real se comparó con el pronosticado por el modelo. Luego de cambios notables, el rendimiento pronosticado por el modelo estaba cercano al rendimiento real.

Paso 5: La aplicación de la programación lineal proporcionó diariamente una estrategia para administrar la refinería. Por ejemplo, el modelo podría producir, digamos, 400 000 galones de turbosina utilizando 300 000 galones de aceite crudo 1 y 200 000 galones del crudo 2.

Paso 6 y 7: Una vez que el control de la base de datos y del proceso estuvieron en su lugar, el modelo se usó para guiar día tras día las operaciones de las refinerías. CITGO estimó que los beneficios globales del sistema de las refinerías fueron mayores a los 50 millones de dólares por año.

El sistema de abastecimiento, distribución y comercialización (ADC)

Paso 1: CITGO deseaba un modelo matemático que se pudiera usar para tomar decisiones respecto a abastecimiento, distribución y comercialización, como

1 ¿Dónde se debía comprar el petróleo crudo?

2 ¿Dónde se debían vender los productos?

3 ¿Qué precios se debían pedir por los productos?

4 ¿Cuánto de cada producto se debía conservar en inventario?

El objetivo era, naturalmente, maximizar la utilidad de estas decisiones.

Paso 2: Se instaló una base de datos que seguía con atención ventas, inventario, comercio e intercambios de todos los productos refinados. Además, se usó un análisis de regresión (capítulo 24) para elaborar pronósticos para precios de mayoreo y demandas de mayoreo para todos los productos de CITGO.

Pasos 3 y 5: Se usó un modelo de flujo de redes de costo mínimo (MFRCM) (véase sección 7.4) para determinar una estrategia de 11 semanas de abastecimiento, comercialización y distribución. El modelo toma todas las decisiones que se mencionan en el paso 1. Correr un modelo característico de 3 000 ecuaciones y 15 000 variables de decisión, requiere sólo 30 segundos en una computadora IBM 4381.

Paso 4: Los módulos de predicción se evalúan en forma continua, para tener la seguridad de que dan predicciones exactas.

Pasos 6 y 7: Poner en marcha el ADC requirió varios cambios en la empresa. Se buscó un nuevo vicepresidente para que coordinara la operación del ADC y del modelo de programación lineal (PL) de las refinerías. Los departamentos de abastecimiento de productos y programación de productos, se combinaron para mejorar la comunicación y flujo de la información.

1.4 Horarios del Departamento de Policía de San Francisco

Taylor y Huxley (1989) elaboraron un sistema de horarios de las patrullas de la policía (SHPP). Todas las demarcaciones de la policía de San Francisco utilizan el SHPP para calendarizar a sus oficiales. Se estima que con este sistema, la policía de San Francisco ahorra más de 5 millones de dólares al año. Otras ciudades, como Virginia Beach, Virginia, y Richmond, California, también adoptaron dicho sistema. Enseguida se presenta la descripción del SHPP según el procedimiento de diseño de modelos en siete pasos.

Paso 1: El Departamento de Policía de San Francisco quería un método para programar a los oficiales de las patrullas en cada demarcación, que proporcionara rápidamente (en menos de una hora) un programa, y lo desplegara en forma gráfica. El programa debería determinar primero el personal necesario para cada hora de la semana. Por ejemplo, podrían necesitarse 38 policías entre 1 y 2 AM del domingo, pero se requerirían sólo 14 elementos de 4 a 5 AM del mismo día. Los oficiales deberían entonces ser programados para reducir al mínimo la suma, en cada hora de la semana, del déficit y excedente respecto a la cantidad necesaria de oficiales. Es decir, si se asignaran 20 policías al turno de la medianoche hasta las 8 AM del domingo, habría un déficit de $38 - 20 = 18$ oficiales desde la 1 a las 2 AM y un excedente de $20 - 14 = 6$ policías desde las 4 a las 5 AM. Un segundo criterio era minimizar el déficit máximo, porque un déficit de 10 elementos durante una hora, es más grave que un déficit de un policía durante 10 horas distintas. El Departamento de Policía también quería un sistema de horarios que los capitanes de la demarcación pudieran afinar fácilmente para generar la programación óptima.

Paso 2: El Departamento de Policía tenía un complejo sistema de despacho computarizado (DC) para seguir con atención todas las llamadas que solicitaban ayuda de la policía, tiempo de viaje de los oficiales, tiempo de respuesta, etc. Los administradores de dicho departamento tenían un porcentaje de tiempo estándar en que, según ellos, cada oficial debía estar ocupado. Mediante DC es fácil determinar la cantidad necesaria de trabajadores para cada hora. Por ejemplo, supóngase que un oficial de policía debe estar ocupado 80% del tiempo, y DC indica que 30.4 h de trabajo entran de 4 a 5 AM del domingo. Entonces se requieren 38 oficiales de 4 a 5 AM el domingo [0.8*(38) = 30.4 horas].

Paso 3: Se planteó un modelo de PL (véase el análisis de los modelos de programación en la sección 3.5). Como se estableció en el paso 1, el principal objetivo era minimizar la suma de déficit y excedentes por hora. Al principio, los programadores supusieron que los policías trabajaban ocho horas diarias en cinco días consecutivos (esto era prioridad para el SHPP) y que había tres cambios de turno (digamos, 6 AM, 2 PM y 10 PM). Las restricciones en el modelo del SHPP reflejaban la cantidad limitada de oficiales disponibles, y la relación entre la cantidad de policías que trabajaban cada cierta hora, y el déficit y excedentes para dicha hora. Luego SHPP generaría un horario que le indicaría al capitán de la demarcación cuántos oficiales deberían empezar a trabajar en cada turno. Por ejemplo, SHPP podría señalar que 20 policías deberían empezar a trabajar a las 6 AM del lunes (trabajarían de 6 AM a 2 PM de lunes a viernes) y 30 policías deberían iniciar sus labores a las 2 PM del sábado (trabajarían de 2 PM a 10 PM de sábado a miércoles). El hecho de que la cantidad de policías asignados a un turno debe ser un entero, dificultó más encontrar un horario óptimo. (Los problemas en los cuales las variables de decisión deben ser enteros, se tratan en el capítulo 9.)

Paso 4: Antes de poner en marcha el SHPP, el Departamento de Policía de San Francisco probó los horarios del SHPP contra los horarios elaborados en forma manual. El SHPP produjo una reducción de 50% tanto en los déficit como en los excedentes. Esto convenció al Departamento de Policía sobre la conveniencia de poner en marcha ese sistema.

Paso 5: Dados los tiempos de inicio para los turnos y el tipo de horario de trabajo [cuatro días consecutivos y 10 horas de trabajo por día (el horario de 4 por 10), o cinco días consecutivos por ocho horas de trabajo por día (horario de 5 por 8)], el SHPP fue capaz de generar un programa que minimizaba la suma de déficit y excedentes. Pero lo más importante es que este sistema se puede usar para experimentar con los cambios de turno y reglas de trabajo. Mediante SHPP, se determinó que si se utilizaban sólo tres turnos, entonces el turno de 5 por 8 era superior al de 4 por 10. Pero si se establecían cinco cambios de turno, entonces un horario de 4 por 10 era mejor. Este hallazgo fue determinante, porque los oficiales de la policía habían querido cambiar a un horario de 4 por 10 durante años. La ciudad se había resistido al horario de 4 por 10, porque parecía que se reducía la productividad. El SHPP demostró que los horarios de 4 por 10 no reducen la productividad. Después de la introducción del SHPP, el Departamento de Policía de San Francisco estableció los horarios de 4 por 10 y *¡mejoró la productividad!* El SHPP también permitió experimentar con una mezcla de patrullas con uno y dos policías.

Pasos 6 y 7: Se estima que el SHPP generó 170 000 horas productivas por año adicionales, por lo que la ciudad de San Francisco ahorró 5.2 millones de dólares al año. El 96% de todos los trabajadores prefirió los horarios generados por el SHPP que los elaborados en forma manual. Además, el SHPP permitió que el Departamento de Policía efectuara cambios estratégicos (como el de un horario de 4 por 10), lo cual hizo que los policías se sintieran más contentos e incrementaran su productividad. Luego de que se puso en marcha el SHPP, mejoraron en 20% los tiempos de respuesta a las llamadas.

Una de las principales razones para el éxito de SHPP, fue que el sistema permitió a los capitanes de la demarcación afinar el horario generado por computadora, y obtener uno nuevo en menos de un minuto. Por ejemplo, los comandantes de la demarcación podrían añadir o borrar oficiales de policía con toda facilidad, agregar o eliminar turnos, y ver de inmediato cómo estos cambios modificaban el horario maestro.

1.5 GE Capital

GE Capital ofrece el servicio de tarjetas de crédito a 50 millones de cuentas. El balance vigente total promedio excede los 12 000 millones de dólares. GE Capital, dirigido por Makuch y col. (1989), elaboró el sistema *PAYMENT* para reducir las cuentas vencidas y el costo de cobrarlas.

Paso 1: GE Capital tiene, en cualquier momento, más de 1 000 millones de dólares en cuentas vencidas. La compañía gasta 100 millones de dólares al año por el proceso de dichas cuentas. Todos los días, los empleados se comunican mediante cartas, mensajes o llamadas telefónicas directas, con más de 200 000 tarjeta-habientes con crédito vencido. El objetivo de la empresa era reducir las cuentas vencidas y el costo de procesarlas. Para hacerlo, GE Capital requería dar con un método para asignar escasos recursos de trabajo a las cuentas vencidas. Por ejemplo, *PAYMENT* determina qué cuentas vencidas reciben llamadas telefónicas directas y con cuáles no se tiene contacto.

Paso 2: La clave para modelar cuentas vencidas, es el concepto de una **matriz de movimiento de deudas en mora (MMDM)**. Esta matriz determina qué tanto de la probabilidad del pago de una cuenta vencida durante el mes presente depende de los siguientes factores: Tamaño del saldo insoluto (<300 dólares o ≥ 300 dólares), acción tomada (ninguna acción, llamadas telefónicas directas, mensajes grabados, cartas) y un puntaje de cumplimiento (alto, medio, bajo). A medida que es más alto el puntaje de cumplimiento relacionado con una cuenta vencida, es más probable que se pueda cobrar la cuenta. En la tabla 1 se proporcionan las probabilidades de una cuenta de 250 dólares que tiene dos meses de demora, su puntaje de cumplimiento es alto y se contactó mediante un mensaje telefónico.

TABLA 1
Entradas de la muestra en la MMDM

Evento	Probabilidad
Cuenta pagada por completo	0.30
Paga un mes	0.40
No paga nada	0.30

Como GE Capital tiene millones de cuentas vencidas, hay datos suficientes para estimar exactamente la matriz. Por ejemplo, supóngase que hubiera 10 000 cuentas que no han pagado en dos meses, cuyo saldo está por abajo de 300 dólares, que tienen un alto puntaje de cumplimiento y fueron contactadas mediante mensajes por teléfono. Si 3 000 de estas cuentas fueran saldadas por completo en el presente mes, entonces se podría estimar que la probabilidad de que una cuenta sea saldada por completo durante el presente mes es 3 000/10 000 = 0.30.

Paso 3: GE Capital elaboró un modelo de programación lineal. La función objetivo para el modelo *PAYMENT* era maximizar la cantidad de cuentas vencidas que se esperaba cobrar durante los siguientes seis meses. Las variables de decisión representaban las fracciones de cada tipo de cuenta vencida (las cuentas se clasificaron en balance de pagos, puntaje de cumplimiento y meses vencidos) que experimentaron todo tipo de contacto (ninguna acción, llamadas telefónicas directas, mensajes telefónicos grabados o cartas). Las restricciones en el modelo *PAYMENT* aseguran que los recursos disponibles no deben ser usados en exceso. Las restricciones relacionan también la cantidad de cada tipo de cuentas vencidas existente en, por ejemplo, enero, con el número de cuentas vencidas de cada tipo presentes durante el mes siguiente (febrero). Este aspecto **dinámico** del modelo *PAYMENT,* es decisivo en la obtención de resultados satisfactorios. Sin este aspecto, el modelo sólo señalaría las cuentas que se pueden cobrar con facilidad cada mes. Esto daría como resultado pocos cobros en los meses siguientes.

Paso 4: *PAYMENT* se sustentó sobre un conjunto de inversiones de 62 millones de dólares para una tienda de un solo departamento. Los gerentes de GE Capital aplicaron sus propias estrategias para hacerse de recursos (llamadas en forma colectiva *CHAMPION*). Las cuentas vencidas de la tienda se asignaron en forma aleatoria a *CHAMPION* y a *PAYMENT*. Éste usó más llamadas telefónicas directas y "ninguna", sólo la estrategia *CHAMPION*. Por medio de *PAYMENT* también se cobraron 180 000 dólares más por mes que con cualquiera de las estrategias de *CHAMPION*, una mejora de 5 a 7%. Obsérvese que usar más de la estrategia "ninguna acción", ocasiona ciertamente ¡un incremento a largo tiempo en el buen nombre del cliente!

Paso 5: Como se explicó en el paso 3, para cada tipo de cuenta, *PAYMENT* indica a los gerentes de crédito la fracción que debe recibir cada tipo de contacto. Por ejemplo, para las cuentas vencidas de tres meses con un pequeño saldo insoluto (< 300 dólares) y alto puntaje de cumplimiento *PAYMENT* podría dictar 30% de ninguna acción, 20% de cartas, 30% de mensajes telefónicos y 20% de llamadas telefónicas directas.

Pasos 6 y 7: *PAYMENT* se aplicó luego a 18 millones de cuentas de la cartera de 4 600 millones de dólares de la tienda de departamentos Montgomery-Ward. Si se comparan los resultados de las cantidades cobradas para el mismo periodo del año anterior, se determinó que *PAYMENT* incrementó la cantidad cobrada en 1.6 millones de dólares al mes (más de 19 millones de dólares al año). En realidad es una estimación conservadora de los beneficios obtenidos con *PAYMENT,* porque éste se aplicó primero a la cartera de Montgomery-Ward durante la parte más intensa de una recesión –y una recesión dificulta aún más el cobro de cuentas vencidas.

GE Capital estima en forma global que *PAYMENT* incrementó las cantidades cobradas en 37 millones de dólares por año, y usó menos recursos que las estrategias anteriores.

BIBLIOGRAFÍA:

Klingman, D., N. Phillips, D. Steiger y W. Young, "The Successful Deployment of Management Science Throughout Citgo Corporation," *Interfaces* 17 (1987, No. 1):4-25.

Makuch, W., J. Dodge, J. Ecker, D. Granfors y G. Hahn, "Managing Consumer Credit Delinquency in the US Economy: A Multi-Billion Dollar Management Science Application," *Interfaces* 22 (1992, no. 1):90-109.

Taylor, P. y S. Huxley, "A Break from Tradition for the San Francisco Police: Patrol Officer Scheduling Using an Optimization-Based Decision Support Tool," *Interfaces* 19 (1989, No. 1):4-24.

2

Álgebra lineal básica

En este capítulo se tratan temas de álgebra lineal necesarios para el resto del libro. Primero se analizan los elementos del álgebra lineal: matrices y vectores. Luego se aplican los conocimientos de matrices y vectores para desarrollar un procedimiento sistemático (el método de Gauss-Jordan) para resolver ecuaciones lineales, las que más tarde se aplicarán para invertir matrices. El capítulo termina con una introducción a los determinantes.

El material que se estudia en este capítulo se utiliza para el estudio de la programación lineal y no lineal.

2.1 Matrices y vectores

Matrices

DEFINICIÓN ■ Una **matriz** es cualquier arreglo rectangular de números. ■

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [2 \quad 1]$$

son matrices.

Si una matriz A tiene m renglones y n columnas, se le llama matriz de $m \times n$. Se denomina a $m \times n$ como **orden** de la matriz. Una matriz típica $m \times n$ se podría escribir como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN ■ El número en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna se llama **ij-ésimo elemento** de A y se escribe y se representa como a_{ij}. ■

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

entonces, $a_{11} = 1$, $a_{23} = 6$ y $a_{31} = 7$.

A veces se usará la notación $A = [a_{ij}]$ para indicar que A es la matriz cuyo ij-ésimo elemento es a_{ij}.

DEFINICIÓN ■ Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son **iguales** si y sólo si A y B son del mismo orden, para toda i y j, $a_{ij} = b_{ij}$. ■

Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix}$$

entonces, $A = B$ si y sólo si $x = 1$, $y = 2$, $w = 3$ y $z = 4$.

Vectores

Cualquier matriz con sólo una columna (es decir, cualquier matriz $m \times 1$) se considera como un **vector columna.** La cantidad de renglones en un vector columna es la **dimensión** del vector columna. Entonces,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

podría considerarse como una matriz de 2×1 o un vector columna bidimensional. Mediante R^m se denotará el conjunto de todos los vectores columna m-dimensionales.

Todo lo anterior se puede aplicar a cualquier vector con sólo un renglón (una matriz de $1 \times n$) como un **vector renglón.** La dimensión de un vector renglón es el número de columnas en el vector. Por consiguiente, $[9 \quad 2 \quad 3]$ se podría considerar como una matriz 1×3, o bien, un vector renglón tridimensional. Los vectores aparecen en negritas: por ejemplo, vector $\mathbf{v}$, en este libro. Un vector m-dimensional (ya sea renglón o columna) en el cual todos los elementos son iguales a cero, se llama **vector cero** (se escribe $\mathbf{0}$). Entonces,

$$[0 \quad 0] \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

son vectores cero bidimensionales.

Cualquier vector m-dimensional corresponde a un segmento de recta dirigido en el plano m-dimensional. Por ejemplo, en el plano bidimensional, el vector

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

corresponde al segmento de recta que une el punto

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con el punto

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Los segmentos de recta dirigidos que corresponden a

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

se trazan en la figura 1.

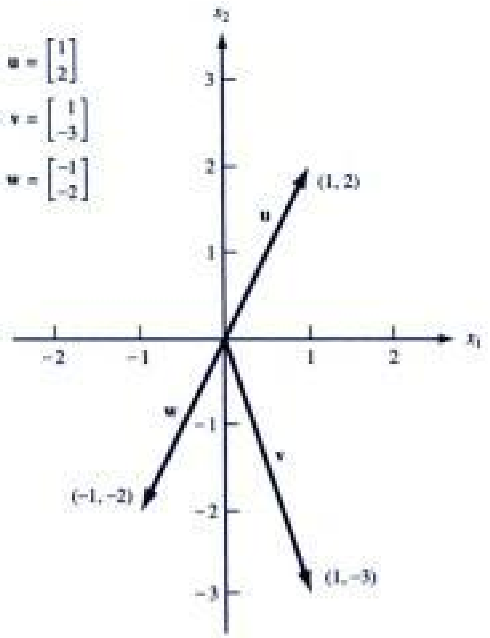


FIGURA 1
Los vectores son segmentos de recta dirigidos

Producto escalar de dos vectores

Un resultado importante de multiplicar dos vectores es el *producto escalar*. Para definir el producto escalar de dos vectores, supóngase que se tiene un vector renglón $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$ y un vector columna

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

de la misma dimensión. El **producto escalar** de **u** y **v** (escríbase $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$) es el número $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

Para que el producto escalar de dos vectores esté definido, el primer vector debe ser un vector renglón y el segundo vector debe ser un vector columna. Por ejemplo, si

$$\mathbf{u} = [1 \quad 2 \quad 3] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

entonces, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(2) + 2(1) + 3(2) = 10$. De acuerdo con estas reglas para calcular un producto escalar, si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = [2 \quad 3]$$

entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ no está definido. También, si

$$\mathbf{u} = [1 \quad 2 \quad 3] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

entonces, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ no está definido porque los vectores son de dos dimensiones distintas.

Obsérvese que los dos vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es igual a cero. Por tanto, los vectores $[1 \quad -1]$ y $[1 \quad 1]$ son perpendiculares.

Se nota que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \cos \theta$, donde $\|\mathbf{u}\|$ es la longitud del vector **u** y θ es el ángulo entre los vectores **u** y **v**.

Operaciones con matrices

A continuación se explican las operaciones aritméticas con matrices que se usan en el resto del libro.

Múltiplo escalar de una matriz

Dada cualquier matriz A y cualquier número c (a veces a un *número* se le llama *escalar*), la matriz cA se obtiene a partir de la matriz A al multiplicar cada elemento de A por c. Por ejemplo,

$$\text{si} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad 3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $c = -1$, la multiplicación escalar de la matriz A se escribe a veces como $-A$.

Suma de dos matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices del mismo orden (digamos, $m \times n$). Entonces, la matriz $C = A + B$ se define como la matriz $m \times n$ cuyo ij-ésimo elemento es $a_{ij} + b_{ij}$. Entonces, para obtener la suma de las dos matrices A y B se suman los elementos correspondientes de A y B. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-2 & 3-3 \\ 0+2 & -1+1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta regla para la suma de matrices se puede usar para sumar vectores de la misma dimensión. Por ejemplo, si $\mathbf{u} = [1 \quad 2]$ y $\mathbf{v} = [2 \quad 1]$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1+2 \quad 2+1] = [3 \quad 3]$. Los vectores se podrían sumar en forma geométrica por medio de la ley del paralelogramo (véase figura 2).

Se puede utilizar la multiplicación de escalares y la suma de matrices para definir el concepto de un segmento de recta. Una mirada a la figura 1 debe convencer al lector de que cualquier punto u en el plano m-dimensional corresponde al vector $\mathbf{u}$ m-dimensional que se forma al unir el origen con el punto u. Para dos puntos cualquiera u y v en el plano m-dimensional el **segmento de recta** que une u y v (llamado segmento de recta uv) es el conjunto de todos los puntos en el plano m-dimensional que corresponde a los vectores $c\mathbf{u} + (1 - c)\mathbf{v}$, donde $0 \leq c \leq 1$ (figura 3). Por ejemplo, si $u = (1, 2)$ y $v = (2, 1)$,

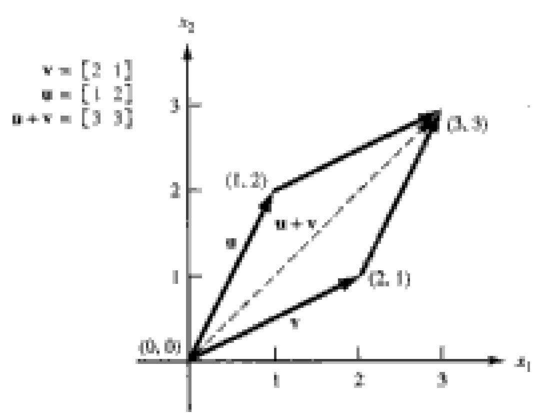


FIGURA 2
Suma de vectores

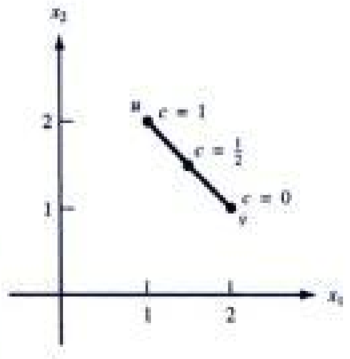


FIGURA 3
Segmento de recta que une $u = (1, 2)$ y $v = (2, 1)$

entonces el segmento de recta uv consiste en los puntos que corresponden a los vectores $c[1 \quad 2] + (1 - c)[2 \quad 1] = [2 - c \quad 1 + c]$, donde $0 \le c \le 1$. Para $c = 0$ y $c = 1$, se obtienen los puntos finales del segmento de recta uv; para $c = \frac{1}{2}$, se obtiene el punto medio $(0.5\mathbf{u} + 0.5\mathbf{v})$ del segmento de recta uv.

Mediante la ley del paralelogramo, el segmento de recta uv podría ser considerado también como los puntos correspondientes a los vectores $\mathbf{u} + c(\mathbf{v} - \mathbf{u})$, donde $0 \le c \le 1$ (figura 4). Obsérvese que para $c = 0$, se obtiene el vector $\mathbf{u}$ (que corresponde al punto u), y para $c = 1$, se obtiene el vector $\mathbf{v}$ (que corresponde al punto v).

La traspuesta de una matriz

Dada cualquier matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

la **traspuesta** de A (escríbase A^T) es la matriz $n \times m$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

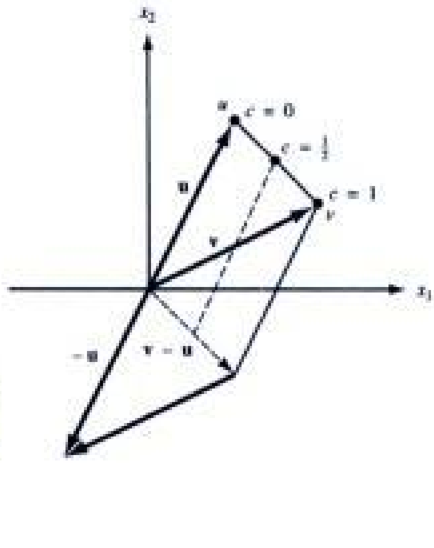


FIGURA 4
Representación del segmento de recta uv

Por consiguiente, A^T se obtiene a partir de A al hacer el renglón 1 de A la columna 1 de A^T, el renglón 2 de A la columna 2 de A^T, y así sucesivamente. Por ejemplo,

$$\text{si} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que $(A^T)^T = A$. Sea $B = [1 \quad 2]$; entonces

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad (B^T)^T = [1 \quad 2] = B$$

Como se observa mediante estos dos ejemplos, para cualquier matriz A, $(A^T)^T = A$.

Multiplicación de matrices

Dadas dos matrices A y B, la matriz producto de A y B (escríbase AB) está definido si y sólo si

$$\text{Número de columnas en } A = \text{número de renglones en } B \tag{1}$$

Por el momento, supóngase que para algún entero positivo r, A tiene r columnas y B tiene r renglones. Entonces, para m y n, A es una matriz $m \times r$ y B es una matriz $r \times n$.

DEFINICIÓN ■ La **matriz producto** $C = AB$ de A y B es la matriz C $m \times n$ cuyo ij-ésimo elemento se determina como sigue:

ij-ésimo elemento de C = producto escalar del renglón i de A × columna j de B ■ (2)

Si se cumple la ecuación 1, entonces cada renglón de A y cada columna de B tienen el mismo número de elementos. Además, si se cumple (1), entonces el producto escalar en la ecuación (2) queda definido. La matriz producto $C = AB$ tiene el mismo número de renglones que A y el mismo número de columnas que B.

EJEMPLO 1 **Multiplicación de matrices**

Calcule $C = AB$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Como A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×2, AB está definida y C es una matriz 2×2. De la ecuación (2),

$$c_{11} = [1 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1(1) + 1(2) + 2(1) = 5$$

$$c_{12} = [1 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1(1) + 1(3) + 2(2) = 8$$

$$c_{21} = [2 \quad 1 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(1) + 1(2) + 3(1) = 7$$

$$c_{22} = [2 \quad 1 \quad 3]\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} = 2(1) + 1(3) + 3(2) = 11$$

$$C = AB = \begin{bmatrix}5 & 8\\7 & 11\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 Vector columna por vector renglón

Determine AB para

$$A = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = [1 \quad 2]$$

Solución Como A tiene una columna y B es de un renglón, $C = AB$ sí existe. De la ecuación (2) se sabe que C es una matriz 2×2 con

$$\begin{aligned} c_{11} &= 3(1) = 3 & c_{21} &= 4(1) = 4 \\ c_{12} &= 3(2) = 6 & c_{22} &= 4(2) = 8 \end{aligned}$$

Entonces,

$$C = \begin{bmatrix}3 & 6\\4 & 8\end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3 Vector renglón por vector columna

Calcule $D = BA$ para A y B del ejemplo 2.

Solución En este caso, D es una matriz 1×1 (o un escalar). De la ecuación (2),

$$d_{11} = [1 \quad 2]\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = 1(3) + 2(4) = 11$$

Por consiguiente, $D = [11]$. En este ejemplo, la multiplicación de matrices es equivalente a una multiplicación escalar de un vector de un renglón y un vector de una columna.

Recuérdese que si se multiplican dos números reales a y b, entonces $ab = ba$. Ésta es la *propiedad conmutativa de la multiplicación*. Por medio de los ejemplos 2 y 3, se ilustra que en lo que se refiere a la multiplicación de matrices podría ser que $AB \neq BA$. La multiplicación de matrices no es necesariamente conmutativa. (En algunos casos sí puede ser $AB = BA$.)

EJEMPLO 4 Producto de matrices indefinido

Demuestre que AB no está definido si

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$

Solución No está definido porque A tiene dos columnas y B es de tres renglones. Por tanto, la ecuación (1) no se cumple.

TABLA 1
Galones de crudo necesarios para producir un galón de gasolina

Crudo	Premium sin plomo	Regular sin plomo	Regular con plomo
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

Muchos cálculos que se requieren por lo regular en investigación de operaciones (y otras ramas de las matemáticas) se expresan en forma concisa por medio de multiplicación de matrices. Con el fin de ilustrar lo anterior, supóngase que una compañía petrolera fabrica o produce tres tipos de gasolina: premium sin plomo, regular sin plomo y regular con plomo. Estas gasolinas se producen al mezclar dos tipos de petróleo crudo: petróleo crudo 1 y petróleo crudo 2. La cantidad de galones de petróleo crudo requerido para elaborar un galón de gasolina se da en la tabla 1.

A partir de esta información, es posible determinar la cantidad de cada tipo de petróleo crudo necesario para obtener una cantidad dada de gasolina. Por ejemplo, si la compañía desea producir 10 galones de premium sin plomo, seis galones de regular sin plomo y cinco galones de regular con plomo, entonces, la cantidad necesaria de petróleo crudo de la empresa sería

$$\text{Petróleo crudo 1 necesario} = (\tfrac{3}{4})(10) + (\tfrac{2}{3})(6) + (\tfrac{1}{4})5 = 12.75 \text{ galones}$$
$$\text{Petróleo crudo 2 necesario} = (\tfrac{1}{4})(10) + (\tfrac{1}{3})(6) + (\tfrac{3}{4})5 = 8.25 \text{ galones}$$

En general se define

$$\begin{aligned} p_U &= \text{galones producidos de premium sin plomo} \\ r_U &= \text{galones producidos de regular sin plomo} \\ r_L &= \text{galones producidos de regular con plomo} \\ c_1 &= \text{galones requeridos de petróleo crudo 1} \\ c_2 &= \text{galones requeridos de petróleo crudo 2} \end{aligned}$$

Entonces, la relación entre estas variables se podría expresar mediante

$$\begin{aligned} c_1 &= (\tfrac{3}{4})p_U + (\tfrac{2}{3})r_U + (\tfrac{1}{4})r_L \\ c_2 &= (\tfrac{1}{4})p_U + (\tfrac{1}{3})r_U + (\tfrac{3}{4})r_L \end{aligned}$$

Mediante la multiplicación de matrices, estas relaciones se podrían expresar de la manera siguiente

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_U \\ r_U \\ r_L \end{bmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices

Para terminar esta sección, se tratan algunas propiedades importantes de la multiplicación de matrices. En los temas siguientes se supone que todos los productos de las matrices están definidos.

1 El renglón i de AB = (renglón i de A)B. Para ilustrar esta propiedad, sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces, el renglón 2 de la matriz AB 2×2 es igual a

$$[2 \quad 1 \quad 3]\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} = [7 \quad 11]$$

Esta respuesta está de acuerdo con el ejemplo 1.

2 La columna j de $AB = A$(columna j de B). Entonces, para A y B dadas, la primera columna de AB es

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$$

Las propiedades 1 y 2 son útiles cuando se requiere calcular sólo *parte* de la matriz AB.

3 La multiplicación de matrices es asociativa. Es decir, $A(BC) = (AB)C$. Para ilustrarlo, sean

$$A = [1 \quad 2], \qquad B = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

Entonces $AB = [10 \quad 13]$ y $(AB)C = 10(2) + 13(1) = [33]$.

Por otro lado,

$$BC = \begin{bmatrix}7\\ 13\end{bmatrix}$$

por lo que $A(BC) = 1(7) + 2(13) = [33]$. En este caso, $A(BC) = (AB)C$ se cumple.

4 La multiplicación de matrices es distributiva. Es decir, $A(B + C) = AB + AC$ y $(B + C)D = BD + CD$.

Multiplicación de matrices con Excel

Mmult.xls

Mediante la función MMULT de Excel es fácil multiplicar matrices. Con el propósito de ilustrarlo, se usará Excel para encontrar el producto AB de matrices que se determinó en el ejemplo 1 (véase figura 5 y el archivo Mmult.xls). Se procede como sigue:

Paso 1 Ingresar A y B en D2:F3 y D5:E7, respectivamente.

Paso 2 Seleccionar el intervalo (D9:E10) en el cual se calculará el producto AB.

Paso 3 En la esquina superior izquierda (D9) del intervalo seleccionado escriba la fórmula

= MMULT(D2:F3,D5:E7)

Luego presione **Control Shift Enter** (no sólo Enter), y la matriz producto será calculada. Téngase en cuenta que MMULT es una función de *arreglo*, y no una función ordinaria de hoja de cálculo. Esto explica por qué se debe preseleccionar el intervalo para AB y usar Control Shift Enter.

	A	B	C	D	E	F
1	Multiplicación de matrices					
2				1	1	2
3			A	2	1	3
4						
5			B	1	1	
6				2	3	
7				1	2	
8						
9				5	8	
10			C	7	11	
11						

FIGURA 5

PROBLEMAS

Grupo A

1 Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determinar:

a $-A$ **b** $3A$ **c** $A + 2B$
d A^T **e** B^T **f** AB
g BA

2 Sólo hay tres marcas de cerveza disponibles (cerveza 1, cerveza 2 y cerveza 3) para la venta en Metrópolis. De cuando en cuando, las personas prueban una u otra de estas marcas. Supóngase que al principio de cada mes, las personas cambian la cerveza que estaban tomando según las reglas siguientes:

30% de las personas que prefería la cerveza 1 cambia a la 2.
20% de las personas que prefería la cerveza 1 cambia a la 3.
30% de las personas que prefería la cerveza 2 cambia a la 3.
30% de las personas que prefería la cerveza 3 cambia a la 2.
10% de las personas que prefería la cerveza 3 cambia a la 1.

Para $i = 1, 2, 3$, sea x_i el número de quienes prefieren la cerveza i al principio de este mes, y y_i el número de las personas que prefieren cerveza i al principio del mes siguiente. Por medio de la multiplicación de matrices, relacione lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Grupo B

3 Demuestre que la multiplicación de matrices es asociativa.

4 Demuestre que para cualquier par de matrices A y B, $(AB)^T = B^TA^T$.

5 Una matriz A $n \times n$ es simétrica si $A = A^T$.

a Demuestre que para cualquier matriz $n \times n$, AA^T es una matriz simétrica.

b Demuestre que para cualquier matriz A de $n \times n$, $(A + A^T)$ es una matriz simétrica.

6 Suponga que tanto A como B son matrices $n \times n$. Demuestre que al calcular el producto AB de las matrices se requiere n^3 multiplicaciones y $n^3 - n^2$ sumas.

7 La **traza de una matriz** es la suma de sus elementos diagonales.

a Para cualquier par de matrices A y B, demuestre que la traza $(A + B)$ = traza A + traza B.

b Para cualquier par de matrices A y B cuyos productos AB y BA están definidos, demuestre que la traza AB = traza BA.

2.2 Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Considérese un sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{3}$$

En la ecuación (3), $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se denominan **variables**, o incógnitas, y las a_{ij} y b_i son las **constantes.** Un conjunto de ecuaciones como (3) se llama sistema lineal de m ecuaciones y n variables.

DEFINICIÓN ■ Una **solución** para un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas es un conjunto de valores para las incógnitas que satisface las m ecuaciones del sistema. ■

Para poder entender la programación lineal se requiere saber mucho acerca de las propiedades de las soluciones para sistemas de ecuaciones lineales. Con esto en mente, se tiene que dedicar mucho esfuerzo para estudiar dichos sistemas.

Una solución posible para la ecuación (3) se denota mediante un vector columna $\mathbf{x}$ n-dimensional, en el cual el i-ésimo elemento de $\mathbf{x}$ es el valor de x_i. El ejemplo siguiente ilustra el concepto de solución para un sistema lineal.

EJEMPLO 5 Solución para un sistema lineal

Demuestre que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es una solución para el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

y que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

no es una solución para el sistema lineal (4).

Solución Para demostrar que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es una solución a las ecuaciones (4), se sustituye $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ en ambas ecuaciones y se comprueba que se cumplen: $1 + 2(2) = 5$ y $2(1) - 2 = 0$.

El vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

no es la solución para (4) porque $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$ no satisfacen $2x_1 - x_2 = 0$.

Por medio del uso de matrices, se simplifica en gran medida el planteamiento y la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Para mostrar cómo las matrices se usan para representar en forma compacta el sistema de ecuaciones (3), sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Luego (3) puede escribirse como:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5}$$

Observe que ambos miembros de la ecuación (5) son matrices de $m \times 1$ (o bien, vectores columna $m \times 1$). Para que la matriz $A\mathbf{x}$ sea igual a la matriz $\mathbf{b}$ (o para que el vector $A\mathbf{x}$ sea igual al vector $\mathbf{b}$), sus elementos correspondientes deben ser iguales. El primer elemento de $A\mathbf{x}$ es el producto escalar del renglón 1 de A por $\mathbf{x}$. Esto se podría escribir como

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

Esto debe ser igual al primer elemento de $\mathbf{b}$ (que es b_1). Por tanto, (5) implica que $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$. Ésta es la primera ecuación de (3). De igual manera, (5) implica que el producto escalar del renglón i de A por $\mathbf{x}$ debe ser igual a b_i, y ésta es justo la i-ésima ecuación de (3). Este análisis demuestra que (3) y (5) son dos maneras distintas de escribir el mismo sistema lineal. A la ecuación (5) se le llama **representación matricial** de (3). Por ejemplo, la representación matricial de (4) es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Algunas veces se abrevia (5) mediante

$$A|\mathbf{b} \tag{6}$$

Si A es una matriz $m \times n$, se supone que las variables en (6) son $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces, (6) es otra representación más de (3). Por ejemplo, la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

representa el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

PROBLEMAS

Grupo A

1 Utilice matrices para representar el sistema siguiente de ecuaciones de dos formas distintas:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

2.3 Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan

En esta sección se trata un método eficiente (el método de Gauss-Jordan) para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Por medio de este método, se muestra que cualquier sistema de ecuaciones lineales debe estar en uno de los siguientes tres casos:

Caso 1 El sistema no tiene solución.

Caso 2 El sistema tiene una sola solución.

Caso 3 El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

El método de Gauss-Jordan es también importante porque muchas de las operaciones que se utilizan en el método, se usan cuando se resuelven problemas de programación lineal mediante el algoritmo simplex (véase capítulo 4).

Operaciones elementales con los renglones

Antes de estudiar el método de Gauss-Jordan, es necesario definir el concepto de una **operación elemental con los renglones** (OER). Una OER transforma una matriz específica A en una matriz nueva A' por medio de una de las siguientes operaciones.

OER tipo 1

La matriz A' se obtiene al multiplicar cualquier renglón de A por un escalar diferente de cero. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

entonces una OER tipo 1 que multiplica el renglón 2 de A por 3 daría

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 15 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

OER tipo 2

Para empezar se multiplica cualquier renglón de A (p. ej., el renglón i) por un escalar distinto de cero c. Para alguna $j \neq i$, sea el renglón j *de* $A' = c$(renglón i de A) + renglón j de A, y sean los otros renglones de A' los mismos que los de A.

Por ejemplo, se podría multiplicar el renglón 2 de A por 4 y reemplazar el renglón 3 de A por 4(renglón 2 de A) + renglón 3 de A. Entonces, el renglón 3 de A' se vuelve

$$4\,[1 \quad 3 \quad 5 \quad 6] + [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3] = [4 \quad 13 \quad 22 \quad 27]$$

y

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 22 & 27 \end{bmatrix}$$

OER tipo 3

Intercambia dos renglones cualquiera de A. Por ejemplo, si se desea intercambiar los renglones 1 y 3 de A, se obtiene

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Las OER tipo 1 y tipo 2 formalizan las operaciones usadas para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Para solucionar el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 7 \end{aligned} \tag{7}$$

se podría proceder como sigue. Primero se reemplaza la segunda ecuación en (7) por -2(primera ecuación en (7)) + segunda ecuación en (7). Así se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_2 &= 3 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Luego se multiplica la segunda ecuación en (7.1) por $\frac{1}{2}$, con lo cual se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Por último, se reemplaza la primera ecuación en (7.2) por -1[segunda ecuación en (7.2)] + primera ecuación en (7.2). Así se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= \tfrac{1}{2} \\ x_2 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad (7.3)$$

El sistema (7.3) tiene una solución única $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$. Los sistemas (7), (7.1), (7.2) y (7.3) son *equivalentes* porque tienen el mismo conjunto de soluciones. Esto quiere decir que $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$ es también la única solución para el sistema original (7).

Si se ve a (7) en la forma de matriz aumentada ($A|\mathbf{b}$), se observa que los pasos utilizados para solucionar (7) se podrían considerar como OER tipo 1 y tipo 2 aplicadas a $A|\mathbf{b}$. Empecemos con la versión de matriz aumentada de (7):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \qquad (7')$$

Ahora se ejecuta una OER tipo 2 reemplazando el renglón 2 de (7′) por −2(renglón 1 de (7′)) + renglón 2 de (7′). El resultado es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \qquad (7.1')$$

lo cual corresponde a (7.1). Enseguida se multiplica el renglón 2 de (7.1′) por $\frac{1}{2}$ (OER tipo 1), con lo que se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \qquad (7.2')$$

que corresponde a (7.2). Por último se efectúa una OER tipo 2 al reemplazar el renglón 1 de (7.2′) por −1(renglón 2 de (7.2′)) + renglón 1 de (7.2′). El resultado es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \qquad (7.3')$$

lo cual corresponde a (7.3). Al transformar (7.3′) de nuevo en un sistema lineal, se obtiene el sistema $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$, lo cual es idéntico a (7.3).

Resolución mediante el método de Gauss-Jordan

El análisis en la sección anterior indica que, si la matriz $A'|\mathbf{b}'$ se obtiene a partir de $A|\mathbf{b}$ por medio de una OER, los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ son equivalentes. Por consiguiente, cualquier sucesión de OER ejecutada en la matriz aumentada $A|\mathbf{b}$ correspondiente al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ generará un sistema lineal equivalente.

El método de Gauss-Jordan resuelve un sistema de ecuaciones lineales utilizando OER de modo sistemático. El método se ilustra mediante la resolución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad (8)$$

La representación de la matriz aumentada es

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right] \qquad (8')$$

Supóngase que mediante la ejecución de una sucesión de OER en (8′) es posible transformar (8′) en

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{9'}$$

Se observa que el resultado conseguido cuando se ejecuta una OER en un sistema de ecuaciones también se logra mediante la multiplicación de ambos miembros de la representación matricial del sistema de ecuaciones por una matriz específica. Así se explica por qué las OER no modifican el conjunto de soluciones para un sistema de ecuaciones.

La matriz (9′) corresponde al sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{9}$$

El sistema (9) tiene la solución única $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Como (9′) se obtuvo a partir de (8′) mediante una sucesión de OER, entonces se sabe que (8) y (9) son sistemas equivalentes lineales. Por consiguiente, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ también debe ser solución única de (8). Enseguida se ilustra cómo usar las OER para transformar un sistema relativamente complicado como (8) en un sistema relativamente simple como (9). Ésta es la esencia del método de Gauss-Jordan.

Se empieza por usar las OER para transformar la primera columna de (8′) en

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego se usan las OER para transformar la segunda columna de la matriz resultante en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por último se aplican las OER para transformar la tercera columna de la matriz resultante en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como un resultado final se obtiene (9′). Ahora se aplica el método de Gauss-Jordan para resolver (8). Para empezar se usa una OER tipo 1 para cambiar el elemento de (8′) en el primer renglón y primera columna en un 1. Luego se suman múltiplos del renglón 1 al renglón 2 y luego al renglón 3 (éstas son OER tipo 2). El objeto de estas OER tipo 2 es poner ceros en el resto de la primera columna. La sucesión siguiente de OER logra los objetivos.

Paso 1 Multiplique el renglón 1 de (8′) por $\frac{1}{2}$. Esta OER tipo 1 genera

$$A_1|\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Paso 2 Reemplace el renglón 2 de $A_1|\mathbf{b}_1$ por -2(renglón 1 de $A_1|\mathbf{b}_1$) + renglón 2 de $A_1|\mathbf{b}_1$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_2|\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

Paso 3 Reemplace el renglón 3 de $A_2|\mathbf{b}_2$ por -1(renglón 1 de $A_2|\mathbf{b}_2$ + renglón 3 de $A_2|\mathbf{b}_2$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_3|\mathbf{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

La primera columna de (8′) se transformó en

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mediante este procedimiento, se tiene la seguridad de que la variable x_1 se encuentra en sólo una ecuación, y que en esa ecuación tiene un coeficiente de 1. Ahora se convierte la segunda columna de $A_3|\mathbf{b}_3$ en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se empieza por usar una OER tipo 1 para crear un 1 en el renglón 2 y columna 2 de $A_3|\mathbf{b}_3$. Luego se utiliza el renglón 2 resultante para ejecutar las OER tipo 2 que se requieren para poner ceros en el resto de la columna 2. Los pasos 4 a 6 consiguen estos fines.

Paso 4 Multiplique el renglón 2 de $A_3|\mathbf{b}_3$ por $-\frac{1}{3}$. El resultado de esta OER tipo 1 es

$$A_4|\mathbf{b}_4 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Paso 5 Reemplace el renglón 1 de $A_4|\mathbf{b}_4$ por -1(renglón 2 de $A_4|\mathbf{b}_4$) + renglón 1 de $A_4|\mathbf{b}_4$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_5|\mathbf{b}_5 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Paso 6 Reemplace el renglón 3 de $A_5|\mathbf{b}_5$ por 2(renglón 2 de $A_5|\mathbf{b}_5$) + renglón 3 de $A_5|\mathbf{b}_5$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_6|\mathbf{b}_6 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

La columna 2 se convirtió en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la transformación de la columna 2 no cambió la columna 1.

Para terminar el procedimiento de Gauss-Jordan, se tiene que transformar la tercera columna de $A_6|\mathbf{b}_6$ en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primero se utiliza una OER tipo 1 para crear un 1 en el tercer renglón y tercera columna de $A_6|\mathbf{b}_6$. Luego se aplican OER tipo 2 para obtener ceros para el resto de la columna 3. Mediante los pasos 7 a 9 se alcanzan los objetivos.

Paso 7 Multiplique el renglón 3 de $A_6|\mathbf{b}_6$ por $\frac{6}{5}$. El resultado de esta OER tipo 1 es

$$A_7|\mathbf{b}_7 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Paso 8 Reemplace ahora el renglón 1 de $A_7|\mathbf{b}_7$ por $-\frac{5}{6}$(renglón 3 de $A_7|\mathbf{b}_7$) + renglón 1 de $A_7|\mathbf{b}_7$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_8|\mathbf{b}_8 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Paso 9 Reemplace el renglón 2 de $A_8|\mathbf{b}_8$ por $\frac{1}{3}$(renglón 3 de $A_8|\mathbf{b}_8$) + renglón 2 de $A_8|\mathbf{b}_8$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_9|\mathbf{b}_9 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$A_9|\mathbf{b}_9$ representa el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 1 \\ x_2 \quad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \tag{9}$$

Por consiguiente, (9) tiene la solución única $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Como (9) se obtuvo a partir de (8) por medio de OER, la solución única para (8) también debe ser $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

El lector podría preguntarse por qué se definieron las OER tipo 3 (intercambio de renglones). Con el fin de ver por qué podría ser útil una OER tipo 3, supóngase que se desea resolver

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{10}$$

Para resolver (10) por medio del método de Gauss-Jordan se forma primero la matriz aumentada

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

El cero del renglón 1 y la columna 1 significa que no se puede aplicar una OER tipo 1 para obtener un 1 en el renglón 1 columna 1. Pero si se intercambian los renglones 1 y 2 (una OER tipo 3), se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \tag{10'}$$

Y entonces ya se puede proseguir de la manera usual con el método de Gauss-Jordan.

Casos especiales: no hay solución o hay un número infinito de soluciones

Algunos sistemas lineales no tienen solución, y otros tienen un número infinito de soluciones. Mediante los dos ejemplos siguientes se ilustra cómo el método de Gauss-Jordan ayuda a reconocer estos casos.

EJEMPLO 6 **Sistema lineal sin solución**

Determine todas las soluciones del sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 4 \end{aligned} \tag{11}$$

Solución Se aplica el método de Gauss-Jordan a la matriz

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Se empieza por reemplazar el renglón 2 de $A|\mathbf{b}$ por -2(renglón 1 de $A|\mathbf{b}$) + renglón 2 de $A|\mathbf{b}$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \tag{12}$$

Ahora lo mejor sería transformar la segunda columna de (12) en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pero no es posible. El sistema (12) es equivalente al sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 0x_1 + 0x_2 &= -2 \end{aligned} \tag{12'}$$

Cualquiera que sea el valor que se dé a x_1 y x_2, no se satisface la segunda ecuación en (12′). Por consiguiente, (12′) no tiene solución. Como (12′) se obtuvo de (11) por medio de OER, tampoco (11) tiene solución.

Mediante el ejemplo 6 se ilustra la siguiente idea: *si aplica el método de Gauss-Jordan a un sistema lineal y obtiene un renglón de la forma* $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0|c]$ $(c \neq 0)$, *entonces no tiene solución el sistema lineal original.*

EJEMPLO 7 **Sistema lineal con cantidad infinita de soluciones**

Aplique el método de Gauss-Jordan al siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{13}$$

Solución La forma de la matriz aumentada de (13) es

$$A|\mathbf{b} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Se empieza por reemplazar el renglón 3 (porque en el renglón 2, columna 1 ya hay un cero) de $A|\mathbf{b}$ por -1(renglón 1 de $A|\mathbf{b}$) + renglón 3 de $A|\mathbf{b}$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_1|\mathbf{b}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{14}$$

Luego se reemplaza el renglón 1 de $A_1|\mathbf{b}_1$ por -1(renglón 2 de $A_1|\mathbf{b}_1$) + renglón 1 de $A_1|\mathbf{b}_1$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_2|\mathbf{b}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Ahora de reemplaza el renglón 3 de $A_2|\mathbf{b}_2$ por -1(renglón 2 de $A_2|\mathbf{b}_2$) + renglón 3 de $A_2|\mathbf{b}_2$. El resultado de esta OER tipo 2 es

$$A_3|\mathbf{b}_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lo mejor sería transformar ahora la tercera columna de $A_3|\mathbf{b}_3$ en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pero esto es imposible. El sistema lineal correspondiente a $A_3|\mathbf{b}_3$ es

$$x_1 \qquad - x_3 = -2 \tag{14.1}$$

$$x_2 + x_3 = 3 \tag{14.2}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \tag{14.3}$$

Supóngase que se asigna un valor arbitrario k a x_3. Entonces (14.1) se satisface $x_1 - k = -2$, si $x_1 = k - 2$. De igual manera, (14.2) se cumple si $x_2 + k = 3$, es decir $x_2 = 3 - k$. Naturalmente, (14.3) se satisface para cualquier valor de x_1, x_2 y x_3. Entonces, para cualquier número k, $x_1 = k - 2$, $x_2 = 3 - k$, $x_3 = k$ es una solución de (14). Por tanto, (14) tiene un número infinito de soluciones (una por cada número k). Como (14) se obtuvo de (13) por medio de OER, (13) también tiene un número infinito de soluciones. Una caracterización más formal de los sistemas lineales que tienen un número de soluciones, se presenta después del resumen siguiente del método de Gauss-Jordan.

Resumen del método de Gauss-Jordan

Paso 1 Para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ obtenga la matriz aumentada $A|\mathbf{b}$.

Paso 2 En cualquier paso defina un renglón actual, columna actual y un valor actual (el valor en el renglón y columnas actuales). Empiece con el renglón 1 como renglón actual, columna 1 como la columna actual y a_{11} como el valor actual. (**a**) Si a_{11} (el valor actual) es diferente de cero, entonces utilice las OER para transformar la columna 1 (la columna actual) en

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego obtenga el renglón, columna y valor actuales nuevos desplazándose hacia abajo un renglón y una columna a la derecha, y continúe con el paso 3. (**b**) Si a_{11} (el valor actual) es igual a cero, entonces ejecute una OER tipo 3 que abarque el renglón actual y cualquier renglón que contenga un número distinto de cero en la columna actual. Utilice OER para transformar la comuna 1 en

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego obtenga el renglón, columna y valor actuales nuevos al desplazarse hacia abajo un renglón y una columna a la derecha. Continúe con el paso 3. (**c**) Si no hay números distintos de cero en la primera columna, entonces obtenga una columna actual nueva y otro valor actual nuevo al moverse una columna a la derecha. Luego continúe con el paso 3.

Paso 3 (**a**) Si el nuevo valor actual es distinto de cero, entonces efectúe OER para transformarlo en 1 y el resto de los valores de la columna actual en ceros. Cuando termine, obtenga el renglón, columna y valor actuales nuevos. Si lo anterior es imposible, entonces deténgase. Si no es así, repita el paso 3. (**b**) Si el valor actual es cero, entonces ejecute una OER tipo 3 con el renglón actual y cualquier renglón que contenga un número distinto de cero en la columna actual. Luego use OER para transformar ese valor actual en 1 y el resto de los valores de la columna actual en ceros. Cuando termine, obtenga el renglón, columna y valor actuales nuevos. Si lo anterior es imposible, entonces deténgase, pero si no lo es, repita el paso 3. (**c**) Si la columna actual no tiene ceros abajo del renglón actual, entonces obtenga la columna y el valor actuales nuevos y repita el paso 3. Si es imposible, deténgase.

Este procedimiento podría requerir omitir una o más columnas sin transformarlas (véase problema 8).

Paso 4 Escriba el sistema de ecuaciones $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ que corresponde a la matriz $A'|\mathbf{b}'$ obtenida cuando se completa el paso 3. Entonces $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ tiene el mismo conjunto de soluciones que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Variables básicas y soluciones a sistemas de ecuaciones lineales

Es necesario definir los conceptos de variables básicas y no básicas para poder describir el conjunto de soluciones de $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ y ($A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

DEFINICIÓN ■ Después que se aplicó el método de Gauss-Jordan a cualquier sistema lineal, la variable cuyo coeficiente es 1 en una ecuación y 0 en todas las otras ecuaciones, se llama **variable básica** (VB). ■

Cualquier variable que no es una variable básica se llama **variable no básica** (VNB). ■

Sea *VB* el conjunto de variables básicas para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ y VNB el conjunto de variables no básicas para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$. El carácter de las soluciones para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ depende de lo que sucede en los casos siguientes.

Caso 1 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ tiene por lo menos un renglón de la forma $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0|c]$ ($c \neq 0$). Entonces, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución (recuérdese el ejemplo 6). Como ejemplo del caso 1, supóngase que cuando el método de Gauss-Jordan se aplica al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene la siguiente matriz:

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

En este caso, $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) no tiene solución.

Caso 2 Suponga que el caso 1 no se aplica y que VNB, el conjunto de variables no básicas, es vacío. Entonces $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) tiene solución única. Con el fin de ilustrar lo anterior, recuérdese que al resolver

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

con el método de Gauss-Jordan se obtuvo

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

En este caso, VB $= \{x_1, x_2, x_3\}$ y VNB es vacío. Entonces, la solución única para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) es $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Caso 3 Suponga que el caso 1 no se aplica y que VNB no es vacío. Entonces, $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) tiene un número infinito de soluciones. Para obtenerlas, se asigna primero a cada variable no básica un valor arbitrario. Luego se determina el valor de cada variable básica en términos de las variables no básicas. Por ejemplo, suponga

$$A'|\mathbf{b}' = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{15}$$

Como el caso 1 no se aplica y VB $= \{x_1, x_2, x_3\}$ y VNB $= \{x_4, x_5\}$, se tiene un ejemplo del caso 3: $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) tiene un número infinito de soluciones. Para tener una idea de cómo lucen las soluciones se anota $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$:

$$x_1 \qquad + x_4 + x_5 = 3 \tag{15.1}$$

$$x_2 \qquad 2x_4 \qquad = 2 \tag{15.2}$$

$$x_3 \qquad + x_5 = 1 \tag{15.3}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0 \tag{15.4}$$

Luego se asignan valores arbitrarios c y k a las variables no básicas (x_4 y x_5); entonces, $x_4 = c$ y $x_5 = k$. De (15.1) se tiene que $x_1 = 3 - c - k$. A partir de (15.2), $x_2 = 2 - 2c$. De (15.3) se tiene que $x_3 = 1 - k$. Como (15.4) se cumple para todos los valores de las variables, $x_1 = 3 - c - k$, $x_2 = 2 - 2c$, $x_3 = 1 - k$, $x_4 = c$ y $x_5 = k$ son una solución para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$) para cualquier valor de c y de k.

El estudio del método de Gauss-Jordan se resume en la figura 6. Se trató este método con detalle porque al estudiar la programación lineal se presentan en forma repetida ejemplos del caso 3 (sistemas lineales con número infinito de soluciones). Debido a que el resultado final del método de Gauss-Jordan siempre debe ser uno de los casos 1 a 3, se demostró que cualquier sistema lineal puede no tener solución, tener solución única o una cantidad infinita de soluciones.

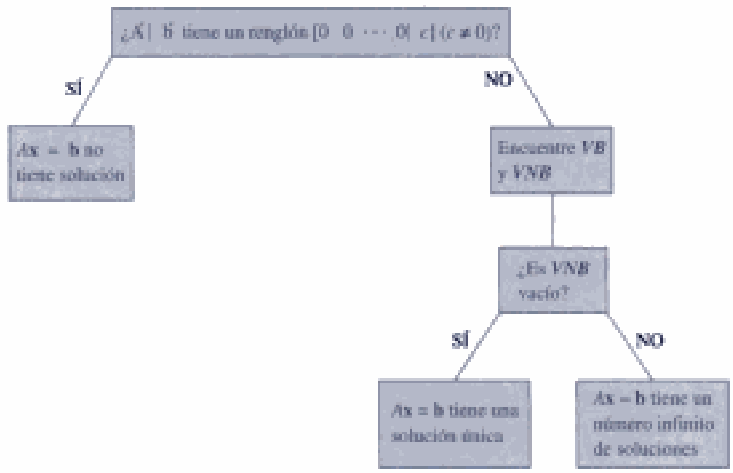


FIGURA 6
Descripción del método de Gauss-Jordan para resolver sistemas lineales

PROBLEMAS

Grupo A

Utilice el método de Gauss-Jordan para determinar si los siguientes sistemas lineales no tienen solución, tienen solución única o un número infinito de soluciones. En caso de existir, determine la solución.

1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 5 \\ x_2 + 2x_4 &= 5 \\ x_3 + 0.5x_4 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

8
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Grupo B

9 Suponga que un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene más variables que ecuaciones. Demuestre que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede tener una solución única.

2.4 Independencia y dependencia lineales*

Los conceptos de conjunto de vectores linealmente independientes, conjunto de vectores linealmente dependientes y el rango de una matriz se tratan en esta sección. Estos conceptos son útiles en el estudio de matrices inversas.

Antes de definir un conjunto de vectores linealmente independiente, es necesario establecer qué es una combinación lineal de un conjunto de vectores. Sea $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores renglón con la misma dimensión.

*En esta sección se tratan temas que podrían omitirse sin pérdida de continuidad.

DEFINICIÓN ■ Una **combinación lineal** de los vectores en V es cualquier vector de la forma $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \cdots + c_k\mathbf{v}_k$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son escalares arbitrarios. ■

Por ejemplo, si $V = \{[1 \quad 2], [2 \quad 1]\}$, entonces

$$\begin{aligned} 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= 2([1 \quad 2]) - [2 \quad 1] = [0 \quad 3] \\ \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 &= [1 \quad 2] + 3([2 \quad 1]) = [7 \quad 5] \\ 0\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 &= [0 \quad 0] + 3([2 \quad 1]) = [6 \quad 3] \end{aligned}$$

son combinaciones lineales de los vectores en V. La definición que sigue podría aplicarse también a un conjunto de vectores columna.

Suponga que se tiene un conjunto $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de vectores renglón m-dimensionales. Sea $\mathbf{0} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$ el vector $\mathbf{0}$ m-dimensional. Para determinar si V es un conjunto de vectores linealmente independiente, se trata de encontrar una combinación lineal de vectores en V que se pueda sumar a $\mathbf{0}$. Evidentemente, $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$ es una combinación lineal de vectores en V que se puede sumar a $\mathbf{0}$. La combinación lineal de vectores en V para la cual $c_1 = c_2, = \ldots = c_k = 0$ se denomina combinación lineal *trivial* de vectores en V. Ahora ya se pueden definir los conjuntos de vectores linealmente independientes y linealmente dependientes.

DEFINICIÓN ■ Un conjunto de vectores m-dimensionales es **linealmente independiente** si la única combinación lineal de vectores en V que es igual a $\mathbf{0}$ es la combinación lineal trivial. ■

Un conjunto de vectores m-dimensionales es **linealmente dependiente** si hay una combinación lineal no trivial de vectores en V que se suma a $\mathbf{0}$. ■

Mediante los siguientes ejemplos se aclaran estas definiciones.

EJEMPLO 8 Un vector 0 forma un conjunto LD

Demuestre que cualquier conjunto de vectores que contiene el vector $\mathbf{0}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Solución Para ilustrarlo, se demostrará que si $V = \{[0 \quad 0], [1 \quad 0], [0 \quad 1]\}$, entonces V es linealmente dependiente porque si, por ejemplo, $c_1 \neq 0$, entonces $c_1([0 \quad 0]) + 0([1 \quad 0]) + 0([0 \quad 1]) = [0 \quad 0]$. Por consiguiente, hay una combinación lineal no trivial de vectores en V que se suma a $\mathbf{0}$.

EJEMPLO 9 Un conjunto de vectores LI

Demuestre que el conjunto de vectores $V = \{[1 \quad 0], [0 \quad 1]\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Solución Se tratará de determinar una combinación lineal no trivial de los vectores en V que dan $\mathbf{0}$. Para esto se requiere encontrar escalares c_1 y c_2 (por lo menos uno de los cuales es distinto de cero) que satisfaga $c_1([1 \quad 0]) + c_2([0 \quad 1]) = [0 \quad 0]$. Por consiguiente, c_1 y c_2 deben satisfacer $[c_1 \quad c_2] = [0 \quad 0]$. Esto quiere decir que $c_1 = c_2 = 0$. Esta combinación lineal única de vectores en V que da $\mathbf{0}$ es la combinación lineal trivial. Por consiguiente, V es un conjunto de vectores linealmente independientes.

EJEMPLO 10 Un conjunto de vectores LD

Demuestre que $V = \{[1 \quad 2], [2 \quad 4]\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

Solución Puesto que $2([1 \quad 2]) - 1([2 \quad 4]) = [0 \quad 0]$, hay una combinación lineal no trivial con $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$ que da $\mathbf{0}$. Por consiguiente, V es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

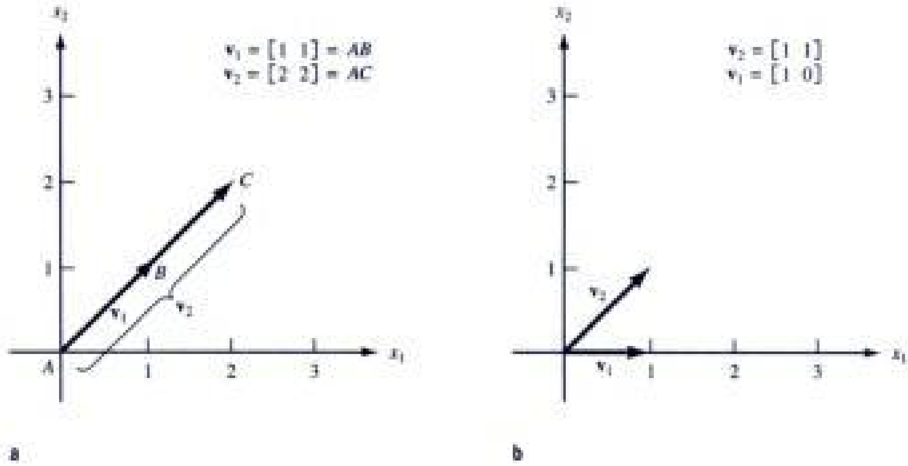


FIGURA 7
(a) Dos vectores linealmente dependientes
(b) Dos vectores linealmente independientes

Pero, ¿qué significa intuitivamente el que un conjunto de vectores sea linealmente dependiente? Para entender el concepto de dependencia lineal, observe que un conjunto de vectores V es linealmente dependiente (con la condición de que $\mathbf{0}$ no está en V) si y sólo si es posible representar un vector en V como una combinación lineal no trivial de otros vectores en V (véase problema 9 al final de esta sección). En el ejemplo 10, $[2 \quad 4] = 2([1 \quad 2])$. Por tanto, si un conjunto de vectores V es linealmente dependiente, los vectores en V no son, de alguna manera, "diferentes" vectores. Por "diferente" se quiere dar a entender que la dirección especificada para cualquier vector en V no se puede expresar sumando múltiplos de otros vectores en V. Por ejemplo, en dos dimensiones se puede demostrar que dos vectores son linealmente dependientes si y sólo si están en la misma recta (véase figura 7).

Rango de una matriz

Mediante el método de Gauss-Jordan, es posible determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente. Antes de explicar cuál es el procedimiento, se define el concepto de rango de una matriz.

Sea A cualquier matriz $m \times n$ y los renglones de A para $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$. También se define $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$.

DEFINICIÓN ■ El **rango** de A es el número mas grande de vectores linealmente independientes en el subconjunto de R. ■

Mediante los siguientes tres ejemplos se ilustra el concepto de rango.

EJEMPLO 11 **Matriz con rango 0**

Demuestre que el rango de $A = 0$ para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución Para el conjunto de vectores $R = \{[0 \quad 0], [0, \quad 0]\}$, es imposible escoger un subconjunto de R que sea linealmente independiente (recuerde el ejemplo 8).

EJEMPLO 12 **Matriz con rango igual a 1**

Demuestre que el rango de $A = 1$ para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Aquí $R = \{[1 \quad 1], [2 \quad 2]\}$. El conjunto $\{[1 \quad 1]\}$ es un subconjunto linealmente independiente de R, así el rango de A debe ser por lo menos de 1. Si se intenta encontrar dos vectores linealmente independientes en R no se logra porque $2([1 \quad 1]) - [2 \quad 2] = [0 \quad 0]$. Esto quiere decir que el rango de A no puede ser 2. Por tanto, el rango de A debe ser igual a 1.

EJEMPLO 13 Matriz con rango igual a 2

Demuestre que el rango de $A = 2$ para la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución Aquí $R = \{[1 \quad 0], [0 \quad 1]\}$. Del ejemplo 9 se sabe que R es un conjunto de vectores linealmente independiente. Por lo que el rango $A = 2$.

Para determinar el rango de una matriz dada A, se aplica simplemente el método de Gauss-Jordan a la matriz A. Sea el resultado final la matriz $\bar{A}$. Se puede demostrar que una aplicación sucesiva de OER en la matriz no cambia el rango de la misma. Esto implica que el rango de A = rango de $\bar{A}$. También es evidente que el rango de $\bar{A}$ es el número de renglones no nulos en $\bar{A}$. Al combinar todos estos hechos, se encuentra que el rango de A = rango de $\bar{A}$ = número de renglones no nulos en $\bar{A}$.

EJEMPLO 14 Determine el rango de una matriz mediante el método de Gauss-Jordan

Encontrar el rango de la matriz A si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Con el método de Gauss-Jordan se genera la secuencia siguiente de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \bar{A}$$

Por tanto, el rango de A = rango de $\bar{A} = 3$.

Cómo determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente

Enseguida se explica un procedimiento para determinar si un conjunto de vectores $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es linealmente independiente.

Fórmese la matriz A cuyo i-ésimo renglón es $\mathbf{v}_i$. La matriz A tendrá m renglones. Si el rango de $A = m$, entonces V es un conjunto de vectores linealmente independientes, en tanto que si el rango de $A < m$, entonces V es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

EJEMPLO 15 Un conjunto de vectores linealmente dependientes

Determine si $V = \{[1 \quad 0 \quad 0], [0 \quad 1 \quad 0], [1 \quad 1 \quad 0]\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Solución Mediante el método de Gauss-Jordan, se obtiene la siguiente sucesión de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{A}$$

Por tanto, rango de A = rango de $\bar{A} = 2 < 3$. Lo cual demuestra que V es un conjunto de vectores linealmente dependiente. De hecho, las OER usadas para transformar A en $\bar{A}$ se pueden utilizar para demostrar que $[1 \quad 1 \quad 0] = [1 \quad 0 \quad 0] + [0 \quad 1 \quad 0]$. Esta ecuación también demuestra que V es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

PROBLEMAS

Grupo A

Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes.

1 $V = \{[1 \quad 0 \quad 1], [1 \quad 2 \quad 1], [2 \quad 2 \quad 2]\}$

2 $V = \{[2 \quad 1 \quad 0], [1 \quad 2 \quad 0], [3 \quad 3 \quad 1]\}$

3 $V = \{[2 \quad 1], [1 \quad 2]\}$

4 $V = \{[2 \quad 0], [3 \quad 0]\}$

5 $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

6 $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Grupo B

7 Demuestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución si y sólo si $\mathbf{b}$ se puede representar como una combinación lineal de las columnas de A.

8 Suponga que hay una colección de tres o más vectores bidimensionales. Ofrezca un razonamiento que demuestre que la colección debe ser linealmente dependiente.

9 Demuestre que un conjunto de vectores V (que no contiene el vector $\mathbf{0}$) es linealmente dependiente si y sólo si existe algún vector en V que se pueda representar como una combinación lineal no trivial de otros vectores en V.

2.5 Inversa de una matriz

Para resolver una ecuación lineal como $4x = 3$, simplemente se multiplican ambos miembros de la ecuación por el inverso multiplicativo de 4, el cual es 4^{-1}, es decir, $\frac{1}{4}$. De lo anterior se obtiene $4^{-1}(4x) = (4^{-1})3$, donde $x = \frac{3}{4}$. (Naturalmente, este método no funciona para la ecuación $0x = 3$, porque 0 no tiene inverso multiplicativo.) En esta sección se desarrolla una generalización de esta técnica que se puede aplicar para resolver sistemas lineales en donde el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. Para empezar, se proporcionan algunas definiciones preliminares.

DEFINICIÓN ■ Una **matriz cuadrada** es cualquier matriz que tiene igual número de renglones que de columnas. ■

Los **elementos diagonales** de una matriz cuadrada son los elementos a_{ij} tal que $i = j$. ■

Una matriz cuadrada para la que todos los elementos diagonales son iguales a 1 y todos los elementos no diagonales son iguales a 0 se llama **matriz identidad.** ■

La matriz identidad $m \times m$ se representa con I_m. Por tanto,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \cdots$$

Si los productos $I_m A$ y AI_m están definidos, es fácil demostrar que $I_m A = AI_m = A$. Por consiguiente, dado que el número 1 sirve como el elemento unidad en la multiplicación de los números reales, I_m es el elemento unidad en la multiplicación de matrices.

Recuerde que $\frac{1}{4}$ es el inverso multiplicativo de 4. La razón es que $4(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})4 = 1$. Esto da lugar a la definición siguiente de la inversa de una matriz.

DEFINICIÓN ■ Para una matriz $m \times m$ matriz A, de $m \times m$ matriz B es la inversa de A si

$$BA = AB = I_m \tag{16}$$

(Se puede demostrar que si $BA = I_m$ o bien, $AB = I_m$, entonces la otra cantidad también es igual a I_m.) ■

Algunas matrices cuadradas no tienen inversa. Si existe una matriz B de $m \times m$ que satisface la ecuación (16), entonces se representa con $B = A^{-1}$. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el lector puede verificar que

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Para entender cuál es el interés en el concepto de matriz inversa, supóngase que se desea resolver un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que tiene m ecuaciones y m incógnitas. Supóngase que si existe A^{-1}. Al multiplicar ambos miembros de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por A^{-1}, se observa que cualquier solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ también debe satisfacer $A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}$. Si se aplica la ley asociativa y la definición de una matriz inversa, se obtiene

$$(A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

o

$$I_m\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

o

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Esto demuestra que si se conoce A^{-1} es posible encontrar la solución única para un sistema lineal cuadrado. Es análogo a resolver $4x = 3$ al multiplicar ambos miembros de la ecuación por 4^{-1}.

El método de Gauss-Jordan se podría utilizar para encontrar A^{-1} (o para demostrar que A^{-1} no existe). Con el fin de ilustrar cómo se puede aplicar el método de Gauss-Jordan para invertir una matriz, supóngase que se desea determinar A^{-1} para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para esto se requiere que se encuentre una matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A^{-1}$$

que satisface

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

De la ecuación (17) se obtiene el par siguiente de ecuaciones simultáneas que debe ser satisfecho para a, b, c y d:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, para determinar

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

(la primera columna de A^{-1}), se aplica el método de Gauss-Jordan a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Una vez que mediante OER se transformó

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

en I_2,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

habrá sido transformada en la primera columna de A^{-1}. Para determinar

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

(la segunda columna de A^{-1}), se ejecutan OER a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Cuando

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

se transforma en I_2,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

habrá sido convertida en la segunda columna de A^{-1}. Por consiguiente, para determinar cada columna de A^{-1}, se debe desarrollar una sucesión de OER que transforma

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

en I_2. Lo anterior hace pensar en que se puede encontrar A^{-1} al aplicar OER a la matriz de 2×4

$$A|I_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Cuando

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ha sido transformada en I_2,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se habrá convertido en la primera columna de A^{-1}, y

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

será transformada en la segunda columna de A^{-1}. Por tanto, *cuando A se transforma en I_2, I_2 se transforma en A^{-1}*. A continuación aparecen los pasos para calcular A^{-1}.

Paso 1 Multiplique el renglón 1 de $A|I_2$ por $\frac{1}{2}$. Así se obtiene

$$A'|I_2' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2 Reemplace el renglón 2 de $A'|I_2'$ por -1(renglón 1 de $A'|I_2'$) + renglón 2 de $A'|I_2'$. El resultado es

$$A''|I_2'' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Paso 3 Multiplique el renglón 2 de $A''|I_2''$ por 2. Así se obtiene

$$A'''|I_2''' = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Paso 4 Reemplace el renglón 1 de $A'''|I_2'''$ por $-\frac{5}{2}$(renglón 2 de $A'''|I_2'''$) + renglón 1 de $A'''|I_2'''$. El resultado es

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Como A se transformó en I_2, I_2 fue transformada en A^{-1}. Entonces,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

El lector deberá comprobar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Una matriz puede no tener inversa

Algunas matrices no tienen inversa. Para ilustrarlo, sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \tag{18}$$

Para encontrar A^{-1} se tiene que resolver el par siguiente de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18.1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{18.2}$$

Al intentar resolver (18.1) mediante el método de Gauss-Jordan, se tiene que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

se transforma en

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Lo anterior quiere decir que (18.1) no tiene solución, y que A^{-1} no existe.

Obsérvese que (18.1) no tiene solución porque el método de Gauss-Jordan convierte A en una matriz con un renglón de ceros en la parte inferior. Esto sólo sucede si el rango de $A < 2$. Si la matriz A de $m \times m$ tiene un rango de $A < m$, entonces A^{-1} no existe.

Inversión de una matriz *A* de *m* × *m* mediante el método de Gauss-Jordan

Paso 1 Escriba la matriz $m \times 2m$ de $A|I_m$.

Paso 2 Aplique OER para transformar $A|I_m$ en $I_m|B$. Lo anterior es posible sólo si el rango de $A = m$. En este caso, $B = A^{-1}$. Si el rango de $A < m$, entonces A no tiene inversa.

Solución de sistemas lineales mediante la matriz inversa

Como ya se estableció, la inversa de la matriz se puede utilizar para resolver un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en el cual el número de variables y ecuaciones es igual. Simplemente se multiplican ambos miembros de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por A^{-1} para llegar a la solución $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Por ejemplo, para resolver

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned} \tag{19}$$

escriba la representación matricial de (19):

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se encontró en el ejemplo anterior que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Inversión						
2		de una						
3		matriz			2	0	-1	
4				A	3	1	2	
5					-1	0	1	
6								
7					1	0	1	
8				A⁻¹	-5	1	-7	
9					1	0	2	

FIGURA 8

Al multiplicar ambos miembros de (20) por A^{-1}, se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $x_1 = 1, x_2 = 1$ es la solución única para el sistema (19).

Inversión de matrices con Excel

Minverse.xls

El comando de Excel =MINVERSE facilita la inversión de la matriz. Refiérase a la figura 8 y al archivo Minverse.xls. Suponga que desea invertir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplemente se introducen los datos de la matriz en E3:G5 y se selecciona el intervalo (se escoge E7:G9) donde se desea que A^{-1} sea calculada. La fórmula se escribe en la esquina superior izquierda del intervalo (celda E7)

= MINVERSE(E3:G5)

y se presiona **Control Shift Enter.** Así se introduce una función de arreglo que calcula A^{-1} en el intervalo E7:G9. Usted no puede editar parte de una función de arreglo, así que si desea borrar A^{-1}, debe eliminar el intervalo completo donde está presente A^{-1}.

PROBLEMAS

Grupo A

Encuentre A^{-1} (si acaso existe) para las matrices siguientes:

1 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

5 Utilice la respuesta del problema 1 para resolver el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$$

6 Utilice la respuesta del problema 2 para resolver el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{x_2 -{}} x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Grupo B

7 Demuestre que una matriz cuadrada tiene inversa si y sólo si sus renglones forman un conjunto de vectores linealmente independientes.

8 Considere una matriz cuadrada B cuya inversa está dada por B^{-1}.

a En términos de B^{-1}, ¿cuál es la inversa de la matriz $100B$?

b Sea B' la matriz obtenida a partir de B al duplicar cada valor en el renglón 1 de B. Explique cómo se podría obtener la inversa de B' a partir de B^{-1}.

c Sea B' la matriz obtenida a partir de B al duplicar cada valor en la columna 1 de B. Explique cómo se podría obtener la inversa de B' a partir de B^{-1}.

9 Suponga que tanto A como B tienen inversas. Determine la inversa de la matriz AB.

10 Suponga que A tiene inversa. Demuestre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (*Sugerencia*: Utilice el hecho de que $AA^{-1} = I$, y tome la transpuesta de ambos miembros.)

11 Una matriz cuadrada A es ortogonal si $AA^T = I$. ¿Qué propiedades deben tener las columnas de una matriz ortogonal?

2.6 Determinantes

Un número denominado *determinante* de A (con frecuencia representado por det A, o bien, A o $|A|$), está asociado con cualquier matriz cuadrada A. Saber cómo calcular el determinante de una matriz cuadrada, es útil en el estudio de programación no lineal.

Para una matriz A de $1 \times 1 = [a_{11}]$,

$$\det A = a_{11} \tag{21}$$

Para una matriz de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{22}$$
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Por ejemplo,

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 2(5) - 3(4) = -2$$

Antes de aprender cómo calcular el det A para matrices cuadradas más grandes, es necesario definir el concepto del *menor* de una matriz.

DEFINICIÓN ■ Si A es una matriz de $m \times m$ entonces para cualquier valor de i y j, el ij-ésimo menor de A (escríbase A_{ij}) es la submatriz $(m-1) \times (m-1)$ de A obtenida luego de eliminar el renglón i y la columna j de A. ■

Por ejemplo,

$$\text{si} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Sea A cualquier matriz de $m \times m$. Se podría representar A como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Para calcular det A, escoja cualquier valor de i ($i = 1, 2, \ldots, m$) y determine det A:

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1}(\det A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}(\det A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+m}a_{im}(\det A_{im}) \tag{23}$$

La fórmula (23) se denomina expansión del det A por medio de los cofactores del renglón i. La ventaja de (23) es que disminuye el cálculo del det A para una matriz de $m \times m$ cálculos que requieren sólo matrices $(m-1) \times (m-1)$. Se aplica (23) hasta que det A pueda ser expresado en términos de matrices de 2×2. Después use la ecuación (22) para encontrar los determinantes de las matrices 2×2 pertinentes.

Con el fin de ilustrar el uso de (23) se encontrará el det A de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Se expande det A por medio de los cofactores del renglón 1. Obsérvese que $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$ y $a_{13} = 3$. Además,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

y de (22), det $A_{11} = 5(9) - 8(6) = -3$;

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

y de (22), det $A_{12} = 4(9) - 7(6) = -6$; y

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

y de (22), det $A_{13} = 4(8) - 7(5) = -3$. Entonces, por (23),

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1}a_{11}(\det A_{11}) + (-1)^{1+2}a_{12}(\det A_{12}) + (-1)^{1+3}a_{13}(\det A_{13}) \\ &= (1)(1)(-3) + (-1)(2)(-6) + (1)(3)(-3) = -3 + 12 - 9 = 0\end{aligned}$$

El lector interesado puede comprobar que la expansión de det A por medio de los cofactores del renglón 2 o del renglón 3 también es igual a cero.

El estudio de los determinantes se termina destacando que con ayuda de ellos es posible invertir matrices cuadradas y resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero como ya se estudió la aplicación del método de Gauss-Jordan para invertir matrices y resolver sistemas de ecuaciones lineales, ya no se tratan estas ventajas de los determinantes.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Compruebe que det $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 0$ por medio de las expansiones de los cofactores del renglón 2 y 3.

2 Encuentre det $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3 Se dice que una matriz es triangular superior si para $i > j$, $a_{ij} = 0$. Demuestre que el determinante de cualquier matriz triangular 3×3 es igual al producto de los elementos diagonales de la matriz. (Este resultado es válido para cualquier matriz triangular superior.)

Grupo B

4 **a** Demuestre que para cualquier matriz 1×1 y 3×3 det $-A = -$det A.

b Demuestre que para cualquier matriz 2×2 y 4×4 det $-A =$ det A.

c Generalice los resultados de los incisos (a) y (b).

RESUMEN

Matrices

Una **matriz** es cualquier arreglo rectangular de números. Para la matriz A, a_{ij} representan el elemento de A en el renglón i de la columna j.

Una matriz con sólo un renglón o una columna se podría considerar como un **vector.** Los vectores aparecen en negritas (**v**). Dado un vector renglón $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$ y una columna

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

de la misma dimensión, el **producto escalar** de **u** y **v** (escríbase $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$) es el número $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

Dadas dos matrices A y B, el **producto matricial** de A y B (se representa con AB) está definido si y sólo si el número de columnas en A = al número de renglones en B. Suponga que éste es el caso y que A tiene m renglones y B tiene n columnas. Entonces el producto de las matrices $C = AB$ de A y B es la matriz $m \times n$ cuyo ij-ésimo elemento se determina como se indica: el ij-ésimo elemento de C = producto escalar del renglón i de A por la columna j de B.

Matrices y ecuaciones lineales

El **sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

se podría escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o bien, $A|\mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

Al aplicar las **operaciones elementales con renglones** (OER) se podría resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. A partir de una matriz A, una OER genera una nueva matriz A' por medio de uno de tres procedimientos.

OER tipo 1

Se obtiene A' al multiplicar cualquier renglón de A por un escalar no nulo.

OER tipo 2

Se multiplica cualquier renglón de A (p. ej., renglón i) por un escalar distinto de cero c. Para alguna $j \neq i$, sea el renglón j de $A' = c$(renglón i de A) + renglón j de A, y sean los otros renglones de A' los mismos que los renglones de A.

OER tipo 3

Intercambio de dos renglones cualquiera de A.

En el método de Gauss-Jordan se aplican OER para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como se ilustra en los pasos siguientes.

Paso 1 Para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, se determina la matriz aumentada $A|\mathbf{b}$.

Paso 2 Se empieza con el renglón 1 como el renglón actual, la columna 1 como la columna actual y a_{11} como el valor actual. (**a**) Si a_{11} (el valor actual) es no nulo, entonces se utilizan OER para transformar la columna 1 (la columna actual) en

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego se obtiene renglón, columna y valor actuales nuevos mediante el desplazamiento hacia el renglón de abajo y una columna a la derecha, y se continúa con el paso 3. (**b**) Si a_{11} (el valor actual) es igual a cero, entonces se ejecuta una OER tipo 3 en cualquier renglón con un valor no nulo en la misma columna. Se utilizan OER para transformar la columna 1 en

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y se continúa con el paso 3 después de moverse a un renglón, columna y valor actuales nuevos. (**c**) Si no hay valores distintos de cero en la primera columna, entonces se procede con una columna y valor actuales nuevos. Se continúa con el paso 3.

Paso 3 (**a**) Si el valor actual es distinto de cero, se utilizan OER para transformarlo en 1 y el resto de los valores de la columna actual en ceros. Así se obtiene el renglón, la columna y el valor actuales nuevos. Si es imposible, entonces se detiene el procedimiento. Si no es así, se repite el paso 3. (**b**) Si el valor actual es cero, entonces se efectúa un reemplazo mediante OER tipo 3 y cualquier renglón con un valor distinto de cero en la misma columna. Se transforma la columna aplicando OER, y hay que desplazarse al siguiente valor actual. Si esto es imposible, se detiene el procedimiento, y si no es así, se repite el paso 3. (**c**). Si la columna actual no tiene números distintos de cero abajo del renglón actual, entonces se busca la columna y el valor actuales nuevos, y se repite el paso 3. Deténgase si esto es imposible.

En el procedimiento se podrían omitir una o más columnas, y no transformarlas.

Paso 4 Se escribe el sistema de ecuaciones $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ que corresponde a la matriz $A'|\mathbf{b}'$ obtenida al terminar el paso 3. Entonces $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ tendrá el mismo conjunto de soluciones que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Para describir el conjunto de soluciones para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ (y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$), se definieron los conceptos de variables básicas y no básicas. Después de aplicar el método de Gauss-Jordan a cualquier sistema lineal, una variable que tiene un coeficiente 1 en una sola ecuación y un coeficiente cero en todas las otras ecuaciones se llama **variable básica.** Cualquier variable que no es variable básica se denomina **variable no básica.**

Sea VB el conjunto de variables básicas para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ y VNB el conjunto de variables no básicas para $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

Caso 1 $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ contiene por lo menos un renglón de la forma $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0|c](c \neq 0)$. En este caso, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución.

Caso 2 Si el caso 1 no se aplica y VNB, el conjunto de las variables no básicas, es vacío, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única.

Caso 3 Si el caso 1 no se cumple y VNB no es vacío, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene un número infinito de soluciones.

Independencia lineal, dependencia lineal y rango de una matriz

Un conjunto V de vectores m-dimensionales es **linealmente independiente** si la única combinación lineal de vectores en V que es igual a $\mathbf{0}$ es la combinación lineal trivial. Un conjunto V de vectores m-dimensionales es **linealmente dependiente** si hay una combinación lineal no trivial de los vectores en V que se suman a $\mathbf{0}$.

Sea A cualquier matriz $m \times n$ y sean $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, los renglones de A. También se define $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. El **rango** de A es el número de vectores en el subconjunto más grande linealmente independiente de R. Para determinar el rango de una matriz dada A se aplica el método de Gauss-Jordan a la matriz A. El resultado final es la matriz $\bar{A}$. Entonces, el rango de A = rango de $\bar{A}$ = número de renglones diferentes de cero en $\bar{A}$.

Para determinar si un conjunto de vectores $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es linealmente dependiente se forma la matriz A cuyo i-ésimo renglón es $\mathbf{v}_i$. A tendrá m renglones. Si el rango de $A = m$, entonces V es un conjunto de vectores linealmente independiente; si el rango de $A < m$, entonces V es un conjunto de vectores linealmente dependiente.

Inversa de una matriz

Para una matriz cuadrada A de $(m \times m)$, si $AB = BA = I_m$, entonces B es la **inversa** de A (escríbase $B = A^{-1}$). El método de Gauss-Jordan para invertir una matriz A de $m \times m$ y obtener A^{-1} es el siguiente:

Paso 1 Se escribe la matriz $m \times 2m$ de $A|I_m$.

Paso 2 Se aplican OER para transformar $A|I_m$ en $I_m|B$. Lo anterior sólo es posible si el rango de $A = m$. En este caso, $B = A^{-1}$. Si el rango de $A < m$,entonces A no tiene inversa.

Determinantes

Un número llamado **determinante** de A está relacionado con cualquier matriz cuadrada A de $(m \times m)$ y se escribe det A, o bien $|A|$. Para una matriz 1×1, det $A = a_{11}$. Para una matriz 2×2, det $A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Para una matriz general $m \times m$ se determina mediante aplicaciones repetidas de la fórmula siguiente (válida para $i = 1, 2, \ldots, m$):

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1}(\det A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}(\det A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+m}a_{im}(\det A_{im})$$

Aquí A_{ij} es el ij-ésimo **menor** de A, el cual es la matriz $(m-1) \times (m-1)$ obtenida a partir de A después de eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Encuentre todas las soluciones del sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2 Determine la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3 Todos los años, el 20% del cuerpo de profesores de la universidad estatal sin base se convierte en maestros con base, 5% deja de trabajar y 75% sigue sin base. Cada año, 90% de los profesores de la universidad estatal con base sigue trabajando y 10% deja de hacerlo. Sea U_t el número de profesores de la universidad estatal sin base al principio del año t y T_t el número de profesores con base.

Utilice la multiplicación de matrices para relacionar el vector $\begin{bmatrix} U_{t+1} \\ T_{t+1} \end{bmatrix}$ con el vector $\begin{bmatrix} U_t \\ T_t \end{bmatrix}$.

4 Mediante el método de Gauss-Jordan, determine todas las soluciones del sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned}$$

5 Encuentre la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

6 Las calificaciones del último semestre de dos estudiantes de la universidad estatal se muestran en la tabla 2.

Los cursos 1 y 2 son de cuatro créditos, y los cursos 3 y 4 valen tres créditos. Sea GPA_i el promedio de calificaciones del semestre para el estudiante i. Utilice la multiplicación de matrices para expresar el vector $\begin{bmatrix} \text{GPA}_1 \\ \text{GPA}_2 \end{bmatrix}$ desde el punto de vista de la información dada en el problema.

7 Aplique el método de Gauss-Jordan para encontrar todas las soluciones del sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

8 Determine la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

9 Sea C_t = número de niños en Indiana al comenzar el año t y A_t = número de adultos en Indiana al principio del año t. Durante cualquier año dado, 5% de todos los niños se vuelve adulto, y muere 1% de todos los niños. Además, en cualquier año dado muere 3% de los adultos. Utilice la multiplicación de matrices para expresar el vector $\begin{bmatrix} C_{t+1} \\ A_{t+1} \end{bmatrix}$ en términos de $\begin{bmatrix} C_t \\ A_t \end{bmatrix}$.

TABLA 2

Estudiante	Curso 1	2	3	4
1	3.6	3.8	2.6	3.4
2	2.7	3.1	2.9	3.6

10 Por medio del método de Gauss-Jordan encuentre todas las soluciones del sistema lineal de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 \quad &= 5 \end{aligned}$$

11 Utilice el método de Gauss-Jordan para determinar la inversa de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

12 En cualquier año dado, 10% de todos los residentes rurales se desplaza a las ciudades, y 20% de los residentes de las ciudades se cambia a una zona rural (¡todas las otras personas se quedan quietas!). Sea R_t la cantidad de residentes rurales al principio del año t y C_t la cantidad de residentes de la ciudad al inicio del año t. Mediante la multiplicación de matrices para relacionar el vector $\begin{bmatrix} R_{t+1} \\ C_{t+1} \end{bmatrix}$ con el vector $\begin{bmatrix} R_t \\ C_t \end{bmatrix}$.

13 Determine si el conjunto $V = \{[1 \ 2 \ 1], [2 \ 0 \ 0]\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

14 Determine si el conjunto $V = \{[1 \ 0 \ 0], [0 \ 1 \ 0], [-1 \ -1 \ 0]\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

15 Sea $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$.

a ¿Para qué valores de a, b, c y d existe A^{-1}?

b Si A^{-1} existe, entonces determínela.

16 Demuestre que el sistema lineal siguiente tiene un número infinito de soluciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

17 Una compañía obtiene utilidades de 60 000 dólares antes de pagar bonos a los empleados e impuestos estatales y federales. La compañía paga un bono a los empleados, el cual equivale a 5% de utilidades después de impuestos. El impuesto estatal es 5% de las utilidades (después de pagar los bonos). Por último, el impuesto federal es 40% de las utilidades (después de que se pagan los bonos y los impuestos estatales). Establezca un sistema de ecuaciones lineales para encontrar las cantidades pagadas en bonos, impuesto estatal e impuesto federal.

18 Encuentre el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19 Demuestre que para cualquier matriz A de 2×2 que no tiene inversa su determinante es igual a cero.

Grupo B

20 Sea A una matriz $m \times m$.

a Demuestre que si el rango $A = m$, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución única. ¿Cuál es la solución única?

b Demuestre que si el rango $A < m$, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene un número infinito de soluciones.

21 Considere el siguiente sistema lineal:

$$[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]P$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Si la suma de cada renglón de la matriz P es igual a 1, entonces mediante el problema 20 demuestre que este sistema lineal tiene un número infinito de soluciones.

22* La economía nacional de Serilandia manufactura tres productos: acero, automóviles y máquinas. (1) Para producir 1 dólar de acero requiere 30 centavos de acero, 15 centavos de automóviles y 40 centavos de maquinaria. (2) Para producir un dólar de automóviles requiere 45 centavos de acero, 20 centavos de automóviles y 10 centavos de maquinaria. (3) Para producir un dólar de maquinaria necesita 40 centavos de acero, 10 centavos de automóviles y 45 centavos de máquinas. Durante el año próximo, Serilandia quiere consumir d_s dólares de acero, d_c dólares de automóviles y d_m dólares de maquinaria.

Para el próximo año, sea

s = valor del dólar de acero producido

c = valor del dólar de automóviles producidos

m = valor del dólar de maquinaria producida.

Defina A como una matriz 3×3 cuyo ij-ésimo elemento es el valor del dólar del producto i necesario para producir un dólar de producto j (acero = producto 1, automóviles = producto 2, maquinaria = producto 3).

a Determine A.

b Demuestre que

$$\begin{bmatrix} s \\ c \\ m \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} s \\ c \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_s \\ d_c \\ d_m \end{bmatrix} \qquad \textbf{(24)}$$

[*Sugerencia*: Observe que el valor de la producción de acero del próximo año = (demanda del consumidor de acero del próximo año) + (acero necesario para producir el acero del próximo año) + (acero necesario para producir los automóviles del próximo año) + (acero necesario para manufacturar la maquinaria del próximo año). Lo anterior debe mostrarle la idea general.]

c Demuestre que la ecuación (24) también se podría escribir como

$$(I - A)\begin{bmatrix} s \\ c \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_s \\ d_c \\ d_m \end{bmatrix}$$

d Dados los valores de d_s, d_c y d_m, explique cómo podría utilizar usted $(I - A)^{-1}$ para determinar si Serilandia es capaz de cumplir con la demanda del consumidor el año próximo.

e Suponga que la demanda de acero del año próximo aumenta un dólar. Esto incrementará el valor del acero, automóviles y maquinaria que se tienen que producir el año próximo. De acuerdo con $(I - A)^{-1}$, determine el cambio en las cantidades necesarias de producción del año próximo.

BIBLIOGRAFÍA

Las obras siguientes tratan temas más avanzados sobre el álgebra lineal. Si desea entender la teoría de la programación lineal y no lineal, debe ser experto en por lo menos uno de los siguientes libros:

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Hadley, G. *Linear Algebra.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1961.

Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications,* 3a ed. Orlando, Fla.: Academic Press, 1988.

Leontief, W. *Input–Output Economics.* Nueva York: Oxford University Press, 1966.

Teichroew, D. *An Introduction to Management Science: Deterministic Models.* Nueva York: Wiley, 1964. Un estudio más amplio sobre el álgebra lineal que se proporciona en este capítulo (en un nivel similar de dificultad).

*Basado en Leontief (1966). Véanse referencias al final del capítulo.

3

Introducción a la programación lineal

La programación lineal (PL) es una herramienta para resolver problemas de optimización. En 1947, George Dantzig desarrolló un método efectivo, el algoritmo simplex, para resolver problemas de programación lineal (también conocido como PL). Desde que surgió dicho algoritmo, la PL se utiliza para resolver problemas de optimización en industrias diversas, como los bancos, la educación, silvicultura, petróleo y transporte de carga. En un estudio de las 500 empresas de *Fortune*, 85% de las personas que contestaron la encuesta dijo que había usado programación lineal. Como una medida de la importancia de la programación lineal en investigación de operaciones, alrededor de 70% del material de este libro se enfoca en la programación lineal y las técnicas de optimización relacionadas.

En la sección 3.1, el estudio de la programación lineal se inicia describiendo las características generales que comparten los problemas de programación lineal. En la sección 3.2 y 3.3, se muestra cómo resolver en forma gráfica los problemas de programación lineal que contienen sólo dos variables. Al resolver esta programación lineal simple nos hará más sensibles para resolver problemas más complicados. En el resto del capítulo se explica cómo plantear modelos de programación lineal para situaciones de la vida cotidiana.

3.1 ¿Qué es un problema de programación lineal?

En esta sección se introduce la programación lineal y se definen los términos importantes que se usan para explicar los problemas de programación lineal.

EJEMPLO 1 Giapetto's Woodcarving (Juguetes de madera Giapetto)

Giapetto's Woodcarving, Inc., manufactura dos tipos de juguetes de madera: soldados y trenes. Un soldado se vende en 27 dólares y requiere 10 dólares de materia prima. Cada soldado que se fabrica incrementa la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 14 dólares. Un tren se vende en 21 dólares y utiliza 9 dólares de su valor en materia prima. Todos los trenes fabricados aumentan la mano de obra variable y los costos globales de Giapetto en 10 dólares. La fabricación de soldados y trenes de madera requiere dos tipos de mano de obra especializada: carpintería y acabados. Un soldado necesita dos horas de trabajo de acabado y una hora de carpintería. Un tren requiere una hora de acabado y una hora de carpintería. Todas las semanas, Giapetto consigue todo el material necesario, pero sólo 100 horas de trabajo de acabado y 80 de carpintería. La demanda de trenes es ilimitada, pero se venden cuando mucho 40 soldados por semana. Giapetto desea maximizar las utilidades semanales (ingresos – costos). Diseñe un modelo matemático para la situación de Giapetto que se use para maximizar las utilidades semanales de la empresa.

Solución Al desarrollar el modelo para Giapetto se exploran las características que comparten todos los problemas de programación lineal.

Variables de decisión Se empieza por definir las **variables de decisión** pertinentes. En cualquier modelo de programación lineal, las variables de decisión deben describir por completo las decisiones que se tienen que tomar (en este caso, Giapetto). Evidentemente, Giapetto debe decidir cuántos soldados y trenes se deben fabricar cada semana. Sin olvidar lo anterior, se define

$$x_1 = \text{cantidad de soldados fabricados cada semana}$$
$$x_2 = \text{cantidad de trenes fabricados a la semana}$$

Función objetivo En cualquier problema de programación lineal, el que toma las decisiones desea maximizar (por lo regular, los ingresos o las utilidades) o reducir al mínimo (casi siempre, los costos) algunas funciones de las variables de decisión. La función que se desea maximizar o minimizar recibe el nombre de **función objetivo**. En lo que se refiere al problema de Giapetto, se observa que los *costos fijos* (como la renta o los seguros) no dependen de los valores de x_1 y x_2. Por consiguiente, Giapetto se puede concentrar en maximizar (los ingresos semanales) – (costos de compra de la materia prima) – (otros costos variables).

Los ingresos y los costos por semana de Giapetto, se pueden expresar en términos de las variables de decisión x_1 y x_2. Sería una tontería que Giapetto fabricara más soldados de los que pueden venderse, así que se supone que todos los juguetes producidos se venderán. Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Ingresos por semana} &= \text{ingresos por semana proporcionados por los soldados}\\ &\quad + \text{ingresos por semana proporcionados por los trenes}\\ &= \left(\frac{\text{dólares}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{soldados}}{\text{semana}}\right) + \left(\frac{\text{dólares}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right)\\ &= 27x_1 + 21x_2\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\text{Costos de la materia prima a la semana} = 10x_1 + 9x_2$$
$$\text{Otros costos variables a la semana} = 14x_1 + 10x_2$$

Entonces, Giapetto quiere maximizar

$$(27x_1 + 21x_2) - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

Otra manera de ver que Giapetto quiere maximizar $3x_1 + 2x_2$ es observar que

$$\begin{aligned}\text{Ingresos semanales} &= \text{contribución semanal a la utilidad por parte de los soldados}\\ &\quad - \text{costos no fijos semanales}\\ &\quad + \text{contribución semanal a la utilidad por parte de los trenes}\\ &= \left(\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{soldados}}{\text{semana}}\right)\\ &\quad + \left(\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right)\end{aligned}$$

También,

$$\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{soldado}} = 27 - 10 - 14 = 3$$
$$\frac{\text{contribución a las utilidades}}{\text{tren}} = 21 - 9 - 10 = 2$$

Entonces, al igual que antes, se obtiene

$$\text{Ingresos semanales} - \text{costos no fijos semanales} = 3x_1 + 2x_2$$

Por consiguiente, el objetivo de Giapetto es escoger x_1 y x_2 para maximizar $3x_1 + 2x_2$. Se utiliza la variable z para denotar el valor de la función objetivo de cualquier PL. La función objetivo de Giapetto es

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \textbf{(1)}$$

(De aquí en adelante se abrevia "maximizar" con *max* y "minimiza" con *min*.) El coeficiente de una variable en la función objetivo se denomina **coeficiente** de la variable **de la función objetivo.** Por ejemplo, el coeficiente de la función objetivo para x_1 es 3, y el coeficiente de la función objetivo para x_2 es 2. En este ejemplo (y en muchos otros problemas), el coeficiente de la función objetivo para cada variable es simplemente la contribución de la variable a la utilidad de la compañía.

Restricción A medida que x_1 y x_2 se incrementan, la función objetivo de Giapetto se hace más grande. Esto quiere decir que si Giapetto fuera libre para escoger cualquier valor para x_1 y x_2, la compañía podría tener unas utilidades arbitrariamente grandes al escoger x_1 y x_2 muy grandes. Desafortunadamente, los valores de x_1 y x_2 están controlados por las siguientes tres restricciones (con frecuencia llamadas **limitaciones**):

Restricción 1 Se pueden usar cada semana no más de 100 horas de tiempo de acabado.

Restricción 2 Cada semana se pueden usar no más de 80 horas de tiempo de carpintería.

Restricción 3 Debido a la demanda limitada, cuando mucho se deben producir cada semana 40 soldados.

Se supone que la cantidad de materia prima en existencia es ilimitada, así que no hay restricción alguna relacionada con esto.

El siguiente paso en el planteamiento de un modelo matemático para el problema de Giapetto es expresar las restricciones 1 a 3 en términos de las variables de decisión x_1 y x_2. Para expresar la restricción 1 de acuerdo con x_1 y x_2, obsérvese que

$$\begin{aligned}\frac{\text{Total de horas de acabado}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{soldados fabricados}}{\text{semana}}\right)\\ &\quad+\left(\frac{\text{horas de acabado}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes fabricados}}{\text{semana}}\right)\\ &= 2(x_1) + 1(x_2) = 2x_1 + x_2\end{aligned}$$

Entonces, la restricción 1 se expresa como

$$2x_1 + x_2 \le 100 \tag{2}$$

Obsérvese que las unidades de todos los términos en (2) son horas de acabado por semana. *Para que una restricción sea razonable, todos los términos de la restricción deben tener las mismas unidades.* De lo contrario, uno está sumando peras con manzanas, por lo que la restricción no tendría significado alguno.

Para expresar la restricción 2 en términos de x_1 y x_2, nótese que

$$\begin{aligned}\frac{\text{Horas totales de carpintería}}{\text{Semana}} &= \left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{soldado}}\right)\left(\frac{\text{trenes}}{\text{semana}}\right)\\ &\quad+\left(\frac{\text{horas de carpintería}}{\text{tren}}\right)\left(\frac{\text{trenes fabricados}}{\text{semana}}\right)\\ &= 1(x_1) + 1(x_2) = x_1 + x_2\end{aligned}$$

Entonces, la restricción 2 se escribe como

$$x_1 + x_2 \le 80 \tag{3}$$

Obsérvese una vez más que las unidades de todos los términos en (3) son las mismas (en este caso, horas de carpintería a la semana).

Por último, el hecho de que cuando mucho se venden a la semana 40 soldados, se expresa limitando la producción semanal de soldados a máximo 40 de ellos. Así se tiene la siguiente restricción:

$$x_1 \le 40 \tag{4}$$

Por consiguiente, las ecuaciones (2) a (4) expresan las restricciones 1 a 3 en términos de las variables de decisión; se designan con el nombre de *restricciones* para el problema de programación lineal de Giapetto. Los coeficientes de las variables de decisión en las restricciones se conocen con el nombre de **coeficientes tecnológicos.** La razón del nombre es que los coeficientes tecnológicos reflejan a menudo las tecnologías utilizadas para producir distintos productos. Por ejemplo, el coeficiente tecnológico de x_2 en (3) es 1, lo cual indica que un soldado requiere una hora de carpintería. El número en el segundo miembro de cada restricción se denomina **segundo miembro de la restricción (smr)**. Con frecuencia el smr representa la cantidad de un recurso que está disponible.

Restricciones de signo Se tiene que dar respuesta a las preguntas siguientes para cada variable de decisión con el fin de completar la formulación de un problema de programación lineal: la variable de decisión puede asumir sólo valores no negativos, o bien, ¿la variable de decisión puede asumir valores tanto positivos como negativos?

Si una variable de decisión x_i sólo puede asumir valores no negativos, entonces se añade la **restricción de signo** $x_i \geq 0$. Si una variable x_i puede asumir tanto valores positivos como negativos (o cero), entonces se dice que x_i **no tiene restricciones de signo** (se abrevia con frecuencia (**nrs**). Por lo que se refiere al problema de Giapetto, es evidente que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Pero algunas variables podrían ser nrs en otros problemas. Por ejemplo, si x_i representa un saldo en efectivo de la empresa, entonces x_i podría ser considerada negativa si la empresa debe más dinero del que tiene a mano. En este caso sería conveniente clasificar x_i como nrs. Otros usos de las variables nrs se tratan en la sección 4.12.

Si se combinan las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ con la función objetivo (1) y las restricciones (2) a (4), se obtiene el modelo de optimización siguiente:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \text{(Función objetivo)} \qquad \textbf{(1)}$$

sujeto a (s.a)

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \qquad \text{(Restricción de acabado)} \qquad \textbf{(2)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 80 \qquad \text{(Restricción de carpintería)} \qquad \textbf{(3)}$$

$$x_1 \leq 40 \qquad \text{(Restricción por la demanda de soldados)} \qquad \textbf{(4)}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad \text{(Restricción de signo)}^{\dagger} \qquad \textbf{(5)}$$

$$x_2 \geq 0 \qquad \text{(Restricción de signo)} \qquad \textbf{(6)}$$

"Sujeto a" (s.a) quiere decir que los valores de las variables de decisión x_1 y x_2 deben satisfacer todas las limitaciones y todas las restricciones de signo.

Antes de definir de modo formal un problema de programación lineal, se establecen los conceptos de función lineal y desigualdad lineal.

DEFINICIÓN ■ Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una **función lineal** si y sólo si para algún conjunto de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. ■

Por ejemplo, $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ es una función lineal de x_1 y x_2, pero $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ no es una función lineal de x_1 y x_2.

DEFINICIÓN ■ Para cualquier función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y cualquier número b las desigualdades $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ y $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ son **desigualdades lineales.** ■

Por consiguiente, $2x_1 + 3x_2 \leq 3$ y $2x_1 + x_2 \geq 3$ son desigualdades lineales, pero $x_1^2x_2 \geq 3$ no es una desigualdad lineal.

† Las restricciones de signo limitan a usar ciertos valores para las variables de decisión, pero preferimos considerar las restricciones de signo como si estuvieran separadas de las limitaciones del problema. La razón será evidente cuando se estudie el algoritmo simplex en el capítulo 4.

DEFINICIÓN ■ Un **problema de programación lineal** (PL) es un problema de optimización para el cual se efectúa lo siguiente:

1 Se intenta maximizar (minimizar) una función *lineal* de las variables de decisión. La función que se desea maximizar o minimizar se llama *función objetivo*.

2 Los valores de las variables de decisión deben satisfacer un conjunto de *restricciones*. Cada restricción debe ser una ecuación lineal o una desigualdad lineal.

3 Se relaciona una *restricción de signo* con cada variable. Para cualquier variable x_i, la restricción de signo especifica que x_i no debe ser negativa ($x_i \geq 0$) o no tener restricciones de signo (nrs). ■

Como el objetivo de Giapetto es una función lineal de x_1 y x_2, y todas las restricciones de Giapetto son desigualdades lineales, el problema de Giapetto es de programación lineal. Obsérvese que el problema de Giapetto es característico de una amplia clase de problemas de programación lineal en los cuales el objetivo de quien toma las decisiones es maximizar la utilidad sujeta a recursos escasos.

Suposiciones de proporcionalidad y de aditividad

El hecho de que la función objetivo para una PL debe ser una función lineal de las variables de decisión, tiene dos consecuencias.

1 La contribución de la función objetivo para cada variable de decisión, es proporcional al valor de ésta. Por ejemplo, la contribución a la función objetivo por hacer cuatro soldados ($4 \times 3 =$ \$12) es exactamente cuatro veces la contribución a la función objetivo por hacer un soldado (\$3).

2 La contribución a la función objetivo para cualquier variable, es independiente de los valores de las otras variables de decisión. Es decir, no importa cuál sea el valor de x_2, pero la manufactura de x_1 soldados siempre contribuirá con $3x_1$ dólares a la función objetivo.

De manera similar, el hecho de que cada restricción de PL debe ser una desigualdad lineal o una ecuación lineal, tiene dos consecuencias:

1 La contribución de cada variable al primer miembro de cada restricción, es proporcional al valor de la variable. Por ejemplo, se requieren exactamente tres veces más horas de acabado ($2 \times 3 = 6$ horas de acabado) para manufacturar tres soldados, que para fabricar un soldado (dos horas de acabado).

2 La contribución de una variable al primer miembro de cada restricción, es independiente de los valores de la variable. Por ejemplo, no importa cuál sea el valor de x_1, pero la manufactura de x_2 trenes requiere x_2 horas de acabado y x_2 horas de carpintería.

La primera consecuencia que se da en cada lista, se denomina **suposición de proporcionalidad de la programación lineal.** La consecuencia 2 de la primera lista, implica que el valor de la función objetivo es la suma de las contribuciones de cada una de las variables, y la consecuencia 2 de la segunda lista, es que el primer miembro de cada restricción es la suma de las contribuciones de cada variable. Por esta razón, la segunda consecuencia de cada lista se denomina **suposición aditiva de la programación lineal.**

Para que una programación lineal represente en forma adecuada una situación de la vida cotidiana, las variables de decisión deben satisfacer tanto la suposición de proporcionalidad como la de aditividad. También se tiene que cumplir con otras dos suposiciones antes de que una PL represente en forma adecuada una situación real: las suposiciones de divisibilidad y de certidumbre.

Suposición de divisibilidad

Esta suposición requiere que todas las variables de decisión puedan asumir valores fraccionarios. Por ejemplo, en el problema de Giapetto, la suposición de divisibilidad quiere decir que es aceptable fabricar 1.5 soldados o 1.63 trenes. Como Giapetto no puede producir en realidad una cantidad fraccionaria de trenes o de soldados, la suposición de divisibilidad no se cumple en el problema de Giapetto. Un problema de PL en el cual alguna de las variables, o todas, debe ser un número entero no negativo, recibe el nombre de **problema de programación entera.** La solución de los problemas de programación entera se trata en el capítulo 9.

En muchas situaciones donde la divisibilidad no está presente, el redondeo de las variables a un entero, en la solución óptima de PL, proporciona una solución razonable. Suponga que la solución óptima para una PL establece que una compañía de automóviles debe fabricar 150 000.4 vehículos compactos durante el presente año. En este caso, usted puede recomendar que la compañía fabrique 150 000 o 150 001 automóviles compactos, y tener la confianza de que ese valor se aproximaría de manera razonable a un plan de producción óptimo. Por otro lado, si el número de sitios para misiles que puede usar Estados Unidos fuera una variable en una PL y la solución óptima recomendara que se deberían construir 0.4 sitios, habría una gran diferencia si se redondeara el número de sitios a cero o a uno. En esta situación, se podrían aplicar los métodos de programación entera del capítulo 9, porque el número de sitios para misiles definitivamente no es divisible.

Suposición de certidumbre

Para esta suposición, se requiere conocer con certeza todos los parámetros (coeficiente de la función objetivo, segundo miembro y coeficientes tecnológicos. Si hay incertidumbre en la cantidad exacta de horas de carpintería y acabado necesarias para manufacturar un tren, se incurriría en una violación a la suposición de certidumbre.

Regiones factibles y solución óptima

Dos de los conceptos más básicos relacionados con los problemas de programación lineal, son región factible y solución óptima. Con el objeto de definir estos conceptos, se usa el término *punto* para señalar una especificación del valor para cada variable de decisión.

DEFINICIÓN ■ La **región factible** para una PL, es el conjunto de todos los puntos que satisfacen las limitaciones y las restricciones de signo de la PL. ■

Por ejemplo, en el problema de Giapetto, el punto ($x_1 = 40$, $x_2 = 20$) está en la región factible. Obsérvese que $x_1 = 40$ y $x_2 = 20$ cumplen con las limitaciones (2) a (4) y las restricciones de signo (5) y (6):

Restricción (2), $2x_1 + x_2 \leq 100$, se cumple porque $2(40) + 20 \leq 100$.

Restricción (3), $x_1 + x_2 \leq 80$, se cumple porque $40 + 20 \leq 80$.

Restricción (4), $x_1 \leq 40$, se cumple porque $40 \leq 40$.

Restricción (5), $x_1 \geq 0$, se cumple porque $40 \geq 0$.

Restricción (6), $x_2 \geq 0$, se cumple porque $20 \geq 0$.

Por otro lado, el punto ($x_1 = 15, x_2 = 70$) no está en la región factible porque si bien $x_1 = 15$ y $x_2 = 70$ satisfacen (2), (4), (5) y (6) no cumplen con (3): $15 + 70$ no es menor o igual que 80. Se dice que cualquier punto que no está en la región factible es un **punto no factible.** Como ejemplo de un punto no factible, considérese ($x_1 = 40, x_2 = -20$). Aunque este punto cumple con todas las limitaciones y la restricción de signo (5), no es factible porque no satisface la restricción de signo (6), $x_2 \geq 0$. La región factible para el problema de Giapetto es el conjunto de planes de producción posibles que Giapetto debe considerar en la búsqueda de un plan de producción óptimo.

DEFINICIÓN ■ Para un problema de maximización, una **solución óptima** para una PL es un punto con el valor de la función objetivo más grande en la región factible. De igual manera, para un problema de minimización, una solución óptima es un punto con el valor de la función objetivo más pequeño en la región factible. ■

La mayor parte de PL tiene sólo una solución óptima. Sin embargo, algunas PL no tienen solución óptima, y otras tienen una cantidad infinita de soluciones (estas situaciones se tratan en la sección 3.3). En la sección 3.2 se demuestra que la única solución óptima para el problema de Giapetto es ($x_1 = 20, x_2 = 60$). Esta solución genera un valor de la función objetivo de

$$z = 3x_1 + 2x_2 = 3(20) + 2(60) = 180 \text{ dólares}$$

Cuando se dice que ($x_1 = 20, x_2 = 60$) es la solución óptima para el problema de Giapetto, lo que se quiere dar a entender es que ningún punto en la región factible tiene un valor de la función objetivo que sobrepase 180. Giapetto puede maximizar la utilidad si fabrica 20 soldados y 60 trenes cada semana. Si Giapetto produjera 20 soldados y 60 trenes cada semana, las utilidades semanales serian 180 dólares menos costos fijos semanales. Por ejemplo, si los únicos costos fijos de Giapetto fueran renta de 100 dólares por semana, entonces la utilidad a la semana seria de $180 - 100 = 80$ dólares por semana.

PROBLEMAS

Grupo A

1 El agricultor Jones debe decidir cuántos acres de maíz y trigo tiene que plantar este año. Un acre de trigo produce 25 bushels de trigo y requiere 10 horas de trabajo por semana. Un acre de maíz produce 10 bushels de maíz y requiere cuatro horas de trabajo a la semana. Todo el trigo se vende a 4 dólares el bushel, y el maíz se vende a 3 dólares el bushel. Se dispone de siete acres de tierra y 40 horas por semana de trabajo. Las regulaciones gubernamentales establecen que por lo menos 30 bushels de maíz se produzcan durante el año actual. Sea x_1 = número de acres con siembra de maíz y x_2 = número de acres con siembra de trigo. Utilice estas variables de decisión y plantee una PL cuya solución le indique al agricultor Jones cómo maximizar el ingreso total a partir del trigo y el maíz.

2 Conteste estas preguntas relacionadas con el problema 1:

a ¿Está ($x_1 = 2, x_2 = 3$) en la región factible?

b ¿Está ($x_1 = 4, x_2 = 3$) en la región factible?

c ¿Está ($x_1 = 2, x_2 = -1$) en la región factible?

d ¿Está ($x_1 = 3, x_2 = 2$) en la región factible?

3 Utilice las variables x_1 = número de bushels de maíz producido y x_2 número de bushels de trigo producidos para replantear la PL del agricultor Jones.

4 Truckco fabrica dos tipos de camiones: el 1 y el 2. Cada camión debe pasar por el taller de pintura y el taller de ensamble. Si el taller de pintura estuviera destinado del todo a pintar los camiones tipo 1, entonces se podrían pintar 800 por día; si el taller de pintura estuviera dedicado por completo a pintar los camiones tipo 2, entonces se podrían pintar 700 por día. Si el taller de ensamble se dedicara sólo a ensamblar motores para los camiones tipo 1, entonces se podrían ensamblar 1 500 por día; si el taller de ensamble se dedicara sólo a ensamblar motores para los camiones tipo 2, entonces se podrían ensamblar 1 200 por día. Cada camión tipo 1 contribuye con 300 dólares a las utilidades; cada camión tipo 2 contribuye con 500 dólares. Plantee un PL que maximice las utilidades de Truckco.

Grupo B

5 ¿Por qué no se permite que un PL tenga limitaciones < o >?

3.2 Solución gráfica de los problemas de programación lineal de dos variables

Es posible resolver en forma gráfica cualquier PL de dos variables. Las variables se denominan siempre x_1 y x_2, y los ejes coordenados, ejes x_1 y x_2. Suponga que se desea graficar el conjunto de puntos que satisface

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \tag{7}$$

El mismo conjunto de puntos (x_1, x_2) satisface

$$3x_2 \leq 6 - 2x_1$$

Esta última desigualdad se podría escribir también como

$$x_2 \leq \tfrac{1}{3}(6 - 2x_1) = 2 - \tfrac{2}{3}x_1 \tag{8}$$

Puesto que al desplazarse hacia abajo sobre la gráfica decrece x_2 (véase figura 1), el conjunto de puntos que satisface (8) y (7) queda sobre la recta $x_2 = 2 - \frac{2}{3}x$, o debajo de ella. Este conjunto de puntos se señala con un sombreado más oscuro en la figura 1. Sin embargo, nótese que $x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$, $3x_2 = 6 - 2x_1$ y $2x_1 + 3x_2 = 6$ son la misma recta. Esto significa que el conjunto de puntos que satisface (7) queda sobre la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$ o debajo de ella. De igual manera, el conjunto de puntos que satisface $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ queda sobre la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$ o arriba de ella. (Estos puntos de indican con un sombreado menos oscuro en la figura 1.)

Considérese una limitación de desigualdad lineal de la forma $f(x_1, x_2) \geq b$ o $f(x_1, x_2) \leq b$. En general, se puede demostrar que, en dos dimensiones, el conjunto de puntos que satisface una desigualdad lineal comprende los puntos en la recta $f(x_1, x_2) = b$, que define la desigualdad más todos los puntos de un lado de la recta.

Hay una manera fácil de determinar el lado de la recta para el cual la desigualdad tal como $f(x_1, x_2) \leq b$ o $f(x_1, x_2) \geq b$ se cumple. Justamente se escoge cualquier punto P que no satisfaga la recta $f(x_1, x_2) = b$. Se determina si P satisface la desigualdad. Si es así, entonces todos los puntos del *mismo* lado que P de $f(x_1, x_2) = b$ satisfarán la desigualdad. Pero si P no cumple con la desigualdad, entonces todos los puntos sobre el *otro* lado de $f(x_1, x_2) = b$, que no contiene a P, satisfarán la desigualdad. Por ejemplo, para determinar cuáles son los puntos que satisfacen a $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ (puntos arriba o abajo de la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$), se observa que (0, 0) no satisface $2x_1 + 3x_2 \geq 6$. Como (0, 0) está *abajo* de la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$, el conjunto de puntos que cumple con $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ comprende la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$ y los puntos por *arriba* de la recta $2x_1 + 3x_2 = 6$. Todo esto está de acuerdo con la figura 1.

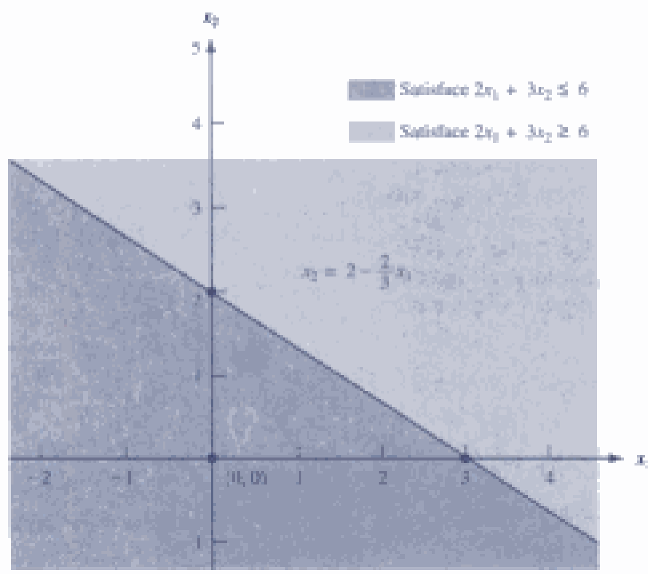


FIGURA 1
Gráfica de una desigualdad lineal

Cómo determinar la solución factible

Ahora se ilustra cómo resolver en forma gráfica PL de dos variables mediante la resolución del problema de Giapetto. Para empezar, se determina en forma gráfica la región factible para el problema de Giapetto. La región factible para el problema de Giapetto es el conjunto de todos los puntos (x_1, x_2) que satisfacen

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \qquad \text{(Limitaciones)} \tag{2}$$
$$x_1 + x_2 \leq 80 \tag{3}$$
$$x_1 \leq 40 \tag{4}$$
$$x_1 \geq 0 \qquad \text{(Restricciones de signo)} \tag{5}$$
$$x_2 \geq 0 \tag{6}$$

Para que un punto (x_1, x_2) esté en la región factible, (x_1, x_2) debe satisfacer *todas* las desigualdades (2) a (6). Obsérvese que los únicos puntos que cumplen (5) y (6) quedan en el primer cuadrante del plano $x_1 - x_2$. Lo anterior se indica en la figura 2 mediante las flechas que señalan a la derecha del eje x_2 y hacia arriba del eje x_1. Por lo tanto, cualquier punto que esté fuera del primer cuadrante no puede estar en la región factible. Esto significa que la región factible es el conjunto de puntos que se encuentra en el primer cuadrante y que cumple con (2) a (4).

El método para determinar el conjunto de puntos que satisface una desigualdad lineal, también identificará los que cumplen con (2) a (4). En la figura 2 se observa que todos los puntos que se encuentran abajo de la recta *AB* o sobre ella (*AB* es la recta $2x_1 + x_2 = 100$). Todos los puntos que se encuentran abajo de la recta *CD* o sobre ella (*CD* es la recta $x_1 + x_2 = 80$) cumplen con la desigualdad (3). Por último, todos los puntos que se encuentran a la izquierda de la recta *EF* o sobre ella (*EF* es la recta $x_1 = 40$) cumplen con (4). El lado de una recta que satisface una desigualdad se indica por la dirección de las flechas en la figura 2.

En la figura 2 se observa que el conjunto de puntos del primer cuadrante que cumple con (2), (3) y (4) está limitado por el polígono de cinco lados *DGFEH*. Cualquier punto en este polígono o en su interior está en la región factible. Cualquier otro punto no satisface ni una de las desigualdades (2) a (6). Por ejemplo, el punto (40, 30) queda fuera de *DGFEH* porque está arriba del segmento de recta *AB*. Por lo tanto, (40, 30) es no factible porque no satisface (2).

Un modo fácil de encontrar la región factible es determinar el conjunto de puntos no factibles. Nótese que todos los puntos por arriba de la recta *AB* de la figura 2 son no fac-

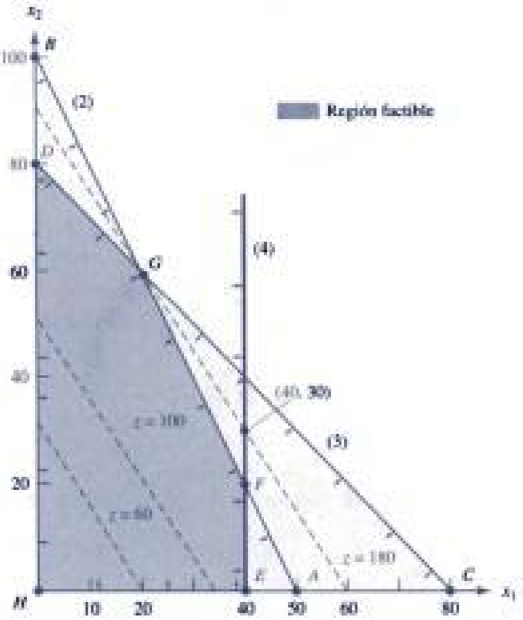


FIGURA 2
Solución gráfica del problema de Giapetto

tibles, porque incumplen con (2). De manera similar, todos los puntos por arriba de *CD* son no factibles, porque no satisfacen (3). Asimismo, todos los puntos a la derecha de la vertical *EF* son no factibles, porque no se ajustan a (4). Después de que todos estos puntos son eliminados, sólo quedan los de la región factible (*DGFEH*).

Cómo determinar la solución óptima

Tras haber identificado la región factible para el problema de Giapetto, se busca la solución óptima, la cual es el punto de la región factible con el valor más grande de $z = 3x_1 + 2x_2$. Para encontrar la solución óptima, es necesario graficar una recta en la cual todos los puntos tengan el mismo valor z. En un problema de maximización, esta recta recibe el nombre de **recta de isoutilidad** (en un problema de minimización, **recta de isocostos**). Para trazar una recta de isoutilidad, se escoge un punto en la región factible y se calcula su valor z. Sea el punto (20, 0). Para (20, 0), $z = 3(20) + 2(0) = 60$. Por consiguiente, (20, 0) queda en la recta de isoutilidad $z = 3x_1 + 2x_2 = 60$. Si se vuelve a escribir $3x_1 + 2x_2 = 60$ como $x_2 = 30 - \frac{3}{2}x_1$, entonces la recta de isoutilidad $3x_1 + 2x_2 = 60$ tiene una pendiente de $-\frac{3}{2}$. Puesto que todas las rectas de isoutilidad son de la forma $3x_1 + 2x_2 =$ constante, todas las rectas de isoutilidad tienen la misma pendiente. *Esto significa que una vez que se trazó una recta de isoutilidad, es posible encontrar todas las otras rectas de isoutilidad, desplazándose en forma paralela a la recta de isoutilidad que ya se graficó.*

Ya queda claro cómo encontrar la solución óptima para una PL de dos variables. Después de trazar una sola recta de isoutilidad, es posible generar otras rectas de isoutilidad desplazándose en forma paralela a la recta ya graficada en una dirección en que se incremente z (en el caso de un problema de maximización). Después de un punto, las rectas de isoutilidad ya no intersecan la región factible. La última recta de isoutilidad que corta (toca) la región factible define el valor z más grande de cualquier punto en la región factible, e indica la solución óptima para la PL. En este problema, la función objetivo $z = 3x_1 + 2x_2$ aumenta al desplazarse en una dirección para la cual tanto x_1 como x_2 se incrementan. Por lo tanto, usted puede construir otras rectas de isoutilidad mientras se desplaza en forma paralela a $3x_1 + 2x_2 = 60$ en una dirección hacia el noreste (hacia arriba y hacia la derecha). En la figura 2, se puede observar que la recta de isoutilidad que pasa por el punto G es la última recta que interseca la región factible. Por consiguiente, G es el punto con el valor z más grande en la región factible y, por lo tanto, la solución óptima al problema de Giapetto. Obsérvese que el punto G es donde se cortan las rectas $2x_1 + x_2 = 100$ y $x_1 + x_2 = 80$. Al resolver estas ecuaciones en forma simultánea, se obtiene que $(x_1 = 20, x_2 = 60)$ es la solución óptima para el problema de Giapetto. El valor óptimo de z se encuentra al sustituir estos valores de x_1 y x_2 en la función objetivo. Entonces, el valor óptimo de z es $z = 3(20) + 2(60) = 180$.

Restricciones activas

Tras haber determinado la solución óptima para una PL, es útil (véanse capítulos 5 y 6) clasificar cada restriccion en restricciones activas (obligatorias) e inactivas.

DEFINICIÓN ■ Una restricción es activa u obligatoria si tanto el primero como el segundo miembros de las restricciones son iguales cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción. ■

Por lo tanto, (2) y (3) son restricciones activas.

DEFINICIÓN ■ Una restricción es inactiva si no son iguales el primero y el segundo miembros de la restricción cuando los valores óptimos de las variables de decisión se sustituyen en la restricción. ■

Como $x_1 = 20$ es menor que 40, (4) es una restricción inactiva.

Conjuntos convexos, puntos extremos y PL

La región factible para el problema de Giapetto es un ejemplo de un conjunto convexo

DEFINICIÓN ■ Un conjunto de puntos S es un **conjunto convexo** si el segmento de recta que une cualquier par de puntos en S está totalmente contenido en S. ■

En la figura 3 se ilustran cuatro configuraciones de esta definición. Cada segmento de recta que une dos puntos en S, contiene sólo puntos en S en las figuras 3a y 3b. Por lo tanto, en estas dos figuras, S es convexo, pero en las figuras 3c y 3d, S no es convexo. En cada figura, los puntos A y B están en S, pero hay puntos en el segmento de recta AB que no están contenidos en S. En el estudio de la programación lineal, un cierto tipo de puntos en un conjunto convexo (denominados *puntos extremos*) es de gran interés.

DEFINICIÓN ■ Para cualquier conjunto convexo S, un punto P en S es un **punto extremo** si para cada segmento de recta que está completamente en S y contiene al punto P, éste es un punto terminal del segmento de recta. ■

Por ejemplo, en la figura 3a, cada punto de la circunferencia es un punto extremo del círculo. En la figura 3b, los puntos A, B, C y D son puntos extremos de S. Aunque el punto E está en el límite de S en la figura 3b, E no es un punto extremo de S porque E está en el segmento de recta AB (AB está completamente en S), y no es un punto terminal del segmento de recta AB. Los puntos extremos reciben algunas veces el nombre de **vértices** porque si el conjunto S es un polígono, los puntos extremos de S serán los vértices, o esquinas, del polígono.

La región factible del problema de Giapetto es un conjunto convexo. Esto no es un accidente: se puede demostrar que la región factible para cualquier PL es un conjunto convexo. En la figura 2 se observa que los puntos extremos de la región factible son simplemente los puntos D, F, E, G y H. Se puede demostrar que la región factible para cualquier PL tiene sólo un número infinito de puntos extremo. También nótese que la solución óptima para el problema de Giapetto (punto G) es un punto extremo de la región factible. Se puede demostrar que *cualquier PL que tiene una solución óptima tiene un punto extremo que es óptimo.* Este resultado es muy importante porque disminuye el conjunto de puntos que generan una solución óptima a partir de toda la región factible (la cual contiene por lo regular un número *infinito* de puntos) hasta el conjunto de puntos extremo (un conjunto *finito*).

Por lo que toca al problema de Giapetto, es fácil ver por qué la solución óptima debe ser un punto extremo de la región factible. Se observa que z aumenta a medida que las rectas de isoutilidades se desplazan en una dirección noreste, de tal manera que los valores más grandes de z en la región factible deben presentarse en algún punto P que no tiene puntos en la región factible al noreste de P. Esto significa que la solución óptima debe quedar en algún lugar sobre el límite de la región factible $DGFEH$. La PL debe tener un punto extremo que es óptimo, porque para cualquier segmento de recta sobre el límite de la región factible, el valor más grande de z sobre el segmento de recta debe estar en uno de los puntos terminales del segmento de recta.

Para entender lo anterior, véase el segmento de recta FG de la figura 2. FG es parte de la recta $2x_1 + x_2 = 100$ de pendiente -2. Si uno se mueve a lo largo de FG y disminuye x_1 en 1, entonces x_2 aumentará en dos, y el valor de z cambia como sigue: $3x_1$ cae a $3(1) = 3$

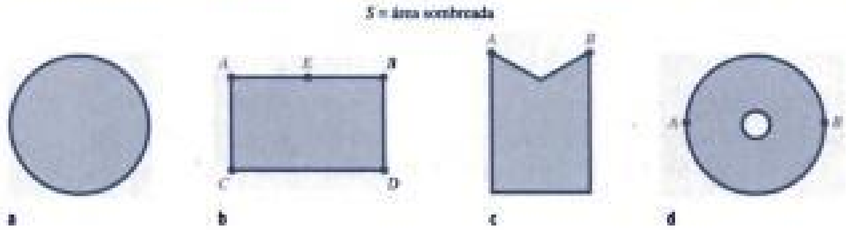


FIGURA 3
Conjuntos convexos y no convexos

y $2x_2$ sube a $2(2) = 4$. Por consiguiente, z aumenta en total a $4 - 3 = 1$. Esto significa que al desplazarse a lo largo de FG en una dirección en la que decrece x_1 se incrementa z. Por lo tanto, el valor de z en el punto G debe sobrepasar el valor de z en cualquier otro punto del segmento de recta FG.

Un razonamiento similar demuestra que para cualquier función objetivo, el valor máximo de z en un segmento de recta dado debe encontrarse en un punto terminal del segmento de recta. Por lo tanto, para cualquier PL, el valor más grande de z en la región factible debe estar en el punto terminal o extremo de uno de los segmentos de recta que forman el límite de dicha región. En pocas palabras, uno de los puntos extremo de la región factible debe ser óptimo. (Para comprobar que ya entendió el concepto, demuestre que si la función objetivo del problema de Giapetto fuera $z = 6x_1 + x_2$, el punto F sería el óptimo, en tanto que si la función objetivo de Giapetto fuera $z = x_1 + 6x_2$, el punto D sería el óptimo).

La prueba de que una PL siempre tiene un punto extremo óptimo dependía en gran medida del hecho de que tanto la función objetivo como las restricciones fueran funciones lineales. En el capítulo 11, se demuestra que para un problema de optimización en el cual la función objetivo o algunas de las restricciónes no son lineales, la solución óptima para el problema de optimización podría no encontrarse en un punto extremo.

Solución gráfica de los problemas de minimización

EJEMPLO 2 Dorian auto

Dorian Auto fabrica automóviles de lujo y camiones. La compañía opina que sus clientes más idóneos son hombres y mujeres de altos ingresos. Para llegar a estos grupos, Dorian Auto ha emprendido una ambiciosa campaña publicitaria por TV, y decidió comprar comerciales de un minuto en dos tipos de programas: programas de comedia y juegos de futbol americano. Cada comercial en programas de comedia lo ven 7 millones de mujeres de altos ingresos y 2 millones de hombres también de altos ingresos. Dos millones de mujeres de altos ingresos y 12 millones de hombres de altos ingresos ven cada comercial en juegos de futbol. Un anuncio de un minuto en los programas de comedia cuesta 50 000 dólares, y un comercial de un minuto en el juego de futbol cuesta 100 000 dólares. A Dorian le gustaría que por lo menos 28 millones de mujeres de altos ingresos y 24 millones de hombres de altos ingresos vieran sus comerciales. Utilice la programación lineal para determinar cómo Dorian puede alcanzar sus objetivos publicitarios al mínimo costo.

Solución Dorian debe decidir cuántos anuncios en los programas de comedia y en el de futbol debe comprar, por lo que las variables de decisión son

x_1 = número de anuncios de un minuto comprados en programas de comedia
x_2 = número de anuncios de un minuto comprados en los juegos de futbol

Luego, Dorian quiere minimizar el costo total de los anuncios (en miles de dólares).

Costo total de los anuncios
= costo de los anuncios en programas de comedia + costo de los anuncios en juegos de futbol

$$= \left(\frac{\text{costo}}{\text{anuncio en programas de comedia}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{total de anuncios}\\ \text{en programas de comedia}\end{array}\right)$$

$$+ \left(\frac{\text{costo}}{\text{anuncio en el futbol}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{total de anuncios}\\ \text{en el futbol}\end{array}\right)$$

$$= 50x_1 + 100x_2$$

Entonces, la función objetivo de Dorian es

$$\min z = 50x_1 + 100x_2 \tag{9}$$

Dorian se enfrenta a las siguientes limitaciones:

Restricción 1 Los anuncios deben alcanzar por lo menos a 28 millones de mujeres de altos ingresos.

Restricción 2 Los anuncios deben llegar por lo menos a 24 millones de hombres de altos ingresos.

Para expresar las limitaciones 1 y 2 en términos de x_1 y de x_2, sea MAI las mujeres televidentes de altos ingresos y HAI los hombres televidentes de altos ingresos (en millones).

$$\begin{aligned}
\text{MAI} &= \left(\frac{\text{MAI}}{\text{anuncios en programas de comedia}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en programas de comedia}\end{matrix}\right)\\
&\quad + \left(\frac{\text{MAI}}{\text{anuncios en el futbol}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en el futbol}\end{matrix}\right)\\
&= 7x_1 + 2x_2\\
\text{HAI} &= \left(\frac{\text{HAI}}{\text{anuncios en programas de comedia}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en programas de comedia}\end{matrix}\right)\\
&\quad + \left(\frac{\text{HAI}}{\text{anuncios en el futbol}}\right)\left(\begin{matrix}\text{total de anuncios}\\ \text{en el futbol}\end{matrix}\right)\\
&= 2x_1 + 12x_2
\end{aligned}$$

La restricción 1 ya se puede expresar como

$$7x_1 + 2x_2 \geq 28 \tag{10}$$

y la restricción 2 se podría expresar como

$$2x_1 + 12x_2 \geq 24 \tag{11}$$

Las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ son necesarias, así que el PL de Dorian está dada por

$$\begin{aligned}
\min z &= 50x_1 + 100x_2\\
\text{s.a}\quad & 7x_1 + 2x_2 \geq 28 \qquad \text{(MAI)}\\
& 2x_1 + 12x_2 \geq 24 \qquad \text{(HAI)}\\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Este problema es característico de una gran diversidad de aplicaciones de PL, en las cuales el que toma la decisión desea minimizar el costo de cumplir un cierto conjunto de exigencias. Con el fin de resolver en forma gráfica este PL, se empieza por graficar la región factible (figura 4). Obsérvese que los puntos que se encuentran en la recta AB o arriba de ella (AB es una parte de la recta $7x_1 + 2x_2 = 28$) satisfacen (10) y que los puntos que se encuentran en la recta CD o arriba de ella (CD es una parte de la recta $2x_1 + 12x_2 = 24$) satisfacen (11). En la figura 4, se observa que los únicos puntos del primer cuadrante que satisfacen tanto a (10) como a (11), son los puntos de la región sombreada limitada por el eje x_1, CEB, y por el eje x_2.

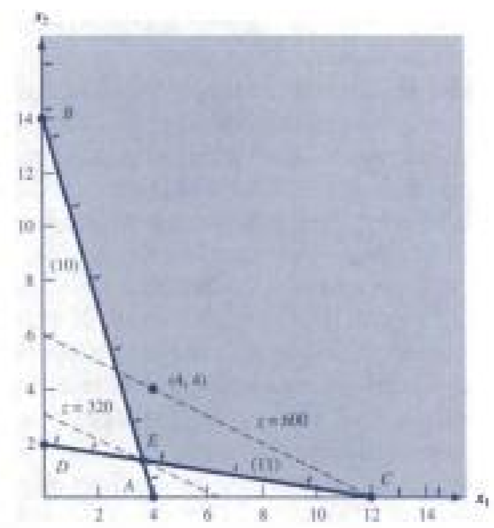


FIGURA 4
Solución gráfica para el problema de Dorian

Al igual que en el problema de Giapetto, el problema de Dorian tiene una región factible convexa, pero la región factible de Dorian contiene puntos para los cuales el valor de al menos una variable puede ser arbitrariamente grande, al contrario que en el caso de Giapetto. Una región factible de este tipo se llama **región factible no acotada.**

Dado que Dorian desea minimizar el costo total de los anuncios, la solución óptima del problema es el punto que tenga el valor z *más pequeño* en la región factible. Para encontrar la solución óptima, es necesario trazar una *recta de isocostos* que cruza la región factible. Una recta de isocostos es cualquier recta en la cual todos los puntos tienen el mismo valor z (el mismo costo). Se escoge en forma arbitraria la recta de isocostos que pasa por el punto ($x_1 = 4$, $x_2 = 4$). Para este punto, $z = 50(4) + 100(4) = 600$, y se grafica la recta de isocostos $z = 50x_1 + 100x_2 = 600$.

Se consideran las rectas paralelas a la recta de isocostos $50x_1 + 100x_2 = 600$ en la dirección en que decrece z (suroeste). El último punto en la región factible que cruza una recta de isocostos será el punto en la región factible que tiene el valor más pequeño de z. En la figura 4 se puede ver que el punto E tiene el valor z más pequeño que cualquier punto en la región factible; ésta es la solución óptima para el problema de Dorian. Obsérvese que el punto E es donde se cortan las rectas $7x_1 + 2x_2 = 28$ y $2x_1 + 12x_2 = 24$. Al resolver en forma simultánea estas ecuaciones, se obtiene la solución óptima ($x_1 = 3.6$, $x_2 = 1.4$). El valor óptimo de z se determina al sustituir estos valores de x_1 y x_2 en la función objetivo. Entonces, el valor óptimo de z es $z = 50(3.6) + 100(1.4) = 320 = 320\,000$. dólares. Puesto que con el punto E se cumplen las limitaciones MAI y HAI de igualdad, ambas limitaciones son activas.

¿El modelo de Dorian cumple con las suposiciones de la programación lineal señaladas en la sección 3.1?

Para que la Suposición de proporcionalidad sea válida, cada anuncio extra en programas de comedia debe añadir exactamente siete millones de MAI y dos millones de HAI. Estos valores contradicen la evidencia empírica, la cual señala que después de un cierto punto los comerciales originan menores ganancias. Después de 500 comerciales de automóviles, por ejemplo, que se han lanzado al aire, la mayoría de las personas quizá ha visto uno, por lo que ya no deja nada bueno lanzar al aire más anuncios. Por consiguiente, se viola la Suposición de proporcionalidad.

Se utiliza la Suposición de Aditividad para justificar escribir (total de MAI televidentes) = (MAI televidentes de los anuncios en programas de comedia) + (MAI televidentes de los anuncios de futbol). Muchos verán, en realidad, un comercial de Dorian en programas de comedia, así como un anuncio en el futbol. Se está contando dos veces a estas personas, lo cual crea un panorama impreciso del número total de personas que ven los anuncios de Dorian. El hecho de que la misma persona vea más de un tipo de anuncio quiere decir que la efectividad de un anuncio en programas de comedia depende de la cantidad de comerciales en el futbol. Esto viola la Suposición de Aditividad.

Si sólo hay comerciales de un minuto, entonces no es razonable recomendar que Dorian compre 3.6 anuncios en programas de comedia y 1.4 comerciales en el futbol, por lo que se viola la Suposición de divisibilidad; entonces, el problema de Dorian se debe considerar como un problema de programación entera. En la sección 9.3 se demuestra que si el problema de Dorian se resuelve como un problema de programación entera, entonces el costo mínimo se consigue al escoger ($x_1 = 6$, $x_2 = 1$) o bien ($x_1 = 4$, $x_2 = 2$). Para cualquiera de las soluciones, el costo mínimo es 400 000 dólares. Esta cantidad es 25% superior al costo que se obtiene a partir de la solución óptima de PL.

Como no hay manera de saber con certeza cuántos televidentes se suman por cada tipo de comercial, también se incumple la suposición de certidumbre. Por lo tanto, todas las suposiciones de la programación lineal se incumplen en el problema de Dorian Autos. A pesar de estas desventajas, los analistas han usado modelos similares para ayudar a las empresas a determinar su mezcla de productos óptima (plan de producción óptimo).[†]

[†] Lilien y Kotler (1983).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva en forma gráfica el problema 1 de la sección 3.1.

2 Resuelva en forma gráfica el problema 4 de la sección 3.1.

3 Leary Chemical fabrica tres productos químicos: A, B y C. Estos productos de obtienen por medio de dos procesos de producción: 1 y 2. El desarrollo del proceso 1 durante una hora cuesta 4 dólares y produce tres unidades de A, una de B y una de C. Efectuar el proceso 2 durante una hora cuesta un dólar y se obtienen una unidad de A y una de B. Para cumplir con las demandas de los clientes se tienen que producir todos los días por lo menos 10 unidades de A, 5 de B y 3 de C. Determine en forma gráfica un plan de producción diario que minimice el costo de cumplir las demandas diarias de Leary Chemical.

4 Para cada una de las siguientes funciones, determine la dirección en la cual la función objetivo se incrementa:

a $z = 4x_1 - x_2$

b $z = -x_1 + 2x_2$

c $z = -x_1 - 3x_2$

5 Furnco fabrica escritorios y sillas. Cada escritorio utiliza cuatro unidades de madera y las sillas utilizan tres. Un escritorio contribuye con 40 dólares a la utilidad, y una silla contribuye con 25 dólares. Las restricciones del mercado requieren que la cantidad de sillas fabricada sea por lo menos el doble del número de escritorios producidos. Si se dispone de 20 unidades de madera, plantee un PL para maximizar la utilidad de Furnco. Luego resuelva en forma gráfica el PL.

6 Jane es dueña de una granja de 45 acres. En ellos va a sembrar trigo y maíz. Cada acre sembrado con trigo rinde 200 dólares de utilidad; cada acre sembrado con maíz proporciona 300 dólares de utilidad. La mano de obra y el fertilizante que se utiliza para cada acre, aparece en la tabla 1. Se dispone de 100 trabajadores y de 120 toneladas de fertilizante. Mediante programación lineal determine cómo Jane puede maximizar las utilidades.

TABLA 1

	Trigo	Maíz
Mano de obra	3 trabajadores	2 trabajadores
Fertilizante	2 t	4 t

3.3 Casos especiales

Los problemas de Giapetto y de Dorian tenían una solución óptima única. En esta sección se tratan tres tipos de PL que no tienen una solución óptima única.

1 Algunas PL tienen un número infinito de soluciones óptimas (*soluciones óptimas múltiples o alternativas*).

2 Algunas PL no tienen soluciones factibles (PL *no factible*).

3 Algunas PL son *no acotadas*: hay puntos en la región factible con valores z arbitrariamente grandes (en problemas de maximización).

Soluciones óptimas múltiples o alternativas

EJEMPLO 3 Soluciones óptimas alternativas

Una compañía de automotores fabrica automóviles y camiones. Cada uno de los vehículos debe pasar por el taller de pintura y por el de ensamble. Si el taller de pintura pintara sólo camiones, entonces podría pintar 40 por día. Si el taller de pintura pintara sólo automóviles, entonces podría pintar 60 vehículos diarios. Si el taller de ensamble se destinara sólo a ensamblar automóviles, entonces podría procesar 50 al día, y si sólo produjera camiones, procesaría 50 por día. Cada camión contribuye con 300 dólares a la utilidad, y cada automóvil contribuye con 200 dólares. Mediante la PL, determine un programa de producción diaria que maximice las utilidades de la compañía.

Solución La compañía debe decidir cuántos automóviles y camiones debe producir por día. Esto lleva a definir las siguientes variables de decisión:

$$x_1 = \text{número de camiones producidos por día}$$
$$x_2 = \text{número de automóviles producidos por día}$$

La utilidad diaria de la compañia (en cientos de dólares) es $3x_1 + 2x_2$, así que la función objetivo de la empresa podría ser la siguiente:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 \tag{12}$$

Las dos restricciones de la compañia son:

Restricción 1 La fracción del día durante la cual el taller de pintura está ocupado, es menor o igual a 1.

Restricción 2 La fracción del día durante la cual el taller de ensamble está ocupado es menor o igual a 1.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\text{Fracción del día en que el taller de pintura trabaja con los camiones} &= \left(\frac{\text{fracción del día}}{\text{camión}}\right)\left(\frac{\text{camiones}}{\text{día}}\right) \\
&= \tfrac{1}{40}x_1 \\
\text{Fracción del día en que el taller de pintura trabaja con los automóviles} &= \tfrac{1}{60}x_2 \\
\text{Fracción del día en que el taller de ensamble trabaja con los camiones} &= \tfrac{1}{50}x_1 \\
\text{Fracción del día en que el taller de ensamble trabaja con los automóviles} &= \tfrac{1}{50}x_2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la restricción 1 se podría expresar como sigue

$$\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 \qquad \text{(limitación del taller de pintura)} \tag{13}$$

y la restricción 2 sería

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 \qquad \text{(limitación del taller de ensamble)} \tag{14}$$

Como $x_1 \ge 0$ y $x_2 \ge 0$ se debe cumplir, el PL pertinente es

$$\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 2x_2 && (12)\\
\text{s.a} \quad & \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1 && (13)\\
& \frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1 && (14)\\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

La región factible para esta PL es la región sombreada en la figura 5 limitada por *AEDF*.†

Por lo que toca a la recta de isoutilidades, se escoge la recta que pasa por el punto (20, 0). Como (20, 0) tiene un valor z de $3(20) + 2(0) = 60$, entonces la recta de isoutilidades es $z = 3x_1 + 2x_2 = 60$. Cuando se examinan las rectas paralelas a esta recta de isoutilidades en la dirección en que z aumenta (noreste), se observa que el último "punto" en la región factible en que se cruza una recta de isoutilidades es *todo* el segmento de recta *AE*. Esto quiere decir que cualquier punto sobre el segmento de recta *AE* es óptimo. Es posible usar cualquier punto sobre *AE* para determinar el valor óptimo de z. Por ejemplo, el punto A, (40, 0), da $z = 3(40) = 120$.

En resumen, la PL de la compañia de automóviles tiene un número infinito de soluciones óptimas, es decir, tiene *soluciones múltiples* o *alternativas*. Esto lo indica el hecho de

†La restricción (13) la satisfacen todos los puntos sobre *AB* (*AB* es $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 = 1$), y (14) o abajo de la recta; y todos los puntos sobre *CD* (*CD* es $\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 = 1$) o abajo de la recta satisfacen (14).

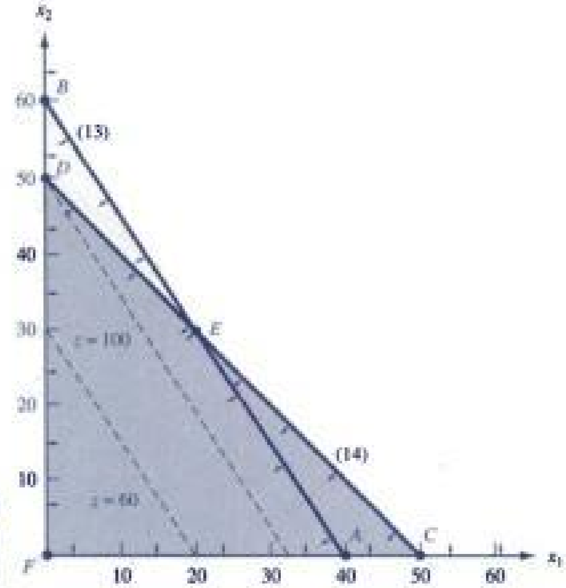


FIGURA 5
Solución gráfica del ejemplo 3

que a medida que una recta de isoutilidades deja la región factible, intersectará un segmento de recta completo que corresponde a la restricción activa (en este caso, *AE*).

A partir del ejemplo actual, parece razonable (y se puede demostrar que es cierto) que si dos puntos (*A* y *E* aquí) son óptimos, entonces *cualquier* punto en el segmento de recta que une estos dos puntos también lo es.

Si hay otra opción óptima, entonces quien toma las decisiones puede usar un criterio secundario para escoger entre las soluciones óptimas. Los administradores de la compañía de automóviles podrían preferir el punto *A*, porque simplificaría sus negocios (y hasta les permitiría maximizar las utilidades) porque podrían producir un solo tipo de producto (camiones).

La técnica de **programación por objetivos** (véase sección 4.14) se aplica con frecuencia para escoger entre varias soluciones óptimas alternas.

PL no factible

Es posible que una región factible de PL sea vacía (no contenga puntos), lo cual da como resultado un PL *no factible*. Como la solución óptima a un PL es el mejor punto en la región factible, una PL no factible no tiene soluciones óptimas.

EJEMPLO 4 PL no factible

Suponga que los vendedores de automóviles requieren que la compañía de automóviles del ejemplo 3 fabriquen por lo menos 30 camiones y 20 automóviles. Determine la solución óptima para el nuevo PL.

Solución Después de añadir las restricciónes $x_1 \geq 30$ y $x_2 \geq 20$ al ejemplo 3, se obtiene la siguiente PL:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad \frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1 \tag{15}$$

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1 \tag{16}$$

$$x_1 \qquad \geq 30 \tag{17}$$

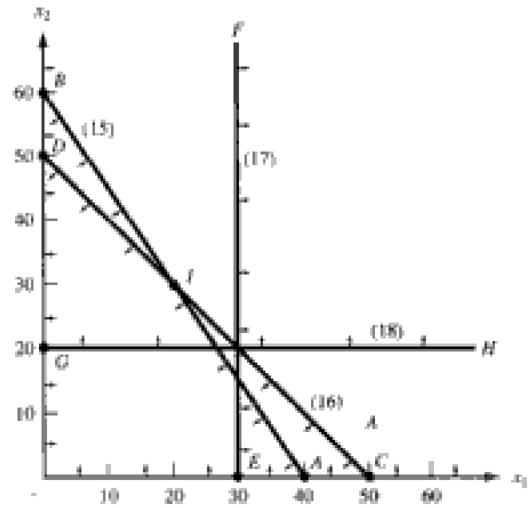


FIGURA 6
Región factible vacía (PL no factible)

$$x_2 \geq 20 \quad \textbf{(18)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La gráfica de la región factible para esta PL es la de la figura 6.

Todos los puntos en AB (AB es $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 = 1$) o los que se encuentran abajo de AB cumplen la restricción (15).

Todos los puntos en CD (CD es $\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 = 1$) o los que se encuentran abajo de CD, cumplen la restricción (16).

Todos los puntos en EF (EF es $x_1 = 30$) o los que están a la derecha de EF, cumplen la restricción (17).

Todos los puntos en GH (GH es $x_2 = 20$) o los que se encuentran arriba de AB, cumplen la restricción (18).

En la figura 6, es evidente que ningún punto satisface de la (15) a la (18). Esto significa que el ejemplo 4 tiene una región factible vacía y es un PL no factible.

El PL es no facfible en el ejemplo 4, porque producir 30 camiones y 20 automóviles requiere más tiempo en el taller de pintura del que está disponible.

PL no acotada

La siguiente PL especial es un PL *no acotada*. En un problema de maximización, una PL no acotada se presenta si es posible encontrar puntos en la región factible con valores de z arbitrariamente grandes, lo cual va de acuerdo con un administrador que obtiene en forma arbitraria grandes ingresos o utilidades. Esto indica que no habría una solución óptima no acotada en una PL planteada en forma correcta. Por lo tanto, si usted resuelve una PL en la computadora y encuentra que la PL es no acotada, entonces es muy probable que haya cometido un error al formular la PL o al introducir los datos a la computadora.

Por lo que se refiere a un problema de minimización, una PL es no acotada si hay puntos en la región factible con valores de z arbitrariamente pequeños. Al resolver en forma gráfica una PL, es posible detectar una PL no acotada de la siguiente manera: un problema de maximización es no acotado si, cuando usted se desplaza en forma paralela a la recta de isoutilidades original en la dirección en que se incrementa z, nunca deja por completo la región factible. Un problema de minimización es no acotado si nunca deja la región factible al moverse en la dirección en que decrece z.

EJEMPLO 5 PL no acotada

Resolver en forma gráfica la PL siguiente:

$$\max z = 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 - x_2 \leq 1 \qquad (19)$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6 \qquad (20)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución En la figura 7 se puede ver que todos los puntos en la recta AB (AB es la recta $x_1 - x_2 = 1$) o por arriba de ella satisfacen (19). Asimismo, todos los puntos en la recta CD (CD es $2x_1 + x_2 = 6$) o por arriba de ella satisfacen (20). Por consiguiente, la región factible para el ejemplo 5 es la región no acotada (sombreada de la figura 7, la cual está acotada sólo por el eje x_2, el segmento de recta DE y la parte de la recta AB que inicia en E. Para encontrar la solución óptima se traza la recta de isoutilidades que pase por (2, 0). Esta recta de isoutilidades tiene $z = 2x_1 - x_2 = 2(2) - 0 = 4$. La dirección en que se incrementa z es hacia el sureste (esto hace a x_1 mayor y a x_2 menor). Al desplazarse en forma paralela a $z = 2x_1 - x_2$ en dirección sureste, se observa que cualquier recta de isoutilidades que se trace, cruza la región factible. (La razón es que cualquier recta de isoutilidades tiene mayor pendiente que la recta $x_1 - x_2 = 1$.)

Por lo tanto, hay puntos en la región factible que tienen valores de z arbitrariamente grandes. Por ejemplo, si se desea encontrar un punto en la región factible que tuviera $z \geq 1\,000\,000$, se podría escoger cualquier punto en la región factible que esté al sureste de la recta de isoutilidades $z = 1\,000\,000$.

Luego del análisis de las últimas dos secciones, se puede ver que todas las PL con dos variables deben estar en uno de los siguientes cuatro casos:

Caso 1 El PL tiene solución óptima única.

Caso 2 El PL tiene soluciones óptimas alternativas: dos o más puntos extremos son óptimos y la PL tendrá un número infinito de soluciones óptimas.

Caso 3 El PL es no factible: la región factible no contiene puntos.

Caso 4 El PL es no acotada: hay puntos en la región factible con valores z arbitrariamente grandes (problemas de maximización) o arbitrariamente pequeños (problemas de minimización).

En el capítulo 4 se demuestra que toda PL (no sólo las PL con dos variables) debe estar en cualesquiera de los cuatro casos.

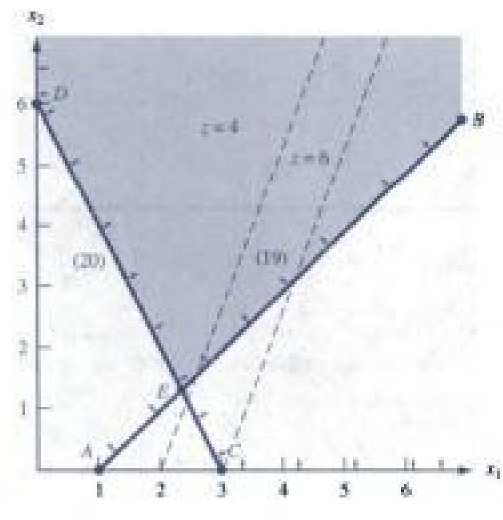


FIGURA 7
PL no acotada

En el resto del capítulo se guía al lector a través del planteamiento de varios modelos de programación lineal más complicados. El paso más importante en el planteamiento del modelo de PL, es la elección de las variables de decisión. Si éstas se escogen de modo apropiado, la función objetivo y las limitaciones se infieren sin mucha dificultad. El problema al determinar una función objetivo y las restricciónes de un PL es, por lo regular, el resultado de una elección incorrecta de las variables de decisión.

PROBLEMAS

Grupo A

Identifique cuál de los casos 1 a 4 se aplica a cada una de los siguientes PL:

1
$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\ge 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 8x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} \max z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5 Verdadero o falso: para que un PL sea no acotado, la región factible del PL debe ser no acotada.

6 Verdadero o falso: todo PL con una región factible no acotada tiene una solución óptima no acotada.

7 Si la región factible de un PL no es no acotada, se dice que la región factible del PL es acotada. Suponga que un PL posee una región factible acotada. Explique por qué puede encontrar la solución óptima para el PL (sin una recta de isoutilidades o de isocostos) mediante la simple verificación de los valores z en cada punto extremo de la región factible. ¿Por qué podría fallar este método si la región factible del PL es no acotado?

8 Determine gráficamente todas las soluciones óptimas del siguiente PL:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_2 - x_1 &\ge 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

9 Encuentre en forma gráfica dos soluciones óptimas de la siguiente PL:

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 &\ge 36 \\ 3x_1 + 5x_2 &\ge 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

10 Boris Milkem, el administrador de efectivo, negocia con moneda francesa (francos) y con moneda norteamericana (dólares). A la media noche compra francos y paga 0.25 dólares por franco, y dólares a tres francos por dólar. Sea x_1 = número de dólares comprados (pago en francos), y x_2 = número de francos comprados (pago en dólares). Suponga que ambos tipos de transacciones se efectúan en forma simultánea, y que la única limitación es que a las 12:01 a.m. Boris debe tener un número no negativo de francos y dólares.

a Plantee un PL que le permita a Boris maximizar el número de dólares que tiene después de que todas las transacciones se completan.

b Resuelva en forma gráfica el PL y explique su respuesta.

3.4 Un problema de dieta

Varios planteamientos de PL (como el ejemplo 2 y el siguiente problema relacionado con la dieta) surgen de situaciones en las cuales quien toma las decisiones desea minimizar el costo de cumplir con una serie de exigencias.

EJEMPLO 6 Problema relacionado con la dieta

Mi dieta requiere que todos los alimentos que ingiera pertenezcan a uno de los cuatro "grupos básicos de alimentos" (pastel de chocolate, helado de crema, bebidas carbonatadas y pastel de queso). Por ahora hay los siguientes cuatro alimentos: barras de chocolate, helado de crema de chocolate, bebida de cola y pastel de queso con piña. Cada barra de chocolate cuesta 50 centavos, cada bola de helado de crema de chocolate cuesta 20 centavos, cada botella de bebida de cola cuesta 30 centavos y cada rebanada de pastel de queso con piña cuesta 80 centavos. Todos los días debo ingerir por lo menos 500 calorías, 6 onzas de chocolate, 10 onzas de azúcar y 8 onzas de grasa. El contenido nutricional por unidad de cada alimento se proporciona en la tabla 2. Plantee un modelo de programación lineal que se pueda utilizar para cumplir con mis necesidades nutricionales al mínimo costo.

Solución Como siempre, se empieza por establecer las decisiones que se deben tomar: cuánto de cada tipo de alimento se debe consumir por día. Por consiguiente, definimos las variables de decisión:

x_1 = cantidad de barras de chocolate consumida al día

x_2 = cantidad de bolas de helado de chocolate ingeridas al día

x_3 = botellas de bebida de cola tomadas por día

x_4 = rebanadas de pastel de queso con piña consumidas al día

Mi objetivo es minimizar el costo de mi dieta. El costo total de cualquier dieta se podría determinar a partir de la siguiente relación: (costo total de la dieta) = (costo de las barras de chocolate) + (costo del helado de crema) + (costo de la bebida de cola) + (costo del pastel de queso). Para evaluar el costo total de la dieta obsérvese que, por ejemplo,

$$\text{Costo de la bebida de cola} = \left(\frac{\text{costo}}{\text{botella de bebida de cola}}\right)\left(\begin{array}{c}\text{botellas de bebida}\\ \text{de cola consumidas}\end{array}\right) = 30x_3$$

Al aplicar el mismo razonamiento a los otros tres alimentos, se tiene (en centavos)

$$\text{Costo total de la dieta} = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

Por lo tanto, la función objetivo es

$$\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

Las variables de decisión deben satisfacer las cuatro restricciones siguientes:

Restricción 1 El consumo de calorías por día debe ser por lo menos de 500 calorías.

Restricción 2 El consumo diario de chocolate debe ser por lo menos de 6 onzas.

Restricción 3 La ingestión diaria de azúcar debe ser por lo menos de 10 onzas.

Restricción 4 El consumo diario de grasas debe ser de por lo menos 8 onzas.

TABLA 2
Valores nutricionales de la dieta

Tipo de alimento	Calorías	Chocolate (Onzas)	Azúcar (Onzas)	Grasa (Onzas)
Barra de chocolate	400	3	2	2
Helado de crema de chocolate (1 bola)	200	2	2	4
Bebida de cola (1 botella)	150	0	4	1
Pastel de queso con piña (1 rebanada)	500	0	4	5

Téngase en cuenta que (consumo diario de calorías) = (calorías en las barras de chocolate) + (calorías en el helado de chocolate) + (calorías en la bebida de cola) + (calorías en el pastel de queso con piña) para expresar la restricción 1 en términos de las variables de decisión.

Las calorías en las barras de chocolate consumidas se determinan a partir de

$$\text{Calorías en las barras de chocolate} = \left(\frac{\text{calorías}}{\text{barra de chocolate}}\right)\left(\begin{matrix}\text{barras de chocolate}\\ \text{consumidas}\end{matrix}\right)$$
$$= 400x_1$$

Al aplicar un razonamiento similar a los otros tres alimentos se obtiene

$$\text{Consumo diario de calorías} = 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4$$

La restricción 1 se expresa mediante

$$400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 \quad \text{(Restricción de las calorías)} \quad \textbf{(21)}$$

La restricción 2 se expresa mediante

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad \text{(Restricción del chocolate)} \quad \textbf{(22)}$$

La restricción 3 se expresa mediante

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10 \quad \text{(Restricción del azúcar)} \quad \textbf{(23)}$$

La restricción 4 se expresa mediante

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8 \quad \text{(Restricción de la grasa)} \quad \textbf{(24)}$$

Por último, se deben cumplir las restricciones de signo $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Al combinar la función objetivo, las restricciones (21) a (24) y las restricciones de signo se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{lrcll}
\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4 & & & & \\
\text{s.a} & 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 & \geq 500 & \text{(Restricción de las calorías)} & \textbf{(21)} \\
 & 3x_1 + \quad 2x_2 \qquad\qquad\qquad & \geq 6 & \text{(Restricción del chocolate)} & \textbf{(22)} \\
 & 2x_1 + \quad 2x_2 + \quad 4x_3 + \quad 4x_4 & \geq 10 & \text{(Restricción del azúcar)} & \textbf{(23)} \\
 & 2x_1 + \quad 4x_2 + \quad x_3 + \quad 5x_4 & \geq 8 & \text{(Restricción de la grasa)} & \textbf{(24)} \\
 & x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3, 4) & & \text{(Restricciones de signo)} &
\end{array}$$

La solución óptima para este PL es $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$, $z = 90$. Por lo tanto, la dieta de costo mínimo cuesta al día 90 centavos si se consumen tres bolas de helado de crema de chocolate y se toma una botella de bebida de cola. El valor óptimo de z se obtiene al sustituir el valor óptimo de las variables de decisión en la función objetivo. Así se obtiene un costo total de $z = 3(20) + 1(30) = 90$ centavos. La dieta óptima proporciona

$$200(3) + 150(1) = 750 \text{ calorías}$$
$$2(3) = 6 \text{ onzas de chocolate}$$
$$2(3) + 4(1) = 10 \text{ onzas de azúcar}$$
$$4(3) + 1(1) = 13 \text{ onzas de grasa}$$

Por consiguiente, las restricciones del chocolate y el azúcar son activas, pero las restricciones de calorías y grasa son inactivas.

Una versión del problema de la dieta con una lista de alimentos y cantidades necesarias nutricionales más reales, fue una de los primeros PL que se resolvió mediante computadora. Stigler (1945) propuso un problema relacionado con la dieta, en el cual había 77 tipos de alimentos y se tenían que cumplir 10 requisitos nutricionales (vitamina A, vitamina C, entre otros). La solución óptima que dio la computadora consistía en harina de maíz, harina de trigo, leche evaporada, crema de cacahuate, grasa de cerdo, carne de res, hígado, papas, espinacas y col. Si bien esta dieta contiene evidentemente un alto grado de nutrientes vitales, pocas personas se mostrarían satisfechas con ella, porque no parece cumplir los estándares mínimos de sabor (y Stigler exigía que se comiera lo mismo todos los días). La solución óptima de cualquier modelo de PL refleja sólo los aspectos de realidad que capta la función objetivo y las limitaciones. El planteamiento de Stigler (y el nuestro) del problema de la dieta no reflejó el deseo de las personas por una dieta sabrosa y variada. La programación por enteros se utiliza para planear los menús de ciertas instituciones para una semana o un mes.[†] Los modelos para la planeación de menús sí consideran limitaciones que reflejan el sabor y la variedad.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Hay tres fábricas a las orillas del río Momiss (1, 2 y 3). Cada una vierte dos tipos de contaminantes (1 y 2) al río. Si se procesaran los desechos de cada una de las fábricas, entonces se reduciría la contaminación del río. Cuesta 15 dólares procesar una tonelada de desecho de la fábrica 1, y cada tonelada procesada reduce la cantidad de contaminante 1 en 0.10 ton y la cantidad del contaminante 2 en 0.45 toneladas. Cuesta 10 dólares procesar una tonelada de desecho de la fábrica 2, y cada tonelada procesada reduciría la cantidad del contaminante 1 en 0.20 ton y la cantidad del contaminante 2 en 0.25 toneladas. Cuesta 20 dólares procesar una tonelada de desecho de la fábrica 3, y cada tonelada procesada reduciría la cantidad del contaminante 1 en 0.40 ton y la cantidad del contaminante 2 en 0.30 toneladas. El Estado desea reducir la cantidad del contaminante 1 por lo menos en 30 toneladas y la cantidad del contaminante 2 en por lo menos 40 toneladas en el río. Plantee una PL que minimice el costo de disminuir la contaminación en las cantidades deseadas. ¿Opina que las suposiciones del PL (Proporcionalidad, Aditividad, Divisibilidad y Certidumbre) son razonables para este problema?

2[‡] U.S. Labs fabrica válvulas mecánicas para el corazón a partir de válvulas del corazón de cerdos. Se requieren válvulas de distintas dimensiones en diferentes operaciones del corazón. U.S Labs compra válvulas de cerdo a tres proveedores distintos. El costo y la combinación de las válvulas compradas a cada proveedor se muestran en la tabla 3. Cada mes, U.S. Labs hace un pedido a cada proveedor. Se deben comprar todos los meses por lo menos 500 válvulas grandes, 300 medianas y 300 pequeñas. Debido a la disponibilidad limitada de las válvulas de cerdo, se compran cuando mucho 700 válvulas por mes a cada proveedor. Formule una PL con la que se puedan minimizar los costos de adquisición de las válvulas necesarias.

TABLA 3

Proveedor	Costo por válvula ($)	% de las grandes	% de las medianas	% de las pequeñas
1	5	40	40	20
2	4	30	35	35
3	3	20	20	60

3 Peg y Al Fundy tienen un presupuesto limitado para alimentos, por lo que Peg está tratando de alimentar a la familia con el menor dinero posible. Pero quiere tener la certeza de que los miembros de la familia obtienen las cantidades necesarias de nutrientes. Peg puede comprar dos alimentos. El alimento 1 cuesta 7 dólares la libra y cada libra contiene tres unidades de vitamina A y una unidad de vitamina C. El alimento 2 cuesta un dólar por libra, y cada libra contiene una unidad de cada vitamina. La familia requiere todos los días por lo menos 12 unidades de vitamina A y seis unidades de vitamina C.

a Compruebe que si Peg compra diario 12 unidades del alimento 2, entonces excederá la cantidad necesaria de vitamina C en 6 unidades.

b Al se mostró firme y demandó que Peg cumpla exactamente con las cantidades de nutrientes necesarios al día con el fin de consumir precisamente 12 unidades de vitamina A y 6 unidades de vitamina C. La solución óptima al nuevo problema requiere que se ingiera menos vitamina C, pero resultará más cara. ¿Por qué?

4 Ricitos de Oro necesita encontrar por lo menos 12 lb de oro y al menos 18 lb de plata para pagar la renta mensual. Hay dos minas en las cuales Ricitos de Oro puede encontrar oro y plata. Cada día que Ricitos de Oro pasa en la mina 1 encuentra 2 lb de oro y 2 lb de plata. Cada día que Ricitos de Oro pasa en la mina 2 encuentra 1 lb de oro y 3 lb de plata. Plantee un PL que ayude a Ricitos de Oro a cumplir con sus requerimientos pasando el menor tiempo posible en las minas. Resuelva gráficamente el PL.

[†] Balintfy (1976).
[‡] Basado en Hilal y Erickson (1981).

3.5 Un problema de horarios de trabajo

En muchas aplicaciones de programación lineal se requiere determinar el método de costo mínimo para satisfacer las exigencias de fuerza de trabajo. Mediante el ejemplo siguiente se ilustran las características básicas y comunes en muchas de dichas aplicaciones.

EJEMPLO 7 Problema de la oficina de correos

Una oficina de correos requiere distintas cantidades de empleados de tiempo completo en diferentes días de la semana. La cantidad de empleados de tiempo completo que se requiere cada día, se da en la tabla 4. Las reglas del sindicato establecen que cada empleado de tiempo completo debe trabajar cinco días consecutivos y descansar dos días. Por ejemplo, un empleado que trabaja de lunes a viernes, debe descansar sábado y domingo. La oficina de correos quiere cumplir con sus exigencias diarias sólo por medio de empleados de tiempo completo. Plantee un PL que la oficina de correos pueda utilizar para minimizar la cantidad de empleados de tiempo completo que tengan que ser contratados.

Solución Antes de ofrecer el planteamiento correcto de este problema, analicemos una solución *incorrecta*. Muchos estudiantes empiezan por definir x_i como el número de empleados que trabajan en el día i (día 1 = lunes, día 2 = martes, etcétera). Su razonamiento es que (número de empleados de tiempo completo) = (número de empleados que trabajan el lunes) + (número de empleados que trabajan el martes) + ⋯ + (número de empleados que trabajan el domingo). Este razonamiento origina la función objetivo siguiente:

$$\min z = x_1 + x_2 + \cdots + x_6 + x_7$$

Para tener la seguridad de que en la oficina postal están trabajando suficientes empleados de tiempo completo todos los días, suman las restricciones $x_i \geq$ (número de empleados requeridos en el día i). Por ejemplo, para el lunes añaden la restricción $x_1 \geq 17$. Al agregar las restricciones de signo $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ se obtiene el PL siguiente

$$\begin{aligned}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \\
\text{s.a} \quad x_1 & \geq 17 \\
x_2 & \geq 13 \\
x_3 & \geq 15 \\
x_4 & \geq 19 \\
x_5 & \geq 14 \\
x_6 & \geq 16 \\
x_7 & \geq 11 \\
x_i & \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)
\end{aligned}$$

Por lo menos hay dos errores en este planteamiento. Primero, la función objetivo *no* es el número de empleados postales de tiempo completo. La función objetivo actual cuenta a cada empleado cinco veces, no una. Por ejemplo, cada empleado que empieza a trabajar el lunes, labora de lunes a viernes, y está incluido en x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5. Segundo, las variables $x_1, x_2, \ldots, x_7$ están interrelacionadas, y la interrelación entre las variables no se refleja en el conjunto actual de restricciones. Por ejemplo, algunas de las personas que trabajan el lunes (las personas x_1) estarán laborando el martes. Esto significa que x_1 y x_2 están interrelacionadas, pero las restricciones no señalan que el valor de x_1 tenga efecto alguno en el valor de x_2.

La clave para plantear en forma correcta este problema, es darse cuenta de que la decisión fundamental de la oficina de correos no es cuántas personas trabajan cada día, sino más bien cuántas personas *empiezan* a trabajar cada día de la semana. Tomando en cuenta lo anterior, se define:

TABLA 4
Exigencias de la oficina de correos

Día	Número de empleados de tiempo completo que se necesitan
1 = Lunes	17
2 = Martes	13
3 = Miércoles	15
4 = Jueves	19
5 = Viernes	14
6 = Sábado	16
7 = Domingo	11

$$x_i = \text{número de empleados que empiezan a trabajar el día } i$$

Por ejemplo, x_1 es la cantidad de personas que empiezan a trabajar el lunes (estas personas laboran de lunes a viernes). Cuando ya están definidas correctamente las variables, es fácil determinar la función objetivo adecuada, así como las limitaciones. Para determinar la función objetivo, obsérvese que (número de empleados de tiempo completo) = (número de empleados que empiezan a trabajar el lunes) + (número de empleados que empiezan a trabajar el martes) $+\cdots+$ (número de empleados que empiezan a trabajar el domingo). Como cada empleado empieza a trabajar exactamente un día de la semana, esta expresión no cuenta dos veces a los empleados. Por consiguiente, cuando se definen en forma correcta las variables, la función objetivo es

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

La oficina de correos tiene que asegurarse que están trabajando suficientes empleados cada día de la semana. Por ejemplo, por lo menos 17 empleados deben estar laborando el lunes. ¿Quién está trabajando el lunes? Todos excepto los empleados que empezaron a trabajar el martes o el miércoles (estas personas descansan respectivamente domingo y lunes, y lunes y martes). Esto quiere decir que el número de empleados que laboran el lunes es $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$. Con el fin de tener la certeza que por lo menos 17 empleados están laborando el lunes, se requiere que se cumpla la limitación

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$$

Luego de establecer limitaciones similares para los otros seis días de la semana y las restricciones de no negatividad $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ se obtiene el planteamiento siguiente para el problema de la oficina de correos:

$$\begin{array}{lll}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & & \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 & & \text{(restricción del lunes)} \\
x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 & & \text{(restricción del martes)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 & & \text{(restricción del miércoles)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 & & \text{(restricción del jueves)} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 & & \text{(restricción del viernes)} \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 & & \text{(restricción del sábado)} \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 & & \text{(restricción del domingo)} \\
x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7) & & \text{(restricciones de signo)}
\end{array}$$

La solución óptima para este PL es $z = \frac{67}{3}$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{22}{3}$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{10}{3}$, $x_7 = 5$. Como sólo se permiten trabajadores de tiempo completo, las variables deben ser números enteros, por lo que no se cumple la Suposición de divisibilidad. Para hallar una respuesta razonable en la cual todas las variables sean enteros, se intenta redondear las variables fraccionarias al valor superior, lo cual genera la solución factible $z = 25$, $x_1 = 2$,

$x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 8, x_5 = 0, x_6 = 4, x_7 = 5$. Esto deja ver que la programación por enteros se puede usar para demostrar que una solución óptima para el problema de la oficina postal es $z = 23, x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 6, x_5 = 0, x_6 = 4, x_7 = 3$. Obsérvese que no hay modo de que la solución de la programación lineal óptima se pueda redondear para obtener la solución óptima sólo con enteros.

Baker (1974) desarrolló una técnica efectiva (en la que no se utiliza la programación lineal) para determinar el mínimo de empleados necesarios cuando cada trabajador tiene dos días seguidos de descanso.

Si usted resuelve este problema mediante LINDO, LINGO o el Solver para Excel, podría llegar a un horario distinto cuando trabajan 23 empleados. Esto demuestra que el ejemplo 7 tiene soluciones óptimas alternativas.

Elaboración de horario imparcial para los empleados

La solución óptima encontrada requiere 4 trabajadores que empiecen el lunes, 4 el martes, 2 el miércoles, 6 el jueves, 4 el sábado y 3 el domingo. Los empleados que empiezan el sábado estarán poco contentos, porque nunca tendrán un fin de semana libre. Si se rotan los horarios de los empleados después de un periodo de 23 semanas, se obtiene un horario más justo. Para ver cómo se logra, considere el siguiente horario:

- semanas 1 a 4: empieza en lunes
- semanas 5 a 8: empieza en martes
- semanas 9 a 10: empieza en miércoles
- semanas 11 a 16: empieza en jueves
- semanas 17 a 20: empieza en sábado
- semanas 21 a 23: empieza en domingo

El empleado 1 sigue su horario durante un periodo de 23 semanas. El empleado 2 inicia con la semana 2 de su horario (empieza el lunes durante 3 semanas, luego el martes durante 4 semanas y termina con 3 semanas que empiezan el domingo y una semana en lunes). Se continúa con este modelo para generar un horario de 23 semanas para cada empleado. Por ejemplo, el empleado 13 tiene el siguiente horario

- semanas 1 a 4: empieza en jueves
- semanas 5 a 8: empieza en sábado
- semanas 9 a 11: empieza en domingo
- semanas 12 a 15: empieza en lunes
- semanas 16 a 19: empieza en martes
- semanas 20 a 21: empieza en miércoles
- semanas 22 a 23 empieza el jueves

Este método para calendarizar el trabajo trata igual a todos los empleados.

Aspectos de los modelos

1 Este ejemplo es un **problema estático de horarios**, porque se supone que la oficina de correos maneja el mismo horario cada semana. En realidad, las demandas cambian a lo largo del tiempo, los trabajadores toman vacaciones en el verano, etcétera, así que la oficina no enfrenta la misma situación cada semana. Un **problema dinámico de horarios** se analiza en la sección 3.12.

2 Si usted quisiera determinar un modelo para un horario semanal que funcionara en un supermercado o un restaurante de bocadillos, la cantidad de variables podría ser muy grande y la computadora podría tener dificultades para establecer una solución exacta. En este caso se usa el **método heurístico** para encontrar una buena solución al problema. Refiérase a Love y Hoey (1990), donde encontrará un ejemplo de horarios para un restaurante de bocadillos.

3 Nuestro modelo se puede ampliar con toda facilidad para manejar empleados de medio tiempo, el uso de tiempo extra y funciones objetivo opcionales como maximizar el número de días de fin de semana libres. (Véanse problemas 1, 3 y 4.)

4 ¿Cómo se determinó el número de empleados necesarios para cada día? Quizá la oficina de correos quiere tener suficientes empleados para asegurarse que 95% de todas las cartas se clasifiquen en una hora. Para determinar la cantidad de empleados necesarios para proporcionar un servicio adecuado, la oficina de correos podría utilizar la teoría de colas, la cual se trata en *Modelos estocásticos en la investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos*; y pronósticos en el capítulo 14 de este libro.

Aplicaciones en la vida cotidiana

Krajewski, Ritzman y McKenzie (1980), con la ayuda de la PL, crearon un horario para los empleados que elaboraban cheques en el Ohio National Bank. Su modelo estableció la combinación de costo mínimo de empleados de medio tiempo, empleados de tiempo completo y tiempo extra necesaria para procesar los cheques diarios hacia el final del día de trabajo (10 p.m.). El dato principal de su modelo era un pronóstico del número de cheques que llegarían al banco cada hora. Este pronóstico se obtuvo por medio de regresión múltiple (véase *Modelos estocásticos en la investigación de operaciones: aplicaciones y algoritmos).* El principal resultado de la PL fue un horario de trabajo. Por ejemplo, la PL recomendaba que dos empleados de tiempo completo trabajaran diariamente de 11 a.m. a 8 p.m., 33 empleados de medio tiempo trabajarían diario de 6 p.m. a 10 p.m. y 27 trabajadores de medio tiempo laborarían de 6 p.m. a 10 p.m. lunes, martes y viernes.

PROBLEMAS

Grupo A

1 En el ejemplo de la oficina de correos, suponga que cada empleado de tiempo completo trabaja 8 horas al día. Entonces, las demandas del lunes de 17 trabajadores se podrían considerar como $8(17) = 136$ horas. La oficina de correos podría cumplir su demanda diaria de mano de obra empleando tanto trabajadores de tiempo completo como de medio tiempo. Durante cada semana, un empleado de tiempo completo trabaja 8 horas diarias durante cinco días consecutivos, en tanto que un empleado de medio tiempo trabaja 4 horas al día durante cinco días consecutivos. Un empleado de tiempo completo representa un costo de 15 dólares por hora a la oficina de correos, en tanto que un empleado de medio tiempo (con prestaciones salariales reducidas) cuesta 10 dólares por hora a la oficina de correos. Las reglas del sindicato limitan el trabajo de medio tiempo a 25% de la mano de obra necesaria a la semana. Plantee un PL que minimice los costos de la oficina de correos en mano de obra a la semana.

2 Durante cada periodo de cuatro horas, la policía de Pueblo Chico necesita la siguiente cantidad de oficiales de policía en servicio: de las 12 de la noche a 4 a.m., 8; de 4 a 8 a.m., 7; de 8 a.m. a 12 del día, 6; de 12 a 4 p.m., 6; de 4 a 8 p.m., 5; de 8 p.m. a medianoche, 4. Cada oficial de policía trabaja dos turnos consecutivos de 4 horas. Plantee un PL que sea útil para minimizar el número de policías necesarios para cumplir con las demandas diarias de Pueblo Chico.

Grupo B

3 Suponga que la oficina de correos tiene la capacidad de forzar a los empleados a trabajar un día de tiempo extra cada semana. Por ejemplo, un empleado cuyo turno regular es de lunes a viernes, tendría que trabajar un sábado. Cada empleado recibe como pago 50 dólares por día en los primeros cinco días trabajados durante una semana y 62 dólares por el día extra (en caso de trabajarlo). Plantee un PL cuya solución posibilite a la oficina de correos minimizar el costo de cumplir con sus demandas de trabajo a la semana.

4 Suponga que la oficina de correos cuenta con 25 empleados de tiempo completo y no tiene permitido contratar o despedir empleados. Formule un PL que se pueda usar para establecer un horario para los empleados con objeto de maximizar el número de días de fin de semana libres que disfruten los empleados.

5 Todos los días, los trabajadores del Departamento de policía de Gotham City trabajan dos turnos de 6 horas que pueden estar entre las 12 de la noche a 6 a.m., de 6 a.m. a 12 p.m., de 12 p.m. a 6 p.m. y de 6 p.m. a media noche. Se requiere la siguiente cantidad de trabajadores en cada turno: de las 12 de la noche a 6 a.m., 15 personas; de 6 a.m. a 12 p.m., 5 empleados; de 12 p.m. a 6 p.m., 12 trabajadores; de 6 p.m. a 12 a.m., 6 personas. Los trabajadores cuyos turnos sean consecutivos reciben 12 dólares por hora, pero los que no tienen turnos consecutivos reciben 18 dólares por hora. Plantee un PL que se pueda utilizar para minimizar el costo de cumplir con las demandas diarias del Departamento de policía de Gotham City.

6 El Departamento de policía de Bloomington necesita por lo menos la cantidad de policías que se indica en la tabla 5 durante cada periodo de 6 horas del día. Se puede contratar a los policías para que trabajen 12 o 18 horas consecutivas. Los policías reciben 4 dólares por hora por cada una de las primeras 12 horas del día que trabajan, y cobran 6 dólares por hora por cada una de las siguientes 6 horas que trabajan en un día. Formule un PL que se utilice para minimizar los costos por cumplir con las necesidades diarias de policías en Bloomington.

TABLA 5

Periodo	Número necesario de policías
12 a.m.–6 a.m.	12
6 a.m.–12 p.m.	8
12 p.m.–6 p.m.	6
6 p.m.–12 a.m.	15

7 Cada hora, desde las 10 a.m. hasta las 7 p.m., el Bank One recibe cheques y debe procesarlos. Su objetivo es procesar todos los cheques el mismo día en que los recibe. El banco tiene 13 máquinas procesadoras de cheques, cada una de las cuales tiene la capacidad de procesar hasta 500 cheques por hora. Se requiere un trabajador que opere cada máquina. El Bank One contrata empleados de tiempo completo y de medio tiempo. Los trabajadores de tiempo completo trabajan de 10 a.m. a 6 p.m., de 11 a.m. a 7 p.m. o de medio día a 8 p.m., y cobran 160 dólares diarios. Los empleados de medio tiempo trabajan de 2 p.m. a 7 p.m., o de 3 p.m. a 8 p.m., y se les paga a 75 dólares el día. El número de cheques que se recibe en una hora se presenta en el tabla 6. Como al Bank One le interesa conservar la continuidad, opina que debe tener por lo menos tres trabajadores de tiempo completo bajo contrato. Desarrolle un horario de trabajo de costo mínimo que tenga procesados todos los cheques a las 8 p.m.

TABLA 6

Hora	Cheques recibidos
10 a.m.	5 000
11 a.m.	4 000
Medio día	3 000
1 p.m.	4 000
2 p.m.	2 500
3 p.m.	3 000
4 p.m.	4 000
5 p.m.	4 500
6 p.m.	3 500
7 p.m.	3 000

3.6 Un problema de presupuesto de gastos de capital

El tema de cómo la programación lineal se puede usar para determinar decisiones financieras óptimas se analiza en esta sección (y en la secciones 3.7 y 3.11). En esta sección, se plantea un modelo sencillo de gastos de capital.†

Primero se explica brevemente el concepto de valor neto actual (VNA), el cual se puede utilizar para comparar la conveniencia de diferentes inversiones. El tiempo 0 es el presente o actual.

Suponga que la inversión 1 requiere un desembolso de efectivo de 10 000 dólares en el tiempo 0 y un desembolso de efectivo de 14 000 dólares dentro de dos años a partir de ahora, y genera un flujo de efectivo de 24 000 dólares dentro de un año a partir de ahora. La inversión 2 requiere un desembolso de efectivo de 6 000 dólares en el tiempo 0, y un desembolso de efectivo de 1 000 dentro de dos años a partir de ahora; genera un flujo de efectivo de 8 000 un año después a partir de ahora. ¿Cuál inversión preferiría usted?

La inversión 1 tiene un flujo de efectivo neto de

$$-10\,000 + 24\,000 - 14\,000 = 0 \text{ dólares}$$

y la inversión 2 tiene un flujo de efectivo neto de

$$-6\,000 + 8\,000 - 1\,000 = 1\,000 \text{ dólares}$$

Con base en el flujo de efectivo neto, la inversión 2 es superior a la inversión 1. Cuando se comparan las inversiones según el flujo de efectivo neto se supone que un dólar recibido

†Esa sección se basa en Weingartner (1963).

en cualquier punto del tiempo tiene el mismo valor. ¡Pero esto no es cierto! Supóngase que existe una inversión (tal como un fondo del mercado monetario) para el cual un dólar invertido en un tiempo dado tendrá un rendimiento (con certeza) $(1 + r)$ dólares un año después. *Tasa de interés anual* es el nombre que recibe r. Como 1 dólar de ahora se transforma en $(1 + r)$ dólares un año después a partir de ahora se puede escribir

$$1 \text{ dólar actual} = (1 + r) \text{ dólares dentro de un año a partir de ahora}$$

Al aplicar el mismo razonamiento a los $(1 + r)$ dólares obtenidos dentro de un año a partir de ahora, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 \text{ dólar actual} &= (1 + r) \text{ dólares en un año a partir de ahora} = (1 + r)^2 \\ &\text{dólares en dos años a partir de ahora} \end{aligned}$$

y

$$1 \text{ dólar actual} = (1 + r)^k \text{ dólares de } k \text{ años a partir de ahora}$$

Al dividir ambos miembros de esta igualdad entre $(1 + r)^k$ se obtiene

$$1 \text{ dólar recibido } k \text{ años a partir de ahora} = (1 + r)^{-k} \text{ dólares actuales}$$

En otras palabras, un dólar recibido k años después a partir de ahora equivale a recibir $(1 + r)^{-k}$ dólares ahora.

Se puede usar esta idea para expresar todos los flujos de efectivo en términos de dólares en el tiempo 0 (este proceso se llama *flujos de efectivo de descuento en el tiempo* 0). Mediante el descuento es posible determinar el valor total (dólares en el tiempo 0) de los flujos de efectivo para cualquier inversión. El valor total (en dólares en el tiempo 0) de los flujos de efectivo para cualquier inversión se denomina **valor neto actual, VNA**, de la inversión. El VNA de una inversión es la cantidad con la cual la inversión incrementará el valor de la compañía (según se expresa en dólares en el tiempo 0).

Es posible calcular el VNA para las inversiones 1 y 2, suponiendo que $r = 0.20$.

$$\begin{aligned} \text{VNA de la inversión 1} &= -10\,000 + \frac{24\,000}{1 + 0.20} - \frac{14\,000}{(1 + 0.20)^2} \\ &= \$277.78 \end{aligned}$$

Lo anterior quiere decir que, si una firma proporciona la inversión 1, entonces el valor de la firma (en dólares en el tiempo 0) se incrementaría en 277.78 dólares. En cuanto a la inversión 2,

$$\begin{aligned} \text{VNA de la inversión 2} &= -6\,000 + \frac{8\,000}{1 + 0.20} - \frac{1000}{(1 + 0.20)^2} \\ &= -\$27.78 \end{aligned}$$

Si una compañía proporciona la inversión 2, entonces el valor de la empresa (en dólares en el tiempo 0) disminuiría en 27.78 dólares.

Por consiguiente, el concepto de VNA establece que la inversión 1 es superior que la inversión 2. Esta conclusión es contraria a la que se llegó al comparar los flujos de efectivo netos de las dos inversiones. Obsérvese que la comparación entre inversiones depende a menudo del valor de r. Por ejemplo, se le pide al lector en el problema 1 al final de esta sección que demuestre que para $r = 0.02$, la inversión 2 tiene un VNA que es superior al de la inversión 1. Naturalmente, en este análisis se supone que los flujos de efectivo futuros de una inversión se conocen con toda certeza.

Cálculo de VNA mediante Excel

Si recibimos un flujo de efectivo de c_t en t años a partir de ahora ($t = 1, 2, \ldots T$), y descontamos los flujos de efectivo a una tasa r, entonces el VNA de los flujos de efectivo está dado por

$$\sum_{t=1}^{t=T} \frac{c_t}{(1 + r)^t}$$

La idea básica es que 1 dólar de hoy es igual a $(1 + r)$ dólares en un año a partir de ahora, entonces

$$\frac{1}{1+r} \text{ hoy} = 1 \text{ dólar dentro de un año a partir de ahora}$$

La función de Excel = VNA facilita este cálculo. La fórmula es

$$= \text{VNA } (r, \text{ intervalo de flujos de efectivo})$$

La fórmula supone que los flujos de efectivo se presentan al final del año.

Los proyectos con VNA > 0 suman valor a la compañía, en tanto que proyectos con VNA negativo disminuyen el valor de la compañía.

NPV.xls

A continuación se ilustra el cálculo de VNA en el archivo NPV.xls.

EJEMPLO 8 Cálculo de VNA

Analice un proyecto con los flujos de efectivo que se proporcionan en la figura 8 para una tasa de descuento de 15 porciento.

a Calcule el VNA del proyecto si los flujos de efectivo se presentan al final del año.

b Determine el VNA del proyecto si los flujos de efectivo se presentan al principio del año.

c Calcule el VNA del proyecto si los flujos de efectivo se presentan a mitad del año.

Solución **a** Se introduce en la celda C7 la fórmula

$$= \text{NVA(C1,C4:I4)}$$

y se obtiene 375.06 dólares.

b Como todos los flujos de efectivo se reciben un año más pronto, se multiplica cada valor del flujo de efectivo por $(1 + 1.15)$; entonces, la respuesta se obtiene en C8 con la fórmula

$$= (1 + \text{C1}) \cdot \text{C7}$$

VNA es ahora mayor: 431.32 dólares.

Se comprueba en la celda D8 con la fórmula

$$= \text{C4} + \text{NPV(C1,D4:I4)}$$

c Como todos los flujos de efectivo se reciben seis meses antes, se multiplica cada valor del flujo de efectivo por $\sqrt{1.15}$. El VNA se determina en C9 con la fórmula

$$= (1.15)\text{^}0.5 \cdot \text{C7}$$

Ahora VNA es 402.21 dólares.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		td	0.15						
2									
3		Tiempo	1	2	3	4	5	6	7
4			-400	200	600	-900	1000	250	230
5									
6									
7	final de año	final del año	$375.06						
8	principio del año	inicio del año	$431.32	$431.32					
9	mitad del año	mitad del año	$402.21						

FIGURA 8

Función XNpv

Los flujos de efectivo se presentan con frecuencia a intervalos irregulares. Esto dificulta el cálculo de VNA de estos flujos de efectivo. Por fortuna, la función de Excel XNpv calcula en un abrir y cerrar de ojos los VNA de flujos de efectivo irregulares. Para usar la función XNpv, debe añadir primero las herramientas de análisis. Para hacerlo, seleccione Herramientas Complementos, y marque los cuadros de Herramientas de análisis y Herramientas de análisis VBA. Aquí se presenta un ejemplo de XNpv en acción.

EJEMPLO 9 Encontrar VNA de flujos de efectivo no periódicos

Suponga que el 8 de abril de 2001 pagó 900 dólares. Luego recibió

- 300 en 8/15/01
- 400 en 1/15/02
- 200 en 6/25/02
- 100 en 7/03/03.

Si la tasa de descuento anual es de 10%, ¿cuál es el VNA de estos flujos de efectivo?

Solución Se introducen los datos (en el formato de fechas de Excel) en D3:D7 y el flujo de efectivo en E3:E7 (véase figura. 9). Al escribir la fórmula

= XNPV(A9,E3:E7,D3:D7)

en la celda D11 aparece el VNA del proyecto en términos de dólares del 8 de abril de 2001 porque es la primera fecha cronológicamente. Lo que Excel hace es como sigue:

1 Calcula el número de años después del 8 de abril de 2001, en que se presentó cada fecha. (Se hizo en la columna F.) Por ejemplo, 15 de agosto de 2001 es 0.3534 de año después del 8 de abril.

2 Luego descuenta los flujos del efectivo a una tasa $\left(\frac{1}{1+\text{tasa}}\right)^{\text{años después}}$. Por ejemplo, el 15 de agosto de 2001, el flujo de efectivo es descontado en $\left(\frac{1}{1+.1}\right)^{0.3534} = 0.967.$

3 Se obtuvieron los datos de Excel en series de números al cambiar el formato a General.

Si usted desea que la función XNpv determine el VNA de un proyecto en dólares actuales, inserte un flujo de efectivo de 0 dólares en los datos actuales, e incluya este renglón en el cálculo de XNpv. Excel entregará el VNA del proyecto como de fecha de hoy.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Función XNpv		Código	Fecha	Flujo de efectivo	Tiempo	fd
3			36989.00	4/8/01	-900		1
4			37118.00	8/15/01	300	0.353425	0.966876
5			37271.00	1/15/02	400	0.772603	0.929009
6			37432.00	6/25/02	200	1.213699	0.890762
7			37805.00	7/3/03	100	2.235616	0.808094
8	Tasa						
9	0.1						
10				XNpv	Directo		
11				20.62822	20.628217		
12							
13				XIrr			
14				12.97%			

FIGURA 9
Ejemplo de la función XNpv

Con esta información básica, estamos listos para explicar cómo la programación lineal se puede aplicar a problemas en los cuales los fondos de inversión limitados se deben asignar a proyectos de inversión. Tales problemas de llaman problemas de **presupuesto de gastos de capital blancas.**

EJEMPLO 10 Selección de proyecto

La compañía Star Oil sometió a consideración cinco oportunidades de inversión diferentes. Las salidas de efectivo y los valores netos actuales (en millones de dólares) se proporcionan en la tabla 7. La Star Oil tiene 40 millones de dólares dispuestos para invertirlos ahora (tiempo 0). Se estima que en un año a partir de ahora (tiempo 1) habrá 20 millones de dólares disponibles para invertirlos. Star Oil podría comprar alguna fracción de cada inversión. En este caso, las salidas de efectivo y el VNA se ajustan en forma correspondiente. Por ejemplo, si Star Oil compra un quinto de la inversión 3, entonces se requeriría una salida de efectivo de $\frac{1}{5}(5) = 1$ millón de dólares en el tiempo 0, y una salida de efectivo de $\frac{1}{5}(5) = 1$ millón de dólares se requeriría en el tiempo 1. La participación de un quinto de la inversión 3 rendiría un VNA de $\frac{1}{5}(16) = 3.2$ millones de dólares. Star Oil desea maximizar el VNA que se puede obtener al participar en las inversiones 1 a 5. Plantee un PL que ayude a lograr este objetivo. Suponga que cualquier fondo sobrante en el tiempo 0 no se puede usar en el tiempo 1.

Solución Star Oil debe determinar qué fracción de cada inversión comprar. Entonces, se define

$$x_i = \text{ fracción de inversión } i \text{ comprada por Star Oil} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

El objetivo de Star es maximizar el VNA ganado con las inversiones. Entonces (VNA total) = (VNA ganado con la inversión 1) + (VNA ganado con la inversión 2) + ⋯ + (VNA ganado con la inversión 5). Obsérvese que

$$\begin{aligned}\text{VNA de la inversión 1} &= \text{(VNA de la inversión 1) (fracción comprada de la inversión 1)}\\ &= 13x_1\end{aligned}$$

Si se aplica un razonamiento análogo a las inversiones 2 a 5 se sabe que Star Oil desea maximizar

$$z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 \tag{25}$$

Las restricciones de Star Oil se podrían expresar como sigue:

Restricción 1 Star no puede invertir más de 40 millones en el tiempo 0.

Restricción 2 Star no puede invertir más de 20 millones en el tiempo 1.

Restricción 3 Star no puede comprar más de 100% de la inversión i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Para expresar la restricción 1 en forma matemática, observe que (dólares invertidos en el tiempo 0) = (dólares invertidos en la inversión 1 en el tiempo 0) + (dólares invertidos en la inversión 2 en el tiempo 0) + ⋯ + (dólares invertidos en la inversión 5 en el tiempo 0). También en millones de dólares.

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\text{Dólares invertidos en la}\\ \text{inversión 1 en el tiempo 0}\end{matrix} &= \begin{pmatrix}\text{dólares requeridos para la}\\ \text{inversión 1 en el tiempo 0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{fracción de la}\\ \text{inversión 1 comprada}\end{pmatrix}\\ &= 11x_1\end{aligned}$$

TABLA 7
Flujos de efectivo y valor neto actual para inversiones en presupuesto de gastos de capital

	Inversiones (dólares)				
	1	2	3	4	5
Salida de efectivo en el tiempo 0	11	53	5	5	29
Salida de efectivo en el tiempo 1	3	6	5	1	34
VNA	13	16	16	14	39

De igual manera, para las inversiones 2 a 5,

$$\text{Dólares invertidos en el tiempo } 0 = 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5$$

La limitación 1 se reduce a

$$11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40 \quad \text{(Limitación del tiempo 0)} \tag{26}$$

La limitación 2 se reduce a

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20 \quad \text{(Limitación del tiempo 1)} \tag{27}$$

Las limitaciones 3 a 7 se podrían representar mediante

$$x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \tag{28-32}$$

Al combinar (26)-(32) con las restricciones de signo $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ se obtiene la PL siguiente:

$$\begin{array}{lll}
\max z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 & & \\
\text{s.a} \quad 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40 & & \text{(Limitación del tiempo 0)} \\
\quad 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20 & & \text{(Limitación del tiempo 1)} \\
\quad x_1 \leq 1 & & \\
\quad x_2 \leq 1 & & \\
\quad x_3 \leq 1 & & \\
\quad x_4 \leq 1 & & \\
\quad x_5 \leq 1 & & \\
\quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) & &
\end{array}$$

La solución óptima para esta PL es $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $x_2 = 0.201$, $x_5 = 0.288$, $z = 57.449$. La Star Oil debe comprar 100% de las inversiones 1, 3 y 4; 20.1% de la inversión 2 y 28.8% de la inversión 5. Un VNA total de 57 449 000 dólares, se obtendrá con estas inversiones.

A menudo es imposible comprar sólo una fracción de la inversión sin sacrificar los flujos de efectivo favorables de la inversión. Supóngase que cuesta 12 millones de dólares perforar un pozo de petróleo de la suficiente profundidad para ubicar un pozo fluyente de 30 millones de dólares. Si hubiera un solo inversionista en este proyecto que proporcionara 6 millones de dólares para emprender la mitad del proyecto, entonces este inversionista podría perder toda la inversión y no recibiría flujos de efectivo positivos. En este ejemplo, disminuir la cantidad de dinero invertido en 50% reduce el rendimiento en más de 50%, situación que violaría la Suposición de proporcionalidad.

En muchos problemas de presupuesto de capital hay poca razón en permitir que x_i sea fraccionaria: toda x_i debe ser restringida a 0 (no invertir en la inversión i) o a 1 (comprar toda la inversión i). Por consiguiente, muchos problemas de presupuesto de capital incumplen la Suposición de divisibilidad.

Un modelo de presupuesto de capital que permite que toda x_i sea sólo 0 o 1 se analiza en la sección 9.2.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que si $r = 0.02$, la inversión 2 tiene un mayor VNA que la inversión 1.

2 Se dispone de dos inversiones con flujos de efectivo variables (en miles de dólares) de acuerdo con la tabla 8. Están disponibles 10 000 dólares para la inversión en el tiempo 0, y en el tiempo 1, 7 000 dólares. Si se supone que $r = 0.10$, plantee un PL cuya solución maximice el VNA obtenido de estas inversiones. Determine gráficamente la solución óptima de la PL.

TABLA 8

Inversión	Flujo efectivo (en miles de dólares) en el tiempo 0	1	2	3
1	−6	−5	7	9
2	−8	−3	9	7

(Suponga que se puede comprar una fracción de una inversión.)

3 Suponga que r, la tasa de interés anual, es 0.20, y que todo el dinero en el banco gana 20% de interés cada año (es decir, después de estar en el banco durante un año, 1 dólar se convertirá en 1.20). Si colocamos 100 dólares en el banco durante un año, ¿cuál es el VNA de esta transacción?

4 Una compañía ha sometido 9 proyectos a consideración. El VNA sumado por cada proyecto y el capital requerido por cada proyecto durante los dos próximos años, se presenta en la tabla 9. Todos los valores están en millones. Por ejemplo, el proyecto 1 sumará 14 millones de dólares en VNA y requiere gastos por 12 millones durante el año 1, y 3 millones durante el año 2. Se dispone de 50 millones de dólares para los proyectos durante el año 1 y 20 millones están disponibles durante el año 2. Si se supone que se va a iniciar una fracción de cada proyecto, ¿cómo se puede maximizar VNA?

Grupo B

5[†] Finco debe determinar cuánta inversión y deuda comprometer durante el próximo año. Cada dólar invertido reduce el VNA de la compañía en 10 centavos, y cada dólar de deuda incrementa el VNA en 50 centavos (debido a la deducibilidad de los pagos de intereses). Finco es capaz de invertir cuando mucho un millón de dólares durante el año próximo. La deuda puede ser cuando mucho de 40% de la inversión. Finco tiene por ahora 800 000 dólares disponibles en efectivo. Todas las inversiones se deben pagar del efectivo actual o de dinero tomado a préstamo. Formule una PL cuya solución le diga a Finco cómo maximizar su VNA. Luego resuelva en forma gráfica el PL.

TABLA 9

	Proyecto 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Salida de efectivo en el año 1	12	54	6	6	30	6	48	36	18
Salida de efectivo en el año 2	3	7	6	2	35	6	4	3	3
VNA	14	17	17	15	40	12	14	10	12

3.7 Planificación financiera a corto plazo[‡]

Los modelos de PL se usan a menudo para ayudar a las empresas en la planificación a corto o largo plazos (*véase también* sección 3.11). Ahora se considera un ejemplo sencillo que ilustra cómo la PL puede usarse para ayudar a una compañía en la planificación financiera en el corto plazo.[§]

EJEMPLO 11 Planificación financiera a corto plazo

Semicond es una pequeña empresa de electrónica que fabrica grabadoras y radios. Los costos de mano de obra por unidad, los costos de materia prima y el precio de venta de los productos se proporcionan en la tabla 10. El primero de diciembre de 2002, Semicond tenía materia prima suficiente para la manufactura de 100 grabadoras y 100 radios. En la misma fecha, la hoja de balance de la compañía era la que se muestra en la tabla 11 y la relación de activos-pasivos (también conocida como relación de activo corriente a pasivo circulante) era de 20 000/10 000 = 2.

Semicond debe determinar cuántas grabadoras y cuántos radios tiene que producir durante diciembre. La demanda es lo suficientemente grande como para que todos los bienes producidos se vendan. Sin embargo, todas las ventas son a crédito, y los pagos por los bienes producidos en diciembre se recibirán apenas el primero de febrero de 2003. Durante diciembre, Semicond reunirá 2 000 dólares en cuentas por cobrar, pero debe abonar 1 000

[†]Basado en Myers y Pogue (1974).
[‡]Esta sección comprende material que se podría omitir sin que haya pérdida de continuidad.
[§]Esta sección se basa en un ejemplo de Neave y Wiginton (1981).

TABLA 10
Información de los costos en Semicond

	Grabadora	Radio
Precio de venta	$100	$90
Costo de mano de obra	$ 50	$35
Costo de materia prima	$ 30	$40

TABLA 11
Hoja de balance de Semicond

	Activos	Pasivos
Efectivo	$10 000	
Cuantas por cobrar[§]	$ 3 000	
Inventario existente[¶]	$ 7 000	
Préstamo bancario		$10 000

[§]Las cuentas por cobrar es dinero que clientes le deben a Semicond por productos que compraron previamente.
[¶]Valor del primero de diciembre de 2002, inventario = 30(100) + 40(100) = 7 000 dólares.

dólares del préstamo pendiente y pagar un mes de renta de 1 000 dólares. El primero de enero de 2003, Semicond recibirá un embarque de materia prima por 2 000 dólares, que tiene que pagar el primero de febrero de 2003. La administración de Semicond ha decidido que el saldo en efectivo al primero de enero de 2003 debe ser por lo menos de 4 000 dólares. Asimismo, el banco de Semicond requiere que la relación de activo corriente a pasivo circulante al principio de enero sea de por lo menos 2. Para maximizar la contribución a la utilidad a partir de la producción de diciembre (ingresos por recibir) − (costos de producción variables), ¿qué debe producir Semicond en diciembre?

Solución Semicond debe determinar cuántas grabadoras y cuántos radios tiene que producir en diciembre. Por consiguiente, se define

x_1 = cantidad de grabadoras fabricadas en diciembre
x_2 = cantidad de radios producidos en diciembre

Para expresar la función objetivo de Semicond, obsérvese que

$$\frac{\text{Contribución a la utilidad}}{\text{Grabadora}} = 100 - 50 - 30 = 20 \text{ dólares}$$
$$\frac{\text{Contribución a la utilidad}}{\text{Radio}} = 90 - 35 - 40 = 15 \text{ dólares}$$

Al igual que en el ejemplo de Giapetto, esto genera la función objetivo

$$\max z = 20x_1 + 15x_2 \tag{33}$$

Semicond enfrenta las restricciones siguientes:

Restricción 1 Debido a la disponibilidad limitada de materia prima, es posible producir cuando mucho 100 grabadoras en diciembre.

Restricción 2 Debido a la disponibilidad limitada de materia prima, se pueden fabricar cuando mucho 100 radios en diciembre.

Restricción 3 El activo disponible el primero de enero de 2002 debe ser por lo menos de 4 000 dólares.

Restricción 4 Se debe cumplir (activos al primero de enero)/(pasivos al primero de enero) ≥ 2.

La restricción 1 se representa mediante

$$x_1 \leq 100 \tag{34}$$

La restricción 2 se representa con

$$x_2 \leq 100 \tag{35}$$

Para expresar la restricción 3, obsérvese que

Activo disponible el primero de enero = Activo disponible el primero de diciembre
+ Cuentas por cobrar reunidas durante diciembre
− Parte del préstamo abonado durante diciembre
− Renta de diciembre − Costos de mano de obra.

$$= 10\,000 + 2\,000 - 1\,000 - 1\,000 - 50x_1 - 35x_2$$
$$= 10\,000 - 50x_1 - 35x_2$$

Entonces, la restricción 3 se puede escribir como

$$10\,000 - 50x_1 - 35x_2 \geq 4\,000 \tag{36'}$$

La mayor parte de los códigos para computadora requiere que todas las restricciones de la PL se expresen en una forma en la cual todas las variables están en el primer miembro y las constantes en el segundo miembro. Por consiguiente, para obtener una solución por computadora la ecuación (36') se debe escribir como

$$50x_1 + 35x_2 \leq 6\,000 \tag{36}$$

Para expresar la restricción 4 es necesario determinar el encuadre (estado de la caja), cuentas por cobrar, situación del inventario y pasivos en términos de x_1 y x_2. Ya se estableció que

$$\text{Estado de la caja al primero de enero} = 10\,000 - 50x_1 - 35x_2$$

Entonces,

Cuentas por cobrar al primero de Enero = Cuentas por cobrar el primero de diciembre
+ cuentas por cobrar a partir de las ventas de diciembre
− cuentas por cobrar reunidas durante diciembre

$$= 3\,000 + 100x_1 + 90x_2 - 2\,000$$
$$= 1\,000 + 100x_1 + 90x_2$$

Se infiere ahora que

Valor del inventario al primero de Enero = Valor del inventario al primero de diciembre
− valor del inventario utilizando en diciembre
+ valor del inventario recibido al primero de enero

$$= 7\,000 - (30x_1 + 40x_2) + 2\,000$$
$$= 9\,000 - 30x_1 - 40x_2$$

Ya se puede calcular el estado de los activos al primero de enero:

Estado de los activos al primero de Enero = estado de la caja al primero de enero
+ cuentas por cobrar al primero de enero
+ situación del inventario al primero de enero

$$= (10\,000 - 50x_1 - 35x_2) + (1\,000 + 100x_1 + 90x_2) + (9\,000 - 30x_1 - 40x_2)$$
$$= 20\,000 + 20x_1 + 15x_2$$

Por último,

Pasivos al primero de enero = pasivos al primero de diciembre
− pago del préstamo de diciembre
+ cantidad que se debe por el embarque de inventario del primero de enero
= 10 000 − 1 000 + 2 000
= 11 000 dólares

Entonces, la restricción 4 ya se puede establecer como

$$\frac{20,000 + 20x_1 + 15x_2}{11,000} \geq 2$$

Al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por 11 000, se obtiene

$$20\,000 + 20x_1 + 15x_2 \geq 22\,000$$

Luego de arreglarla en forma adecuada acomodarla para que se pueda utilizar en computadora, se tiene

$$20x_1 + 15x_2 \geq 2\,000 \tag{37}$$

Al combinar (33) a (37) con las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{array}{llll}
\max z = 20x_1 + 15x_2 & & & \\
\text{s.a.} & x_1 \leq 100 & & \text{(Restricción de la grabadora)} \\
& x_2 \leq 100 & & \text{(Restricción del radio)} \\
& 50x_1 + 35x_2 \leq 6\,000 & & \text{(Restricción del estado de caja)} \\
& 20x_1 + 15x_2 \geq 2\,000 & & \text{(Restricción de la relación de activo corriente a pasivo circulante)} \\
& x_1, x_2 \geq 0 & & \text{(Restricciones de signo)}
\end{array}$$

Tras resolver el PL en forma gráfica (o mediante computadora), se llega a la siguiente solución óptima: $z = 2\,500$, $x_1 = 50$, $x_2 = 100$. Por consiguiente, Semicond puede maximizar la contribución de la producción de diciembre a las utilidades mediante la fabricación de 50 grabadoras y 100 radios. Esto contribuye con $20(50) + 15(100) = 2\,500$ a las utilidades.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva en forma gráfica el problema de Semicond.

2 Suponga que el embarque de inventario del primero de enero está valuado en 7 000 dólares. Demuestre que el PL de Semicond ya no es factible.

3.8 Problemas de mezcla

Las situaciones en las cuales varios insumos se deben mezclar en cierta proporción para producir bienes para la venta se pueden someter, con frecuencia, al análisis de la programación lineal. Estos problemas reciben el nombre de **problemas de mezcla**. En la lista siguiente se encuentran algunas situaciones en las que la programación lineal se aplicó para resolver los problemas de mezcla.

1 Mezcla de distintos petróleos crudos para producir distintos tipos de gasolina y otros productos (como aceite combustible).

2 Combinación de varios productos químicos para obtener otros.

3 Combinación de varios tipos de aleaciones metálicas con el fin de producir varios tipos de acero.

4 Mezcla de varios forrajes para ganado en un intento para obtener un alimento de costo mínimo para los animales.

5 Mezcla de varios minerales con el fin de obtener un mineral de una calidad específica.

6 Combinación de varios ingredientes (carne, relleno, agua, entre otros) para elaborar un producto como el embutido *bologna.*

7 Mezcla de varios tipos de papel para fabricar papel reciclado de calidad variable.

El siguiente ejemplo ilustra las ideas importantes al plantear modelos de PL para problemas de mezclas.

EJEMPLO 12 Mezcla de crudos

Sunco Oil produce tres tipos de gasolina (gas 1, gas 2 y gas 3). Cada tipo se obtiene a partir de la mezcla de tres tipos de petróleo crudo (crudo 1, crudo 2 y crudo 3). El precio de venta por barril de gasolina y el precio de compra por barril de crudo se proporcionan en la tabla 12. Sunco tiene la capacidad de comprar al día hasta 5 000 barriles de cada tipo de crudo.

Los tres tipos de gasolina difieren en su índice de octano y en el contenido de azufre. El crudo mezclado para producir la gasolina 1 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 10, y contener cuando mucho 1% de azufre. La mezcla de crudos para producir la gasolina 2 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 8, y contener cuando mucho 2% de azufre. Los crudos mezclados para producir la gasolina 3 deben tener un índice de octano de por lo menos 6, y contener cuando mucho 1% de azufre. El índice de octano y el contenido de azufre de los tres tipos de crudo se presentan en la tabla 13. Cuesta 4 dólares la transformación de un barril de crudo en un barril de gasolina, y la refinería de Sunco tiene la capacidad para refinar al día hasta 14 000 barriles de gasolina.

Los clientes de Sunco requieren las cantidades siguientes de cada gasolina: gas 1, 3 000 barriles diarios; gas 2, 2 000 barriles por día; gas 3, 1 000 barriles por día. La compañía considera que es una obligación cumplir con esta demanda. Asimismo tiene la opción de anunciarse para impulsar la demanda de sus productos. Cada dólar que gasta diariamente por anunciar un tipo específico de gasolina, incrementa la demanda del día por ese tipo de producto en 10 barriles. Por ejemplo, si Sunco decide gastar todos los días 20 dólares en anunciar la gasolina 2, entonces la demanda diaria de este producto se incrementa en $20(10) = 200$ barriles. Plantee una PL que le permita a Sunco maximizar las utilidades diarias (utilidades = ingresos − costos).

Solución Sunco debe tomar dos tipos de decisiones: primero, cuánto dinero debe gastar en anunciar cada tipo de gasolina y, segundo, cómo hacer la mezcla para cada tipo de gasolina a partir de los tres tipos de crudo. Por ejemplo, Sunco debe decidir cuántos barriles de crudo 1 debe usar para producir gasolina 1. Las variables de decisión se definen de la siguiente manera:

a_i = dólares gastados diariamente en anuncios de la gasolina i $\quad (i = 1, 2, 3)$

x_{ij} = barriles de crudo i usados para producir gasolina j $\quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3)$

Por ejemplo, x_{21} es el número de barriles de crudo 2 usados todos los días para producir gasolina 1.

TABLA 12
Precios de los crudos para la mezcla y de gasolina

Gasolina	Precios de venta por barril (dólares)	Crudo	Precio de compra por barril (dólares)
1	70	1	45
2	60	2	35
3	50	3	25

TABLA 13
Índice de octano y contenido de azufre en la mezcla

Crudo	Índice de octano	Contenido de azufre (%)
1	12	0.5
2	6	2.0
3	8	3.0

Conocer estas variables es suficiente para determinar la función objetivo de Sunco y las restricciones, pero antes de hacerlo, hay que hacer notar que la definición de las variables de decisión requiere

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= \text{barriles de crudo 1 usados todos los días} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= \text{barriles de crudo 2 usados todos los días} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= \text{barriles de crudo 3 usados todos los días} \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= \text{barriles de gasolina 1 producidos al día} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= \text{barriles de gasolina 2 producidos al día} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= \text{barriles de gasolina 3 producidos al día} \end{aligned} \tag{39}$$

Con el fin de simplificar el problema, se supone que no se puede almacenar gasolina, por lo que se debe vender el mismo día en que se produce. Esto significa que para $i = 1, 2, 3$, la cantidad de gasolina i producida diariamente debe ser igual a la demanda diaria de gasolina i. Suponga que la cantidad de gasolina i producida al día excede la demanda diaria. Entonces habríamos incurrido en compras y costos de producción innecesarios. Por otro lado, si la cantidad de gasolina i que se obtiene todos los días es menor que la demanda diaria de dicha gasolina, entonces no se cumple con la demanda o se está incurriendo en costos de publicidad innecesarios.

Ya estamos listos para determinar la función objetivo de Sunco y las limitaciones. Empezamos con la función objetivo de Sunco. De acuerdo con (39),

$$\begin{aligned} \text{Ingresos diarios por las ventas de gasolina} = {} & 70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) \\ & + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33}) \end{aligned}$$

De (38),

$$\begin{aligned} \text{Costos diarios por la compra de crudo} = {} & 45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \\ & + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \end{aligned}$$

Asimismo,

$$\text{Costos diarios por publicidad} = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\text{Costos diarios de producción} = 4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Utilidad diaria} = {} & \text{ingreso diario por las ventas de gasolina} \\ & - \text{costo diario de la compra de crudo} \\ & - \text{costos diarios por publicidad} - \text{costos diarios de producción} \\ = {} & (70 - 45 - 4)x_{11} + (60 - 45 - 4)x_{12} + (50 - 45 - 4)x_{13} \\ & + (70 - 35 - 4)x_{21} + (60 - 35 - 4)x_{22} + (50 - 35 - 4)x_{23} \\ & + (70 - 25 - 4)x_{31} + (60 - 25 - 4)x_{32} \\ & + (50 - 25 - 4)x_{33} - a_1 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el objetivo de Sunco es maximizar

$$z = 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3 \qquad \textbf{(40)}$$

Respecto a las restricciones de Sunco, consideramos que se deben cumplir las 13 limitaciones siguientes:

Restricción 1 La gasolina 1 que se produce por día debe ser igual a su demanda diaria.

Restricción 2 La gasolina 2 que se produce por día debe ser igual a su demanda diaria.

Restricción 3 La gasolina 3 que se produce por día debe ser igual a su demanda diaria.

Restricción 4 Se pueden comprar cuando mucho 5 000 barriles de crudo 1 por día.

Restricción 5 Se pueden comprar cuando mucho 5 000 barriles de crudo 2 por día.

Restricción 6 Se pueden comprar cuando mucho 5 000 barriles de crudo 3 por día.

Restricción 7 Debido a la capacidad limitada de la refinería, se pueden producir al día cuando mucho 14 000 barriles.

Restricción 8 La mezcla de crudos para producir gasolina 1 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 10.

Restricción 9 La mezcla de crudos para producir gasolina 2 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 8.

Restricción 10 La mezcla de crudos para producir gasolina 3 debe tener un índice de octano promedio de por lo menos 6.

Restricción 11 La mezcla de crudos para producir gasolina 1 debe contener cuando mucho 1% de azufre.

Restricción 12 La mezcla de crudos para producir gasolina 2 debe contener cuando mucho 2% de azufre.

Restricción 13 La mezcla de crudos para producir gasolina 3 debe contener cuando mucho 1% de azufre.

Para expresar la restricción 1 en términos de las variables de decisión, observe que

$$\text{Demanda diaria de gas 1} = 3\,000 + \text{demanda de gas 1 generada por la publicidad}$$

$$\text{Demanda de gas 1generada por la publicidad} = \left(\frac{\text{demanda de gas 1}}{\text{dólar gastado}}\right)\left(\begin{matrix}\text{dólares}\\ \text{gastados}\end{matrix}\right) = 10a_1{}^{\dagger}$$

Por tanto, la demanda diaria de gas $1 = 3\,000 + 10a_1$. La restricción 1 se podría escribir como

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3\,000 + 10a_1 \qquad \textbf{(41')}$$

y al ser arreglada, se tiene

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} - 10a_1 = 3\,000 \qquad \textbf{(41)}$$

La restricción 2 se expresa mediante

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} - 10a_2 = 2\,000 \qquad \textbf{(42)}$$

†Muchos estudiantes creen que la demanda de gas 1 generada por la publicidad se debería escribir como $\frac{1}{10}a_1$. Si se analizan las unidades de este término, se encuentra que no es correcto. $\frac{1}{10}$ tiene unidades de dólares gastados por barril de demanda, y a_1 tiene unidades de dólares gastados. Por lo tanto, el término $\frac{1}{10}a_1$ tendría unidades de (dólares gastados)^2 por barril de demanda. ¡Esto no puede ser correcto!

La restricción 3 se expresa con

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} - 10a_3 = 1\,000 \tag{43}$$

De acuerdo con (38), la restricción 4 se reduce a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 5\,000 \tag{44}$$

La expresión para la restricción 5 es

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 5\,000 \tag{45}$$

y para la restricción 6 es

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 5\,000 \tag{46}$$

Observe que

Gasolina total producida = gasolina 1 producida + gasolina 2 producida + gasolina 3 producida

$$= (x_{11} + x_{21} + x_{31}) + (x_{12} + x_{22} + x_{32}) + (x_{13} + x_{23} + x_{33})$$

La restricción 7 se vuelve

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 14\,000 \tag{47}$$

Para expresar las restricciones 8 a 10, uno debe ser capaz de determinar el índice de octano "promedio" en una mezcla de distintos tipos de crudo. Se supone que los octanajes de diferentes crudos se mezclan en forma lineal. Por ejemplo, si se mezclan dos barriles de crudo 1, tres barriles de crudo 2 y un barril de crudo 3, el índice promedio de octano sería

$$\frac{\text{Valor del total del octano en la mezcla}}{\text{Número de barriles en la mezcla}} = \frac{12(2) + 6(3) + 8(1)}{2 + 3 + 1} = \frac{50}{6} = 8\frac{1}{3}$$

Generalizando, la restricción 8 se expresa mediante

$$\frac{\text{Valor total de octano en gas 1}}{\text{Gas 1 en la mezcla}} = \frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \geq 10 \tag{48'}$$

Infortunadamente (48´) no es una desigualdad lineal. Para transformar (48´) en una desigualdad lineal, todo lo que se tiene que hacer es multiplicar ambos miembros por el denominador del primer miembro. La desigualdad resultante es

$$12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31} \geq 10(x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

que se puede expresar también como

$$2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} \geq 0 \tag{48}$$

De igual manera, la limitación 9 es

$$\frac{12x_{12} + 6x_{22} + 8x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \geq 8$$

Al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ y simplificar, se obtiene

$$4x_{12} - 2x_{22} \geq 0 \tag{49}$$

Como todos los crudos del problema tienen un índice de octano de 6 o superior, cualquier mezcla para manufacturar la gasolina 3 tendrá un índice de octano promedio de por lo menos 6. Esto quiere decir que cualquier valor de las variables cumple con la restricción 10. Con el fin de comprobarlo, la restricción 10 se expresaría de la manera siguiente:

$$\frac{12x_{13} + 6x_{23} + 8x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \geq 6$$

Al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x_{13} + x_{23} + x_{33}$ y simplificar se llega a

$$6x_{13} + 2x_{33} \geq 0 \tag{50}$$

Como $x_{13} \geq 0$ y $x_{33} \geq 0$ siempre se cumplen, (50) se satisface en forma automática, por lo que no es necesario incluirla en el modelo. Una limitación como (50), que se infiere de otras restricciones en el modelo se denomina **restricción redundante** y no requiere ser incluida en el planteamiento.

La restricción (11) se podría expresar como sigue

$$\frac{\text{Total de azufre en la mezcla de gas 1}}{\text{Cantidad de barriles en la mezcla de gas 1}} \leq 0.01$$

Entonces, usando los porcentajes de azufre en cada tipo de aceite, se observa que

$$\begin{aligned}\text{Azufre total en la mezcla de gasolina 1} &= \text{Azufre en el crudo 1 usado para la gasolina 1}\\ &\quad + \text{azufre en el crudo 2 usado para la gasolina 1}\\ &\quad + \text{azufre en el crudo 3 usado para la gasolina 1}\\ &= 0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31}\end{aligned}$$

Entonces, la restricción 11 ya se puede escribir como

$$\frac{0.005x_{11} + 0.02x_{21} + 0.03x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \leq 0.01$$

Una vez más, ésta no es una desigualdad lineal, pero al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $x_{11} + x_{21} + x_{31}$ y simplificar, se obtiene

$$-0.005x_{11} + 0.01x_{21} + 0.02x_{31} \leq 0 \tag{51}$$

De manera similar, la restricción 12 equivale a

$$\frac{0.005x_{12} + 0.02x_{22} + 0.03x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} \leq 0.02$$

Luego de multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ y simplificar se obtiene

$$-0.015x_{12} + 0.01x_{32} \leq 0 \tag{52}$$

Por último, la restricción 13 es equivalente a

$$\frac{0.005x_{13} + 0.02x_{23} + 0.03x_{33}}{x_{13} + x_{23} + x_{33}} \leq 0.01$$

Al multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por $x_{13} + x_{23} + x_{33}$ y simplificar, se llega a

$$-0.005x_{13} + 0.01x_{23} + 0.02x_{33} \leq 0 \tag{53}$$

Cuando se combinan (40) a (53), excepto la restricción redundante (50), con las restricciones de signo $x_{ij} \geq 0$ y $a_i \geq 0$ se obtiene un PL que se podría expresar en forma tabular (véase tabla 14). En la tabla 14, el primer renglón (max) representa la función objetivo, el segundo renglón representa la primera restricción, y así sucesivamente. Al resolverse con computadora, se obtiene una solución óptima para el PL de Sunco:

$$z = 287\,500$$
$$x_{11} = 2222.22 \qquad x_{12} = 2111.11 \qquad x_{13} = 666.67$$
$$x_{21} = 444.44 \qquad x_{22} = 4222.22 \qquad x_{23} = 333.34$$
$$x_{31} = 333.33 \qquad x_{32} = 3166.67 \qquad x_{33} = 0$$
$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 750 \qquad a_3 = 0$$

TABLA 14
Función objetivo y restricciones para efectuar la mezcla

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	a_1	a_2	a_3	
21	11	1	31	21	11	41	31	21	−1	−1	−1	(max)
1	0	0	1	0	0	1	0	0	−10	0	0	= 3 000
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	−10	0	= 2 000
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	−10	= 1 000
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	≤ 5 000
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	≤ 5 000
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	≤ 5 000
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	≤ 14 000
2	0	0	−4	0	0	−2	0	0	0	0	0	≥ 0
0	4	0	0	−2	0	0	0	0	0	0	0	≥ 0
−0.005	0	0	0.01	0	0	0.02	0	0	0	0	0	≤ 0
0	−0.015	0	0	0	0	0	0.01	0	0	0	0	≤ 0
0	0	−0.005	0	0	0.01	0	0	0.02	0	0	0	≤ 0

Por consiguiente, Sunco podría producir $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3\,000$ barriles de gasolina 1 usando 2 222.22 barriles de crudo 1 444.44 barriles de crudo 2 y 333.33 barriles de crudo 3. La compañía podría producir $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 9\,500$ barriles de gasolina 2 usando 2 111.11 barriles de crudo 1 4 222.22 barriles de crudo 2 y 3 166.67 barriles de crudo 3. Sunco también podría producir $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1\,000$ barriles de gasolina 3 usando 666.67 barriles de crudo 1 y 333.34 barriles de crudo 2. Asimismo, la empresa podría gastar 750 dólares en anunciar la gasolina 2. Sunco tendrá una utilidad de 287 500 dólares.

Observe que aunque la gasolina 1 es, al parecer, la que reditúa más utilidades, estimulamos la demanda de la gasolina 2, y no de la 1. La razón es que dada la calidad (respecto al índice de octano y contenido de azufre) del crudo disponible es difícil producir gasolina 1. Por lo tanto, Sunco puede ganar más dinero por producir más de la gasolina 2 de menor calidad que produciendo cantidades extra de gasolina 1.

Aspectos relacionados con los modelos

1 Se ha supuesto que el nivel de calidad de una mezcla es una función **lineal** de cada insumo usado para la mezcla. Por ejemplo, se dio por hecho que si la gasolina 3 estaba fabricada con $\frac{2}{3}$ de crudo 1 y $\frac{1}{3}$ de crudo 2, entonces el índice de octano para la gasolina 3 = $(\frac{2}{3})$ · (índice de octano del crudo 1) + $(\frac{1}{3})$ · (índice de octano del crudo 2). Si el índice de octano de una gasolina no es una función lineal de la fracción de cada insumo que se usa para producir la gasolina, entonces ya no hay un problema de programación lineal; lo que se tiene es un problema de **programación no lineal.** Por ejemplo, sea g_{i3} la fracción de gasolina 3 hecha con crudo i. Suponga que el índice de octano para la gasolina 3 está dado por índice de octano de la gasolina 3 = $g_{13}^{.5}$ · (índice de octano del crudo 1) + $g_{23}^{.4}$ · (índice de octano del crudo 2) + $g_{33}^{.3}$ · (índice de octano del crudo 3). Entonces no es un problema de programación lineal. La razón es que el índice de octano de la gasolina 3 no es una función lineal de g_{13}, g_{23} y g_{33}. La programación no lineal se trata en el capítulo 11.

2 En realidad, una compañía que utiliza un modelo de mezclas lo aplicaría en forma periódica (todos los días, quizá), y establecería la producción con base en el inventario actual de insumos y pronósticos de demanda actual. Luego se actualizarían los niveles de pronóstico y los niveles de insumos, y se ejecutaría de nuevo el modelo para determinar la producción del día siguiente.

Aplicaciones a la vida cotidiana

Mezcla en Texaco

Texaco (véanse Dewitt y col., 1980) utiliza un modelo de programación no lineal (OMEGA) para planificar y calendarizar sus aplicaciones de mezclas. El modelo de la compañía es no lineal, porque las volatilidades y el octanaje de la mezcla son funciones no lineales de la cantidad de cada insumo usado para producir una gasolina en particular.

Mezcla en la industria acerera

Fabian (1958) explica un modelo complejo de programación lineal que se puede usar para optimizar la producción de hierro y acero. Para cada producto elaborado hay varias restricciones en cuanto a la mezcla. Por ejemplo, el hierro de primera fusión básico debe contener cuando mucho 1.5% de silicio, cuando mucho 0.05% de azufre, entre 0.11% y 0.90% de fósforo, entre 0.4% y 2% de manganeso y entre 4.1 y 4.4% de carbono. Véase un ejemplo sencillo de mezcla en la industria acerera en el problema 6 (en la sección de Problemas de repaso).

Mezcla en la industria petrolera

Diversas compañías usan programación lineal para optimizar sus operaciones en la refinería. Un ejemplo sobre un modelo de mezclas (basado en Magoulas y Marinos-Kouris [1988]) que se puede usar para maximizar las utilidades de una refinería se encuentra en el ejemplo 14.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Usted ha decidio entrar a la industria de los dulces. Está pensando en producir dos tipos de dulces: dulce macizo y dulce suave. Ambos están elaborados sólo con azúcar, nueces y chocolate. En la actualidad tiene en existencia 100 oz de azúcar, 20 oz de nueces y 30 oz de chocolate. La mezcla usada para elaborar el dulce suave debe contener por lo menos 20% de nueces. La mezcla que se utiliza para el dulce macizo debe contener por lo menos 10% de nueces y 10% de chocolate. Cada onza del dulce suave se vende a 25 centavos y cada onza de dulce macizo, en 20 centavos. Plantee un PL que le permita maximizar sus ingresos con la venta de dulces.

2 O.J. Juice Company vende bolsas de naranjas y jugo de naranja en envases de cartón. O.J. clasifica las naranjas según una escala de 1 (malas) a 10 (excelentes). O.J. dispone en la actualidad de 100 000 lb de naranjas grado 9 y 120 000 lb de naranjas grado 6. La calidad promedio de naranjas vendidas en bolsas debe ser por lo menos de 7, y la calidad promedio de las naranjas utilizadas para fabricar el jugo de naranja debe ser por lo menos de 8. Cada libra de naranjas que se usa para el jugo rinde un ingreso de 1.50 dólares, e incurre en un costo variable (que consiste en costos de mano de obra, costos generales variables, costos de inventario, entre otros) de 1.05 dólares. Cada libra de naranjas que se vende en bolsa contribuye con un ingreso de 50 centavos e incurre en un costo variable de 20 centavos. Formule un PL para ayudar a O.J. a maximizar su utilidad.

3 Un banco desea saber dónde debe invertir sus ingresos durante el presente año. En la actualidad dispone de 500 000 dólares para inversiones en títulos, préstamos para compra de casas, préstamos para compra de autos y préstamos personales. Se sabe que la tasa anual de retorno en cada tipo de inversión es en título, 10%; préstamos para compra de casas, 16%; préstamos para compra de automóviles, 13%; préstamos personales, 20%. Para asegurarse que el conjunto de inversiones del banco no es demasiado riesgoso, el gerente de inversiones del banco ha propuesto las tres restricciones siguientes:

- **a** La cantidad invertida en préstamos personales no puede ser mayor a la cantidad invertida en títulos.
- **b** La cantidad invertida en préstamos para casas no puede sobrepasar la cantidad invertida en préstamos para automóviles.
- **c** No más del 25% de la cantidad total invertida podría ser para préstamos personales.

El objetivo del banco es maximizar el rendimiento anual en su conjunto de inversiones. Plantee un PL que posibilite al banco a cumplir con su meta.

4 Erica Cudahy podría invertir hasta 1 000 dólares. Este dinero lo podría invertir en acciones o en préstamos. Cada dólar invertido en acciones rinde 10 centavos de utilidad, y cada dólar invertido en un préstamo rinde 15 centavos de utilidad. Por lo menos 30% de todo el dinero invertido debe ser en acciones, y por lo menos 400 dólares deben ser invertidos en préstamos. Plantee un PL que se pueda utilizar para maximizar la utilidad total ganada por las inversiones de Erica. Después resuelva en forma gráfica la PL.

5 Chandler Oil Company tiene 5 000 barriles de crudo 1 y 10 000 barriles de crudo 2. La compañía vende dos productos: gasolina y aceite combustible. Ambos productos se elaboran combinando el crudo 1 y el crudo 2. La calidad de cada crudo es como sigue: crudo 1, 10; crudo 2, 5. La gasolina debe tener una calidad promedio de por lo menos 8, y el aceite combustible, por lo menos 6. La demanda de cada producto debe ser creada por la publicidad. Cada dólar gastado en anunciar a la gasolina crea 5 barriles de demanda, y cada dólar gastado en el aceite combustible origina 10 barriles de demanda. La gasolina se vende a 25 dólares por barril y el aceite combustible a 20 dólares. Formule un PL para ayudar a Chandler a maximizar sus utilidades. Suponga que no se puede comprar crudo de ninguno de estos tipos.

6 Bullco mezcla silicio y nitrógeno para producir dos tipos de fertilizantes. El fertilizante 1 debe contener por lo menos 40% de nitrógeno y venderse en 70 dólares la libra. El fertilizante 2 debe contener por lo menos 70% de silicio y venderse a 40 dólares la libra. Bullco puede comprar hasta 80 lb de nitrógeno a 15 dólares la libra, y hasta 100 lb de silicio a 10 dólares la libra. Suponga que todo el fertilizante se vende. Formule un PL para ayudar a Bullco a maximizar las ganancias.

7 Eli Daisy utiliza los productos químicos 1 y 2 para elaborar dos fármacos. El fármaco 1 debe tener por lo menos el 70% del producto químico 1, y el fármaco 2 debe contener por lo menos 60% del producto 2. Se pueden vender hasta 40 oz del fármaco 1 a 6 dólares la onza; se pueden vender hasta 30 oz del fármaco 2 a 5 dólares la onza. Se pueden comprar hasta 45 oz del producto químico 1 a 6 dólares la onza, y se pueden comprar hasta 40 oz del producto químico 2 a 4 dólares la onza. Plantee un PL que maximice las utilidades de Daisy.

8 La Highland TV-Radio Store debe determinar cuántos televisores y radios conservar en existencia. Un televisor requiere 10 pies cuadrados de espacio en el piso, en tanto que un radio necesita 4 pies cuadrados. Se dispone de 200 pies cuadrados de espacio en el piso. Un televisor gana 60 dólares en utilidades, y un radio 20 dólares. La tienda almacena sólo televisores y radios. Los requisitos del mercado señalan que por lo menos 60% de todos los aparatos debe ser radios. Por último, un televisor inmoviliza 200 dólares del capital, y un radio, 50 dólares. Highland quiere tener cuando mucho un valor de 3 000 dólares de capital inmovilizado en cualquier momento. Plantee un PL con el que se pueda maximizar la utilidad de esta compañía.

9 Muchas compañías de Wall Street utilizan modelos de PL para seleccionar opciones de inversión en títulos. Lo que sigue es una versión simplificada de dichos modelos. Solodrex está considerando invertir en cuatro títulos; dispone de 1 000 000 de dólares para invertir. El rendimiento anual esperado, el rendimiento anual en el peor de los casos de cada título y la "duración" de cada título se proporcionan en la tabla 15. La duración de un título es una medida de la sensibilidad del título a las tasas de interés. Solodrex quiere maximizar el rendimiento esperado a partir de sus inversiones en títulos, sujeto a tres restricciones.

Restricción 1 El rendimiento en el peor de los casos de la opción de inversión en títulos debe ser por lo menos de 8%.

Restricción 2 La duración promedio de la opción de inversión debe ser cuando mucho 6. Por ejemplo, una opción de inversión que invierte 600 000 dólares en el título 1 y 400 000 en el título 4 tendría una duración promedio de

$$\frac{60\,0000(3) + 400\,000(9)}{1\,000\,000} = 5.4$$

Restricción 3 Debido a los requisitos de diversificación, cuando mucho 40% de la cantidad total invertida puede estar invertido en un solo título.

Formule un PL que le permita a Solodrex maximizar el rendimiento esperado por sus inversiones.

TABLA 15

Título	Rendimiento esperado (%)	Rendimiento en el peor de los casos (%)	Duración
1	13	6%	3
2	8	8%	4
3	12	10%	7
4	14	9%	9

10 Coalco explota carbón en tres minas y lo embarca para cuatro clientes. Los costos por tonelada de carbón en producción, la ceniza y el contenido de azufre (por tonelada, t) del carbón y la capacidad de producción (en toneladas) de cada mina se proporcionan en la tabla 16. La cantidad de toneladas de carbón que solicita cada cliente se presenta en la tabla 17.

El costo (en dólares) por embarcar una tonelada de carbón desde una mina a cada cliente se proporciona en la tabla 18. Se requiere que la cantidad total de carbón embarcado contenga cuando mucho 5% de ceniza y cuando mucho 4% de azufre. Plantee un PL que minimice el costo por cumplir las demandas de los clientes.

11 Eli Daisy fabrica el medicamento Rozac a partir de cuatro productos químicos. Hoy deben producir 1 000 lb del fármaco. Los tres ingredientes activos de Rozac son A, B y C. Por peso, por lo menos 8% de Rozac debe ser A, por lo menos 4% de B y por lo menos 2% de C. El costo por libra de cada producto químico y la cantidad de cada ingrediente activo en una libra de cada producto se proporcionan en la tabla 19.

TABLA 16

Mina	Costo de producción (dólares)	Capacidad	Contenido de ceniza (t)	Contenido de azufre (t)
1	50	120	0.08	0.05
2	55	100	0.06	0.04
3	62	140	0.04	0.03

TABLA 17

Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
80	70	60	40

TABLA 18

	Cliente			
Mina	1	2	3	4
1	4	6	8	12
2	9	6	7	11
3	8	12	3	5

Es necesario que se utilicen por lo menos 100 lb del producto químico 2. Encuentre un PL cuya solución determine la forma más barata de producir el lote de hoy de Rozac.

TABLA 19

Producto químico	Costo (dólares por lb)	A	B	C
1	8	0.03	0.02	0.01
2	10	0.06	0.04	0.01
3	11	0.10	0.03	0.04
4	14	0.12	0.09	0.04

12 (Una hoja de cálculo podría ser útil en este problema). El índice de riesgo de una inversión se puede obtener a partir del rendimiento o rentabilidad de la inversión (en términos absolutos) por año, y calculando el promedio.

Suponga que usted pretende determinar qué porcentaje de su dinero debe ser invertido en bonos del tesoro, oro y acciones. En la tabla 20 (o archivo Inv68.xls) se proporcionan los rendimientos anuales (cambio en el valor) para estas inversiones durante los años 1968 a 1988. Sea el índice de riesgo de unas opciones de inversión el promedio ponderado (de acuerdo con la fracción de su dinero asignada a cada inversión) del índice de riesgo de cada inversión. Suponga que la cantidad de cada inversión debe estar entre 20 y 50% del total invertido. A usted le gustaría que el índice riesgo de sus opciones de inversión fuera de 0.15, y su objetivo es maximizar el rendimiento esperado de sus inversiones. Plantee un PL cuya solución maximice el rendimiento esperado de sus opciones de inversión, sujeto a las restricciones dadas. Utilice el rendimiento promedio ganado por cada inversión durante los años 1968 a 1988 como su estimación del rendimiento esperado.[†]

Grupo B

13 El dueño de Sunco opina que nuestra solución óptima de la PL no maximizará la utilidad diaria. Su razonamiento es el siguiente: "Tenemos 14 000 barriles de capacidad de refinación diaria, pero la solución óptima produce sólo 13 500 barriles. Por lo tanto, esto no puede ser maximizar la utilidad." ¿Qué podría responder usted?

14 Oilco elabora dos productos: gasolina regular y premium. Cada producto contiene 0.15 gramos de plomo por litro. Los dos productos se elaboran a partir de seis insumos: reformado, gasolina del desintegrador catalítico de líquidos (FCG), isomerato (ISO), polímero (POL), MTBE (MTB) y butano (BUT). Cada insumo tiene cuatro atributos:

Atributo 1 Índice de octano de investigación (IOI)
Atributo 2 RVP
Atributo 3 Volatilidad ASTM a 70°C
Atributo 4 Volatilidad ASTM a 130°C

Los atributos y la disponibilidad diaria (en litros) de cada insumo se dan en la tabla 21.

Los requisitos de cada insumo se dan en la tabla 22.

La demanda diaria (en miles de litros) de cada producto se debe cumplir, pero se puede producir más si así se desea. El IOI y las condiciones de ASTM son los mínimos. La gasolina regular se vende a 29.49 centavos por litro, y la gasolina premium en 31.43 centavos el litro. Antes de que cada producto esté listo para la venta, se debe eliminar 0.15 g/L de plomo de cada uno de ellos. El costo de eliminar 0.1 g/L es 8.5 centavos. Cuando mucho, el 38% de cada tipo de gasolina puede ser FCG. Plantee y resuelva un PL cuya solución indique a Oilco cómo maximizar sus utilidades diarias.[‡]

TABLA 20

Año	Existencia	Oro	T-Bills
1968	11	11	5
1969	−9	8	7
1970	4	−14	7
1971	14	14	4
1972	19	44	4
1973	−15	66	7
1974	−27	64	8
1975	37	0	6
1976	24	−22	5
1977	−7	18	5
1978	7	31	7
1979	19	59	10
1980	33	99	11
1981	−5	−25	15
1982	22	4	11
1983	23	−11	9
1984	6	−15	10
1985	32	−12	8
1986	19	16	6
1987	5	22	5
1988	17	−2	6

TABLA 21

	Disponibilidad	IOI	RVP	ASTM(70)	ASTM(130)
Reformado	15 572	98.9	7.66	−5	46
FCG	15 434	93.2	9.78	57	103
ISO	6 709	86.1	29.52	107	100
POL	1 190	97	14.51	7	73
MTB	748	117	13.45	98	100
BUT	Ilimitado	98	166.99	130	100

TABLA 22

	Demanda	IOI	RVP	ASTM(70)	ASTM(130)
Regular	9.8	90	21.18	10	50
Premium	30	96	21.18	10	50

[†]Basado en Chandy (1987).

[‡]Basado en Magoulas y Marinos-Kouris (1988).

3.9 Modelos del proceso de producción

Enseguida se explica cómo plantear un modelo de PL para un proceso sencillo de producción.[†] El paso clave es determinar cómo se relacionan los productos de una etapa superior del proceso con los productos de una etapa temprana.

EJEMPLO 13 Proceso de producción bruta

Rylon Corporation fabrica los perfumes Brute y Chanelle. La materia prima necesaria para elaborar cada tipo de perfume se compra a 3 dólares la libra. Para procesar 1 lb de materia prima, se necesita 1 h de tiempo de laboratorio. Cada libra de materia prima procesada rinde 3 oz del perfume Brute regular y 4 oz del perfume Chanelle regular. El Brute regular se vende a 7 dólares la onza, y el Chanelle regular, a 6 dólares la onza. Rylon tiene también la opción de procesar aún más Brute regular y Chanelle regular para obtener Luxury Brute, que se vende a 18 dólares la onza, y Luxury Chanelle, que se vende a 14 dólares la onza. Cada onza de Brute regular que se somete a otro proceso requiere 3 h adicionales de laboratorio, el costo del proceso es de 4 dólares y rinde una onza de Luxury Brute. Cada onza de Chanelle regular que se somete a otro proceso requiere 2 h adicionales de laboratorio, el costo del proceso es de 4 dólares y rinde una onza de Luxury Chanelle. Rylon tiene al año 6 000 h de tiempo de laboratorio disponibles, y puede comprar hasta 4 000 lb de materia prima. Plantee un PL que se pueda aplicar para determinar cómo Rylon puede maximizar sus utilidades. Suponga que el costo de las horas de laboratorio es un costo fijo.

Solución Rylon debe determinar cuánta materia prima comprar y cuánto de cada tipo de perfume producir. Por lo tanto, se definirán las variables de decisión:

x_1 = cantidad de onzas de Brute regular vendidas al año

x_2 = cantidad de onzas de Luxury Brute vendidas al año

x_3 = cantidad de onzas de Chanelle regular vendidas al año

x_4 = cantidad de onzas de Luxury Chanelle vendidas al año

x_5 = cantidad de libras de materia prima compradas cada año

Rylon quiere maximizar

$$\begin{aligned}\text{Contribución a la utilidad} &= \text{ingresos por las ventas de perfumes} - \text{costos de proceso}\\ &\quad - \text{costos de compra de materia prima}\\ &= 7x_1 + 18x_2 + 6x_3 + 14x_4 - (4x_2 + 4x_4) - 3x_5\\ &= 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función objetivo de Rylon se podría escribir como

$$\max z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5 \tag{54}$$

Rylon se enfrenta a las siguientes restricciones:

Restricción 1 No se pueden comprar más de 4 000 lb de materia prima al año.

Restricción 2 No se pueden usar más de 6 000 h de tiempo de laboratorio cada año.

La restricción 1 se expresa mediante

$$x_5 \leq 4\,000 \tag{55}$$

[†]Esta sección se basa en Hartley (1971).

Para expresar la restricción 2, obsérvese que

$$\begin{aligned}\text{Tiempo total de laboratorio al año} &= \text{tiempo usado al año para procesar la materia prima}\\ &+ \text{tiempo usado al año para procesar Luxury Brute}\\ &+ \text{tiempo usado al año para procesar Luxury Chanelle}\\ &= x_5 + 3x_2 + 2x_4\end{aligned}$$

La restricción 2 se transforma en

$$3x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 6\,000 \tag{56}$$

Después de agregar las restricciones de signo $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), muchos estudiantes afirman que Rylon debería resolver la PL siguiente:

$$\begin{aligned}\max z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5\\ \text{s.a} \qquad\qquad x_5 \leq 4\,000\\ 3x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 6\,000\\ x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)\end{aligned}$$

Este planteamiento es incorrecto. Observe que las variables x_1 y x_3 no aparecen en ninguna de las restricciones. Esto quiere decir que cualquier punto $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ y x_1 y x_3 muy grandes estan en la región factible. Los puntos con x_1 y x_3 grandes pueden proporcionar utilidades arbitrariamente elevadas. Por consiguiente, esta PL es no acotada. El error es que el presente planteamiento no indica que la cantidad de materia prima comprada determina la cantidad de Brute y Chanelle que está listo para la venta o para un proceso adicional. Más específicamente, de la figura 10 (y el hecho de que 1 oz de Brute procesado rinde exactamente 1 oz de Luxury Brute) se infiere que

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\text{Onzas de Brute regular vendidas}\\ +\text{ onzas de Luxury Brute vendidas}\end{matrix} &= \left(\frac{\text{onzas de Brute producidas}}{\text{libras de materia prima}}\right)\begin{pmatrix}\text{libras de materia}\\ \text{prima comprada}\end{pmatrix}\\ &= 3x_5\end{aligned}$$

La relación se refleja en la restricción

$$x_1 + x_2 = 3x_5 \qquad \text{o bien} \qquad x_1 + x_2 - 3x_5 = 0 \tag{57}$$

De igual manera, de la figura 10 es evidente que

$$\text{Onzas de Chanelle regular vendidas} + \text{onzas de Luxury Chanelle vendidas} = 4x_5$$

Esta relación origina la restricción

$$x_3 + x_4 = 4x_5 \qquad \text{o bien} \qquad x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \tag{58}$$

Las limitaciones (57) y (58) relacionan varias variables de decisión. Los estudiantes omiten, con frecuencia, restricciones de este tipo. Como este problema lo señala, no considerar una sola restricción, podría dar como resultado una respuesta inaceptable (tal co-

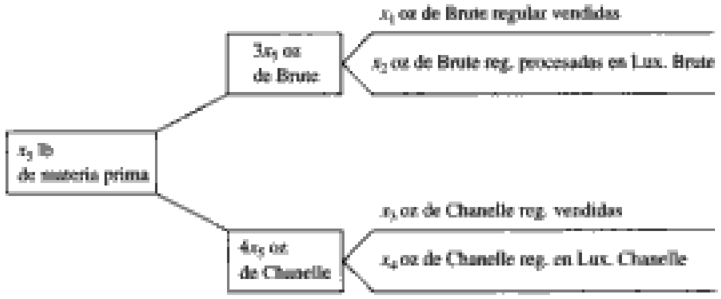


FIGURA 10
Proceso de producción para Brute y Chanelle

mo una PL no acotada). Si se combinan (53) a (58) con las restricciones de signo ordinarias, se llega al planteamiento *correcto* de la PL.

$$
\begin{aligned}
\max z = 7x_1 + 14x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5 & \\
\text{s.a} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 &\le 4000 \\
3x_2 \qquad + 2x_4 + x_5 &\le 6000 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad - 3x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 - 4x_5 &= 0 \\
x_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5) &
\end{aligned}
$$

La solución óptima es $z = 172\,666.667$, $x_1 = 11\,333.333$ oz, $x_2 = 666.667$ oz, $x_3 = 16\,000$ oz, $x_4 = 0$ y $x_5 = 4\,000$ lb. Por consiguiente, Rylon debe comprar las 4 000 lb de materia prima disponible y producir 11 333. 333 oz de Brute regular, 666.667 oz de Luxury Brute y 16 000 oz de Chanelle regular. Este plan de producción contribuirá con 172 666.667 dólares a las utilidades de Rylon. En este problema, una cantidad fraccionaria de onzas es razonable, por lo que se cumple la Suposición de divisibilidad.

Para terminar el análisis del problema de Nylon, se estudia un error muy común entre los estudiantes. El razonamiento de algunos es

$$1 \text{ lb de materia prima} = 3 \text{ oz de Brute} + 4 \text{ oz de Chanelle}$$

Como $x_1 + x_2 =$ total de oz de Brute producidas, y $x_3 + x_4 =$ total de onzas de Chanelle producidas, los estudiantes concluyen que

$$x_5 = 3(x_1 + x_2) + 4(x_3 + x_4) \tag{59}$$

Esta ecuación podría tener sentido como un enunciado para un programa de computadora; en cierto sentido, la variable x_5 es reemplazada por el segundo miembro de (59). Pero como restricción de PL, (59) no tiene sentido. Para entender mejor esto, nótese que el primer miembro tiene las unidades "libras de materia prima" y el término $3x_1$ en el segundo miembro tiene las unidades

$$\left(\frac{\text{Onzas de Brute}}{\text{libras de materia prima}}\right) (\text{onzas de Brute})$$

Como algunos de los términos no tienen las mismas unidades, (59) no puede ser correcta. *Si hay dudas respecto a una restricción, entonces verifique que todos los términos de la restricción tienen las mismas unidades.* Así se evitarán muchos errores en el planteamiento. (Naturalmente, incluso si las unidades de ambos miembros de la restricción son iguales, ésta podría ser incorrecta.)

PROBLEMAS

Grupo A

1 Sunco Oil tiene tres procesos distintos que se pueden aplicar para elaborar varios tipos de gasolina. En cada proceso se requiere mezclar crudos en el desintegrador catalítico de la compañía. Ejecutar el proceso 1 durante una hora cuesta 5 dólares y se requieren 2 barriles de crudo 1 y 3 barriles de crudo 2. El producto luego de ejecutar el proceso 1 por una hora es 2 barriles de gasolina 1 y 1 barril de gasolina 2. Efectuar el proceso 2 durante una hora cuesta 4 dólares y requiere 1 barril de crudo 1 y 3 barriles de crudo 2. El resultado de correr el proceso 2 por una hora es 3 barriles de gasolina 2. Ejecutar el proceso 3 durante una hora cuesta 1 dólar y se requieren 2 barriles de crudo 2 y 3 barriles de gasolina 2. El resultado del proceso 3 luego de una hora es 2 barriles de gasolina 3. Todas las semanas se podrían comprar 200 barriles de crudo 1 a 2 dólares el barril y 300 barriles de crudo 2 a 3 dólares el barril. Toda la gasolina producida se podría vender a los precios siguientes por barril: gasolina 1, 9 dólares; gasolina 2, 10 dólares; gasolina 3, 24 dólares. Plantee un PL cuya solución maximice los ingresos menos costos. Suponga que sólo se dispone cada semana de 100 horas de tiempo en el desintegrador catalítico.

2 Furnco manufactura mesas y sillas. Una mesa requiere 40 pies tablón de madera, en tanto que una silla requiere 30 pies tablón de madera. La madera se podría comprar a un costo de 1 dólar por pie tablón, y hay disponibles 40 000 pies tablón. Se necesitan dos horas de mano de obra calificada para manufacturar una mesa sin acabados o una silla sin acabados. Tres horas más de mano de obra calificada convierten una mesa sin acabados en una ya terminada, y 2 h más en el caso de las sillas. Se puede disponer de un total de 6 000 horas de mano de obra calificada (y ya se pagó por ella). Todos los muebles fabricados se venderán a los siguientes precios unitarios: mesa sin terminar, 70 dólares; mesa acabada, 140 dólares; silla sin terminar, 60 dólares; silla terminada, 110 dólares. Plantee un PL que maximice la contribución a las utilidades por la fabricación de mesas y sillas.

3 Suponga que en el ejemplo 11, 1 lb de materia prima se podría usar para producir 3 oz de Brute, o bien, 4 oz de Chanelle. ¿Cómo se reflejaría esto en la formulación?

4 Chemco elabora tres productos: 1, 2 y 3. Cada libra de materia prima cuesta 25 dólares. Ésta se somete a proceso y rinde 3 oz del producto 1 y 1 oz del producto 2. Cuesta 1 dólar y toma 2 horas de mano de obra procesar cada libra de materia prima. Cada onza de producto 1 se puede usar de tres maneras distintas:

Se puede vender por 10 dólares la onza.

Se puede procesar en 1 oz de producto 2, lo cual requiere 2 h de mano de obra y cuesta 1 dólar.

Se puede procesar en 1 oz del producto 3, para lo cual se requieren 3 h de mano de obra y cuesta 2 dólares.

Cada onza del producto 2 se puede utilizar de dos maneras distintas:

Se puede vender a 20 dólares/oz.

Se puede procesar en 1 oz del producto 3, para lo cual se requiere 1 hr de mano de obra y cuesta 6 dólares.

El producto 3 se vende en 30 dólares la onza. La cantidad máxima de onzas de cada producto que se puede vender se proporciona en la tabla 23. Se dispone de un máximo de 25 000 horas de mano de obra. Determine cómo podría Chemco maximizar las utilidades.

TABLA 23

Producto	Oz
1	5 000
2	5 000
3	3 000

Grupo B

5 Una compañía produce A, B y C, y puede vender estos bienes en cantidades ilimitadas a los siguientes precios unitarios: A, 10 dólares; B, 56 dólares; C, 100 dólares. Producir una unidad de A requiere 1 h. de mano de obra; una unidad de B, 2 h. de mano de obra más 2 unidades de A; y una unidad de C, 3 h. de mano de obra más 1 unidad de B. Cualquier unidad A que se usa para producir B no se puede vender. De igual manera, cualquier unidad de B que se utilice para producir C no se puede vender. Se dispone de un total de 40 h. de mano de obra. Plantee un PL para maximizar los ingresos de la compañía.

6 Daisy Drugs elabora dos fármacos. Los fármacos se producen mediante la mezcla de dos productos químicos: 1 y 2. Por peso, el fármaco 1 debe contener por lo menos 65% del producto químico 1, y el fármaco 2 debe contener por lo menos 55% del producto químico 1. El fármaco 1 se vende a 6 dólares la onza, y el fármaco 2 se vende a 4 dólares la onza. Hay dos procesos distintos para elaborar los productos químicos 1 y 2. Si se ejecuta el proceso 1 por 1 h. se requieren 3 oz de materia prima y 2 h. de mano de obra calificada, y rinde 3 oz de cada producto químico. En cambio, si se ejecuta el proceso 2 durante 1 h. se requieren 2 oz de materia prima y 3 h. de mano de obra calificada, y rinde 3 oz del producto químico 1 y 1 oz del producto químico 2. Hay disponible un total de 120 h. de mano de obra calificada y 100 oz de materia prima. Plantee un PL que pueda utilizarse para maximizar los ingresos de Daisy por las ventas.

7[†] Lizzies's Dairy produce queso crema y queso *cottage*. Se mezclan leche y crema para elaborar estos dos productos. Para producir queso crema y queso *cottage* se utilizan tanto leche entera como leche descremada. La leche entera contiene 60% de grasa, y la leche descremada sólo 30%. La leche que se utiliza para producir queso crema debe contener en promedio 50% de grasa, y la que se usa para el queso *cottage*, 35%. Por lo menos 40% (por peso) de los ingredientes para el queso crema y por lo menos 20% (por peso) de los ingredientes para el queso *cottage* debe ser crema. Tanto el queso *cottage* como el queso crema se elaboran vertiendo leche y crema en la máquina para producir queso. Cuesta 40 centavos procesar una libra de ingredientes para obtener una libra de queso crema. Cuesta 40 centavos producir una libra de queso *cottage*, pero cada libra de ingredientes para este queso rinde 0.9 de queso *cottage* y hay 0.1 de desecho. Se puede producir crema mediante la evaporación de leche entera y descremada. Cuesta 40 centavos evaporar 1 lb de leche entera. Cada libra de leche entera que es evaporada rinde 0.6 lb de crema. Cuesta 40 centavos evaporar 1 lb de leche descremada. Cada libra de leche descremada que es evaporada rinde 0.3 lb de crema. Se podrían enviar todos los días hasta 3 000 lb de ingredientes a la máquina para producir queso. Por lo menos se deben producir al día 1 000 lb de queso *cottage* y 1 000 lb de queso crema. Hasta 1 500 lb de queso crema y 2 000 de queso *cottage* se pueden vender al día. El queso *cottage* se vende a 1.20 dólares la libra y el queso crema a 1.5 dólares la libra. La leche entera se compra a 80 centavos la libra, y la leche descremada a 40 centavos la libra. El evaporador procesa al día cuando mucho 2 000 lb de leche. Formule un PL con la que se pueda maximizar la utilidad diaria.

8 Una compañía manufactura seis productos de la manera siguiente. Cada unidad de materia prima comprada rinde cuatro unidades del producto 1, dos unidades del producto 2 y una unidad del producto tres. Se pueden vender hasta 1 200 unidades del producto 1 y hasta 300 unidades del producto 2. Cada unidad del producto 1 se puede vender o someter a otro proceso. Cada unidad de producto 1 que se procesa rinde 1 unidad del producto 4. La demanda por los productos 3 y 4 es ilimitada. Cada unidad de producto 2 se puede vender o someter a otro proceso. Cada unidad del producto 2 que se somete a otro proceso rinde 0.8 unidades del producto 5 y 0.3 de unidad del producto 6. Se pueden vender hasta 1 000 unidades del producto 5 y hasta 800 unidades del producto 6. Se pueden comprar hasta 3 000 unidades de materia prima a 6 dólares la unidad. Las unidades sobrantes de los productos 5 y 6 se deben destruir. Cuesta 4

[†]Basado en Sullivan y Secrest (1985).

TABLA 24

Producto	Precio de venta (dólares)	Costo de producción (dólares)
1	7	4
2	6	4
3	4	2
4	3	1
5	20	5
6	35	5

dólares destruir cada unidad sobrante del producto 5 y 3 dólares, las del producto 6. El precio de venta por unidad y los costos de producción por cada producto, sin considerar los costos de compra de la materia prima, se proporcionan en la tabla 24. Plantee un PL cuya solución sea un programa de producción que maximice la utilidad.

9 Todas las semanas, Chemco puede comprar cantidades ilimitadas de materia prima a 6 dólares la libra. Cada libra de materia prima comprada se puede usar para elaborar el insumo 1 o el 2. Cada libra de materia prima rinde 2 oz del insumo 1, requiere 2 h. de tiempo de proceso e incurre en costos de proceso por 2 dólares. Cada libra de materia prima rinde 3 oz del insumo 2, requiere 2 h. de tiempo de proceso y sus costos de proceso son de 4 dólares.

Se dispone de dos procesos de producción. El proceso 1 requiere 2 h., 2 oz de insumo 1 y 1 oz del insumo 2. Cuesta 1 dólar ejecutar el proceso 1. Cada vez que el proceso 1 se efectúa, se produce 1 oz del producto A y 1 oz de desecho líquido. Cada vez que el proceso 2 se efectúa, se requieren 3 h. de proceso, 2 oz del insumo 2 y 1 oz del insumo 1. El proceso 2 rinde 1 oz del producto B y 0.8 oz de desecho líquido. Los costos del proceso 2 son 8 dólares.

Chemco puede tirar sus desechos líquidos en el río Port Charles, o bien, usar el desecho para elaborar el producto C o el producto D. De acuerdo con los reglamentos gubernamentales, Chemco tiene permitido derramar al río cuando mucho 1 000 oz a la semana. El costo por producir una onza del producto C es de 4 dólares, y se vende en 11 dólares. Se requiere una hora de tiempo de proceso, 2 oz del insumo 1 y 0.8 oz de desecho líquido para producir una onza del producto C. Cuesta 5 dólares fabricar una unidad del producto D y se vende en 7 dólares. Una hora de tiempo de proceso, 2 oz del insumo 2 y 1.2 oz de desecho líquido es lo que se requiere para fabricar una onza del producto D.

Todas las semanas se venden, cuando mucho, 5 000 oz del producto A y 5 000 oz del producto B, pero la demanda semanal de los productos C y D es ilimitada. El producto A se vende a 18 dólares la onza y cada onza del producto B se vende en 24 dólares. Se dispone cada semana de 6 000 h. de tiempo de proceso. Formule un PL cuya solución le señale a Chemco cómo maximizar las utilidades semanales.

10 LIMECO es propietaria de una calería, y vende seis grados de cal (grados del 1 al 6). El precio de venta por libra se proporciona en la tabla 25. La cal se produce en hornos. Si un

TABLA 25

Grado	1	2	3	4	5	6
precio(dólares)	12	14	10	18	20	25

TABLA 26

Grado	1	2	3	4	5	6
Cantidad producida	2	3	1	1.5	2	3

TABLA 27

Grado	1	2	3	4	5	6
Demanda máxima	20	30	40	35	25	50

horno funciona un turno de 8 horas, las cantidades (en libras) de cada grado de cal que se producen se dan en la tabla 26. Cuesta 150 dólares la operación de un horno durante un turno de 8 h. La fábrica opina que puede vender diario hasta las cantidades (en libras) de cal que se presentan en la tabla 27.

La cal que se obtiene del horno se podría volver a procesar por medio de uno de los cinco procesos que se describen en la tabla 28.

Por ejemplo, a un costo de 1 dólar/lb se podría transformar una libra de cal grado 4 en 0.5 de cal grado 5 y 0.5 lb de cal grado 6.

Cualquier sobrante extra de cal se debe desechar al final de cada día de acuerdo con los costos (por libra) proporcionados en la tabla 29.

Formule un PL cuya solución le permita a LIMECO maximizar su utilidad diaria.

11 Chemco elabora tres productos: A, B y C. Puede vender hasta 30 lb de cada producto a los precios siguientes (por libra): producto A, 10 dólares; producto B, 12 dólares; producto C, 20 dólares. Chemco compra materia prima a 5 dólares la libra. Cada libra de materia prima se puede utilizar para elaborar 1 lb de A o 1 lb de B. Por un costo de 3 dólares la libra, el producto A procesado se puede transformar en 0.6 lb de producto B y 0.4 lb de producto C. Por un costo de 2 dólares la libra, el producto B procesado se puede convertir en 0.8 lb de producto C. Plantee un PL cuya solución le permita a Chemco maximizar sus utilidades.

12 Chemco elabora tres productos químicos: B, C y D. Empieza por comprar el producto químico A a un costo de 6 dó-

TABLA 28

Insumo (1 lb)	Producto	Costo (dólares por lb de insumo)
Grado 1	0.3 lb Grado 3	
	0.2 lb Grado 4	2
	0.3 lb Grado 5	
	0.2 lb Grado 6	
Grado 2	1 lb Grado 6	1
Grado 3	0.8 lb Grado 4	1
Grado 4	0.5 lb Grado 5	1
	0.5 lb Grado 6	
Grado 5	0.9 lb Grado 6	2

TABLA 29

Grado	1	2	3	4	5	6
Costo por eliminar sobrantes (dólares)	3	2	3	2	4	2

lares los 100 l. Por un costo extra de 3 dólares y 3 h. de mano de obra calificada, 100 litros de A se transforman en 40 l de C y 60 l de B. El producto químico C se puede vender o someterse a otro proceso. Cuesta 1 dólar y requiere una hora de mano de obra calificada procesar 100 l de C para obtener 60 l de D y 40 l de B. Los precios de venta por cada 100 l y la cantidad máxima (en cientos de litros) que se pueden vender de cada producto químico se dan en la tabla 30.

Se dispone de un máximo de 200 horas de mano de obra. Plantee un PL con la que Chemco maximice su utilidad.

13 Carrington Oil produce dos tipos de gasolina, la 1 y la 2, a partir de dos tipos de crudo, el crudo 1 y el 2. La gasolina 1 puede contener hasta 4% de impurezas, en tanto que la 2 puede tener hasta 3%. La gasolina 1 se vende en 8 dólares el barril y la 2 se vende a 12 dólares el barril. Se pueden vender de la gasolina 1 hasta 4 200 barriles, y de la 2, hasta 4 300. El costo por barril de cada crudo, la disponibilidad y la concentración de impurezas en cada crudo se proporciona en la tabla 31. Antes de mezclar los crudos para obtener gasolina es posible "purificar" cada uno de ellos a un costo de 0.50 dólares el barril. La purificación elimina la mitad de las impurezas del petróleo crudo. Determine cómo maximizar las utilidades.

14 Usted ha sido designado administrador de la refinería de Melrose. Esta refinería produce gasolina y aceite combustible a partir del petróleo crudo. La gasolina se vende a 8 dólares el barril, y debe tener un "grado" promedio de por lo menos 9. El aceite combustible se vende a 6 dólares el barril y debe tener un "grado" de por lo menos 7. Se pueden vender, cuando mucho, 2 000 barriles de gasolina y 600 barriles de aceite combustible. El crudo que está por llegar puede ser procesado por medio de uno de tres métodos distintos. El rendimiento por barril y el costo por barril de cada método de proceso se proporcionan en la tabla 32. Por ejemplo, si se refina un barril del crudo que llega por el método 1, cuesta 3.40 dólares y da un rendimiento de 0.2 de barril de grado 6, 0.2 de barril de grado 8 y 0.6 de barril de grado 10.

Antes de ser procesado para obtener gasolina y aceite combustible, los grados 6 y 8 podrían enviarse al desintegrador catalítico para mejorar su calidad. Por 1.30 dólares el barril, un barril de grado 6 puede ser fraccionado en 1 barril de grado 8. Por 2 dólares el barril, un barril de grado 8 se fracciona en un barril de grado 10. Cualquier crudo excedente, procesado o fraccionado, que ya no se pueda utilizar para aceite combustible o gasolina, se debe desechar a un costo de 0.20 de dólar por barril. Determine cómo maximizar la utilidad de la refinería.

TABLA 30

[illegible]	B	C	D
Precio (dólares)	12	16	26
Demanda máxima	30	60	40

TABLA 31

Petróleo crudo	Costo por barril (dólares)	Grado de impurezas (%)	Disponibilidad (barriles)
Crudo 1	6	10%	5 000
Crudo 2	8	2%	4 500

TABLA 32

Método	Grado 6	Grado 8	Grado 10	Costo (dólares)
1	0.2	0.2	0.6	3.40
2	0.3	0.3	0.4	3.00
3	0.4	0.4	0.2	2.60

3.10 Solución de problemas de decisión de periodos múltiples mediante programación lineal: un modelo de inventario

Hasta este punto, todos los planteamientos de PL que se han estudiado son ejemplos de *modelos estáticos o para un solo periodo*. En un modelo estático se supone que todas las decisiones se toman en un solo punto en el tiempo. El resto de ejemplos en este capítulo ilustran cómo la programación lineal se usa para determinar decisiones óptimas en **modelos para periodos múltiples o modelos dinámicos.** Los modelos dinámicos surgen cuando se toma una decisión en más de un punto en el tiempo. Las decisiones tomadas durante el periodo actual influyen en las decisiones tomadas durante periodos futuros cuando se aplican modelos dinámicos. Por ejemplo, considérese una compañía que debe determinar cuántas unidades de un producto se deben producir cada mes. Si fabrica una gran cantidad de unidades durante un presente mes, entonces se reducirían las unidades que se deben producir en los meses futuros. Los ejemplos que se estudian en las secciones 3.10 a 3.12 muestran cómo las decisiones más tempranas afectan las decisiones posteriores. Se volverán a tratar los modelos dinámicos de decisión cuando se estudie la programación dinámica en los capítulos 18 y 19.

EJEMPLO 14 Inventario de Sailco

Sailco Corporation debe determinar cuántos botes de vela tiene que producir cada mes durante los cuatro trimestres. La demanda durante cada uno de los siguientes cuatro trimestres es como sigue: primer trimestre, 40 botes de vela; segundo trimestre, 60; tercer trimestre, 75; cuarto trimestre, 25. Sailco debe cumplir con la demanda a tiempo. A principios del primer trimestre tenía un inventario de 10 botes de vela. Al empezar cada trimestre, Sailco debe decidir cuántos botes debe producir durante el trimestre. Con el fin de simplificar los cálculos, se supone que los botes de vela fabricados durante un trimestre, se usan para cumplir con la demanda de ese trimestre. Durante cada trimestre, Sailco fabrica hasta 40 botes de vela con mano de obra en turno regular con un costo total de 400 dólares por bote de vela. Si tiene empleados que trabajen tiempo extra durante un trimestre, Sailco manufactura más botes de vela con mano de obra de tiempo extra a un costo total de 450 dólares por bote de vela

Al final de cada trimestre (después de producir los botes y cumplir la demanda del presente trimestre) se incurre en un costo de 20 dólares por el transporte o por almacenamiento. Utilice la programación lineal para determinar un calendario de producción con el fin de minimizar la suma de costos de producción y de inventario durante los siguientes cuatro trimestres.

Solución Sailco tiene que determinar para cada trimestre la cantidad de botes de vela que debe fabricar con mano de obra en horarios regulares y con tiempo extra. Por consiguiente, se definen las siguientes variables de decisión:

x_t = número de botes de vela fabricados con mano de obra en horario regular (a 400 dólares/bote) durante el trimestre t $\quad (t = 1, 2, 3, 4)$

y_t = número de botes de vela fabricados con mano de obra en tiempo extra (a 450 dólares/bote) durante el trimestre t $\quad (t = 1, 2, 3, 4)$

Es conveniente definir las variables de decisión para el inventario (número de botes de vela en existencia) al final de cada trimestre:

i_t = número de botes de vela en existencia al final del trimestre t $\quad (t = 1, 2, 3, 4)$

Costo total de Sailco se podría determinar a partir de

Costo total = costo por producir botes de vela en horario regular
+ costos por producir botes de vela en tiempo extra + costos por inventario

$$= 400(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 450(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 20(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)$$

Por lo tanto, la función objetivo de Sailco es

$$\min z = 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 + 450y_3 + 450y_4 + 20i_1 + 20i_2 + 20i_3 + 20i_4 \tag{60}$$

Antes de determinar las restricciones de Sailco hay dos observaciones por hacer que ayudarán a plantear los modelos de programación de la producción en varios periodos.

Para el trimestre t,

Inventario al final del trimestre t = inventario al final del trimestre $(t - 1)$
+ producción del trimestre t − demanda del trimestre t

Esta relación tiene un papel importante en el planteamiento de todos los modelos para programar la producción en varios periodos. Si d_t es la demanda durante el periodo t (entonces, $d_1 = 40$, $d_2 = 60$, $d_3 = 75$ y $d_4 = 25$), esta observación se podría expresar en la forma compacta siguiente:

$$i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \qquad (t = 1, 2, 3, 4) \tag{61}$$

En (61), i_0 = inventario al final del trimestre 0 = inventario al inicio del trimestre 1 = 10. Por ejemplo, si hay 20 botes de vela en existencia al final del trimestre 2 ($i_2 = 20$) y se fabricaron 65 durante el trimestre 3 (esto quiere decir que $x_3 + y_3 = 65$), ¿cuál sería el inventario al final del tercer trimestre? Simplemente la cantidad de botes de vela en existencia al final del trimestre 2 más los botes de vela fabricados durante el trimestre 3, menos la demanda del trimestre 3, que es de 75. En este caso, $i_3 = 20 + 65 - 75 = 10$, lo cual está de acuerdo con (61). La ecuación (61) relaciona las variables de decisión que tienen que ver con periodos diferentes. Al plantear cualquier modelo de PL de varios periodos, el paso más difícil es, por lo regular, encontrar la relación (como [61]) que vincula las variables de decisión de periodos distintos.

También se observa que la demanda del trimestre t' se cumplirá a tiempo si y sólo si (algunas veces se denota con *sí*) $i_t \geq 0$. Para comprender mejor esto, observe que $i_{t-1} + (x_t + y_t)$ es la existencia para cumplir la demanda del periodo t, por lo que la demanda del periodo t se cumplirá si y sólo si

$$i_{t-1} + (x_t + y_t) \geq d_t \qquad \text{o bien} \qquad i_t = i_{t-1} + (x_t + y_t) - d_t \geq 0$$

Esto significa que las restricciones de signo $i_t \geq 0$ ($t = 1, 2, 3, 4$) aseguran que la demanda de cada trimestre se cumplirá a tiempo.

Ahora ya se pueden determinar las limitaciones de Sailco. Primero, se usan las cuatro limitaciones siguientes para tener la seguridad de que la producción en los horarios regulares de cada periodo no excederá 40: $x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 40$. Luego se añaden las limitaciones de la forma (61) por cada periodo ($t = 1, 2, 3, 4$). Con esto se generan las cuatro restricciones siguientes:

$$i_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40 \qquad i_2 = i_1 + x_2 + y_2 - 60$$
$$i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75 \qquad i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25$$

Luego de añadir las restricciones de signo $x_t \geq 0$ (para evitar los niveles de producción negativos) e $i_t \geq 0$ (para tener la seguridad de que la demanda de cada periodo se cumple a tiempo) se obtiene el planteamiento siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 + 450y_3 + 450y_4 \\
& + 20i_1 + 20i_2 + 20i_3 + 20i_4 \\
\text{s.a} \quad & x_1 \leq 40, \quad x_2 \leq 40, \quad x_3 \leq 40, \quad x_4 \leq 40 \\
& i_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40, \quad i_2 = i_1 + x_2 + y_2 - 60 \\
& i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75, \quad i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25 \\
& i_t \geq 0, \quad y_t \geq 0, \quad \text{y} \quad x_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

La solución óptima para este problema es $z = 78\,450$; $x_1 = x_2 = x_3 = 40$; $x_4 = 25$; $y_1 = 0$; $y_2 = 10$; $y_3 = 35$; $y_4 = 0$; $i_1 = 10$; $i_2 = i_3 = i_4 = 0$. Por lo tanto, el costo mínimo total que Sailco tendría es 78 450 dólares. Para lograrlo, Sailco debe fabricar 40 botes de vela en el horario regular durante los trimestres 1 a 3, y 25 botes de vela con mano de obra en el horario regular durante el trimestre 4. Sailco también debe producir 10 botes con tiempo extra durante el trimestre 2 y 35 botes con tiempo extra durante el trimestre 3. Los costos por inventario se generan sólo durante el trimestre 1.

Algunos estudiantes podrían estar preocupados porque este planteamiento permite a Sailco producir con tiempo extra durante el trimestre t incluso si la producción regular del periodo t es menor de 40. Cierto; este planteamiento no hace factible a tal programa, pero cualquier plan de producción que tenga $y_t > 0$ y $x_t < 40$ podría no ser óptimo. Por ejemplo, considere los dos planes de producción siguientes:

$$\begin{aligned}
&\text{Plan de producción A} = x_1 = x_2 = x_3 = 40; \quad x_4 = 25; \\
&\qquad y_2 = 10; \quad y_3 = 25; \quad y_4 = 0 \\
&\text{Plan de producción B} = x_1 = 40; \quad x_2 = 30; \quad x_3 = 30; \quad x_4 = 25; \\
&\qquad y_2 = 20; \quad y_3 = 35; \quad y_4 = 0
\end{aligned}$$

Los programas A y B tienen el mismo nivel de producción durante cada periodo. Lo anterior significa que ambos programas tendrán costos por inventario idénticos. Asimismo, ambos planes son factibles, pero el programa B incurre en más costos de tiempo extra que el programa A. Por lo tanto, en cuestiones de minimización de costos, el programa B (o cualquier otro que tenga $y_t > 0$ y $x_t < 40$) nunca se escogería.

En realidad, un PL como el del ejemplo 14 se podría poner en marcha usando un **horizonte de planeación rodante**, el cual funciona de la siguiente manera. Después de resolver el ejemplo 14, Sailco pondría en marcha sólo la estrategia de producción del trimestre 1 (producir 40 botes en el tiempo de horario regular). Luego, la compañía consideraría la demanda actual del trimestre 1. Suponga que la demanda actual del trimestre 1 es 35 botes. Entonces, el trimestre 2 empieza con un inventario de $10 + 40 - 35 = 15$ botes de vela. Luego se hace un pronóstico para la demanda del trimestre 5 (suponga que el pronóstico es 36). Después se determina la producción para el trimestre 2 mediante la solución de un PL en el cual el trimestre 2 es el primer trimestre, el trimestre 5 es el trimestre final y el inventario de inicio es 15 botes. Entonces, la producción del trimestre 2 se determinaría al resolver el PL siguiente:

$$\min z = 400(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 450(y_2 + y_3 + y_4 + y_5) + 20(i_2 + i_3 + i_4 + i_5)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & x_2 \le 40, \quad x_3 \le 40, \quad x_4 \le 40, \quad x_5 \le 40 \\
& i_2 = 15 + x_2 + y_2 - 60, \qquad i_3 = i_2 + x_3 + y_3 - 75 \\
& i_4 = i_3 + x_4 + y_4 - 25, \qquad i_5 = i_4 + x_5 + y_5 - 36 \\
& i_t \ge 0, \quad y_t \ge 0, \quad \text{y} \quad x_t \ge 0 \qquad (t = 2, 3, 4, 5)
\end{aligned}$$

Aquí, x_5 = la producción en horario regular del trimestre 5, y_5 = producción en tiempo extra del trimestre 5 e i_5 = inventario al finalizar el trimestre 5. Los valores óptimos de x_2 y y_2 para este PL se utilizan después para determinar la producción del trimestre 2. Por lo tanto, en cada trimestre, se resuelve una PL (con un horizonte de planeación de cuatro trimestres) para determinar la producción del trimestre actual. Se considera luego la demanda actual, se pronostica la demanda para los siguientes cuatro trimestres, y se repite el proceso. Esta técnica del "horizonte de planeación rodante" es el método mediante el cual la mayor parte de los modelos de PL dinámicos o para periodos múltiples se aplica al mundo real.

Esta formulación del problema de Sailco tiene todavía otras limitaciones.

1 El costo de producción podría no ser una función lineal de la cantidad producida, lo cual violaría la Suposición de proporcionalidad. Se analiza cómo tratar este problema en los capítulos 9 y 13.

2 Las demandas futuras podrían no conocerse con certeza. En esta situación se incumple la Suposición de certidumbre.

3 Se le ha exigido a Sailco que cumpla todas las demandas a tiempo. Es común que las compañías cumplan con la demanda a tiempo después, pero se les impone un costo de penalización por los pedidos que no se entregan a tiempo. Por ejemplo, si la demanda no se cumple a tiempo, entonces el disgusto del cliente se podría reflejar en una pérdida de ingresos futuros. Si la demanda se cumple en periodos posteriores, entonces se dice que **está acumulada o que está pendiente.** El planteamiento de PL actual tiene la capacidad de poder ser modificado para incorporar los pedidos pendientes (véase problema 1 de la sección 4.12).

4 Se ha ignorado el hecho de que las variaciones trimestre-a-trimestre en la cantidad producida podrían dar como resultado costos extra (llamados **costos por suavización de la producción**). Por ejemplo, si se incrementa la producción en forma notable desde un trimestre al siguiente, esto requerirá probablemente la costosa capacitación de nuevos trabajadores. Por otro lado, si la producción disminuye en forma importante de un trimestre al siguiente, se podría incurrir en costos extra que son resultado de despedir a los trabajadores. En la sección 4.12 se modifica el modelo presente para explicar los costos de suavización.

5 Si algunos botes de vela se quedan al final del último trimestre, se les asigna un valor de cero. Por supuesto que esto es irreal. En cualquier modelo de inventario con un horizonte finito, el inventario que se queda al final del último periodo debe tener un **valor de salvamento** que señala el valor del inventario al final del periodo. Por ejemplo, si Sailco siente que cada bote de vela dejado al final del trimestre 4 vale 400 dólares, entonces se debe añadir un término $-400i_4$ (que mide el valor del inventario del trimestre 4) a la función objetivo.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un cliente requiere respectivamente durante los siguientes cuatro meses 50, 65, 100 y 70 unidades de un producto (no se permite acumulación). Los costos de producción son 5, 8, 4 y 7 dólares por unidad durante estos meses. Los costos por conservar almacenadas las unidades de un mes al siguiente es 2 dólares por unidad (impuestos sobre el inventario final). Se estima que cada unidad en existencia al final del mes 4 se podría vender en 6 dólares. Plantee un PL que minimice el costo neto incurrido para poder cumplir con las demandas de los cuatro meses siguientes.

2 Una compañía tiene las siguientes demandas durante los siguientes tres periodos: periodo 1, 20 unidades; periodo 2, 10 unidades; periodo 3, 15 unidades. Los costos de producción por unidad durante cada periodo son como se indica: periodo 1, 13 dólares; periodo 2, 14 dólares; periodo 3, 15 dólares. Un costo por almacenamiento durante un corto plazo por unidad se aplica al inventario al finalizar cada periodo. Al empezar el periodo 1, la compañía tiene 5 unidades en existencia.

En realidad, de los bienes producidos durante un mes no todos se usan para cumplir la demanda del mes actual. Para modelar este hecho, se supone que sólo la mitad de los bienes producidos en un periodo se utilizan para cumplir con la demanda del periodo actual. Plantee un PL para minimizar el costo por cumplir con la demanda de los siguientes tres periodos. (*Sugerencia*: Limitaciones como $i_1 = x_1 + 5 - 20$ son ciertamente necesarias. De una manera diferente al ejemplo, la restricción $i_1 \geq 0$ no asegurará que se cumpla la demanda del periodo 1. Por ejemplo, si $x_1 = 20$, entonces se cumple $i_1 \geq 0$ pero sólo porque $\frac{1}{2}(20) = 10$ unidades del periodo 1 se pueden usar para cumplir con la demanda del periodo 1, $x_1 = 20$ no sería factible. Intente pensar en un tipo de restricción que asegure que lo que está en existencia para cumplir la demanda de cada periodo es por lo menos igual a la demanda del periodo.)

Grupo B

3 James Beerd hornea pasteles de queso y pasteles de la Selva Negra. Durante cualquier mes puede hornear cuando mucho 65 pasteles. Los costos por pastel y la demanda de pasteles, la cual se debe cumplir a tiempo, se proporcionan en la tabla 33. Cuesta 50 centavos conservar un pastel de queso y 40 centavos conservar un pastel de la Selva Negra en inventario por un mes. Plantee un PL para minimizar el costo total por cumplir la demanda de los tres meses siguientes.

4 Una compañía manufacturera produce dos tipos de productos: A y B. La compañía está de acuerdo en entregar los productos según el calendario de la tabla 34. La compañía tiene dos líneas de ensamble, la 1 y la 2 con las horas de producción disponibles mostradas en la tabla 35. La producción en cada línea de ensamble y combinación de productos, en términos de horas por producto, están en la tabla 36. Toma 0.15 h fabricar una unidad del producto A en la línea 1, y así sucesivamente. Producir cualquier producto cuesta 5 dólares por hora de tiempo de línea. El costo por mes de llevar el inventario de cada producto es 20 centavos por unidad (cargado en el inventario al finalizar cada mes). En la actualidad hay 500 unidades de A y 750 de B en inventario. A la gerencia le gustaría tener en inventario al final de abril por lo menos 1 000 unidades de cada producto. Plantee un PL para determinar el programa de producción que minimice el total de los costos por cumplir con la demanda a tiempo.

TABLA 34

Fecha	A	B
31 de marzo	5 000	2 000
30 de abril	8 000	4 000

TABLA 35

	horas de producto disponibles	
Mes	Línea 1	Línea 2
Marzo	800	2 000
Abril	400	1 200

TABLA 36

	Tasa de producción	
Producto	Línea 1	Línea 2
A	0.15	0.16
B	0.12	0.14

5 Durante los dos meses siguientes, General Cars debe cumplir (a tiempo) con las siguientes demandas de camiones y automóviles: mes 1, 400 camiones, 800 automóviles; mes 2, 300 camiones, 300 automóviles. Durante cada mes, se fabrican cuando mucho 1 000 vehículos. Para cada camión se utilizan 2 toneladas de acero y cada automóvil requiere 1 tonelada del mismo material. En el mes 1, la tonelada de acero cuesta 400 dólares; durante el mes 2, la tonelada cuesta 600 dólares. Cuando mucho se pueden comprar cada mes

TABLA 33

	Mes 1		Mes 2		Mes 3	
Producto	Demanda	Costo/pastel (dólares)	Demanda	Costo/pastel (dólares)	Demanda	Costo/pastel (dólares)
Pastel de queso	40	3.00	30	3.40	20	3.80
Selva Negra	20	2.50	30	2.80	10	3.40

1 500 toneladas de acero (sólo se puede usar el acero durante el mes en que se compró. Al principio del mes hay en el inventario 1 100 camiones y 200 automóviles. Al final de cada mes se impone un costo por guardar los vehículos de 150 dólares por unidad. Cada automóvil da 20 millas por galón, y cada camión, 10 millas por galón. Durante cada mes, los vehículos que produce la compañía deben promediar por lo menos 16 millas por galón. Plantee un PL para cumplir con la demanda y las millas al mínimo costo (sin olvidar los costos del acero y los costos por guardar los vehículos).

6 Gandhi Clothing Company fabrica camisetas y pantalones. Cada camiseta requiere 2 yardas cuadradas de tela, y cada pantalón, 3. Durante los dos meses siguientes se debe cumplir (justo a tiempo) con la demanda de camisetas y pantalones, que es la siguiente: mes 1, 10 camisetas, 15 pantalones; mes 2, 12 camisetas, 14 pantalones. Durante cada mes se dispone de los recursos siguientes: mes 1, 90 yardas cuadradas de tela; mes 2, 60 yardas cuadradas. (La tela que hay en existencia durante el mes 1 se podría usar en el mes 2, si no se utiliza en el mes 1.)

Durante cada mes cuesta 4 dólares elaborar un artículo de vestir en el horario regular de trabajo, y 8 dólares si se utiliza el tiempo extra. Cada mes se podría producir cuando mucho un total de 25 prendas de vestir en el horario regular de trabajo, y una cantidad ilimitada de artículos si se aplica el tiempo extra. Al final de cada mes, se fija un costo por conservar los artículos de 3 dólares por unidad. Formule un PL mediante la cual se cumplan las demandas para los dos meses siguientes (a tiempo) con el costo mínimo. Suponga que al inicio del mes 1, hay en existencia una camiseta y 2 pantalones.

7 Paynothing Shoes tiene cada año una demanda (que se debe entregar a tiempo) de pares de zapatos según la tabla 37. Los empleados trabajan tres trimestres consecutivos y luego descansan uno. Por ejemplo, un empleado podría trabajar durante los trimestres 3 y 4 de un año y el trimestre 1 del siguiente año. Durante un trimestre en el cual el empleado trabaja, éste tiene que producir hasta 50 pares de zapatos. Cada empleado recibe un pago de 500 dólares por el trimestre. Al final de cada trimestre, se fija un costo por conservar los zapatos de 50 dólares por cada par. Formule un PL que se pueda utilizar para minimizar los costos por año (mano de obra + costo por guardar los zapatos) por cumplir con las demandas de zapatos. Con el fin de simplificar, suponga que al final de cada año, el inventario final es cero. (*Sugerencia*: Se permite suponer que un empleado dado tomará de descanso el mismo trimestre cada año.)

TABLA 37

Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
600	300	800	100

8 Una compañía debe cumplir (justo a tiempo) con la demanda siguiente: trimestre 1, 30 unidades; trimestre 2, 20 unidades; trimestre 3, 40 unidades. Se pueden producir cada trimestre hasta 27 unidades con trabajo en el horario regular, a un costo de 40 dólares por unidad. Durante cada trimestre es posible fabricar una cantidad ilimitada de unidades si se usa tiempo extra, a un costo de 60 dólares por mes. De todas las unidades producidas, 20% es defectuosa y no se pueden usar para cumplir con la demanda. Por otro lado, al final de cada trimestre, se daña 10% de las unidades en existencia y tampoco se pueden usar para cumplir alguna demanda futura. Después de que se cumple con la demanda de cada trimestre y se explica el daño, se fija un costo por unidad de 15 dólares contra el inventario al finalizar el trimestre. Plantee un PL que se pueda utilizar para minimizar el costo total por cumplir con la demanda en los tres trimestres siguientes. Suponga que hay en existencia 20 unidades útiles, al principio del trimestre 1.

9 Donovan Enterprises fabrica licuadoras. Durante los cuatro trimestres siguientes se tiene que cumplir (a tiempo) con la siguiente demanda de licuadoras: trimestre 1, 4 000; trimestre 2, 2 000; trimestre 3, 3 000; trimestre 4, 10 000. Cada empleado de Donovan trabaja tres trimestres del año y tiene un trimestre libre. Por consiguiente, un empleado podría trabajar durante los trimestres 1, 2 y 4, y tener libre el trimestre 3. Cada empleado recibe un salario de 30 000 dólares al año, y (si trabaja) produce hasta 500 licuadoras en un trimestre. Al final de cada trimestre, Donovan incurre en un costo por guardar los artículos de 30 dólares por unidad sobre cada licuadora en inventario. Plantee un PL para ayudar a Donovan a minimizar los costos (mano de obra e inventario) en el cumplimiento (a tiempo) de la demanda del año próximo. Hay en existencia 600 licuadoras a principios del trimestre 1.

3.11 Modelos financieros para periodos múltiples

Mediante el siguiente ejemplo se ilustra cómo la programación lineal se puede aplicar para modelar problemas de administración de efectivo en varios periodos. La clave es determinar las relaciones del efectivo disponible durante periodos distintos.

EJEMPLO 15 Inversión en varios periodos de Finco

Finco Investment Corporation debe establecer la estrategia de inversiones para la compañía durante los siguientes tres años. En la actualidad (tiempo 0), hay 100 000 dólares disponibles para invertir en A, B, C, D y E. El flujo de efectivo relacionado con la inversión de 1 dólar en cada opción se da en la tabla 38.

Por ejemplo, un dólar invertido en la opción B, requiere una salida de efectivo en el tiempo 1, y da un rendimiento de 50 centavos en el tiempo 2 y un dólar en el tiempo 3. Para estar segura de que las opciones de inversión de la compañía son diversificadas, Finco

TABLA 38

	Flujo de efectivo (dólares) en el tiempo*			
	0	1	2	3
A	−1	+0.50	+1	0
B	0	−1	+0.50	+1
C	−1	+1.2	0	0
D	−1	0	0	+1.9
E	0	0	−1	+1.5

*Nota: Tiempo 0 = presente, tiempo 1 = 1 un año a partir de ahora; tiempo 2 = 2 años a partir de ahora; tiempo 3 = 3 años a partir de ahora.

requiere que se asignen cuando mucho 75 000 dólares a cualquier inversión. Además de las inversiones A a E, Finco puede ganar intereses de 8% al año por mantener el efectivo sin invertir en fondos del mercado de valores. El rendimiento de las inversiones se puede volver a invertir en forma inmediata. Por ejemplo, el flujo de efectivo positivo recibido de la inversión C en el tiempo 1 podría ser reinvertido inmediatamente en la opción B. Finco no puede pedir fondos prestados, así que el efectivo disponible para inversión en cualquier tiempo está limitado al efectivo disponible. Plantee un PL que maximizará el efectivo disponible en el tiempo 3.

Solución Finco debe decidir cuánto dinero debe ser asignado a cada inversión (sin olvidar los fondos del mercado de valores). Por consiguiente, se definen las variables de decisión siguientes:

A = dólares invertidos en la opción A

B = dólares invertidos en la opción B

C = dólares invertidos en la opción C

D = dólares invertidos en la opción D

E = dólares invertidos en la opción E

S_t = dólares invertidos en fondos del mercado de valores t $\quad (t = 0, 1, 2)$

Finco desea maximizar el efectivo disponible en el tiempo 3. En el tiempo 3, el efectivo disponible de Finco será la suma de todo el efectivo que entra en el tiempo 3. A partir de la descripción de las inversiones A a E, y el hecho de que desde el tiempo 2 al tiempo 3, S_2 se incrementará a $1.08S_2$,

$$\text{Efectivo disponible en el tiempo} = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2$$

Por consiguiente, la función objetivo de Finco es

$$\max z = B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2 \tag{62}$$

En los modelos financieros de varios periodos, se usa por lo regular el tipo siguiente de restricciones para relacionar las variables de decisión de periodos distintos:

Efectivo disponible en el tiempo t = efectivo invertido en el tiempo t
+ efectivo sin invertir en el tiempo t que se traspasa al tiempo $t + 1$

Si se clasificaran los fondos del mercado de valores como inversiones, se observa que

$$\text{Efectivo disponible en el tiempo } t = \text{efectivo invertido en el tiempo } t \tag{63}$$

Como las inversiones A, C, D y S_0 están disponibles en el tiempo 0, y 100 000 dólares están disponibles en el tiempo 0, (63) se vuelve en el tiempo 0

$$100\,000 = A + C + D + S_0 \tag{64}$$

En el tiempo 1, está disponible 1, $0.5A + 1.2C + 1.08S_0$ para ser invertido, y las opciones B y S_1 están disponibles. Entonces, para $t = 1$, (63) se convierte en

$$0.5A + 1.2C + 1.08S_0 = B + S_1 \quad (65)$$

En el tiempo 2, está disponible para ser invertida la cantidad de $A + 0.5B + 1.08S_1$, y están disponibles las opciones E y S_2 Por lo tanto, para $t = 2$, (63) se reduce a

$$A + 0.5B + 1.08S_1 = E + S_2 \quad (66)$$

No hay que olvidar que cuando mucho se pueden invertir 75 000 dólares en cualquiera de las opciones A a E. Para poner atención en esto, se suman las restricciones siguientes

$$A \leq 75\,000 \quad (67)$$
$$B \leq 75\,000 \quad (68)$$
$$C \leq 75\,000 \quad (69)$$
$$D \leq 75\,000 \quad (70)$$
$$E \leq 75\,000 \quad (71)$$

Cuando se combinan (62) y (64) a (71) con las restricciones de signo (todas las variables ≥ 0) se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z &= B + 1.9D + 1.5E + 1.08S_2 \\
\text{s.a} \quad & A + C + D + S_0 = 100\,000 \\
& 0.5A + 1.2C + 1.08S_0 = B + S_1 \\
& A + 0.5B + 1.08S_1 = E + S_2 \\
& A \leq 75\,000 \\
& B \leq 75\,000 \\
& C \leq 75\,000 \\
& D \leq 75\,000 \\
& E \leq 75\,000 \\
& A, B, C, D, E, S_0, S_1, S_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Y, entonces, la solución óptima es $z = 218\,500$, $A = 60\,000$, $B = 30\,000$, $D = 40\,000$, $E = 75\,000$, $C = S_0 = S_1 = S_2 = 0$. Finco no debe invertir en fondos de1 mercado de valores. En el tiempo 0, Finco debe invertir 60 000 dólares en A y 40 000 en D. Luego, en el tiempo 1, la entrada de efectivo de 30 000 dólares de A se debe invertir en B. Por último, en el tiempo 2, la entrada de efectivo de 60 000 dólares de A y la entrada de efectivo de 15 000 dólares de B se deben invertir en E. En el tiempo 3, los 100 000 dólares de Finco habrán aumentado a 218 500 dólares.

Usted se podrá preguntar cómo este planteamiento asegura que Finco nunca invierte más dinero en cualquier tiempo que el que la compañía tiene disponible. Lo anterior lo asegura el hecho de que cada variable S_i debe ser no negativa. Por ejemplo, $S_0 \geq 0$ es equivalente a $100\,000 - A - C - D \geq 0$, lo cual asegura que cuando mucho 100 000 dólares se invertirán en el tiempo 0.

Aplicación en la vida cotidiana

Uso de la PL para optimizar las opciones de inversión en bonos

Muchas empresas de Wall Street compran y venden bonos. Rohn (1987) analiza un modelo de selección de bonos que maximiza la utilidad de las compras y ventas de bonos sujetas a restricciones que minimizan la exposición de la firma al riesgo. Una versión simplificada de este modelo se encuentra en el problema 4.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un asesor de Finco afirma que el efectivo disponible de Finco en el tiempo 3 es la suma de las entradas de efectivo provenientes de todas las inversiones, y no sólo de las inversiones que generan entrada de efectivo en el tiempo 3. Por consiguiente, el asesor afirma que la función objetivo debe ser

$$\max z = 1.5A + 1.5B + 1.2C + 1.9D + 1.5E + 1.08S_0 + 1.08S_1 + 1.08S_2$$

Explique por qué el asesor no está en lo correcto.

2 Demuestre que la función objetivo de Finco se podría escribir también como

$$\max z = 100\,000 + 0.5A + 0.5B + 0.2C + 0.9D + 0.5E + 0.08S_0 + 0.08S_1 + 0.08S_2$$

3 Hay 10 000 dólares en el tiempo 0. Están las opciones de inversión A y B; sus flujos de efectivo se proporcionan en la tabla 39. Suponga que *sólo* el dinero invertido en A o en B gana interés. Plantee un PL que maximice el efectivo disponible en el tiempo 3. ¿Puede adivinar la solución óptima de este problema?

TABLA 39

Tiempo	A	B
0	−\$1	\$0
1	\$0.2	−\$1
2	\$1.5	\$0
3	\$0	\$1.0

Grupo B

4[†] El corredor Steve Johnson trata en la actualidad de maximizar sus utilidades en el mercado de bonos. Están disponibles cuatro bonos para compra y venta, con el precio de oferta (o de compra) y el precio inicial (o de venta) de cada bono que se muestra en la tabla 40. Steve puede comprar hasta 1 000 unidades de cada bono al precio de venta, o vender hasta 1 000 unidades de cada bono al precio de compra. Durante cada uno de los siguientes tres años, la persona que vende un bono pagará al dueño del bono el pago en efectivo que se da en la tabla 41.

La meta de Steve es maximizar sus ingresos a partir de la venta de bonos menos el pago por la compra de bonos, con la restricción de que después de que se reciben los pagos de cada año, su estado de caja (debido sólo a pagos en efectivo provenientes de bonos y no a compras o ventas de bonos) es no negativo. Suponga que los pagos en efectivo son descontados, con un pago de un dólar un año a partir de ahora siendo equivalente a un pago de 90 centavos de ahora. Plantee un PL para maximizar las utilidades netas por la compra y venta de bonos, sujeto a las restricciones de arbitraje ya descritas. ¿Por qué cree que limitamos el número de unidades de cada bono que puede ser comprada o vendida?

TABLA 40

Bono	Precio de compra	Precio de venta
1	980	990
2	970	985
3	960	972
4	940	954

TABLA 41

Año	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4
1	100	80	70	60
2	110	90	80	50
3	1 100	1 120	1 090	1 110

[†]Basado en Rohn (1987).

5 Una pequeña tienda de juguetes, Toyco, proyecta los flujos de efectivo mensuales (en miles de dólares) durante el año 2003 en la tabla 42. Un flujo de efectivo negativo significa que la salida de efectivo sobrepasa la entrada de efectivo al negocio. Para pagar sus cuentas, Toyco necesitará pedir un préstamo de dinero a principio de año. Hay dos manera para pedir el préstamo:

a Tomar un préstamo de largo plazo a un año; los intereses de 1% se cargan cada mes, y el préstamo se debe pagar a fines de diciembre.

b Cada mes se pide el préstamo a corto plazo a una línea de crédito bancaria; se carga una tasa de interés de 1.5% y todos los préstamos a corto plazo se deben liquidar a finales de diciembre.

Al finalizar cada mes, el efectivo excedente gana 0.4% de interés. Formule una PL cuya solución ayude a Toyco a maximizar su estado de caja al empezar enero de 2004.

TABLA 42

Mes	Flujo de efectivo	Mes	Flujo de efectivo
Enero	−12	Julio	−7
Febrero	−10	Agosto	−2
Marzo	−8	Septiembre	15
Abril	−10	Octubre	12
Mayo	−4	Noviembre	−7
Junio	5	Diciembre	45

6 Considere el problema 5 con las siguientes modificaciones: Toyco puede dejar de pagar cada mes una parte o todo el efectivo que se debe en el presente mes. A esto se le llama "aplazamiento de los pagos". Los pagos se pueden atrasar sólo por un mes, y se carga un 1% de penalización sobre la cantidad aplazada. Por lo tanto, si se aplazan los pagos sobre un efectivo de 10 000 dólares que se debían en enero, entonces se deben pagar 10 000(1.01) = 10 100 en febrero. Con esta modificación, plantee una PL que ayude a Toyco a maximizar su efectivo disponible al primero de enero de 2004.

7 Suponga que pidió un préstamo de 1 000 dólares al 12% de interés anual a pagar en 60 mensualidades. Suponga además que se hacen pagos iguales al finalizar el mes 1, el mes 2, . . . el mes 60. Sabemos que al introducir en Excel la función

= PAGO (.01, 60, 1,000)

daría el pago por mes (22.24 dólares).

Es ilustrativo usar la PL para determinar los pagos mensuales. Sea p el pago mensual (incógnita). Cada mes se deben 0.01 • (saldo insoluto) de interés. El resto del pago mensual se utiliza para reducir el saldo insoluto. Por ejemplo, suponga que se pagan 30 dólares cada mes. Al principio del mes, el saldo insoluto es 1 000 dólares. Del pago del mes 1, 10 dólares se van a los intereses y 20 dólares a liquidar el saldo insoluto. Entonces se empezaría el mes 2 con un saldo insoluto de 980 dólares. La estrategia es usar PL para determinar el pago mensual que liquidará el préstamo al final del mes 60.

8 Usted es un analista financiero. Madonna acudió a usted porque necesita que la ayuden a liquidar sus cuentas de tarjeta de crédito. Ella debe a sus tarjetas de crédito las cantidades que se indican en la tabla 43. Madonna desea asignar hasta 5 000 por mes para liquidar estas tarjetas de crédito. Todas las tarjetas se deben liquidar en 36 meses. El objetivo de Madonna es minimizar el total de todos sus pagos. Para resolver este problema, usted debe entender cómo influyen los intereses sobre un préstamo. Para ilustrarlo, suponga que Madonna paga 5 000 dólares en Saks durante el mes 1. Entonces, su saldo en Saks al principio del mes 2 es

$$20\,000 - (5\,000 - .005(20\,000))$$

Esto es así porque Madonna incurrió en cargos por intereses de 0.005(20 000) durante el mes 1 sobre su tarjeta de Saks. ¡Ayúdele a Madonna a resolver su problema!

9 Winstonco planea invertir en tres proyectos. Si se invierte todo en un proyecto, los flujos de efectivo realizados (en millones de dólares) serán los que se presentan en la tabla 44. Por ejemplo, el proyecto 1 requiere salida de efectivo de 3 millones hoy y rendimientos de 5.5 millones de dólares en 3 años a partir de hoy. Ahora hay 2 millones de dólares en efectivo. En cada punto de tiempo (0, 0.5, 1, 1.5, 2 y 2.5 años a partir de hoy) se podría, si así se quisiera, pedir un préstamo hasta de 2 millones de dólares a 3.5% de interés (por 6 meses). El efectivo sobrante gana 3% (por 6 meses) de interés. Por ejemplo, si después de pedir el préstamo y de invertir en el tiempo 0 hay 1 millón de dólares se podrían recibir 30 000 de intereses en el tiempo 0.5 del año. El objetivo de Winstonco es maximizar el efectivo disponible después del estado de cuenta de flujos de efectivo en el tiempo 3. ¿Qué estrategia de inversión y de préstamos se debe usar? Recuerde que se puede invertir en una fracción de un proyecto. Por ejemplo, si se invierte en 0.5 del proyecto 3, entonces hay salidas de efectivo de −1 millón de dólares en el tiempo 0 y 0.5.

TABLA 43

Tarjeta	Saldo (dólares)	Tasa mensual (%)
La de Saks de la 5a Av.	20 000	.5
La de Blommingdale	50 000	1
La de Macys	40 000	1.5

TABLA 44

	Flujo de efectivo		
Tiempo (años)	Proyecto 1	Proyecto 2	Proyecto 3
0	−3	−2	−2
.5	−1	−0.5	−2
1	+1.8	1.5	−1.8
1.5	1.4	1.5	1
2	1.8	1.5	1
2.5	1.8	0.2	1
3	5.5	−1	6

3.12 Programación del trabajo en varios periodos

En la sección 3.5 se explicó que la PL se podría aplicar para elaborar los horarios de empleados en un entorno estático donde la demanda no cambia con el tiempo. El ejemplo siguiente (una versión modificada de un problema tomado de Wagner [1975]) ilustra cómo la PL se usa para calendarizar la capacitación de los empleados cuando una compañía se enfrenta a una demanda que cambia con el tiempo.

EJEMPLO 16 Horarios de trabajo en varios periodos

CSL es una cadena de tiendas de servicio para computadoras. La cantidad de horas de tiempo de reparación calificada que CSL requiere durante los cinco meses siguientes es como sigue:

Mes 1 (enero): 6 000 h
Mes 2 (febrero): 7 000 h
Mes 3 (marzo): 8 000 h
Mes 4 (abril): 9 500 h
Mes 5 (mayo): 11 000 h

A principios de enero, 50 técnicos calificados trabajan para CSL. Cada técnico calificado puede trabajar hasta 160 h por mes. Para cumplir con las demandas en el futuro, es necesario capacitar a nuevos técnicos. Toma un mes capacitar un nuevo técnico. Durante el mes de capacitación, un técnico experimentado debe supervisar al aprendiz durante 50 horas. Cada técnico experimentado gana 2 000 dólares al mes (incluso si no trabaja las 160 horas completas). Además, durante el mes de entrenamiento, el aprendiz recibe 1 000 dólares. Al final de cada mes, 5% de los técnicos experimentados de CSL abandonan el trabajo para unirse a Plum Computers. Formule un PL con cuya solución CSL pueda minimizar el costo de mano de obra en el que incurre para cumplir con el servicio de reparación en los cinco meses siguientes.

Solución CSL debe determinar la cantidad de técnicos que deben ser capacitados durante el mes t ($t = 1, 2, 3, 4, 5$). Por lo tanto, se define

$$x_t = \text{cantidad de técnicos capacitados durante un mes } t \qquad (t = 1, 2, 3, 4, 5)$$

CSL desea minimizar el costo total de la mano de obra durante los cinco meses siguientes. Obsérvese que

Costo total de mano de obra = costo por pagar a los aprendices + costo por pagar a los técnicos experimentados

Para expresar el costo por pagar a los técnicos experimentados es necesario definir para $t = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$y_t = \text{cantidad de técnicos experimentados al inicio del mes } t$$

Entonces

$$\begin{aligned}\text{Costo total de mano de obra} = {} & (1\,000x_1 + 1\,000x_2 + 1\,000x_3 + 1\,000x_4 + 1\,000x_5) \\ & + (2\,000y_1 + 2\,000y_2 + 2\,000y_3 + 2\,000y_4 + 2\,000y_5)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función objetivo de CSL es

$$\begin{aligned}\min z = {} & 1\,000x_1 + 1\,000x_2 + 1\,000x_3 + 1\,000x_4 + 1\,000x_5 \\ & + 2\,000y_1 + 2\,000y_2 + 2\,000y_3 + 2\,000y_4 + 2\,000y_5\end{aligned}$$

¿Cuáles son las restricciones de CSL? Nótese que $y_1 = 50$, y que para $t = 1, 2, 3, 4, 5$, CSL debe tener la certeza de que

$$\begin{aligned}&\text{Número de horas-técnicos disponibles durante el mes } t \\ &\qquad \geq \text{número de horas-técnico requeridas durante el mes } t \qquad (72)\end{aligned}$$

Como cada aprendiz requiere 50 h de tiempo por parte de técnicos experimentados, y cada técnico experimentado está disponible 160 h al mes,

$$\text{Número de horas-técnico disponibles durante el mes } t = 160y_t - 50x_t$$

Entonces (72) genera las cinco limitaciones siguientes:

$$\begin{aligned}160y_1 - 50x_1 &\geq 6\,000 && (\text{restricción del mes 1})\\ 160y_2 - 50x_2 &\geq 7\,000 && (\text{restricción del mes 2})\\ 160y_3 - 50x_3 &\geq 8\,000 && (\text{restricción del mes 3})\\ 160y_4 - 50x_4 &\geq 9\,500 && (\text{restricción del mes 4})\\ 160y_5 - 50x_5 &\geq 11\,000 && (\text{restricción del mes 5})\end{aligned}$$

Al igual que en los otros planteamientos de varios periodos, se necesitan restricciones que relacionen las variables de los diferentes periodos. En el problema de CSL, es importante darse cuenta de que la cantidad de técnicos disponibles al principio de cualquier mes está determinada por el número de técnicos experimentados disponibles durante el mes anterior y la cantidad de técnicos entrenados durante el mes anterior:

$$\text{Técnicos experimentados disponibles al principio del mes } t = \begin{array}{l}\text{Técnicos experimentados disponibles al principio del mes } (t-1) \\ + \text{ técnicos entrenados durante el mes } (t-1) \\ - \text{ técnicos experimentados que abandonan el trabajo durante el mes } (t-1)\end{array} \quad (73)$$

Por ejemplo, para febrero, (73) es igual a

$$y_2 = y_1 + x_1 - 0.05y_1 \qquad \text{o bien} \qquad y_2 = 0.95y_1 + x_1$$

De igual manera, para marzo con (73) se tiene

$$y_3 = 0.95y_2 + x_2$$

y para abril

$$y_4 = 0.95y_3 + x_3$$

y para mayo

$$y_5 = 0.95y_4 + x_4$$

Al añadir las restricciones de signo $x_t \geq 0$ y $y_t \geq 0$ ($t = 1, 2, 3, 4, 5$), se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 1\,000x_1 + 1\,000x_2 + 1\,000x_3 + 1\,000x_4 + 1\,000x_5 \\
& + 2\,000y_1 + 2\,000y_2 + 2\,000y_3 + 2\,000y_4 + 2\,000y_5
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{s.a} & 160y_1 - 50x_1 \geq 6\,000 & y_1 = 50 \\
& 160y_2 - 50x_2 \geq 7\,000 & 0.95y_1 + x_1 = y_2 \\
& 160y_3 - 50x_3 \geq 8\,000 & 0.95y_2 + x_2 = y_3 \\
& 160y_4 - 50x_4 \geq 9\,500 & 0.95y_3 + x_3 = y_4 \\
& 160y_5 - 50x_5 \geq 11\,000 & 0.95y_4 + x_4 = y_5 \\
& x_t, y_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, 3, 4, 5) &
\end{array}$$

La solución óptima es $z = 593{,}777$; $x_1 = 0$; $x_2 = 8.45$; $x_3 = 11.45$; $x_4 = 9.52$; $x_5 = 0$; $y_1 = 50$; $y_2 = 47.5$; $y_3 = 53.58$; $y_4 = 62.34$; y $y_5 = 68.75$.

En realidad, las y_t deben ser enteros, por lo que es difícil de interpretar la solución. El problema con este planteamiento es que suponer que exactamente 5% de los empleados dejan el trabajo cada mes ocasiona que la cantidad de empleados cambie desde un número entero durante un mes a una cantidad fraccionaria el mes siguiente. Quisiéramos suponer que la cantidad de empleados que dejan el trabajo cada mes es el entero más cercano a 5% de la fuerza de trabajo total, pero entonces ¡no se tiene un problema de programación lineal!

PROBLEMAS

Grupo A

1 Si $y_1 = 38$, entonces ¿cuál sería la solución óptima para el problema de CSL?

2 Una compañía de seguros opina que se necesitarán las cantidades siguientes de computadoras personales durante los próximos seis meses: enero, 9; febrero, 5; marzo, 7; abril, 9; mayo, 10; junio, 5. Es posible rentar las computadoras por periodos de uno, dos o tres meses a las siguientes tarifas unitarias: tarifa por un mes, 200 dólares; tarifa por dos meses, 350 dólares; tarifa por tres meses, 450 dólares. Plantee un PL que se pueda utilizar para minimizar el costo por la renta del equipo necesario. Podría suponerse que si se renta una máquina por un periodo que se prolonga después de junio, el costo de la renta se prorratea. Por ejemplo, si se renta una computadora por tres meses al principio de mayo, entonces la tarifa de la renta de $\frac{2}{3}(450) = 300$, no 450 dolares, debe establecerse en la función objetivo.

3 El Servicio Interno de Ingresos ha determinado que durante cada uno de los 12 meses siguientes se requerirá la cantidad de supercomputadoras que se señala en la tabla 45. Para cumplir con estas condiciones, esta institución renta supercomputadoras por un periodo de uno, dos y tres meses. Cuesta 100 dólares rentar una supercomputadora por un mes,

TABLA 45

Mes	Cantidad de computadoras
1	800
2	1 000
3	600
4	500
5	1 200
6	400
7	800
8	600
9	400
10	500
11	800
12	600

TABLA 46

Mes	Precio de venta ($)	Precio de compra ($)
1	3	8
2	6	8
3	7	2
4	1	3
5	4	4
6	5	3
7	5	3
8	1	2
9	3	5
10	2	5

180 dólares por dos meses y 250 dólares por tres meses. Al empezar el mes 1 esta institución no tiene supercomputadoras. Determine el plan de renta que cumpla con las condiciones de los 12 meses siguientes a un costo mínimo. *Nota*: Usted podría suponer que las rentas fraccionarias son adecuadas, así que si la solución señala que se deben rentar 140.6 computadoras por un mes, usted puede redondear este valor (a 141 o 140) sin tener mucho efecto en el costo total.

Grupo B

4 Usted es propietario de una bodega de trigo de 20 000 bushels de capacidad. Al empezar el mes 1, usted tiene 6 000 bushels de trigo. El trigo se puede vender y comprar cada mes al precio por cada 100 bushels que se da en la tabla 46.

La sucesión de eventos durante cada mes es como sigue:

a Usted mantiene la existencia inicial de trigo.

b Puede vender alguna cantidad de trigo hasta su existencia inicial al precio de venta del mes actual.

c Puede comprar (al precio de compra del mes actual) tanto trigo como usted quiera, sólo sujeto a la limitación de las dimensiones de la bodega.

Su objetivo es plantear un PL que se pueda utilizar para determinar cómo maximizar la utilidad ganada en los diez meses siguientes.

RESUMEN

Definiciones de programación lineal

Un **problema de programación lineal (PL)** consta de tres partes

1 Una función lineal (la **función objetivo**) de variables de decisión (por ejemplo, x_1, $x_2, \ldots, x_n$) que se puede maximizar o minimizar.

2 Un conjunto de **restricciones** (cada una de las cuales debe ser una igualdad lineal o desigualdad lineal) que limita los valores que podrían asumir las variables de decisión.

3 Las **restricciones de signo,** las cuales especifican para cada variable de decisión x_j (1) que la variable x_j tiene que ser no negativa, $x_j \geq 0$ o bien, (2) que la variable x_j podría ser positiva, cero o negativa, x_j **no tiene restricciones de signo (nrs).**

El coeficiente de una variable en la función objetivo es el **coeficiente de la función objetivo** de la variable. El coeficiente de una variable en una restricción es un **coeficiente tecnológico.** El lado derecho de cada restricción se denomina **segundo miembro** de la restricción.

Un *punto* es simplemente una especificación de los valores de cada variable de decisión. La **región factible** de una PL consta de todos los puntos que satisfacen las restricciones del PL y las restricciones de signo. Cualquier punto en la región factible que tiene el valor z más grande de todos los puntos de la región factible (para un problema de maximización) es una **solución óptima** para el PL. Un PL podría no tener solución óptima, tener una solución óptima o una cantidad infinita de soluciones óptimas.

Una restricción en un PL es activa si el primer miembro y el segundo miembro son iguales cuando los valores de las variables en la solución óptima se sustituyen en la restricción.

Solución gráfica de problemas de programación lineal

La región factible para cualquier PL es un **conjunto convexo.** Si un PL tiene una solución óptima hay un punto extremo (o vértice) de la región factible que es una solución óptima para el PL.

Se puede resolver un PL por medio del método gráfico (problemas de maximización) con dos variables de decisión como se indica:

Paso 1 Se grafica la región factible.

Paso 2 Se traza una recta de isoutilidades.

Paso 3 Se desplaza uno en forma paralela a la recta de isoutilidades en la dirección en que se incrementa z. El último punto en la región factible que tiene contacto con la recta de isoutilidades es una solución óptima de la PL.

Soluciones de PL: cuatro casos

Cuando se resuelve un PL se presenta uno de los siguientes cuatro casos:

Caso 1 El PL tiene una solución única.

Caso 2 El PL tiene más de una solución óptima (en realidad, una cantidad infinita). Es el caso de las **soluciones óptimas alternas.** Este caso se identifica en forma gráfica cuando la recta de isoutilidades coincide con un segmento de recta completo antes de abandonar la región factible.

Caso 3 El PL es **no factible** (no tiene solución factible). Esto quiere decir que la región factible no contiene puntos.

Caso 4 El PL es no acotada. Esto significa (en un problema de maximización) que hay puntos con valores de z arbitrariamente grandes en la región factible. Este caso se identifica mediante el método gráfico por el hecho de que al desplazarse en forma paralela a una recta de isoganancias en la dirección en que se incrementa z nunca se pierde el contacto con la región factible de la PL.

Planteamiento de los PL

El paso más importante al plantear la mayoría de los PL es determinar las variables de decisión en forma correcta.

En cualquier restricción, los términos deben tener las mismas unidades. Por ejemplo, un término no puede tener las unidades "libras de materia prima" mientras que otro tiene las unidades "onzas de materia prima".

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Bloomington Breweries produce cerveza y *ale*. La cerveza se vende a 5 dólares el barril y la *ale* a 2 dólares el barril. La producción de un barril de cerveza requiere 5 lb de maíz y 2 lb de lúpulo. Para elaborar un barril de *ale* se necesitan 2 lb de maíz y 1 lb de lúpulo. Se dispone de 60 libras de maíz y 25 lb de lúpulo. Plantee un PL que se pueda utilizar para maximizar los ingresos. Resuelva el PL en forma gráfica.

2 El granjero Jones hornea dos tipos de pasteles (chocolate y vainilla) para complementar sus ingresos. Los pasteles de chocolate se pueden vender en 1 dólar cada uno, y los de vainilla a 50 centavos cada uno. Para elaborar un pastel de chocolate se requieren 20 min de horneado y 4 huevos. Cada pastel de vainilla requiere 40 min de horneado y sólo un huevo. Se dispone de 8 h de tiempo de horneado y de 30 huevos. Plantee un PL que maximice el ingreso del granjero Jones y, luego, resuelva el PL mediante el método gráfico. (Una cantidad fraccionaria de pastel es aceptable.)

3 Tengo 100 dólares. Se puede invertir en las opciones siguientes en los tres años próximos.

Inversión A Cada dólar invertido ahora rinde 0.10 de dólar dentro de un año a partir de hoy y 1.30 tres años después de este momento.

Inversión B Cada dólar invertido ahora rinde 0.20 de dólar dentro de un año a partir de hoy y 1.10 dos años a partir de ahora.

Inversión C Cada dólar invertido durante un año a partir de ahora rinde 1.50 dólares dentro de tres años a partir de ahora.

El efectivo que no se invierte se puede asignar a los fondos del mercado de valores durante cada año, en donde rinde 6% de intereses por año. Se pueden colocar cuando mucho 50 dólares en cada inversión A, B y C. Plantee un PL que maximice mi efectivo disponible dentro de tres años a partir de ahora.

4 Sunco procesa crudo para obtener combustible para aviones y aceite combustible. Cuesta 40 dólares la compra de cada 1 000 barriles de crudo, el cual es destilado y rinde 500 barriles de combustible para aviones y 500 barriles de aceite combustible. El producto de la destilación se podría vender directamente o procesar en el desintegrador catalítico. Si el combustible para aviones se vende después de la destilación sin ningún otro proceso, su precio es de 60 dólares por cada 1 000 barriles, y el del aceite combustible es de 40 dólares por cada mil barriles. Se requiere una hora para procesar 1 000 barriles de combustible para aviones en el desintegrador catalítico, y estos 1 000 barriles se pueden vender en 130 dólares. Procesar 1 000 barriles de aceite combustible requiere 45 min en el desintegrador; estos barriles se pueden vender en 90 dólares. Se pueden comprar a diario cuando mucho 20 000 barriles de crudo y se dispone de 8 h. de desintegrador catalítico. Plantee un PL para maximizar la utilidad de Sunco.

5 Finco tiene las inversiones siguientes como opciones:

Inversión A Por cada dólar invertido en el tiempo 0 se reciben 0.10 de dólar en el tiempo 1 y 1.30 dólares en el tiempo 2. (Tiempo 0 = hoy; tiempo 1 = un año a partir de hoy, y así sucesivamente.)

Inversión B Por cada dólar invertido en el tiempo 1 se reciben 1.60 dólares en el tiempo 2.

Inversión C Por cada dólar invertido en el tiempo 2 se reciben 1.20 dólares en el tiempo 3.

El efectivo excedente se podría invertir en cualquier momento en bonos del tesoro, los cuales rinden 10% por año. En el tiempo 0, hay 100 dólares. Se pueden invertir cuando mucho 50 dólares en cada una de las inversiones A, B y C. Plantee un PL que se pueda usar para maximizar el efectivo disponible de Finco en el tiempo 3.

6 Todo el acero que produce Steelco debe cumplir los requisitos siguientes: 3.2 a 3.5% de carbón; 1.8 a 2.5% de silicio; 0.9 a 1.2% de níquel; resistencia a la tensión de por lo menos 45 000 libras por pulgada cuadrada (lb/pulg^2). Steelco produce acero mediante la combinación de dos aleaciones. El costo y propiedades de cada aleación se proporcionan en la tabla 47. Suponga que la resistencia a la tensión de una combinación de dos aleaciones se puede determinar mediante el promedio de la resistencia de las aleaciones que se mezclan. Por ejemplo, una tonelada (t) de una mezcla que tiene 40% de la aleación 1 y 60 de la aleación 2 tienen una resistencia a la tensión de 0.4(42 000) + 0.6(50 000). Aplique la programación lineal para determinar cómo minimizar el costo de producir una tonelada de acero.

TABLA 47

	Aleación 1	Aleación 2
Costo por t (dól.)	190 dólares	200 dólares
Silicio	2	2.5
Níquel	1	1.5
Carbono	3	4
Resistencia a la tensión (lb/pulg^2)	42 000	50 000

7 Steelco produce dos tipos de acero en tres acereras distintas. Cada acerera tiene disponibles en un mes dado 200 horas de tiempo de alto horno. Debido a las diferencias en los hornos de cada acerera, el tiempo y el costo por producir una tonelada de acero son distintos en cada una de ellas. El tiempo y el costo en cada acerera se proporcionan en la tabla 48. Cada mes, Steelco debe producir por lo menos 500 toneladas del acero 1 y 600 toneladas del acero 2. Plantee un PL para minimizar el costo de producir el acero deseado.

8† El vivero Walnut tiene dos granjas en donde se cultiva trigo y maíz. Debido a las condiciones del suelo distintas, hay diferencias en el rendimiento y el costo al cultivar los cereales en las dos granjas. Los rendimientos y los costos se muestran en la tabla 49. Ambas granjas cuentan cada una con 100 acres disponibles para el cultivo; se deben sembrar 11 000 bushels de trigo y 7 000 bushels de maíz. Encuentre un plan de siembra que minimice el costo para poder cumplir con la demanda. ¿Cómo se podría usar una generalización de este modelo para asignar en forma eficiente la producción de cultivos en toda una nación?

9 Candy Kane Cosmetics (CKC) fabrica el perfume Leslie, el cual requiere productos químicos y mano de obra. Hay dos procesos de producción: en el proceso 1 se transforma una unidad de mano de obra y dos unidades de productos químicos en 3 oz de perfume. En el proceso 2 se transforman dos unidades de mano de obra y tres unidades de productos químicos en 5 oz de perfume. CKC gasta 3 dólares al comprar una unidad de mano de obra y 2 dólares por una unidad de productos químicos. Se pueden comprar cada año

TABLA 48
Producción de acero en tons.

	Acero 1		Acero 2	
Acerera	Costo (dól.)	Tiempo (min.)	Costo (dól.)	Tiempo (min.)
1	\$10	20	\$11	22
2	\$12	24	\$ 9	18
3	\$14	28	\$10	30

TABLA 49

	Granja 1	Granja 2
Rendimiento de maíz/acre	500	650
Costo/acre de maíz (dól.)	100	120
Rendimiento de trigo/acre	400	350
Costo/acre de trigo (dól.)	90	80

†Basado en Heady y Egbert (1964).

hasta 20 000 unidades de mano de obra y 35 000 unidades de productos químicos. Como no hay publicidad, CKC opina que puede vender 1 000 oz de perfume. Para estimular la demanda de Leslie, CKC desea contratar a la bella modelo Jenny Nelson. Jenny cobra 100 dólares la hora. Se estima que por cada hora que Jenny trabaja para la compañía la demanda del perfume se incrementa en 200 oz. Cada onza del perfume Leslie se vende en 5 dólares. Utilice la PL para determinar cómo CKC puede maximizar su utilidad.

10 Carco tiene un presupuesto para publicidad de 150 000 dólares. La compañía planea anunciarse en diarios y en TV, con el fin de aumentar las ventas de automóviles. A medida que Carco utiliza más un medio en particular, es menos efectivo cada anuncio que se agrega. En la tabla 50 se señala la cantidad de nuevos clientes a los que alcanza cada anuncio. Cada anuncio en los periódicos cuesta 1 000 dólares y cada anuncio en TV cuesta 10 000. Se pueden contratar, cuando mucho, 30 anuncios en los diarios y 15 en TV. ¿Cómo puede maximizar Carco la cantidad de clientes nuevos creados por la publicidad?

11 Sunco Oil tiene refinerías en Los Ángeles y Chicago. La refinería de Los Ángeles puede procesar hasta 2 millones de barriles de crudo por año, y la refinería de Chicago refina hasta 3 millones. Una vez refinado, el crudo de embarca hacia dos puntos de distribución: Houston y la ciudad de Nueva York. Sunco estima que cada punto de distribución puede vender hasta 5 millones de barriles por año. Debido a las diferencias en los costos de embarque y refinación, la utilidad ganada (en dólares) por millón de barriles de aceite refinado embarcado depende de dónde se refinó el crudo y del punto de distribución (*véase* tabla 51). Sunco planea ampliar la capacidad de cada refinería. Cada millón de barriles de capacidad de refinación anual que se sume costará 120 000 dólares en el caso de la refinería de Los Angeles y 150 000 dólares en el caso de la refinería de Chicago. Utilice la PL para determinar cómo puede maximizar Sunco su utilidad menos los costos de expansión sobre un periodo de 10 años.

12 Un grupo de investigación de mercado necesita detectar por lo menos a 150 esposas, 120 esposos, 100 varones adultos solteros y 110 mujeres adultas solteras mediante una encuesta telefónica. Cuesta 2 dólares hacer una llamada en el día y (debido a los costos de mano de obra más altos) 5 dólares una llamada por la noche. Los resultados se dan en la tabla

TABLA 50

	Número de anuncios	Clientes nuevos
Diarios	1–10	900
	11–20	600
	21–30	300
TV	1–5	10 000
	6–10	5 000
	11–15	2 000

TABLA 51

	Utilidad por millón de barriles (dólares)	
De	A Houston	A Nueva York
Los Ángeles	20 000	15 000
Chicago	18 000	17 000

TABLA 52

Persona que contesta	% de llamadas en el día	% de llamadas en la noche
Esposa	30	30
Esposo	10	30
Varón soltero	10	15
Mujer soltera	10	20
Nadie	40	5

52. Debido a que el personal es limitado, cuando mucho la mitad de todas las llamadas pueden ser nocturnas. Plantee un PL para minimizar el costo de completar la encuesta.

13 Feedco produce dos tipos de alimento para ganado; ambos constan totalmente de trigo y alfalfa. El alimento 1 debe contener por lo menos 80% de trigo, y el alimento 2 debe contener por lo menos 60% de alfalfa. El alimento 1 se vende a 1.50 dólares/lb y el alimento 2, a 1.30/lb. Feedco puede comprar hasta 1 000 lb de trigo a 50 centavos la libra y hasta 800 lb de alfalfa a 40 centavos la libra. La demanda por cada tipo de alimento es ilimitada. Formule un PL que maximice la utilidad de Feedco.

14 Feedco (*véase* problema 13) decidió hacer un descuento a su cliente (suponga que tiene sólo un cliente. Si el cliente compra más de 300 lb del alimento 1, cada libra por arriba de las primeras 300 costará sólo 1.25 dólares. De igual manera, si el cliente compra más de 300 lb del alimento 2, cada libra por arriba de las primeras 300 lb costará un dólar. Modifique el PL del problema 13 para explicar la presencia de los descuentos. (*Sugerencia*: Defina variables para el alimento vendido a cada precio.)

15 Chemco elabora dos productos químicos: A y B. Estos productos se fabrican por medio de dos procesos de manufactura. El proceso 1 requiere 2 h de mano de obra y 1 lb de materia prima para producir 2 oz de A y 1 oz de B. Para el proceso 2 se necesitan 3 h de mano de obra y 2 lb de materia prima para fabricar 3 oz de A y 2 oz de B. Se dispone de 60 h de mano de obra y 40 lb de materia prima. La demanda de A es ilimitada, pero sólo se puede vender 20 oz de B. El producto A se vende a 16 dólares/oz y B se vende a 14 dólares/oz. Cualquier cantidad de B que no se venda se tiene que desechar a un costo de 2 dólares/oz. Encuentre un PL que maximice los ingresos de Chemco menos el costo de destruir el producto.

16 Suponga que, en el ejemplo de las computadoras CSL de la sección 3.12, se requieren dos meses para capacitar a un técnico, y que durante el segundo mes de capacitación cada aprendiz necesita 10 h de atención por parte de un técnico experimentado. Modifique el planteamiento en el texto para incluir estos cambios.

17 Furnco produce mesas y sillas. Todas las mesas y sillas deben estar hechas por completo de encino o de pino. Hay un total de 150 pies tablón de encino y 210 pies tablón de pino. Se requieren 17 pies tablón de encino o 30 pies tablón de pino para una mesa y 5 pies tablón de encino o 13 pies tablón de pino para una silla. Las mesas se venden a 40 dólares cada una, y las sillas a 15 dólares cada una. Formule un PL que maximice el ingreso

18† La ciudad de Busville tiene tres distritos escolares. La cantidad de estudiantes de minorías étnicas y de las mayo-

†Basado en Franklin y Koenigsberg (1973).

TABLA 53

Distrito	Estudiantes de alguna minoría	Estudiantes de las mayorías
1	50	200
2	50	250
3	100	150

TABLA 54

Distrito	Escuela Cooley	Escuela Walt Whitman
1	1	2
2	2	1
3	1	1

rias en cada distrito se proporciona en la tabla 53. De todos los estudiantes, 25% ($\frac{200}{800}$) son estudiantes que pertenecen a alguna minoría.

La corte local decidió que las dos escuelas de bachillerato de la ciudad (escuela Cooley y escuela Walt Whitman) deben tener aproximadamente el mismo porcentaje de estudiantes pertenecientes a las minorías (dentro $\pm 5\%$) que el que hay en toda la ciudad. Las distancias (en millas) entre los distritos escolares y las escuelas de bachillerato se proporcionan en la tabla 54. Cada escuela debe tener una inscripción de 300 a 500 estudiantes. Aplique la programación lineal para determinar la cantidad de estudiantes en las escuelas que minimice la distancia total que los estudiantes deben recorrer para llegar a la escuela.

19[†] Brady Corporation fabrica alacenas. Requiere cada semana 90 000 pies cúbicos de tablones. La compañía puede conseguir madera de dos maneras: primero, la podría comprar con un proveedor y secarla en el horno del proveedor. Segundo, podría cortar troncos en sus propios terrenos, cortarlos en tablones en su aserradero y, por último, secarlos en su propio horno. Brady puede comprar tablones grado 1 o grado 2. Los tablones grado 1 cuestan 3 dólares por pie cúbico, y cuando se secan rinden 0.7 pies cúbicos de madera útil. Los tablones grado 2 cuestan 7 dólares el pie cúbico, y luego de secarlos rinden 0.9 pies cúbicos de madera útil. A la compañía le cuesta 3 dólares cortar los troncos. Después de cortar y secar un tronco, éste rinde 0.8 pies cúbicos de tablones. Brady gasta 4 dólares por pie cúbico de tablones secados. Además, cuesta 2.50 dólares por pie cúbico de troncos enviados al aserradero. El aserradero puede procesar cada semana hasta 35 000 pies cúbicos de tablones. Se pueden comprar cada semana hasta 40 000 pies cúbicos de tablones grado 1 y hasta 60 000 pies cúbicos del grado 2. Se dispone cada semana de 40 h para secar los tablones. El tiempo que se requiere para secar 1 pie cúbico de madera grado 1, madera grado 2 o troncos es como se indica; grado 1, 2 segundos (s); grado 2, 0.8 s; troncos, 1 a 3 s. Determine un PL que ayude a Brady a minimizar el costo a la semana por cumplir con la demanda de tablones procesados.

20[‡] La *Canadian Parks Commission* controla dos zonas. La zona 1 consiste en 300 acres y la zona 2, de 100 acres. Cada acre de la zona 1 se puede usar para abetos o caza, o ambos. Cada acre de la zona 2 se puede usar para abetos o para acampar, o para ambas cosas. El capital (en cientos de dólares), la mano de obra (días-trabajador) que se requieren para conservar un acre de cada zona y la utilidad (en miles de dólares) por acre para cada uso posible se proporciona en la tabla 55. Hay un capital disponible de 150 000 dólares y 200 días-hombre. ¿Qué usos se le pueden asignar a las zonas para maximizar la utilidad que se obtenga de las dos zonas?

21[§] Chandler Entreprises elabora dos productos competitivos: A y B. La compañía quiere vender estos productos a dos grupos de clientes, el grupo 1 y el grupo 2. El valor que cada cliente asigna a una unidad de A y de B es el que se muestra en la tabla 56. Cada cliente comprará el producto A o el B, pero no ambos. Un cliente está dispuesto a comprar el producto A si cree que

Valor del producto A − precio del producto A ≥ valor del producto B − precio del producto B

Valor del producto A −precio del producto A
≥ Valor del producto B − Precio del producto B

y

Valor del producto A − Precio del producto A ≥ 0

Un cliente está dispuesto a comprar el producto B si cree que

Valor del producto B − precio del producto B
≥ valor del producto A − precio del producto A

y

Valor del producto B − precio del producto B ≥ 0

El grupo tiene 1 000 miembros y el grupo 2 consta de 1 500. Chandler desea establecer los precios para cada producto, de tal manera que haya certeza de que los miembros del grupo 1 compren el producto A y los miembros del grupo 2 compren el producto B. Determine un PL que ayude a Chandler a maximizar sus ingresos.

22[¶] Alden Enterprises elabora dos productos. Cada uno de los productos se puede fabricar en una de las dos máquinas que hay. El tiempo necesario para elaborar cada producto (en horas) en cada una de las máquinas se presenta en la ta-

TABLA 55

Zona	Capital	Mano de obra	Utilidad
1 Abetos	3	0.1	0.2
1 Caza	3	0.2	0.4
1 Ambos	4	0.2	0.5
2 Abetos	1	0.05	0.06
2 Acampar	30	5	0.09
2 Ambos	10	1.01	1.1

TABLA 56

	Cliente del grupo 1	Cliente del grupo 2
Valor dado a A	$10	$12
Valor dado a B	$8	$15

[†]Basado en Carino y Lenoir (1988).
[‡]Basado en Cheung y Auger (1976).
[§]Basado en Dobson y Kalish (1988).
[¶]Basado en Jain, Stott, y Vasold (1978).

TABLA 57

Producto	Máquina 1	Máquina 2
1	4	3
2	7	4

TABLA 58

	Demanda		Precios	
Producto	Mes 1	Mes 2	Mes 1	Mes 2
1	100	190	\$55	\$12
2	140	130	\$65	\$32

bla 57. Se dispone cada mes de 500 h en cada una de las máquinas. Los clientes están dispuestos cada mes a comprar hasta las cantidades de cada producto que se señalan en la tabla 58 y a los precios indicados ahí. El objetivo de la compañía es maximizar el ingreso obtenido por la venta de unidades durante los dos meses siguientes. Plantee un PL que ayude a alcanzar ese objetivo

23 Kiriakis Elctronics elabora tres productos. Cada producto debe pasar por un proceso en tres máquinas distintas. Cuando una máquina está en uso, la debe operar un trabajador. El tiempo (en horas) necesario para procesar cada producto en cada máquina y la utilidad asociada con cada producto se muestra en la tabla 59. Se dispone en la actualidad de cinco máquinas tipo 1, tres máquinas tipo 2 y cuatro máquinas tipo 3. La compañía tiene 10 trabajadores y debe determinar cuántos empleados asignar a cada máquina. La planta está abierta 40 h por semana, y cada trabajador labora 35 horas por semana. Establezca un PL que le permita a Kiriakis asignar trabajadores a las máquinas, de tal manera que se maximice la utilidad semanal. (*Nota:* Un trabajador no pasa toda la semana laboral operando una sola máquina.)

24 El hospital de Gotham City atiende pacientes de cuatro grupos relacionados por el diagnóstico (GRD). La contribución a la utilidad, el uso del servicio de diagnóstico (en horas), días-cama (en días), atención de enfermeras (en horas) y uso de medicamentos (en dólares) se proporcionan en la tabla 60. El hospital dispone ahora cada semana de 570 h de servicios de diagnóstico, 1 000 días-cama, 50 000 horas de atención de enfermeras y 50 000 dólares en medicamentos. Para cumplir las demandas mínimas de atención a la salud de la comunidad, se deben atender todas las semanas por lo menos 10 pacientes del GRD1, 15 del GRD2, 40 del GRD3 y 160 del GRD4. Utilice un PL para determinar la mezcla óptima de los GRD.[†]

TABLA 59

	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Máquina 1	2	3	4
Máquina 2	3	5	6
Máquina 3	4	7	9
Utilidad (dólares)	6	8	10

TABLA 60

GRD	Utilidad	Servicio de diagnóstico	Días-Cama	Uso de enfermería	Fármacos
1	2 000	7	5	30	800
2	1 500	4	2	10	500
3	500	2	1	5	150
4	300	1	0	1	50

25 Oliver Winery elabora cuatro vinos ganadores de premios en Bloomington, Indiana. Las contribuciones a la utilidad, horas de mano de obra y uso del tanque (en horas) por galón por cada tipo de vino se indican en la tabla 61. De acuerdo con la ley, se pueden producir cuando mucho cada año 100 000 galones de vino. Se dispone cada año de un máximo de 12 000 horas de mano de obra y 32 000 horas de tanque. Cada galón del vino 1 gasta un promedio de $\frac{1}{3}$ del año en inventario; el vino 2, un promedio de 1 año; el vino 3, un promedio de 2 años; el vino 4, un promedio de 3.333 años. La bodega puede manejar un inventario promedio de 50 000 galones. Determine cuánto se debe producir al año de cada tipo de vino para maximizar la utilidad de Oliver Winery.

26 Resuelva mediante el método gráfico el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z = 5x_1 + \quad & x_2 \\
\text{s.a} \quad 2x_1 + \quad & x_2 \geq 6 \\
x_1 + \quad & x_2 \geq 4 \\
2x_1 + 10& x_2 \geq 20 \\
x_1, & x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

27 Grummins Engine fabrica camiones a diesel. Las nuevas normas gubernamentales sobre las emisiones señalan que las emisiones contaminantes promedio de todos los camiones fabricados en los tres años próximos no pueden ser mayores de 10 gramos por camión. Grummins produce dos tipos de camiones. Cada camión tipo 1 se vende en 20 000 dólares, cuesta 15 000 dólares fabricarlo y emite 15 gramos de contaminantes. Cada camión tipo 2 se vende en 17 000 dólares, cuesta 14 000 dólares fabricarlo y emite 5 gramos de contaminantes. La capacidad de producción limita la producción total de camiones durante cada año, a cuando mucho 320 camiones. Grummins sabe que la cantidad máxima que se puede vender de cada tipo de camión durante cada uno de los tres años próximos, se da en la tabla 62.

Por consiguiente, se pueden vender durante el año 3 cuando mucho 300 camiones tipo 1. La demanda se podría cumplir con la producción anterior o con la producción del año actual. Cuesta 2 000 dólares conservar un camión (de cualquier tipo) en inventario durante un año. Formule un PL que ayude a Grummins a maximizar su utilidad durante los próximos tres años.

TABLA 61

Vino	Utilidad (dólares)	Mano de obra (h)	Tanque (h)
1	6	0.2	0.5
2	12	0.3	0.5
3	20	0.3	1
4	30	0.5	1.5

[†]Basado en Robbins y Tuntiwonpiboon (1989).

TABLA 62

Demanda máxima de camiones

Año	Tipo 1	Tipo 2
1	100	200
2	200	100
3	300	150

TABLA 63

Turno	Salario por hora	Defectos (por capacitor)	Precio
8 a.m. a 4 p.m.	\$12	4	\$18
4 p.m. a medianoche	\$16	3	\$22
Media noche a 8 a.m.	\$20	2	\$24

28 Describa todas las soluciones óptimas del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 4x_1 + x_2 \geq 12 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

29 Juiceco elabora dos productos: jugo de naranja premium y jugo de naranja regular. Ambos productos se fabrican con la combinación de dos tipos de naranjas: grado 6 y grado 3. Las naranjas en el jugo premium deben tener un grado promedio de por lo menos 5, y las del jugo regular, por lo menos de 4. Durante cada uno de los dos meses siguientes Juiceco puede vender hasta 1 000 galones de jugo premium y hasta 2 000 galones de jugo regular. El galón de jugo premium se vende a 1 dólar, en tanto que el de jugo regular se vende a 80 centavos. Al empezar el mes 1, Juiceco tiene 3 000 galones de naranja grado 6 y 2 000 galones de naranja grado 3. Al iniciar el mes 2, Juiceco podría comprar más naranjas grado 3 a 40 centavos/galón y más naranjas grado 6 a 60 centavos/galón. El jugo se echa a perder al final del mes, así que no tendría sentido elaborar jugo extra durante el mes 1 con la esperanza de usarlo para cumplir con la demanda del mes 2. Las naranjas que quedan al final del mes 1 se podrían usar para elaborar jugo para el mes 2. Al final del mes 1 se fija un costo de 5 centavos por cada galón sobrante de naranjas grado 3, y 10 centavos contra cada galón sobrante de naranjas grado 6. Además del costo de las naranjas, cuesta 10 centavos producir cada galón de jugo (regular o premium). Plantee un PL que se pueda utilizar para maximizar la utilidad (ingresos − costos) que obtiene Juiceco durante los dos meses próximos.

30 Resuelva mediante el método gráfico el problema siguiente de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

31 Determine mediante el método gráfico todas las soluciones de la programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

32 Todos los días, Eastinghouse fabrica capacitores durante tres turnos: 8 a.m. a 4 p.m., 4 p.m. a media noche, media noche a 8 a.m. El salario por hora que se paga a los empleados en cada turno, el precio cargado de cada capacitor elaborado durante cada turno y la cantidad de defectos en cada capacitor que se produce durante un turno dado se proporcionan en la tabla 63. Cada uno de los 25 trabajadores de la compañía puede ser asignado a uno de los tres turnos. Un empleado produce 10 capacitores durante su turno, pero debido a limitaciones de maquinaria, no más de 10 trabajadores pueden ser asignados a un turno dado. Se pueden vender diario, cuando mucho, 250 capacitores, y la cantidad promedio de defectos por capacitor no puede ser mayor de tres en la producción del día. Plantee un PL que maximice la utilidad diaria de Eastinghouse (ingresos por ventas − costo de la mano de obra).

33 Encuentre gráficamente todas las soluciones del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 8x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

34 Airco debe cumplir (a tiempo) con la siguiente demanda de acondicionadores de aire: mes 1, 300; mes 2, 400; mes 3, 500. Los acondicionadores de aire se pueden fabricar en Los Ángeles o en Nueva York. Se requieren 1.5 h de mano de obra calificada para fabricar un acondicionador de aire en Los Ángeles y 2 h en Nueva York. Producir un acondicionador de aire cuesta 400 dólares en Los Ángeles, y 350 dólares en Nueva York. Cada ciudad dispone todos los meses de 420 h de mano de obra calificada. Cuesta 100 dólares conservar un acondicionador de aire en inventario durante un mes. Al inicio del mes 1, Airco tiene 200 acondicionadores de aire en existencia. Plantee un PL cuya solución indique a Airco cómo minimizar el costo de cumplir la demanda de acondicionadores de aire en los tres meses próximos.

35 Plantee el problema siguiente como un problema de programación lineal: un operador de un invernadero planea proponerse para el trabajo de abastecer flores para los parques de la ciudad. Utiliza tulipanes, narcisos atrompetados y arbustos con flores en tres tipos de configuraciones. Se requieren 30 tulipanes, 20 narcisos atrompetados y 4 arbustos con flores para la configuración tipo 1. En la 2 se usan 10 tulipanes, 40 narcisos atrompetados y 3 arbustos con flores. Para la última se necesitan 20 tulipanes, 50 narcisos atrompetados y 2 arbustos con flores. La utilidad neta es 50 dólares por cada configuración tipo 1, 30 dólares por cada configuración tipo 2 y 60 dólares por cada configuración tipo 3. Tiene 1 000 tulipanes, 800 narcisos atrompetados y 100 arbustos en floración. ¿Cuántas configuraciones de cada tipo se deberán usar para obtener la máxima utilidad?

36 Explique cómo cambia el planteamiento del problema 35 si se suman las dos condiciones siguientes:

a La cantidad de configuraciones tipo 1 no puede ser mayor que el número de configuraciones tipo 2.

b Debe haber por lo menos cinco configuraciones de cada tipo.

37 Resuelva mediante el método gráfico el problema siguiente de PL:

$$\begin{aligned}\min z &= 6x_1 + 2x_2\\ \text{s.a}\quad 3x_1 + 2x_2 &\geq 12\\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 12\\ x_2 &\geq 1\\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

38 Nosotros elaboramos dos productos: el producto 1 y el 2 en dos máquinas (máquina 1 y máquina 2). La cantidad de horas de tiempo de máquina y de mano de obra depende de la máquina y del producto según se ilustra en la tabla 64.

El costo de producción de una unidad de cada producto se proporciona en la tabla 65.

La cantidad de horas de mano de obra y el tiempo de máquina disponibles este mes está en la tabla 66.

Este mes se deben producir por lo menos 200 unidades del producto 1 y al menos 240 unidades del producto 2. Asimismo, por lo menos la mitad del producto 1 se debe elaborar en la máquina 1, y por lo menos la mitad del producto 2 se debe fabricar en la máquina 2. Determine entonces cómo podemos minimizar el costo de cumplir la demanda mensual.

39 Carrotco elabora dos productos: 1 y 2. Cada unidad de cada producto se debe procesar en la máquina 1 y en la máquina 2, y requiere materia prima 1 y materia prima 2. El uso de recursos se indica en la tabla 67.

TABLA 64

	Producto 1 Máquina 1	Producto 2 Máquina 1	Producto 1 Máquina 2	Producto 2 Máquina 2
Tiempo máquina	0.7	0.75	0.8	0.9
Mano de obra	0.75	0.75	1.2	1

TABLA 65

Producto 1 Máquina 1	Producto 2 Máquina 1	Producto 1 Máquina 2	Producto 2 Máquina 2
\$1.50	\$0.40	\$2.20	\$4.00

TABLA 66

Recurso	Horas disponibles
Máquina 1	200
Máquina 2	200
Mano de obra	400

TABLA 67

	Producto 1	Producto 2
Máquina 1	0.6	0.4
Máquina 2	0.4	0.3
Materia prima 1	2	1
Materia prima 2	1	2

TABLA 68

	Producto 1	Producto 2
Demanda	400	300
Precio de venta	30	35

Por consiguiente, se requieren 0.6 de unidad del tiempo de la máquina 1, 0.4 de unidad del tiempo de la máquina 2, 2 unidades de materia prima 1 y 1 unidad de materia prima 2 para producir una unidad del producto 1. El precio de venta por unidad y la demanda de cada producto se da en la tabla 68.

Cada unidad de materia prima 1 se compra en 4 dólares y cuesta 5 dólares producir cada unidad de materia prima 2. Es posible comprar cantidades ilimitadas de materia prima. Se dispone de 200 unidades de tiempo de la máquina 1 y 300 unidades de tiempo de la máquina 2. Determine cómo Carrotco puede maximizar su utilidad.

40 Una compañía ensambla dos productos: A y B. El producto A se vende en 11 dólares por unidad, y el producto B, a 23 dólares la unidad. Una unidad del producto A requiere 2 h en la línea de ensamble 1 y una unidad de materia prima. Para elaborar una unidad del producto B es necesario 2 unidades de materia prima, 1 unidad de A y 2 h en la línea 2. Se dispone de 1 300 h en la línea 1 y de 500 h en la línea 2. Una unidad de materia prima se podría comprar (a 5 dólares la unidad) o producir (a ningún costo) en 2 h de tiempo en la línea 1. Determine cómo maximizar la utilidad.

41 Ann y Ben están en proceso de divorcio y quieren saber cómo dividir sus propiedades comunes: la cuenta de retiro, la casa, la casita de verano, las inversiones y bienes diversos. Para empezar, se les pidió a Ann y Ben que asignaran un total de 100 puntos a los bienes, lo cual se muestra en la tabla 69.

Si se supone que todos los bienes son divisibles (es decir, una fracción de cada bien se podría entregar a cada persona), ¿cómo se podrían asignar los bienes? Dos criterios pueden regir la asignación de bienes:

Criterio 1 Cada persona debe terminar con el mismo número de puntos. Esto evita que Ann envidie a Ben y que Ben envidie a Ann.

Criterio 2 La cantidad total de puntos que recibe Ann y Ben debe ser maximizada.

Si los bienes no pudieran dividirse entre las personas, ¿qué problema surgiría?

42 Eli Daisy fabrica dos fármacos en Los Ángeles y en Indianápolis. El costo por producir una libra de cada fármaco se presenta en la tabla 70.

TABLA 69

	Puntos	
Producto	De Ann	De Ben
Cuenta de retiro	50	40
Casa	20	30
Casa de campo	15	10
Inversiones	10	10
Diversos	5	10

TABLA 70

Ciudad	Costo de fármaco (dólares)	Costo de fármaco (dólares)
Indianápolis	4.10	4.50
Los Ángeles	4.00	5.20

TABLA 71

Ciudad	Tiempo para el fármaco 1 (hr)	Tiempo para el fármaco 2 (Hr)
Indianápolis	.2	.3
Los Ángeles	.24	.33

El tiempo máquina (en horas) que se necesita para fabricar una libra de cada fármaco en cada ciudad se proporciona en la tabla 71.

Daisy necesita producir a la semana por lo menos 1 000 lb del fármaco 1 y 2 000 lb del fármaco 2. La compañía tiene 500 horas por semana de tiempo máquina en Indianápolis y 400 h/semana de tiempo máquina en Los Ángeles. Determine cómo Daisy podría minimizar el costo de producción de los fármacos necesarios.

43 Daisy también elabora Wozac en Nueva York y Chicago. Produce cada mes hasta 30 unidades en Nueva York y hasta 35 unidades en Chicago. El costo de producción de una unidad cada mes en cada lugar se proporciona en la tabla 72.

La demanda de los clientes que se muestra en la tabla 73 se debe cumplir a tiempo.

El costo por mantener una unidad en inventario (medido contra el inventario final) se da en la tabla 74.

TABLA 72

	Costo (dólares)	
Mes	Nueva York	Chicago
1	8.62	8.40
2	8.70	8.75
3	8.90	9.00

TABLA 73

Mes	Demanda (unidades)
1	50
2	60
3	40

TABLA 74

Mes	Costo por mantener en inventario (dólares)
1	0.26
2	0.12
3	0.12

Hay 10 unidades de Wozac en inventario al empezar el mes 1. Determine un programa que minimice los costos para los tres meses siguientes.

44 Usted está al mando de la refinería Dawson Creek. La refinería produce gasolina y aceite combustible a partir del petróleo crudo. La gasolina se vende a 11 dólares el barril y debe tener un grado promedio de por lo menos 9. El aceite combustible se vende a 6 dólares el barril, y debe tener por lo menos un grado promedio de 7. Se venden cuando mucho 2 000 barriles de gasolina y 600 barriles de aceite combustible.

El crudo que llega se procesa por medio de uno de tres métodos distintos. El rendimiento por barril y el costo por barril de cada método de proceso se muestran en la tabla 75.

Por ejemplo, si se refina un barril del crudo que llega por el método 1, el costo es de 3.40 dólares y el rendimiento es de 0.2 barriles de grado 6, 0.3 barriles de grado 8 y 0.5 barriles de grado 10. El costo abarca el costo por la compra del petróleo crudo.

Los grados 6 y 8 deben pasar por el desintegrador catalítico para mejorar su calidad antes de que se obtenga gasolina y aceite combustible. Un barril de grado 6 se "fracciona" a un barril de grado 8 a un costo de 1 dólar por barril. Un barril de grado 8 se "fracciona" a un barril de grado 10 a un costo de 1.50 dólares por barril. Determine cómo maximizar la utilidad de la refinería.

45 Poseemos 100 acciones de cada uno de los capitales en acciones (*stock*) 1 a 10. El precio original que se pagó por las acciones, el precio actual y el precio esperado en un año por cada capital en acciones se proporciona en la tabla 76.

Necesitamos dinero este día, por lo que vamos a vender algunas de las acciones. La tasa tributaria sobre las ganancias del capital es 30%. Si vendemos 50 acciones del *stock* 1, tenemos que pagar un impuesto de $0.3 \cdot 50(30 - 20) = 150$ dólares. También tenemos que pagar los costos por transacciones de 1% por cada transacción. Por lo tanto, nuestra venta de 50 acciones del *stock* 1 incurriría en un costo por transacciones de $0.01 \cdot 50 \cdot 30 = 15$ dólares. Después de los impuestos y los costos por transacción nos quedan 30 000 dólares por la venta de las acciones. Nuestro objetivo es maximizar el valor esperado (antes de impuestos) en un año de nuestro *stock* restante. ¿Cuáles *stocks* se deben vender? Suponga que se puede vender una fracción de acción del *stock*.

Grupo B

46 El Banco Nacional de Gotham City abre de lunes a viernes de 9 a.m. a 5 p.m. El banco sabe, por pasadas experiencias, que necesita la cantidad de cajeros que se señala en la tabla 77. El banco contrata a dos tipos de cajeros. Los cajeros de tiempo completo trabajan de 9 a 5, cinco días a la semana, excepto por una hora libre para tomar alimentos. (El banco determina cuándo un empleado de tiempo completo debe tomar su hora para los alimentos, pero cada ca-

TABLA 75

	Grado			
Método	6	8	10	Costo (dólares por barril)
1	0.2	0.3	0.5	3.40
2	0.3	0.4	0.3	3.00
3	0.4	0.4	0.2	2.60

TABLA 76

Stock	Acciones	Precio (dólares)		
		Compra	Actual	En un año
1	100	20	30	36
2	100	25	34	39
3	100	30	43	42
4	100	35	47	45
5	100	40	49	51
6	100	45	53	55
7	100	50	60	63
8	100	55	62	64
9	100	60	64	66
10	100	65	66	70
Tasa tributaria (%)	0.3			
Costo por transacción (%)	0.01			

TABLA 77

Periodo	Cajeros necesarios
9–10	4
10–11	3
1–Mediodía	4
Mediodía–1	6
1–2	5
2–3	6
3–4	8
4–5	8

jero debe salir entre mediodía y 1 p.m., o bien, entre 1 p.m. y 2 p.m.) Los empleados de tiempo completo ganan (incluso prestaciones salariales) 8 dólares por hora (esto incluye el pago por la hora de tomar alimentos). El banco podría contratar también cajeros de medio tiempo. Cada cajero de medio tiempo debe trabajar exactamente 3 h consecutivas todos los días. Un cajero de medio tiempo gana 5 dólares por hora (y no recibe prestaciones salariales). Para mantener la calidad adecuada de servicio, el banco decidió que se pueden contratar cuando mucho 5 cajeros de medio tiempo. Plantee un PL que cumpla con los requisitos de los cajeros al mínimo costo. Resuelva el PL mediante una computadora. Experimente con la respuesta del PL para determinar una estrategia de empleo con la que se minimicen los costos de mano de obra.

47[†] El Departamento de Policía de Gotham City emplea 30 oficiales de policía. Todos los oficiales trabajan 5 días a la semana. Los delitos fluctúan según el día de la semana, por lo que la cantidad de policías necesarios cada día depende del día de la semana: sábado, 28; domingo, 18; lunes, 18; martes, 24; miércoles, 25; jueves, 16; viernes, 21. El Departamento de Policía desea programar a los oficiales de policía para minimizar la cantidad de elementos cuyos días de descanso no son consecutivos. Formule una PL que logre este objetivo. (*Sugerencia:* Establezca una restricción por cada día de la semana que asegure que el número adecuado de oficiales *no* está trabajando en un día en particular.)

[†]Basado en Rothstein (1973).

48[‡]Alexis Cornby se gana la vida comprando y vendiendo maíz. El primero de enero, ella tenía 50 toneladas (t) de maíz y 1 000 dólares. Al inicio de cada mes, Alexis puede comprar maíz a los precios siguientes por tonelada: enero, 300 dólares; febrero, 350 dólares; marzo, 400 dólares; abril, 500 dólares. Alexis puede vender el último día de cada mes el maíz a los precios siguientes por tonelada: enero, 250 dólares; febrero, 400 dólares; marzo, 350 dólares; abril, 550 dólares. Alexis almacena su maíz en una bodega en la que caben cuando mucho 100 t de maíz. Ella debe tener la capacidad de pagar en efectivo el maíz en el tiempo de la compra. Con ayuda de la PL determine cómo Alexis puede maximizar su efectivo disponible a fines de abril.

49[§]Finco tiene 400 dólares en efectivo al empezar el mes. Además, Finco recibe al iniciar los meses 1, 2, 3 y 4 ciertos ingresos, después de lo cual paga algunas cuentas (*véase* tabla 78). El dinero que quede se podría invertir por un mes a la tasa de interés de 0.1% por mes; por dos meses, la tasa es de 0.5% por mes; por tres meses, 1% mensual; o bien, por cuatro meses, 2% mensual. Determine mediante programación lineal una estrategia de inversión que maximice el efectivo disponible al inicio del mes 5.

50 La ciudad 1 genera 500 toneladas de desechos por día, y la ciudad 2, 400 toneladas por día. Es necesario incinerar los desechos en el incinerador 1 o en el 2; y cada uno de éstos es capaz de procesar hasta 500 toneladas de desechos por día. El costo por incinerar desechos es de 40 dólares/t en el

TABLA 78

Mes	Ingresos (dólares)	Cuentas (dólares)
1	400	600
2	800	500
3	300	500
4	300	250

[‡]Basado en Charnes y Cooper (1955).
[§]Basado en Robichek, Teichroew, y Jones (1965).

incinerador 1 y 30 dólares/t en el 2. Cada tonelada de desechos se transforma mediante la incineración en 0.2 toneladas de residuos, los cuales se entierran en uno de los dos rellenos sanitarios que hay. Cada relleno sanitario puede recibir cuando mucho 200 toneladas de residuos por día. El transporte por milla de una tonelada de material (residuos o desechos) cuesta 3 dólares/milla. Las distancias (en millas) entre los lugares se indican en la tabla 79. Formule un PL que se pueda usar para minimizar el costo total de la eliminación de basura de ambas ciudades.

51[†] Silicon Valley Corporation (Silvco) fabrica transistores. La fusión del elemento germanio (un componente importante de un transistor) en un horno es un aspecto fundamental de la manufactura de los transistores. El proceso de fundición genera infortunadamente germanio de calidad muy variable.

Es posible aplicar dos métodos para fundir el germanio: el método 1 cuesta 50 dólares por transistor, y el método 2 cuesta 70 dólares por transistor. Las calidades que se obtienen por los métodos 1 y 2 se muestran en la tabla 80. Silvco puede volver a fundir el germanio con el fin de mejorar su calidad. Volver a fundir el germanio para un transistor cuesta 25 dólares. El resultado de volver a fundir el germanio se señala en la tabla 81. Silvco tiene capacidad suficiente de horno para fundir o volver a fundir el germanio cuando mucho para 20 000 transistores por mes. La demanda mensual de Silvco es de 1 000 transistores grado 4, 2 000 transistores grado 3, 3 000 transistores grado 2 y 3 000 transistores grado 1. Utilice la programación lineal para minimizar el costo de producción de los transistores necesarios.

TABLA 79

Ciudad	Incinerador 1	Incinerador 2
1	30	5
2	36	42

Incinerador	Relleno sanitario 1	Relleno sanitario 2
1	5	8
2	9	6

TABLA 80

Grado de germanio fundido[‡]	% de rendimineto por fundición	
	Método 1	Método 2
Defectuoso	30	20
1	30	20
2	20	25
3	15	20
4	5	15

[‡]*Nota:* El grado 1 es pobre; el grado 4 es excelente. La calidad del germanio determina la calidad del transitor fabricado.

[†]Basado en Smith (1965).

TABLA 81

Grado del germanio refundido	% de rendimiento por la refundición			
	Defectuoso	Grado 1	Grado 2	Grado 3
Defectuoso	30	0	0	0
1	25	30	0	0
2	15	30	40	0
3	20	20	30	50
4	10	20	30	50

TABLA 82

Material	Costo (dólares)	Contenido de pulpa (%)
Cartón de cajas	5	15
Papel para envolver	6	20
Papel periódico	8	30
Papel de libros	10	40

52[‡] Una planta recicladora de papel procesa cartón de cajas, papel para envolver, papel periódico y papel de libros, y los transforma en pulpa, la cual se puede usar para elaborar tres grados de papel reciclado (grados 1, 2 y 3). Los precios por tonelada y los contenidos de pulpa de los cuatro tipos de material se proporcionan en la tabla 82. Dos métodos, el desentintado y la dispersión de asfalto, se usan para procesar los cuatro tipos de material y convertirlos en pulpa. Cuesta 20 dólares desentintar una tonelada de cualquier material. El proceso de desentintado elimina 10% de la pulpa del material, por lo que sólo queda 90% de la pulpa original. Aplicar la dispersión de asfalto a una tonelada de material cuesta 15 dólares. La dispersión de asfalto elimina 20% de la pulpa del material. Se pueden someter al proceso de dispersión de asfalto o al proceso de desentintado cuando mucho 3 000 toneladas de material. El papel grado 1 sólo se puede producir a partir de pulpa de papel periódico o de papel de libros; el papel grado 2 sólo se obtiene de pulpa de papel de libros, papel para envolver o de cartón de cajas, y el papel grado 3 sólo se obtiene de pulpa de papel periódico, papel para envolver o de cartón de cajas. Para cumplir con la demanda actual, la compañía requiere 500 toneladas de pulpa para papel grado 1 500 toneladas de pulpa para papel grado 2 y 600 toneladas de pulpa para papel grado 3. Determine un PL para minimizar el costo por cumplir la demanda de pulpa.

53 Turkeyco produce dos tipos de chuleta de pavo que vende a restaurantes de bocadillos. Cada tipo de chuleta consta de carne blanca y carne oscura. La chuleta 1 se vende en 4 dólares/lb, y debe consistir por lo menos en 70% de carne blanca. La chuleta 2 se vende a 3 dólares/lb, y consiste en por lo menos 60% de carne blanca. Se pueden vender, cuando mucho, 50 libras de la chuleta 1 y 30 lb de la chuleta 2. Los dos tipos de pavo usados para elaborar las chuletas se compran en la granja GobbleGobble Turkey. Cada pavo tipo 1 cuesta 10 dólares y rinde 5 lb de carne blanca y 2 lb de carne oscura. Cada pavo tipo 2 cuesta 8 dólares y rinde 3 lb de carne blanca y 3 lb de carne oscura. Plantee una PL para maximizar la utilidad de Turkeyco.

54 Priceler fabrica automóviles sedán y vagonetas. La cantidad de vehículos que se pueden vender en cada uno de los tres meses próximos se indica en la tabla 83. Cada sedán se

[‡]Basado en Glassey y Gupta (1975).

TABLA 83

Mes	Sedanes	Vagonetas
1	1 100	600
2	1 500	700
3	1 200	50

vende en 8 000 dólares, y el precio de cada vagoneta es de 9 000 dólares. Para producir un sedán se requieren 6 000 dólares y 7 500 para fabricar una vagoneta. Mantener por un mes un vehículo en inventario cuesta 150 dólares en el caso del sedán y 200 dólares si se trata de una vagoneta. Se pueden producir durante cada mes, cuando mucho, 1 500 vehículos. Las limitaciones en la línea de producción dictan que de todos los automóviles producidos durante el mes 1 por lo menos dos tercios deben ser sedanes. Al principio del mes 1, se dispone des 200 sedanes y 100 vagonetas. Plantee un PL que se pueda usar para maximizar la utilidad de Priceler durante los próximos tres meses.

55 Los empleados de la línea de producción de Grummins Engine trabajan cuatro días a la semana, 10 h por día. Todos los días de la semana, se requieren las cantidades siguientes (por lo menos) de empleados de la línea: de lunes a viernes, 7 empleados; sábados y domingos, 3 empleados. Grummins tiene 11 empleados en la línea de producción. Formule un PL que se pueda aplicar para maximizar la cantidad de días de descanso consecutivos que reciben los empleados. Por ejemplo, un trabajador que descansa domingo, lunes y miércoles tiene dos días consecutivos libres.

56 El Banco 24 está abierto 24 h al día. Los cajeros laboran dos turnos consecutivos de 6 horas y reciben 10 dólares por hora. Los turnos posibles son los siguientes: medianoche a 6 a.m., 6 a.m. a mediodía, mediodía a 6 p.m., 6 p.m. a medianoche. Las cantidades siguientes de clientes entran al banco durante cada turno: medianoche a 6 a.m., 100; 6 a.m. a mediodía, 200; mediodía a 6 p.m., 300; 6 p.m. a medianoche, 200. Cada cajero atiende hasta 50 clientes por turno. Para modelar un costo por la impaciencia del cliente, suponemos que cualquier cliente que está presente al finalizar un turno "cuesta" al banco 5 dólares. Suponemos además que a la medianoche, todos los clientes deben ser atendidos, de tal manera que el turno de medianoche a 6 a.m. de todos los días inicia con 0 clientes en el banco. Determine un PL que se pueda utilizar para minimizar la suma de mano de obra del banco y los costos de la impaciencia del cliente.

57[†] Los aviones de Transeast Airlines vuelan la siguiente ruta: L.A.-Houston-N.Y.-Miami-L.A. La distancia (en millas) de cada parte de este viaje es como sigue: L.A.-Houston, 1 500 millas; Houston-N.Y., 1 700 millas; N.Y.-Miami, 1 300 millas; Miami-L.A., 2 700 millas. En cada parada, el avión podría comprar hasta 10 000 galones de combustible. El precio del combustible en cada ciudad es como se indica: L.A., 88 centavos; Houston, 15 centavos; N.Y., 1.05 dólares; Miami, 95 centavos. La capacidad del tanque de combustible del avión es de cuando mucho 12 000 galones. Para que exista la posibilidad de volar en círculos sobre una zona de aterrizaje se requiere que el nivel final de combustible por cada tramo del vuelo sea por lo menos de 600 galones. La cantidad de galones que se utilizan por milla en cada tramo del vuelo es

1 + (nivel promedio de combustible en el tramo de vuelo/2 000)

[†]Basado en Darnell y Loflin (1977).

Con el fin de simplificar, suponga que el nivel promedio de combustible en cada tramo del vuelo es

$$\frac{\text{(Nivel de combustible al inicio del tramo) + (nivel de combustible al final del tramo)}}{2}$$

Determine un PL con la que se pueda minimizar el costo del combustible del vuelo completo.

58[‡] Para procesar los formularios para el impuesto sobre la renta, el Servicio de Ingresos Interno (SII) envía primero cada formulario por el departamento de preparación de datos (PD), en donde la información se codifica para poderla usar en computadora. El formulario se envía al departamento de captura de datos donde se introduce a la computadora. Durante las tres semanas siguientes llegarán las cantidades siguientes de formularios: semana 1, 40 000; semana 2, 30 000; semana 3, 60 000. El SII hace frente a la situación mediante la contratación de empleados que trabajen 40 h por semana mediante un pago de 200 dólares por semana. La preparación de los datos de un formulario requiere 15 min, y para la introducción de datos de un formulario se necesitan 10 min. Se asigna cada semana un empleado a la introducción de datos o a la preparación de datos. El SII debe terminar de procesar todos los formularios al finalizar la semana 5 y desea minimizar el costo para lograr este objetivo. Plantee un PL mediante la cual se determine cuántos empleados deben estar trabajando cada semana y cómo asignar a los trabajadores en las cinco semanas próximas.

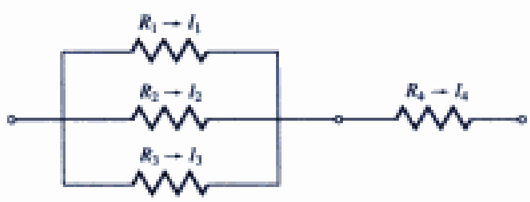
59 En el circuito eléctrico de la figura 11, I_t = corriente (en amperes) fluye a través del resistor t, V_t = caída de voltaje (en volt) en el resistor t, y R_t = resistencia (en ohm) del resistor t. De las leyes del voltaje y la corriente de Kirchoff se infiere que $V_1 = V_2 = V_3$ y $I_1 + I_2 + I_3 = I_4$. La energía que disipa la corriente que fluye por el resistor t es $I_t^2 R_t$. Por la ley de Ohm se infiere que $V_t = I_t R_t$. Las dos partes de este problema se deben resolver en forma independiente.

a Suponga que se requieren $I_1 = 4$, $I_2 = 6$, $I_3 = 8$ y $I_4 = 18$. Asimismo, la caída de voltaje en cada resistor debe estar entre 2 y 10 V. Escoja los valores de R_t para minimizar la energía disipada total. Determine un PL cuya solución resuelva este problema.

b Suponga que se requieren $V_1 = 6$, $V_2 = 6$, $V_3 = 6$, y $V_4 = 4$. Además, la corriente que fluye en cada resistor debe estar entre 2 y 6 amperes. Escoja los valores de R_t para minimizar la energía disipada total. Determine un PL cuya solución resuelva este problema. (*Sugerencia:* Sea $\frac{1}{R_t}$ (t = 1, 2, 3, 4) las variables de decisión.

60 El gobierno de Llanview pretende determinar la cantidad de jueces necesarios para atender los casos judiciales. Se estima que durante cada mes del año, el número de horas judiciales necesarias son las que se indican en la tabla 84.

FIGURA 11



[‡]Basado en Lanzenauer y col. (1987).

TABLA 84

Mes	Horas
Enero	400
Febrero	300
Marzo	200
Abril	600
Mayo	800
Junio	300
Julio	200
Agosto	400
Septiembre	300
Octubre	200
Noviembre	100
Diciembre	300

a Cada juez trabaja los 12 meses y es capaz de darse abasto para atender a los casos durante 120 horas al mes. Con el fin de evitar la acumulación, todos los casos se deben negociar antes de finalizar diciembre. Formule un PL cuya solución establezca cuántos jueces necesita Llanview.

b ¿Qué tanto cambia la respuesta si cada juez tiene vacaciones durante un mes al año?

Grupo C

61[†] La tienda de departamentos E.J. Korvair tiene 1 000 dólares en efectivo disponible. E.J., recibirá al principio de cada uno de los seis meses siguientes, ingresos y pagará cuentas según se indica en la tabla 85. Es evidente que E.J. tendrá un problema de flujo de efectivo de corto plazo hasta que la tienda reciba ingresos de la temporada de ventas de Navidad. Para resolver este problema E.J. debe pedir dinero prestado.

Al iniciar julio, E.J. podría pedir un préstamo a seis meses. Cualquier cantidad de dinero que se pida prestado por un periodo de seis meses se debe pagar al finalizar diciembre junto con un interés de 9% (los pagos que se efectúen antes no disminuyen el costo del interés del préstamo). E.J. también podría satisfacer sus necesidades de efectivo mediante un préstamo mensual. El dinero que se pide prestado por un periodo de un mes tiene un costo de intereses de 4% mensual. Utilice la programación lineal para determinar cómo E.J. puede minimizar el costo de pagar las deudas a tiempo.

TABLA 85

Mes	Ingresos (dólares)	Cuentas (dólares)
Julio	1 000	5 000
Agosto	2 000	5 000
Septiembre	2 000	6 000
Octubre	4 000	2 000
Noviembre	7 000	2 000
Diciembre	9 000	1 000

[†]Basado en Robichek, Teichroew, y Jones (1965).

62[‡] Olé Oil elabora tres productos: aceite combustible, gasolina y combustible para aviones. Los índices promedio de octano deben ser, por lo menos, de 4.5 para el aceite combustible, 8.5 para la gasolina y 7.0 para el combustible para aviones. Olé compra dos tipos de petróleo crudo, crudo 1 (12 dólares por barril) y crudo 2 (10 dólares por barril), para fabricar estos productos. Se pueden comprar diariamente cuando mucho 10 000 barriles de cada tipo de crudo.

Antes de que el crudo se utilice para elaborar los productos para la venta se tiene que destilar. Se pueden destilar cuando mucho 15 000 barriles de crudo, al día. Destilar un barril de crudo cuesta 10 centavos. El resultado de la destilación es como sigue: (1) cada barril de crudo 1 rinde 0.6 de barril de nafta, 0.3 de barril de destilado 1 y 0.1 de barril de destilado 2. (2) Cada barril de crudo 2 rinde 0.4 de barril de nafta, 0.2 de barril de destilado 1 y 0.4 de barril de destilado 2. La nafta destilada sólo se puede usar para producir gasolina o combustible para aviones. El aceite destilado se puede utilizar sólo en la producción de aceite combustible, o se puede procesar en el desintegrador catalítico (a un costo de 15 centavos por barril). Cuando mucho se pueden procesar diariamente 5 000 barriles de aceite destilado en el desintegrador catalítico. Cada barril de destilado 1 que se procesa en el desintegrador rinde 0.8 de barril de producto de desintegración o fraccionado 1 y 0.2 de barril de fraccionado 2. Cada barril de destilado 2 que se procesa en el desintegrador catalítico rinde 0.7 de barril de fraccionado 1 y 0.3 de barril de fraccionado 2. Los productos de desintegración se pueden utilizar para elaborar gasolina y combustible para aviones, pero no para producir aceite combustible.

El índice de octano de cada tipo de producto es como sigue: nafta, 8; destilado 1, 4; destilado 2, 5; fraccionado 1, 9; fraccionado 2, 6.

Todo el aceite combustible que se produce se puede vender a 14 dólares por barril; la gasolina producida, a 18 dólares por barril, y el combustible para aviones, a 16 dólares por barril. Las consideraciones del mercado señalan que se deben elaborar todos los días por lo menos 3 000 barriles de cada producto. Plantee un PL para maximizar la utilidad diaria de Olé.

63 Donald Rump es el administrador internacional de fondos para Countribank. El trabajo diario de Donald es determinar cómo los valores en cartera actuales del banco en dólares, libras, marcos y yens se debe ajustar para cumplir con las necesidades diarias de circulante. El tipo de cambio de hoy entre las distintas monedas se da en la tabla 86. Por ejemplo, un dólar se puede convertir en 0.58928 de libra, o bien, una libra se puede transformar en 1.697 dólares.

Al empezar el día, Countribank tiene el capital circulante que se indica en la tabla 87.

Al finalizar el día, Countribank debe tener por lo menos las cantidades de cada moneda que se da en la tabla 88.

TABLA 86

	A			
De	Dólares	Libras	Marcos	Yen
Dólares	1	.58928	1.743	138.3
Libras	1.697	1	2.9579	234.7
Marcos	0.57372	0.33808	1	79.346
Yen	0.007233	0.00426	0.0126	1

[‡]Basado en Garvin y col. (1957).

TABLA 87

Moneda	Unidades (en miles de millones)
Dólares	8
Libras	1
Marcos	8
Yen	0

TABLA 88

Moneda	Unidades (en miles de millones)
Dólares	6
Libras	3
Marcos	1
Yen	10

El objetivo de Donald es transferir fondos cada día de tal modo que el capital circulante satisfaga los mínimos señalados y maximice el valor del dólar del capital circulante al finalizar el día.

Para calcular el valor del dólar de, por ejemplo, una libra, se promedian las dos tasas de conversión. Por lo tanto, una libra vale aproximadamente

$$\frac{1.697 + (1/0.58928)}{2} = 1.696993 \text{ dólares}$$

BIBLIOGRAFÍA

Cada una de las siete obras siguientes son un cuerno de la abundancia de planteamientos interesantes de PL:

Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Lawrence, K. y S. Zanakis. *Production Planning and Scheduling: Mathematical Programming Applications*. Atlanta, Ga: Industrial Engineering and Management Press, 1984.

Murty, K. *Operations Research: Deterministic Optimization Models*. Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1995.

Schrage, L. *Linear Integer and Quadratic Programming With LINDO*. Palo Alto, Calif.: Scientific Press, 1986.

Shapiro, J. *Optimization Models for Planning and Allocation: Text and Cases in Mathematical Programming*. Nueva York: Wiley, 1984.

Wagner, H. *Principles of Operations Research*, 2a. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1975.

Williams, H. *Model Building in Mathematical Programming*, 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1985.

Baker, K. "Scheduling a Full-Time Work Force to Meet Cyclic Staffing Requirements," *Management Science* 20(1974):1561-1568. Presenta un método (distinto a LP) para que el personal con un cierto horario cumpla los requisitos de fuerza laboral cíclica.

Balintfy, J. "A Mathematical Programming System for Food Management Applications", *Interfaces* 6(no. 1, pt 2, 1976):13-31. Analiza los modelos de planificación de menús.

Carino, H. y C. Lenoir. "Optimizing Wood Procurement in Cabinet Manufacturing", *Interfaces* 18(no. 2, 1988):11-19.

Chandy, K. "Pricing in the Government Bond Market," *Interfaces* 16(1986):65-71.

Charnes, A. y W. Cooper. "Generalization of the Warehousing Model", *Operational Research Quarterly* 6(1955): 131-172.

Cheung, H. y J. Auger. "Linear Programming and Land Use Allocation", *Socio-Economic Planning Science* 10(1976): 43-45.

Darnell, W. y C. Loflin. "National Airlines Fuel Management and Allocation Model", *Interfaces* 7(no. 3, 1977):1-15.

Dobson, G. y S. Kalish. "Positioning and Pricing a Product Line", *Marketing Science* 7(1988):107-126.

Fabian, T. "A Linear Programming Model of Integrated Iron and Steel Production", *Management Science*, 4(1958): 415-449.

Forgionne, G. "Corporate MS Activities: An Update", *Interfaces* 13(1983):20-23. Trata la fracción de grandes compañías que utilizan la programación lineal (y otras técnicas de investigación de operaciones).

Franklin, A. y E. Koenigsberg. "Computed School Assignments in a Large District", *Operations Research* 21(1973):413-426.

Garvin, W. y col. "Applications of Linear Programming in the Oil Industry", *Management Science* 3(1957):407-430

Glassey, R. y V. Gupta. "An LP Analysis of Paper Recycling". En *Studies in Linear Programming*, ed. H. Salkin y J. Saha. Nueva York: North-Holland, 1975.

Hartley, R. "Decision Making When Joint Products Are Involved", *Accounting Review* (1971):746-755.

Heady, E. y A. Egbert. "Regional Planning of Efficient Agricultural Patterns", *Econometrica* 32(1964):374-386.

Hilal, S. y W. Erickson. "Matching Supplies to Save Lives: Linear Programming the Production of Heart Valves", *Interfaces* 11(1981):48-56.

Jain, S., K. Stott y E. Vasold. "Orderbook Balancing Using a Combination of LP and Heuristic Techniques", *Interfaces* 9(no. 1, 1978):55-67.

Krajewski, L., L. Ritzman y P. McKenzie. "Shift Scheduling in Banking Operations: A Case Application," *Interfaces*, 10(no. 2, 1980):1-8.

Love, R. y J. Hoey, "Management Science Improves Fast Food Operations", *Interfaces*, 20(no. 2, 1990):21-29.

Magoulas, K. y D. Marinos-Kouris. "Gasoline Blending LP", *Oil and Gas Journal* (18 de julio, 1988):44-48.

Moondra, S. "An LP Model for Workforce Scheduling in Banks", *Journal of Bank Research* (1976).

Myers, S. y C. Pogue. "A Programming Approach to Corporate Financial Management", *Journal of Finance* 29(1974):579-599.

Neave, E. y J. Wiginton. *Financial Management: Theory and Strategies*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1981.

Robbins, W. y N. Tuntiwonpiboon. "Linear Programming a Useful Tool in Case-Mix Management," *HealthCare Financial Management* (1989):114-117.

Robichek, A., D. Teichroew y M. Jones. "Optimal Short-Term Financing Decisions", *Management Science* 12(1965):1-36.

Rohn, E. "A New LP Approach to Bond Portfolio Management", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22(1987):439-467.

Rothstein, M. "Hospital Manpower Shift Scheduling by Mathematical Programming", *Health Services Research* (1973).

Smith, S. "Planning Transistor Production by Linear Programming", *Operations Research* 13(1965):132-139.

Stigler, G. "The Cost of Subsistence", *Journal of Farm Economics* 27(1945). Analiza el problema de la dieta.

Sullivan, R. y S. Secrest. "A Simple Optimization DSS for Production P1anning at Dairyman's Cooperative Creamery Association", *Interfaces* 15(no. 5, 1985):46-54.

Weingartner, H. *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1963.

4

Algoritmo simplex y la programación por objetivos

En el capítulo 3 se estudió cómo resolver en forma gráfica problemas de programación lineal con dos variables. Desafortunadamente, la mayor parte de los PL de la vida cotidiana tiene varias variables, por lo que es necesario un método para resolver PL con más de dos variables. La mayor parte de este capítulo se destina al algoritmo simplex, que se utiliza para resolver incluso PL muy largos. El algoritmo simplex se usa para resolver PL que tienen miles de restricciones y variables, y que se aplican en la industria.

En este capítulo se explica cómo se puede utilizar el algoritmo simplex para encontrar las soluciones óptimas de PL. Además, se explica con detalle cómo se usan los paquetes más modernos para computadora (LINDO y LINGO) para resolver PL. También se analiza con brevedad el enfoque innovador de Karmarkar para resolver PL. El capítulo termina con una introducción a la programación por objetivos, la cual permite más de una función objetivo a quien toma decisiones.

4.1 Cómo convertir un PL en una forma estándar

Ya se estudió que un PL puede tener tanto restricciones de igualdad como restricciones de desigualdad. Asimismo, puede tener variables que es necesario que sean no negativas, así como las que no tienen restricciones de signo (nrs). Antes de poder utilizar el algoritmo simplex para resolver un PL, éste se debe convertir en un problema equivalente en el cual todas las restricciones son ecuaciones y todas las variables son no negativas. Se dice que un PL en esta forma está en la **forma estándar**.†

Para convertir un PL en la forma estándar, cada restricción de desigualdad se debe reemplazar por una restricción de igualdad. Este procedimiento se ilustra mediante el problema siguiente:

EJEMPLO 1 Leather Limited

Leather Limited fabrica dos tipos de cinturones: el modelo de lujo y el modelo regular. Para cada tipo se requiere una yarda cuadrada de piel. Se necesita una hora de mano de obra calificada para un cinturón regular, y para un cinturón de lujo se requieren 2 horas. Se dispone cada semana de 40 yardas cuadradas de piel y 60 horas de mano de obra calificada. Cada cinturón regular aporta 3 dólares a la utilidad, y cada cinturón de lujo, 4 dólares. Si se definen

x_1 = cantidad de cinturones de lujo fabricados cada semana

x_2 = cantidad de cinturones regulares producidos a la semana

†En toda la primera parte de este capítulo, se supone que todas las variables tienen que ser no negativas (≥ 0). La conversión de variables nrs a variables no negativas, se estudia en la sección 4.12.

El PL adecuado es

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 \qquad \textbf{(PL 1)}$$

$$\text{s.a} \qquad x_1 + x_2 \leq 40 \qquad \text{(Restricción de la piel)} \qquad \textbf{(1)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 60 \qquad \text{(Restricción de la mano de obra)} \qquad \textbf{(2)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

¿Cómo se pueden convertir (1) y (2) en restricciones de igualdad? Se define para cada restricción $\leq$ una **variable de holgura** s_i(s_i = variable de holgura para la restricción i-ésima), que es la cantidad de recursos sin usar en la restricción i-ésima. Como se usan $x_1 + x_2$ yardas cuadradas de piel y se dispone de 40 yardas cuadradas, s_1 se define mediante

$$s_1 = 40 - x_1 - x_2 \qquad \text{o bien,} \qquad x_1 + x_2 + s_1 = 40$$

De igual manera, s_2 se define por medio de

$$s_2 = 60 - 2x_1 - x_2 \qquad \text{o bien,} \qquad 2x_1 + x_2 + s_2 = 60$$

Obsérvese que un punto (x_1, x_2) satisface la restricción i-ésima si y sólo si $s_i \geq 0$. Por ejemplo, $x_1 = 15$, $x_2 = 20$ satisface (1) porque $s_1 = 40 - 15 - 20 = 5 \geq 0$.

Intuitivamente, el punto (15, 20) cumple con (1) porque $s_1 = 5$ yardas cuadradas de piel quedan sin usar. De manera similar, el punto (15, 20) satisface a (2) porque $s_2 = 60 - 2(15) - 20 = 10$ horas de mano de obra que no se utilizan. Por último, note que el punto $x_1 = x_2 = 25$ no cumple con (2) porque $s_2 = 60 - 2(25) - 25 = -15$ indica que (25, 25) usa más mano de obra que la que se tiene disponible.

En resumen, para transformar (1) en una restricción de igualdad se reemplaza (1) por $s_1 = 40 - x_1 - x_2$ (o bien, $x_1 + x_2 + s_1 = 40$) y $s_1 \geq 0$. Para convertir (2) en una restricción de igualdad, se reemplaza (2) por $s_2 = 60 - 2x_1 - x_2$ (o bien, $2x_1 + x_2 + s_2 = 60$) y $s_2 \geq 0$. Así se convierte el PL en

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \qquad x_1 + x_2 + s_1 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 60 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(PL 1')}$$

Obsérvese que PL 1' es una forma estándar. En resumen, *si la restricción i de un PL es una restricción* $\leq$, *entonces se convierte en una restricción de igualdad al sumar una variable de holgura* s_i *a la restricción i-ésima y añadir la restricción de signo* $s_i \geq 0$.

Para ilustrar cómo una restricción $\geq$ se puede convertir en una restricción de igualdad, considérese el problema de la dieta de la sección 3.4.

$$\min z = 50x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 80x_4$$

$$\text{s.a} \qquad 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500 \qquad \text{(Restricción de las calorías)} \qquad \textbf{(3)}$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \qquad \text{(Restricción del chocolate)} \qquad \textbf{(4)}$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 10 \qquad \text{(Restricción del azúcar)} \qquad \textbf{(5)}$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \geq 8 \qquad \text{(Restricción de la grasa)} \qquad \textbf{(6)}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Para convertir la restricción i-ésima $\geq$ en una restricción de igualdad, se define una variable de excedente o superflua e_i. (e_i siempre será la variable de excedente para la restricción i-ésima.) Se define e_i como la cantidad con la cual la restricción i–ésima se satisface en exceso. Por tanto, para el problema de la dieta, se tiene

$$e_1 = 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - 500, \quad \text{o} \quad 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 = 500 \tag{3'}$$

$$e_2 = 3x_1 + 2x_2 - 6, \quad \text{o bien,} \quad 3x_1 + 2x_2 - e_2 = 6 \tag{4'}$$

$$e_3 = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 10, \quad \text{o bien,} \quad 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - e_3 = 10 \tag{5'}$$

$$e_4 = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 - 8, \quad \text{o bien,} \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 - e_4 = 8 \tag{6'}$$

Un punto (x_1, x_2, x_3, x_4) cumple la restricción i-ésima $\geq$ si y sólo si e_i es no negativa. Por ejemplo, de (4′), $e_2 \geq 0$ si y sólo si $3x_1 + 2x_2 \geq 6$. Considérese el punto $x_1 = 2$, $x_3 = 4$, $x_2 = x_4 = 0$, para un ejemplo numérico; dicho punto satisface las cuatro restricciones del problema de la dieta. Por lo que se refiere a este punto,

$$\begin{aligned}
e_1 &= 400(2) + 150(4) - 500 = 900 \geq 0\\
e_2 &= 3(2) - 6 = 0 \geq 0\\
e_3 &= 2(2) + 4(4) - 10 = 10 \geq 0\\
e_4 &= 2(2) + 4 - 8 = 0 \geq 0
\end{aligned}$$

En otro ejemplo, considere $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$. Este punto es no factible; no cumple las restricciones del chocolate, el azúcar y la grasa. La ausencia de factibilidad de este punto está indicada por

$$\begin{aligned}
e_2 &= 3(1) + 2(1) - 6 = -1 < 0\\
e_3 &= 2(1) + 2(1) - 10 = -6 < 0\\
e_4 &= 2(1) + 4(1) - 8 = -2 < 0
\end{aligned}$$

Por consiguiente, para transformar el problema de la dieta en una forma estándar, se reemplaza (3) por (3′); (4) por (4′); (5) por (5′) y (6) por (6′). También se deben agregar las restricciones de signo $e_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. El PL resultante está en la forma estándar y se podría escribir como

$$\begin{aligned}
\min z = 50x_1 &+ 20x_2 + 30x_3 + 80x_4\\
\text{s.a} \quad 400x_1 &+ 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 = 500\\
3x_1 &+ 2x_2 - e_2 = 6\\
2x_1 &+ 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 - e_3 = 10\\
2x_1 &+ 4x_2 + x_3 + 5x_4 - e_4 = 8\\
& x_i, e_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

En resumen, *si la restricción i-ésima de una PL es una restricción ≥, entonces se puede convertir en una restricción de igualdad al restar una variable de excedente e_i de la restricción i-ésima y añadir la restricción de signo $e_i \geq 0$.*

Si un PL tiene tanto restricciones ≤ como ≥ entonces se aplican simplemente los procedimientos que ya se explicaron para las restricciones individuales. Como ejemplo se convertirá el modelo de planificación financiera de corto plazo de la sección 3.7 en la forma estándar. Recuerde que el PL original era

$$\begin{aligned}
\max z = 20x_1 &+ 15x_2\\
\text{s.a} \quad x_1 &\leq 100\\
x_2 &\leq 100\\
50x_1 + 35x_2 &\leq 6\,000\\
20x_1 + 15x_2 &\geq 2\,000\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Para seguir con el procedimiento explicado antes, se transforma este PL en la forma estándar al sumarle las variables de holgura s_1, s_2 y s_3, respectivamente, a las primeras tres restricciones y restarle una variable de excedente e_4 a la cuarta restricción. Luego se añaden las restricciones de signo $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, $s_3 \geq 0$ y $e_4 \geq 0$. Lo anterior da el siguiente PL en la forma estándar:

$$
\begin{array}{llr}
\max z = 20x_1 + 15x_2 & & \\
\text{s.a} \quad x_1 + \qquad + s_1 & & = 100 \\
\qquad x_2 \quad + s_2 & & = 100 \\
50x_1 + 35x_2 \qquad + s_3 & & = 6\,000 \\
20x_1 + 15x_2 \qquad - e_4 & & = 2\,000 \\
x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2); \quad s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad e_4 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Naturalmente, se podía haber llamado e_1 a la variable de excedente para la cuarta limitación (porque es la primera variable de excedente). Se prefirió llamarla e_4 y no e_1 para indicar que e_4 es la variable de excedente para la cuarta limitación.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Convierta el problema de Giapetto (ejemplo 1 del capítulo 3) en la forma estándar.

2 Convierta el problema de Dorian (ejemplo 2 del capítulo 3) en la forma estándar.

3 Convierta el PL siguiente en la forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 3x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad x_1 &\geq 3 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
2x_1 - x_2 &= 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

4.2 Preliminares del algoritmo simplex

Suponga que se ha convertido un PL con m restricciones en la forma estándar. Si se supone que la forma estándar contiene n variables (denominadas por conveniencia $x_1, x_2, \ldots, x_n$), la forma estándar para tal PL es

$$
\begin{aligned}
&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&(\text{o min}) \\
&\text{s.a.} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad\qquad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Si se define

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

y

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

las restricciones para (7) se podrían escribir como el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Antes de seguir adelante con la explicación del algoritmo simplex es necesario definir el concepto de solución básica para un sistema lineal.

Variables básicas y no básicas

Considere un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m ecuaciones lineales y n variables (suponga $n \geq m$).

DEFINICIÓN ■ Una solución básica para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene haciendo $n - m$ variables iguales a cero, y luego se determinan los valores de las m variables restantes. Así se asume que al hacer las $n - m$ variables iguales a cero se llega a valores únicos para las m variables restantes, o que, en forma equivalente, las columnas para las m variables restantes son linealmente independientes. ■

Con el objeto de hallar una solución básica para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, primero se escoge un conjunto de $n - m$ variables (las **variables no básicas,** VNB) y se iguala cada una de las variables a cero. Luego se encuentran los valores de las $n - (n - m) = m$ variables restantes (las variables básicas, VB) que satisfacen a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Es evidente que las elecciones distintas de variables no básicas ocasionan diferentes soluciones básicas. Con el fin de ilustrarlo se determinan enseguida todas las soluciones básicas del sistema siguiente de dos ecuaciones y tres variables:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{8}$$

Se empieza por escoger un conjunto de $3 - 2 = 1$ (3 variables, 2 ecuaciones) variable no básica. Por ejemplo, si VNB $= \{x_3\}$, entonces, BV $= \{x_1, x_2\}$. Los valores de las variables básicas se obtienen haciendo $x_3 = 0$ y resolviendo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ -x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Se encuentra que $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Por lo tanto, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ es una solución básica para (8). No obstante, si se escoge VNB $= \{x_1\}$ y VB $= \{x_2, x_3\}$, se llega a la solución básica $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$. Si se prefiere VNB $= \{x_2\}$, se tiene la solución básica $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$. El estudiante debe verificar estos resultados.

Algunos conjuntos de m variables no originan una solución básica. Por ejemplo, considérese el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Si se escoge VNB $= \{x_3\}$ y VB $= \{x_1, x_2\}$, la solución básica correspondiente se obtendría al resolver

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Como este sistema no tiene solución, no hay solución básica que corresponda a VB = $\{x_1, x_2\}$.

Soluciones factibles

Un cierto subconjunto de las soluciones básicas para las restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de un PL tiene una función importante en la teoría de la programación lineal.

DEFINICIÓN ■ Cualquier solución básica de (7) en la cual todas las variables son no negativas es una **solución factible básica** (o **sfb**). ■

Por lo tanto, para un PL con las restricciones dadas en (8), las soluciones básicas $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$ y $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$ son soluciones básicas *factibles*, pero la solución básica $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = -1$ no es una solución básica factible (porque $x_3 < 0$).

En lo que resta de la sección se supone que todas los PL están en la forma estándar. Recuérdese que en la sección 3.2 se estableció que la región factible para cualquier PL es un conjunto convexo. Sea S la región factible para un PL en la forma estándar. Recuerde que un punto P es un punto extremo de S si para todos los segmentos de recta que contienen a P y están contenidos por completo en S, P es un punto terminal. Esto da como resultado que los puntos extremos de la región factible de un PL y las soluciones factibles básicas de un PL sean en realidad lo mismo. De manera más formal,

TEOREMA 1

Un punto en la región factible de un PL es un punto extremo si y sólo si es una solución factible básica para una PL.

Véase en Luenberger (1984) una demostración del teorema 1.

Para ilustrar la correspondencia entre puntos extremos y soluciones factibles básicas señaladas en el teorema 1, veamos el ejemplo de Leather Limited de la sección 4.1. Recuérdese que el PL era

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 40 && \text{(LP 1)} \\ 2x_1 + x_2 &\le 60 && \text{(1)} \\ x_1, x_2 &\ge 0 && \text{(2)} \end{aligned}$$

Tras agregar las variables de holgura s_1 y s_2, respectivamente, a (1) y (2), se obtiene la PL 1 en la forma estándar:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + s_1 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 60 \qquad \text{(LP 1')} \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

La región factible para el problema de Leather Limited se grafica en la figura 1. Se cumplen las dos desigualdades: (1) las satisfacen todos los puntos abajo de la recta $AB(x_1 + x_2 = 40)$ o en ella y (2) todos los puntos en la recta $CD(2x_1 + x_2 = 60)$. Por consiguiente, la región factible para la PL 1 es la zona sombreada limitada por la figura $BECF$. Los puntos extremos de la región factible son $B = (0, 40)$, $C = (30, 0)$, $E = (20, 20)$ y $F = (0, 0)$.

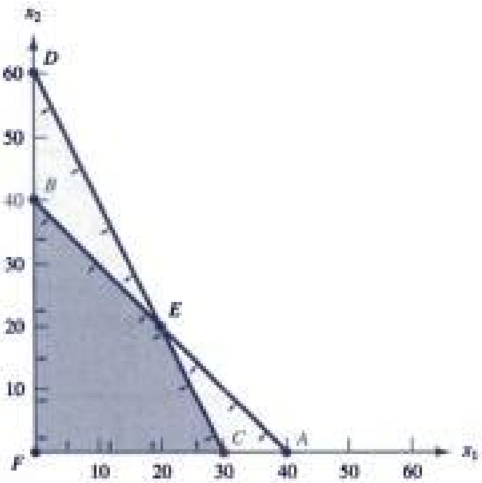


FIGURA 1
Región factible para Leather Limited (LL)

La correspondencia entre las soluciones factibles básicas para PL 1′ y los puntos extremos de la región factible para PL 1 se indican en la tabla 1. Este ejemplo debe poner en claro que las soluciones factibles básicas para la forma estándar de un PL corresponden de modo natural a los puntos extremos del PL.

En el contexto del ejemplo de Leather Limited, es fácil demostrar por qué cualquier sfb es un punto extremo. ¡Lo contrario es más difícil! Se mostrará a continuación que para el problema de LL, cualquier sfb es un punto extremo. Cualquier punto en la región factible para LL se podría especificar como un vector columna de cuatro dimensiones con los cuatro elementos del vector que denotan x_1, x_2, s_1, s_2, respectivamente. Considere la sfb B con VB $= \{x_2, s_2\}$. Si B no es un punto extremo, entonces hay dos puntos factibles distintos v_1, v_2 y números no negativos σ_1 y σ_2 que satisfacen $0 < \sigma_i < 1$ y $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ tales que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \sigma_1 v_1 + \sigma_2 v_2$$

Es evidente que tanto v_1 como v_2 deben tener $x_1 = s_2 = 0$. Pero como tanto v_1 como v_2 son factibles, los valores de x_2 y s_2 para v_1 y v_2 se pueden determinar al resolver $x_2 = 40$ y $x_2 + s_2 = 60$. Estas ecuaciones tienen una solución única (porque las columnas que corresponden a las variables básicas x_2 y s_2 son linealmente independientes). Esto demuestra que $v_1 = v_2$, por lo que B es ciertamente un punto extremo.

TABLA 1
Correspondencia entre soluciones factibles básicas y vértices para Leather Limited

Variables básicas	Variables no básicas	Soluciones factibles básicas	Corresponde a vértice (punto extremo)
x_1, x_2	s_1, s_2	$s_1 = s_2 = 0, x_1 = x_2 = 20$	E
x_1, s_1	x_2, s_2	$x_2 = s_2 = 0, x_1 = 30, s_1 = 10$	C
x_1, s_2	x_2, s_1	$x_2 = s_1 = 0, x_1 = 40, s_2 = -20$	No es sfb porque $s_2 < 0$
x_2, s_1	x_1, s_2	$x_1 = s_2 = 0, s_1 = -20, x_2 = 60$	No es sfb porque $s_1 < 0$
x_2, s_2	x_1, s_1	$x_1 = s_1 = 0, x_2 = 40, s_2 = 20$	B
s_1, s_2	x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 60$	F

Se observa que más de un conjunto de variables básicas podrían corresponder a un punto extremo dado. Si éste es el caso, entonces se dice que la PL es **degenerada**. Un estudio del efecto de la degeneración en el algoritmo simplex se encuentra en la sección 4.11.

Pronto se verá que si un PL tiene una solución óptima, entonces tiene una sfb que es óptima. Lo anterior es importante porque cualquier PL tiene sólo una cantidad finita de sfb. Por lo tanto es posible encontrar la solución óptima para un PL mediante la *búsqueda de sólo una cantidad finita de puntos*. Y puesto que la región factible para cualquier PL contiene una cantidad infinita de puntos, ¡esto es de gran ayuda!

Antes de explicar por qué cualquier PL que tiene una solución óptima tiene una sfb, es necesario definir el concepto de **dirección de no acotamiento**.

4.3 Dirección de no acotamiento

Considere un PL en la forma estándar cuya región factible es S y tiene las restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Si se supone que este PL tiene n variables, $\mathbf{0}$ representa un vector columna n-dimensional constituido por ceros. Un vector no cero $\mathbf{d}$ está en una **dirección de no acotamiento** si para toda $\mathbf{x} \in S$ y cualquier $c \geq 0$, $x + c\mathbf{d} \in S$. En pocas palabras, si uno está en la región factible de la PL, entonces uno se puede desplazar tan lejos como quiera en la dirección $\mathbf{d}$ y permanecer dentro de la región factible. La región factible para el ejemplo de Dorian Auto (ejemplo 2 del capítulo 3) se ilustra en la figura 2. En la forma estándar, el ejemplo de Dorian es

$$\begin{aligned} \min z &= 50x_1 + 100x_2 \\ 7x_1 + \;\; 2x_2 - e_1 &= 28 \\ 2x_1 + 12x_2 - e_2 &= 24 \\ x_1, x_2, e_1, e_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si se observa la figura 2, es evidente que si se empieza en cualquier punto factible y el desplazamiento es hacia arriba y a la derecha en un ángulo de 45°, siempre se permanecerá en la región factible. Esto quiere decir que

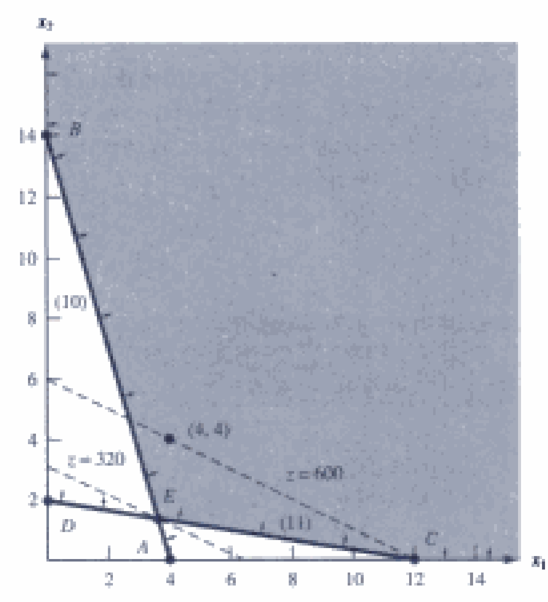


FIGURA 2
Solución gráfica del problema de Dorian

$$d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$

es una dirección de no acotamiento para este PL. Es fácil demostrar (véase problema 6) que **d** es una dirección de no acotamiento si y sólo si $A\mathbf{d} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$.

El teorema de representación siguiente [véase una demostración en Nash y Sofer (1996)] es la reflexión clave para demostrar por qué cualquier PL con una solución óptima tiene una sfb óptima.

TEOREMA 2

Considere un PL en la forma estándar, que tiene sfb $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$. Cualquier punto x en la región factible del PL se podría escribir en la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$$

donde **d** es **0** o una dirección de ilimitabilidad y $\sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$.

Si la región factible del PL es acotada, entonces $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, y se podría escribir $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$, donde la σ_i son ponderaciones no negativos cuya suma es 1. En este caso se observa que cualquier **x** factible se podría escribir como una **combinación convexa** de las sfb de la PL. Enseguida se ilustra el teorema 2 mediante dos ejemplos.

Refiérase al ejemplo de Leather Limited. La región factible es acotada. Para ilustrar el teorema 2, se puede escribir el punto $G = (20, 10)$ (¡G no es una sfb!) en la figura 3 como una combinación convexa de las sfb del PL. Obsérvese en la figura 3 que el punto G también se podría escribir como $\frac{1}{6}F + \frac{5}{6}H$ [aquí $H = (24, 12)$]. Luego observe que el punto H se podría escribir como $0.6E + 0.4C$. Si se combinan estas dos relaciones, el punto G se podría escribir como $\frac{1}{6}F + \frac{5}{6}(0.6E + 0.4C) = \frac{1}{6}F + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}C$. De esta manera se expresa el punto G como una combinación convexa de los puntos extremos de la PL.

Para ilustrar el teorema 2 con un PL no acotado, considérese el ejemplo 2 del capítulo 3 (el ejemplo de Dorian; véase figura 4), y trate de expresar el punto $F = (14, 4)$ en la representación dada en el teorema 2. Recuerde que en la forma estándar, las restricciones para el ejemplo de Dorian están dadas por

$$7x_1 + 2x_2 - e_1 = 28$$
$$2x_1 + 12x_2 - e_2 = 24$$

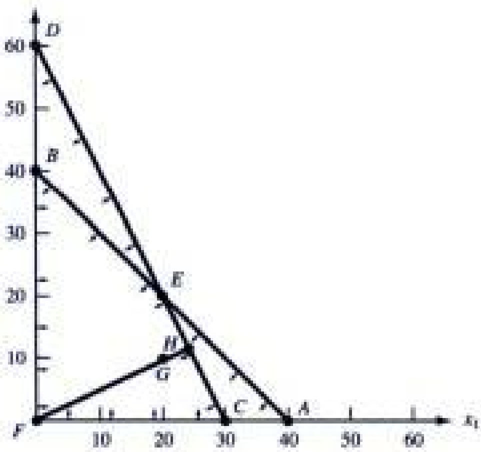


FIGURA 3
Representación de (20, 10) como una combinación convexa de sfb

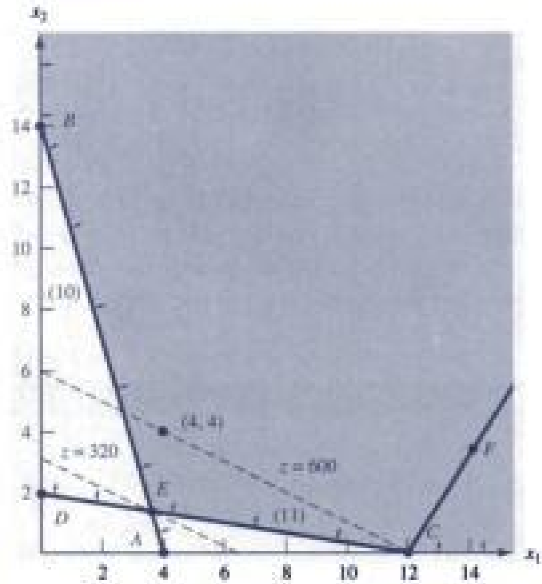


FIGURA 4
Expresión de F = (14, 4) usando el teorema 2

Si se sitúa uno en la figura 4, se observa que para desplazarse desde la sfb C hasta el punto F, es necesario subir y moverse hacia la derecha a lo largo de la recta cuya pendiente es $\frac{4-0}{14-12} = 2$. Esta recta corresponde a la dirección del no acotamiento

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 22 \\ 52 \end{bmatrix}$$

Si

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 56 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 78 \\ 52 \end{bmatrix}$$

se podría escribir $\mathbf{x} = \mathbf{d} + \mathbf{b}_1$, lo cual es la representación deseada.

4.4 ¿Por qué un PL tiene una sfb óptima?

Considere un PL con función objetivo max $\mathbf{cx}$ y restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Suponga que este PL tiene una solución óptima. A continuación se esboza una demostración del hecho de que el PL tiene una sfb óptima

TEOREMA 3

Si un PL tiene una solución óptima, entonces tiene una sfb óptima.

Demostración Sea $\mathbf{x}$ una solución óptima de este PL. Puesto que $\mathbf{x}$ es factible, el teorema 3 dice que se podría expresar $\mathbf{x} = \mathbf{d} + \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$, donde $\mathbf{d}$ es $\mathbf{0}$ o una dirección de no acotamiento y $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ son las sfb de la PL. Asimismo, $\Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$. Si $\mathbf{cd} > \mathbf{0}$, entonces, para cualquier $k > 0$, $k\mathbf{d} + \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$ es factible, y como k se vuelve más y más grande, el valor de la función objetivo tiende al infinito. Lo anterior contradice el hecho de que la PL tiene una solución óptima. Si $\mathbf{cd} > \mathbf{0}$, entonces el punto factible $\Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$ tiene un valor de función objetivo más grande que $\mathbf{x}$. Lo anterior contradice la optimalidad de $\mathbf{x}$. En pocas palabras, se ha demostrado que si $\mathbf{x}$ es óptima, entonces $\mathbf{cd} = 0$. Ahora el valor de la función objetivo para $\mathbf{x}$ está dado por

$$\mathbf{cx} = \mathbf{cd} + \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{cb}_i = \Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{cb}_i$$

Suponga que $\mathbf{b}_1$ es la sfb con el valor más grande de la función objetivo. Como $\Sigma_{i=1}^{i=k} \sigma_i = 1$ y $\sigma_i \geq 0$,

$$\mathbf{cb}_1 \geq \mathbf{cx}$$

Puesto que $\mathbf{x}$ es óptima, esto demuestra que $\mathbf{b}_1$ también es óptima, y la PL sí tiene una sfb óptima.

Soluciones factibles básicas adyacentes

Antes de describir el algoritmo simplex en términos generales, es necesario definir el concepto de una solución factible básica adyacente.

DEFINICIÓN ■ Para cualquier PL con m restricciones, se dice que dos soluciones factibles básicas son **adyacentes** si sus conjuntos de variables básicas tienen $m - 1$ variables básicas en común. ■

Por ejemplo, en la figura 3, dos soluciones factibles básicas serán adyacentes si tienen $2 - 1 = 1$ variable básica en común. Por lo tanto, la sfb correspondiente al punto E en la figura 3 es adyacente a la sfb que corresponde al punto C. El punto E no es adyacente a la sfb F. De manera intuitiva, son adyacentes dos soluciones factibles básicas si ambas quedan en el mismo borde del límite de la región factible.

Ahora se proporciona una descripción general de cómo el algoritmo simplex resuelve PL en un problema de maximización.

Paso 1 Se encuentra una sfb para el PL. A esta sfb se le llama solución factible básica inicial. En general, la sfb más reciente se denomina sfb actual, por lo que al principio del problema la sfb inicial es la sfb actual.

Paso 2 Se determina si la sfb actual es una solución óptima para el PL. Si no es así, entonces se determina una sfb adyacente que tenga un valor de z mayor.

Paso 3 Se retorna al paso 2, y se usa la sfb nueva como sfb actual.

Si un PL en la forma estándar tiene m restricciones y n variables, entonces podría haber una solución básica para cada elección de variables no básicas. Si se tienen n variables, se puede seleccionar un conjunto de $n - m$ variables no básicas (o en forma equivalente, m variables básicas) en

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n - m)!m!}$$

maneras diferentes. Por lo tanto, un PL puede tener cuando mucho

$$\binom{n}{m}$$

soluciones básicas. Como algunas soluciones básicas podrían no ser factibles, un PL puede tener cuando mucho

$$\binom{n}{m}$$

soluciones factibles básicas. Si se procediera desde la sfb actual hasta una sfb mejor (sin repetir una sfb), entonces se encontraría con toda seguridad la sfb óptima después de examinar cuando mucho

$$\binom{n}{m}$$

soluciones factibles básicas. Esto significa (suponiendo que ninguna sfb se repite) que el algoritmo simplex encontrará la sfb óptima después de un número finito de cálculos. Regresaremos a este análisis en la sección 4.11.

Se podrían enumerar en principio todas las soluciones factibles básicas para un PL y encontrar la sfb con el valor de z más grande. El problema con este procedimiento es que hasta la PL pequeños tienen una cantidad muy grande de soluciones factibles básicas. Por ejemplo, un PL en la forma estándar que tiene 20 variables y 10 restricciones podría tener (si cada solución básica fuera factible) hasta

$$\binom{20}{10} = 184\,756$$

soluciones factibles básicas. Por fortuna, la vasta experiencia con el algoritmo simplex indica que cuando se aplica este algoritmo a un PL de n variables y m restricciones en la forma estándar una solución óptima se encuentra por lo regular después de examinar menos de $3m$ soluciones factibles básicas. Por lo tanto, para un PL de 20 variables, 10 restricciones en la forma estándar, el algoritmo simplex determinará normalmente la solución óptima después de examinar menos de $3(10) = 30$ soluciones factibles básicas. En comparación con la posibilidad de examinar 184 756 soluciones básicas, ¡el simplex es muy efectivo![†]

Características geométricas de los PL tridimensionales

Considere el PL siguiente

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

El conjunto de puntos que satisface una desigualdad lineal en tres (o cualquier número de) dimensiones es un **semiespacio**. Por ejemplo, el conjunto de puntos en tres dimensiones que satisface $2x_1 + x_2 \leq 8$ es un semiespacio. Por lo tanto, la región factible para este PL es la intersección de los cinco semiespacios siguientes: $2x_1 + x_2 \leq 8$, $x_3 \leq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. La intersección de los semiespacios se llama **poliedro**. La región factible para este PL es el prisma de la figura 5.

Una restricción (o restricción de signo) es activa u obligatoria para todos los puntos de cada una de las caras o facetas de la región factible. Por ejemplo, la restricción $2x_1 + x_2 \leq 8$ es activa para todos los puntos de la cara *ABCD*; $x_3 \geq 0$ es activa en la cara *ABF*; $x_3 \leq 10$ es activa en la cara *DEC*; $x_2 \geq 0$ es activa en la cara *ADEF*; $x_1 \geq 0$ es activa en la cara *CBFE*.

Evidentemente, los vértices (o puntos extremos) de la región factible del PL son *A, B, C, D, E* y *F*. En este caso, la correspondencia entre la sfb y los vértices es como se señala en la tabla 2.

Para ilustrar el concepto de las soluciones factibles básicas adyacentes, observe que los vértices *A, E* y *B* son adyacentes al vértice *F*. Por consiguiente, si el algoritmo simplex empieza en *F*, entonces podemos estar seguros de que la siguiente sfb por ser considerada será *A, E* o *B*.

[†] Al resolver muchos PL con 50 variables y $m \leq 50$ restricciones, Chvátal (1983) encontró que el algoritmo simplex examinó un promedio de $2m$ soluciones factibles básicas antes de hallar una solución óptima para el PL.

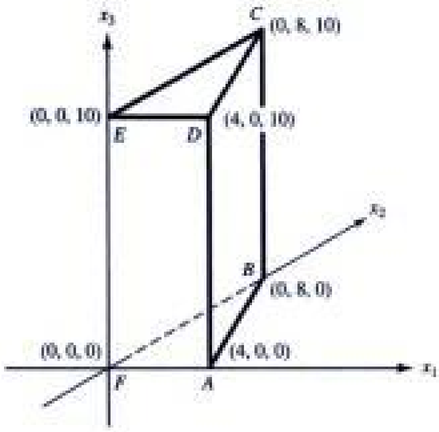


FIGURA 5
Región factible en tres dimensiones

TABLA 2
Correspondencia entre sfb y vértices

Variables básicas	Solución factible básica	Corresponde al punto extremo
x_1, x_3	$x_1 = 4, x_3 = 10, x_2 = s_1 = s_2 = 0$	D
s_1, s_2	$s_1 = 8, s_2 = 10, x_1 = x_2 = x_3 = 0$	F
s_1, x_3	$s_1 = 8, x_3 = 10, x_1 = x_2 = s_2 = 0$	E
x_2, x_3	$x_2 = 8, x_3 = 10, x_1 = s_1 = s_2 = 0$	C
x_2, s_2	$x_2 = 8, s_2 = 10, x_1 = x_3 = s_1 = 0$	B
x_1, s_2	$x_1 = 4, s_2 = 10, x_2 = x_3 = s_1 = 0$	A

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre cuál es la correspondencia entre las soluciones factibles básicas de la PL en forma estándar y los puntos extremos de la región factible para el problema de Giapetto (ejemplo 1 en el capítulo 3).

2 Demuestre cuál es la correspondencia entre las soluciones factibles básicas del PL en forma estándar y los puntos extremos de la región factible para el problema de Dorian (ejemplo 2 en el capítulo 3).

3 Widgetco elabora dos productos: 1 y 2. La cantidad de materia prima, mano de obra y el precio de venta se proporcionan en la tabla 3.

Hasta 350 unidades de materia prima se pueden comprar a 2 dólares por unidad, y hasta 400 horas de mano de obra se pueden conseguir a 1.5 dólares por hora. Para maximizar la utilidad, Widgetco debe resolver el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 2.5x_2 \\
\text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 350 \quad \text{(Materia prima)} \\
2x_1 + x_2 &\leq 400 \quad \text{(Mano de obra)} \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Aquí, x_i = número de unidades del producto i elaboradas. Demuestre la correspondencia entre puntos extremos y soluciones factibles básicas.

TABLA 3

	Producto 1	Producto 2
Materia prima	1 unidad	2 unidades
Mano de obra	2 h	1 h
Precio de venta	\$7	\$8

4 Represente el punto (10, 20) en la forma $\mathbf{cd} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$, para el problema Leather Limited.

5 Para el problema de Dorian, represente el punto (10, 40) en la forma $\mathbf{cd} + \sum_{i=1}^{i=k} \sigma_i \mathbf{b}_i$.

Grupo B

6 Demuestre que $\mathbf{d}$ es una dirección de no acotamiento si y sólo si $A\mathbf{d} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, para un PL en la forma estándar con restricciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

7 Recuerde que el ejemplo 5 del capítulo 3 es una PL no acotado. Encuentre una dirección de no acotamiento en la que uno se pueda desplazar y para la cual la función objetivo se vuelva arbitrariamente grande.

4.5 Algoritmo simplex

Enseguida se explica cómo se puede utilizar el algoritmo simplex para resolver el PL en el que el fin es maximizar la función objetivo. La solución a problemas de minimización se trata en la sección 4.4.

El algoritmo simplex procede como sigue:

Paso 1 Convertir la PL en la forma estándar (véase sección 4.1).

Paso 2 Obtener una sfb (si es posible) a partir de la forma estándar.

Paso 3 Determinar si la sfb actual es óptima.

Paso 4 Si la sfb actual no es óptima, entonces se determina cuál variable no básica se debe transformar en variable básica y cuál variable básica se debe transformar en variable no básica con el objeto de hallar una nueva sfb con un mejor valor de la función objetivo.

Paso 5 Aplicar OER para encontrar la nueva sfb con el mejor valor de la función objetivo. Regresar al paso 3.

Al ejecutar el algoritmo simplex, se escribe la función objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

en la forma

$$z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n = 0$$

Este formato se denomina **versión del renglón 0** de la función objetivo (o sólo renglón 0, para simplificar).

EJEMPLO 2 Dakota Furniture Company

La Dakota Furniture Company fabrica escritorios, mesas y sillas. Para la manufactura de cada tipo de mueble se requiere madera y dos tipos de mano de obra calificada: acabado y carpintería. La cantidad de recursos necesarios para elaborar cada tipo de muebles se proporciona en la tabla 4.

Se cuenta en la actualidad con 48 pies tablón de madera, 20 horas de acabado y 8 horas de carpintería. Un escritorio se vende en 60 dólares, una mesa, en 30 dólares y una silla en 20 dólares. Dakota opina que la demanda de escritorios y sillas es ilimitada, pero cuando mucho se pueden vender 5 mesas. Puesto que los recursos disponibles ya se compraron, Dakota quiere maximizar el ingreso total. Si se definen las variables de decisión como

x_1 = cantidad de escritorios fabricados

x_2 = cantidad de mesas fabricadas

x_3 = cantidad de sillas fabricadas

TABLA 4
Recursos necesarios para los muebles de Dakota

Recurso	Escritorio	Mesa	Silla
Madera (pie tablón)	8	6	1
Horas de acabado	4	2	1.5
Horas de carpintería	2	1.5	0.5

es fácil darse cuenta de que Dakota debe resolver la PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{s.a}\quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 && \text{(Restricción de la madera)} \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 && \text{(Restricción del acabado)} \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 && \text{(Restricción de la carpintería)} \\
& x_2 \le 5 && \text{(Restricción de la demanda de mesas)} \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Conversión de la PL en la forma estándar

Para empezar el algoritmo simplex, se transforman las restricciones de la PL en la forma estándar, que se estudió en la sección 4.1. Luego se convierte la función objetivo de la PL en el formato del renglón 0. Para poner las restricciones en la forma estándar se añaden simple y respectivamente las variables de holgura s_1, s_2, s_3 y s_4, a las cuatro restricciones. Las restricciones se designan renglón 1, renglón, 2, renglón 3 y renglón 4, y se agregan las restricciones de signo $s_i \ge 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Observe que el formato de renglón 0 para la función objetivo es

$$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$$

Al poner los renglones 1 a 4 junto con el renglón 0 y las restricciones de signo se obtienen las ecuaciones y las variables básicas que se proporcionan en la tabla 5. Un sistema de ecuaciones lineales (tal como la forma canónica 0 mostrada en la tabla 5) en el cual cada ecuación tiene una variable con un coeficiente de 1 en esa ecuación (y un coeficiente cero en todas las otras ecuaciones) se dice que está en la *forma canónica*. Pronto se verá que si el segundo miembro (el lado derecho) de cada restricción en forma canónica es no negativo, entonces se puede conseguir mediante inspección una solución factible básica.[†]

Se mencionó en la sección 4.2 que el algoritmo simplex empieza con una solución factible básica inicial y pretende encontrar otras mejores. Por lo tanto, después de obtener una forma canónica se busca una sfb inicial. Por inspección se observa que si hacemos $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, entonces es posible determinar los valores de s_1, s_2, s_3 y s_4 igualando s_i con el segundo miembro del renglón i.

$$\text{VB} = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \qquad \text{y} \qquad \text{VNB} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

TABLA 5
Forma canónica 0

Renglón		Variable básica
0	$z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 = 0$	$z = 0$
1	$8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48$	$s_1 = 48$
2	$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20$	$s_2 = 20$
3	$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = 8$	$s_3 = 8$
4	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

[†]Si no se obtiene en forma fácil una forma canónica con segundos miembros no negativos, entonces se pueden aplicar las técnicas explicadas en las secciones 4.12 y 4.13 con el fin de hallar una forma canónica y una solución factible básica.

La solución factible básica para este conjunto de variables básicas es $s_1 = 48$, $s_2 = 20$, $s_3 = 8$, $s_4 = 5$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Nótese que cada variable básica se podría relacionar con el renglón de la forma canónica en el cual la variable básica tiene un coeficiente de 1. Por lo tanto, para la forma canónica 0, se podría pensar que s_1 es la variable básica para el renglón 1, s_2 para el renglón 2, s_3 para el renglón 3 y s_4 para el renglón 4.

Para ejecutar el algoritmo simplex, se requiere también una variable básica (aunque no necesariamente no negativa) para el renglón 0. Como z aparece en el renglón 0 con un coeficiente de 1 y z no aparece en ningún otro renglón, se considera a z como su variable básica. Con esta convención, la solución factible básica para la forma canónica inicial tiene

$$\text{VB} = \{z, s_1, s_2, s_3, s_4\} \qquad \text{y} \qquad \text{VNB} = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Para esta solución básica factible, $z = 0$, $s_1 = 48$, $s_2 = 20$, $s_3 = 8$, $s_4 = 5$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Como este ejemplo lo señala, se puede utilizar una variable de holgura como variable básica para una ecuación si el segundo miembro de la restricción es no negativo.

¿Es óptima la solución factible básica actual?

Tras obtener una solución factible básica es necesario determinar si es óptima. Si la sfb no es óptima, entonces se intenta encontrar una sfb adyacente a la sfb inicial con un valor z más grande. Para hacerlo se trata de determinar si hay un modo en que z se incremente al incrementar alguna variable no básica a partir de su valor actual de cero, pero conservando todas las otras variables no básicas en sus valores actuales de cero. Si se determina z mediante el reacomodo del renglón 0, entonces se tiene

$$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \tag{9}$$

Por lo que se refiere a cada variable no básica, se puede utilizar (9) para determinar si al incrementar una variable no básica (y conservar todas las otras variables no básicas iguales a cero) se incrementará z. Por ejemplo, suponga que incrementamos x_1 en 1 (y se mantienen las otras variables no básicas x_2 y x_3 iguales a cero). Entonces, (9) señala que z se incrementará en 60. De manera similar, si se decide incrementar x_2 en 1 (y se mantienen x_1 y x_3 iguales a cero), entonces (9) indica que z se incrementará en 30. Por último, si se incrementa x_3 en 1 (y se mantienen x_1 y x_2 iguales a cero), entonces (9) nos dice que z se incrementará en 20. Por lo tanto, al incrementar cualquiera de las variables no básicas aumenta z. Como el incremento de una unidad en x_1 ocasiona el mayor incremento en z, entonces se decide incrementar x_1 a partir de su valor actual de cero. Si x_1 se incrementará a partir de su valor actual de cero, entonces se tendrá que convertir en una variable básica. Por esta razón, x_1 se denomina variable entrante. Obsérvese que x_1 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0.

Determinación de la variable entrante

Se escoge a la variable entrante (en un problema de maximización) como la variable no básica con el coeficiente más negativo en el renglón 0 (los empates se podrían deshacer de manera arbitraria). Como cada incremento de x_1 de una unidad hace que z aumente en 60, nos gustaría hacer a x_1 tan grande como sea posible. ¿Qué es lo que limita la magnitud de x_1? Note que cuando x_1 aumenta, cambian los valores de las variables básicas actuales (s_1, s_2, s_3 y s_4). Esto significa que el incremento de x_1 podría originar que una variable básica se vuelva negativa. Con esto en mente vemos cómo al incrementar x_1 (pero conservando $x_2 = x_3 = 0$) cambian los valores del conjunto actual de variables básicas. A partir del renglón 1 se ve que $s_1 = 48 - 8x_1$ (recuerde que $x_2 = x_3 = 0$). Puesto que se debe cumplir la restricción de signo $s_1 \geq 0$ sólo se puede incrementar x_1 con la condición de que $s_1 \geq 0$, es decir, $48 - 8x_1 \geq 0$, o bien, $x_1 \leq \frac{48}{8} = 6$. A partir del renglón 2, $s_2 = 20 - 4x_1$. Sólo se puede incrementar x_1 con la condición de que $s_2 \geq 0$, así que x_1 debe satisfacer $20 - 4x_1 \geq 0$, o bien, $x_1 \leq \frac{20}{4} = 5$. A partir del renglón 3, $s_3 = 8 - 2x_1$ así que $x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$. Se observa de igual manera que a partir del renglón 4, $s_4 = 5$. Por consiguiente, cualquiera que sea el valor de x_1, s_4 será no negativa. En resumen,

$$s_1 \geq 0 \quad \text{para} \quad x_1 \leq \frac{48}{8} = 6$$

$$s_2 \geq 0 \quad \text{para} \quad x_1 \leq \frac{20}{4} = 5$$

$$s_3 \geq 0 \quad \text{para} \quad x_1 \leq \frac{8}{2} = 4$$

$$s_4 \geq 0 \quad \text{para todos los valores de } x_1$$

Lo anterior quiere decir que, para mantener todas las variables básicas no negativas, el valor más grande que puede tener x_1 es $\min\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\} = 4$. Si $x_1 > 4$, entonces s_3 se volverá negativa, y ya no se tendrá una solución factible básica. Obsérvese que cada renglón en el cual la variable entrante tenía un coeficiente positivo restringía la magnitud de dicha variable entrante. Asimismo, para cualquier renglón en el cual la variable entrante tenía un coeficiente positivo, la variable básica del renglón se volvía negativa cuando se sobrepasaba la variable entrante

$$\frac{\text{Lado derecho del renglón}}{\text{Coeficiente de la variable entrante en el renglón}} \tag{10}$$

Si la variable entrante tiene un coeficiente no positivo en un renglón (tal como x_1 en el renglón 4), la variable básica del renglón seguirá siendo positiva para todos los valores de la variable entrante. Mediante (10) se puede calcular con rapidez qué tan grande puede ser x_1 antes de que una variable básica se vuelva negativa.

Límite del renglón 1 en $x_1 = \frac{48}{8} = 6$

Límite del renglón 2 en $x_1 = \frac{20}{4} = 5$

Límite del renglón 3 en $x_1 = \frac{8}{2} = 4$

Límite del renglón 4 en x_1 = ningún límite (porque el coeficiente de x_1 en el renglón 4 no es positivo)

Ya se puede formular la regla siguiente para determinar qué tan grande podemos hacer una variable entrante.

Prueba del cociente

Cuando introduzca una variable en la base, calcule el cociente (10) por cada restricción en la cual la variable entrante tiene un coeficiente positivo. La restricción con el cociente más pequeño se denomina **ganador de la prueba del cociente**. El cociente más pequeño es el valor más grande de la variable entrante que conservará todas las variables básicas actuales no negativas. En el ejemplo, el renglón 3 fue el ganador de la prueba del cociente para introducir x_1 a la base.

Determinación de una solución factible básica nueva: pivoteo en la variable entrante

Si volvemos al ejemplo, sabemos que el valor más grande que puede tener x_1 es 4. En el caso de que $x_1 = 4$, ésta se debe volver entonces una variable básica. Al observar los renglones 1 a 4, se encuentra que si x_1 se vuelve una variable básica en el renglón 1, entonces, $x_1 = \frac{48}{8} = 6$; en el renglón 2, $x_1 = \frac{20}{4} = 5$; en el renglón 3, $x_1 = \frac{8}{2} = 4$. Asimismo, como x_1 no está en el renglón 4, x_1 no puede llegar a ser variable básica en el renglón 4. Por lo tanto, si se desea que $x_1 = 4$, se tiene que convertir en variable básica en el renglón 3. El hecho de que el renglón 3 fue el ganador de la prueba del cociente ilustra la regla siguiente.

¿En cuál renglón la variable entrante se vuelve básica?

Siempre transforme a la variable entrante en una variable básica en un renglón que gane la prueba del cociente (los empates se pueden romper de manera arbitraria).

Para hacer x_1 una variable básica en el renglón 3 se aplican las operaciones elementales con los renglones para que x_1 tenga un coeficiente 1 en el renglón 3 y un coeficiente cero en todos los otros renglones. Este procedimiento se llama **pivoteo** en el renglón 3, y el renglón 3 es el **renglón de pivoteo**. El resultado final es que x_1 reemplaza a s_3 como variable básica para el renglón 3. El término del renglón pivote en el que se encuentra la variable básica de entrada recibe el nombre de **término pivote**. Se procede como se hizo cuando se estudió el método de Gauss-Jordan en el capítulo 2; se convierte a x_1 en una variable básica en el renglón 3 efectuando ciertas OER.

OER 1 Se genera un coeficiente 1 para x_1 en el renglón 3 cuando se multiplica el renglón 3 por $\frac{1}{2}$. El renglón resultante (marcado con una prima para indicar que es la primera iteración) es

$$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4 \qquad \textbf{(renglón 3')}$$

OER 2 Para obtener un coeficiente cero para x_1 en el renglón 0 se reemplaza el renglón 0 con 60(renglón 3´) + renglón 0.

$$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240 \qquad \textbf{(renglón 0')}$$

OER 3 Para crear un coeficiente cero para x_1 en el renglón 1 se reemplaza el renglón 1 por −8(renglón 3´) + renglón 1.

$$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16 \qquad \textbf{(renglón 1')}$$

OER 4 Para obtener un coeficiente cero para x_1 en el renglón 2 se reemplaza el renglón 2 con −4(renglón 3´) + renglón 2.

$$-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4 \qquad \textbf{(renglón 2')}$$

Como x_1 no se encuentra en el renglón 4, no es necesario ejecutar un OER para eliminar x_1 del renglón 4. Por lo tanto, ya se podría escribir el "nuevo" renglón 4 (se le llama renglón 4´ para que haya consistencia con la otra notación) como

$$x_2 + s_4 = 5 \qquad \textbf{(renglón 4')}$$

Al poner juntos los renglones 0′a 4′ se obtiene la forma canónica que se ilustra en la tabla 6.

Al buscar una variable básica en cada renglón de la forma canónica actual se tiene que

$$\text{VB} = \{z, s_1, s_2, \mathbf{x}_1, s_4\} \qquad \text{y} \qquad \text{VNB} = \{\mathbf{s}_3, x_2, x_3\}$$

Por tanto, la forma canónica 1 genera la solución factible básica $z = 240$, $s_1 = 16$, $s_2 = 4$, $x_1 = 4$, $s_4 = 5$, $x_2 = x_3 = s_3 = 0$. Se podría haber pronosticado que el valor de z en la forma canónica 1 sería de 240 con base en el hecho de que por cada unidad que crece x_1 se incrementa z en 60. Como x_1 creció 4 unidades (desde $x_1 = 0$ hasta $x_1 = 4$), se esperaría que

$$\begin{aligned}\text{Valor de } z \text{ en la forma canónica } 1 &= \text{valor inicial de } + 4(60)\\ &= 0 + 240 = 240\end{aligned}$$

TABLA 6
Forma Crónica 1

Renglón		Variable Básica
Renglón 0′	$z + 15x_2 - 5x_3 + 30s_3 = 240$	$z = 240$
Renglón 1′	$- x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
Renglón 2′	$- x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4$	$s_2 = 4$
Renglón 3′	$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4$	$x_1 = 4$
Renglón 4′	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

Al obtener la forma canónica 1 a partir de la forma canónica inicial, se ha pasado desde una sfb a una sfb mejor (un valor z mayor). Observe que la sfb inicial y la sfb mejorada son adyacentes. Esto se infiere porque las dos soluciones factibles básicas tienen $4 - 1 = 3$ variables básicas (s_1, s_2, y s_4) en común (sin incluir a z, la cual es una variable básica en cada forma canónica). Por consiguiente, se observa que al pasar de una forma canónica a la siguiente, se ha procedido desde una sfb a un sfb adyacente mejor. El procedimiento para pasar desde una sfb a una sfb adyacente mejor se llama **iteración** (o algunas veces, *pivoteo*) del algoritmo simplex.

Ahora se intentará hallar una sfb que tenga un valor z más grande. Se empieza por examinar la forma canónica 1 (tabla 6) para determinar si es posible incrementar z aumentando el valor de alguna variable no básica (pero conservando las otras variables no básicas iguales a cero). Al reacomodar el renglón 0′ para encontrar el valor de z se tiene

$$z = 240 - 15x_2 + 5x_3 - 30s_3 \qquad \textbf{(11)}$$

En (11) se observa que al incrementar la variable no básica x_2 en 1 (pero conservando $x_3 = s_3 = 0$) se reduce z en 15. ¡Pero eso no es lo que queremos! Al incrementar la variable no básica s_3 en 1 (pero conservando $x_3 = s_3 = 0$), z disminuye en 30. Tampoco es lo que queremos. Por otro lado, al incrementar x_3 en 1 (conservando $x_2 = s_3 = 0$) se incrementa z en 5. Por lo tanto, decidimos que x_3 entre a la base. Recuerde que la regla para determinar la variable entrante es seleccionar la variable con el coeficiente más negativo en el renglón 0 actual. Como x_3 es la única variable con un coeficiente negativo en el renglón 0′, entonces debe entrar a la base.

Al hacer crecer x_3 en 1 se incrementa z en 5, así que ésta es la ventaja para hacer x_3 tan grande como sea posible. Se puede incrementar x_3 con la condición de que las variables básicas actuales (s_1, s_2, x_1, y s_4) se conserven no negativas. Para determinar qué tan grande puede ser x_3, tenemos que conocer los valores de las variables básicas en términos de x_3 (pero conservando $x_2 = s_3 = 0$). Se obtiene entonces

Del renglón 1′: $s_1 = 16 + x_3$
Del renglón 2′: $s_2 = 4 - 0.5x_3$
Del renglón 3′: $x_1 = 4 - 0.25x_3$
Del renglón 4′: $s_4 = 5$

Estas ecuaciones indican que $s_1 \geq 0$ y $s_4 \geq 0$ se conservarán para todos los valores de x_3. A partir del renglón 2′ se tiene que $s_2 \geq 0$ se cumple si $4 - 0.5x_3 \geq 0$, o $x_3 \leq \frac{4}{0.5} = 8$. A partir del renglón 3′ $x_1 \geq 0$ se cumple si $4 - 0.25x_3 \geq 0$, o $x_3 \leq \frac{4}{0.25} = 16$. Esto demuestra que lo más grande que puede ser x_3 es min $\{\frac{4}{0.5}, \frac{4}{0.25}\} = 8$. Este hecho se pudo descubrir también mediante (10) y la prueba del cociente como se señala:

Renglón 1′: sin cociente (x_3 tiene coeficiente negativo en el renglón 1)

Renglón 2′: $\dfrac{4}{0.5} = 8$

Renglón 3′: $\dfrac{4}{0.25} = 16$

Renglón 4′: sin cociente (x_3 tiene un coeficiente no positivo en el renglón 4)

Por consiguiente, el cociente más pequeño se presenta en el renglón 2′, por lo que este renglón gana la prueba del cociente. Esto quiere decir que se deben efectuar OER para hacer que x_3 sea una variable básica en el renglón 2′.

OER 1 Se genera un coeficiente 1 para x_3 en el renglón 2′ al reemplazar el renglón 2′ por 2(renglón 2′):

$$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8 \qquad \textbf{(renglón 2″)}$$

OER 2 Se genera un coeficiente 0 para x_3 en el renglón 0′ al reemplazar el renglón 0′ por 5(renglón 2)″ + renglón 0′:

$$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280 \qquad \textbf{(renglón 0″)}$$

TABLA 7
Forma canónica 2

Renglón		Variable Básica
0″	$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
1″	$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
2″	$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
3″	$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
4″	$x_2 + s_4 = 5$	$s_4 = 5$

OER 3 Se encuentra un coeficiente 0 para x_3 en el renglón 1′ al reemplazar el renglón 1′ por renglón 2″ + renglón 1′:

$$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24 \qquad \textbf{(renglón 1″)}$$

OER 4 Se determina un coeficiente 0 para x_3 en el renglón 3′ al reemplazar el renglón 3′ por $-\frac{1}{4}$(renglón 2″) + 3′:

$$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2 \qquad \textbf{(renglón 3″)}$$

Puesto que x_3 ya tiene un coeficiente cero en el renglón 4′, se puede escribir

$$x_2 + s_4 = 5 \qquad \textbf{(renglón 4″)}$$

Al combinar los renglones 0″ a 4″ se obtiene la forma canónica mostrada en la tabla 7.

Al buscar una variable básica en cada renglón de la forma canónica 2 se encuentra

$$\text{VB} = \{z, s_1, x_3, x_1, s_4\} \qquad \text{y} \qquad \text{VNB} = \{s_2, s_3, x_2\}$$

La forma canónica 2 genera la sfb siguiente: $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $s_4 = 5$, $s_2 = s_3 = x_2 = 0$. Se podría haber pronosticado que la forma canónica tendría $z = 280$ con base en el hecho de que cada unidad de la variable entrante x_3 incrementó a z en 5, y se ha incrementado x_3 en 8 unidades. Entonces,

$$\begin{aligned}\text{Valor } z \text{ de la forma canónica 2} &= \text{valor } z \text{ de la forma canónica 1} + 8(5)\\ &= 240 + 40 = 280\end{aligned}$$

Como las sfb para las formas canónicas 1 y 2 tienen (sin incluir a z) $4 - 1 = 3$ variables básicas en común (s_1, s_4, x_1), son soluciones factibles básicas adyacentes.

Como ya se terminó la segunda iteración (o pivoteo) del algoritmo simplex, se examina la forma canónica 2 para ver si es posible encontrar una sfb mejor. Si se reacomoda el renglón 0″ y se despeja z se obtiene

$$z = 280 - 5x_2 - 10s_2 - 10s_3 \qquad \textbf{(12)}$$

A partir de (12) se observa que al incrementar x_2 en 1 (pero conservando $s_2 = s_3 = 0$) disminuye z en 5; al incrementar s_2 en 1 (pero conservando $s_3 = x_2 = 0$) disminuye z en 10; al incrementar s_3 en 1 (pero conservando $x_2 = s_2 = 0$) disminuye z en 10. Por consiguiente, al aumentar cualquier variable no básica, se propicia que z disminuya. Lo anterior podría hacernos pensar que la sfb actual a partir de la forma canónica 2 es una solución óptima. ¡Y es lo correcto! Para ver por qué, examinemos (12). Ya sabemos que cualquier solución factible para el problema de los muebles de Dakota debe tener $x_2 \geq 0$, $s_2 \geq 0$, and $s_3 \geq 0$, y $-5x_2 \leq 0$, $-10s_2 \leq 0$, y $-10s_3 \leq 0$. Cuando se combinan estas desigualdades con (12) es evidente que cualquier solución factible debe tener $z = 280$ + términos que son ≤ 0 y $z \leq 280$. Nuestra sfb actual tiene $z = 280$, así que debe ser óptima.

El razonamiento que se usó para demostrar que la forma canónica 2 es óptima, giraba alrededor del hecho de que cada una de sus variables no básicas tenía un coeficiente no negativo en el renglón 0". Esto quiere decir que podemos determinar si una sfb de una forma canónica es óptima mediante la aplicación de la regla simple siguiente:

¿Es una forma canónica óptima (problema de maximización)?

Una forma canónica es óptima (en el caso de un problema de maximización) si cada variable no básica tiene un coeficiente no negativo en el renglón 0 de la forma canónica.

OBSERVACIONES

1 El coeficiente de una variable de decisión en el renglón 0 se conoce a menudo como el **costo reducido** de la variable. Por lo tanto, en la forma canónica óptima, los costos reducidos para x_1 y x_3 son 0, y el costo reducido para x_2 es 5. El costo reducido de una variable no básica es la cantidad en que disminuirá el valor de z si se incrementa el valor de la variable no básica en 1 (pero todas las otras variables no básicas siguen siendo iguales a cero). Por ejemplo, el costo reducido para la variable "mesas" (x_2) en la forma canónica 2 es 5. A partir de (12) se observa que al incrementar x_2 en 1, z disminuye en 5. Nótese que como todas las variables básicas (excepto z, naturalmente) deben tener coeficientes cero en el renglón 0, el costo reducido para una variable básica será siempre 0. El concepto de los costos reducidos se analiza con mayores detalles en los capítulos 5 y 6.

Estos comentarios son correctos sólo si los valores de todas las variables básicas siguen siendo no negativos después de que la variable no básica creció 1. Cuando x_2 crece 1, x_1, x_3 y s_1 son no negativas, por lo que el comentario es válido.

2 Se observa en la forma canónica 2 que la solución óptima al problema de los muebles de Dakota es fabricar 2 escritorios ($x_1 = 2$) y 8 sillas ($x_3 = 8$). Como $x_2 = 0$, ninguna mesa se debe fabricar. Asimismo, $s_1 = 24$ es razonable porque se están usando sólo $8 + 8(2) = 24$ pies tablón de madera. Por tanto, no se están usando $48 - 24 = 24$ pies tablón de madera. De igual manera, $s_4 = 5$ tiene sentido porque, aunque hasta 5 mesas se podrían haber fabricado, en realidad se producen 0 mesas. Por tanto, la holgura en la restricción 4 es $5 - 0 = 5$ Como $s_2 = s_3 = 0$, todas las horas disponibles de acabado y de carpintería se utilizan, así que las restricciones de acabado y de carpintería son activas.

3 Escogimos que la variable entrante sea la que tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, pero esto no siempre lleva rápidamente a la sfb óptima (véase problema de repaso 11). En la realidad, incluso si se selecciona la variable con el coeficiente negativo más pequeño (en valor absoluto), el algoritmo simplex encontrará finalmente la solución óptima del PL.

4 Aunque se podría escoger cualquier variable con un coeficiente negativo en el renglón 0 para introducir a la base, es necesario seleccionar el renglón de pivoteo *mediante* la prueba del cociente. Para demostrarlo formalmente suponga que se ha escogido a x_i para que entre a la base, y en la descripción actual x_i es una variable básica en el renglón k. Entonces, el renglón k se podría escribir como

$$\bar{a}_{ki}x_i + \cdots = \bar{b}_k$$

Considere cualquier otra restricción (por ejemplo, el renglón j) en la forma canónica. El renglón j en la forma canónica actual se podría expresar como

$$\bar{a}_{ji}x_i + \cdots = \bar{b}_j$$

Si se toma como pivote el renglón k, éste se vuelve

$$x_i + \cdots \quad = \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ki}}$$

El nuevo renglón j después del pivoteo se obtiene al sumar $-\bar{a}_{ji}$ veces la última ecuación al renglón j de la forma canónica actual. Así se genera el nuevo renglón j

$$0x_i + \cdots \quad = \bar{b}_j - \frac{\bar{b}_k\bar{a}_{ji}}{\bar{a}_{ki}}$$

Ya sabemos que después del pivoteo cada restricción debe tener un segundo miembro no negativo. Por consiguiente, $\bar{a}_{ki} > 0$ debe cumplirse para asegurar que el renglón k tiene un lado derecho no negativo después del pivoteo. Suponga que $\bar{a}_{ji} > 0$. Luego, para asegurar que el renglón j tenga un lado derecho no negativo después del pivoteo, se debe tener

$$\bar{b}_j - \frac{\bar{b}_k\bar{a}_{ji}}{\bar{a}_{ki}} \geq 0$$

o bien, (porque $\bar{a}_{ji} > 0$)

$$\frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{ji}} \geq \frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ki}}$$

Por lo tanto, el renglón k debe ser un "ganador" de la prueba del cociente para asegurar que el renglón j tenga un lado derecho no negativo después de finalizar el pivoteo.

Si $\bar{a}_{ji} \leq 0$, entonces el lado derecho del renglón j será con toda seguridad no negativo después del pivoteo. Esto se infiere porque

$$-\frac{\bar{b}_k \bar{a}_{ji}}{\bar{a}_{ki}} \geq 0$$

se conserva ahora.

Como se prometió antes, se ha esbozado un algoritmo que procede desde una sfb hasta una sfb mejor. El algoritmo se detiene cuando se determina una solución óptima. La convergencia del algoritmo simplex se analiza en la sección 4.11.

Resumen del algoritmo simplex para un problema de maximización

Paso 1 Convierta la PL en una forma estándar.

Paso 2 Encuentre una solución factible básica. Es fácil si todas las restricciones son $\leq$ con los respectivos lados derechos de las restricciones no negativos. Luego la variable de holgura s_i se puede usar como la variable básica para el renglón i. Si no hay sfb evidentes, entonces se aplican las técnicas estudiadas en las secciones 4.12 y 4.13 para encontrar un sfb.

Paso 3 Si todas las variables no básicas tienen coeficientes no negativos en el renglón 0, entonces la sfb actual es óptima. Si algunas variables en el renglón 0 tienen coeficientes negativos, entonces seleccione la variable con el coeficiente más negativo en el renglón 0 para introducirla en la base. Esta variable recibe el nombre de *variable entrante*.

Paso 4 Efectúe OER con el fin de convertir a la variable entrante en variable básica en cualquier renglón que gane la prueba del cociente (los empates se rompen en forma arbitaria eligiendo a cualquier candidato). Después de que las OER se aplicaron para generar una forma canónica nueva, regrese al paso 3, usando la forma canónica actual.

Cuando utilice el algoritmo simplex para resolver problemas, nunca debe haber una restricción con el lado derecho negativo (es correcto para el renglón 0 tener el lado derecho negativo; véase la sección 4.6). Una restricción con el lado derecho negativo es por lo regular el resultado de un error en la prueba del cociente o al ejecutar una o más OER. Si una (o más) de las restricciones tiene un lado derecho negativo, entonces ya no hay una sfb, y las reglas del algoritmo simplex no darán lugar a una sfb mejor.

Representación de los tableaus simplex

En lugar de escribir cada variable en cada restricción, se usa con frecuencia un acomodo resumido que se llama **tableau simplex.** Por ejemplo, la forma canónica

$$\begin{aligned} z + 3x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + s_1 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 3 \end{aligned}$$

se escribiría en la forma abreviada que se ilustra en la tabla 8 (rhs = *right-hand side*, lado derecho, ld). Este formato facilita detectar variables básicas: sólo busque las columnas que tengan una sola entrada de 1 y todas las otras entradas iguales a cero (s_1 y s_2). Al usar los arreglos simplex, se encerrará el término pivote en un círculo y se denotará al ganador de la prueba del cociente mediante un *.

TABLA 8
Un tableau simplex

z	x_1	x_2	s_1	s_2	del	Variable básica
1	3	1	0	0	6	$z_2 = 6$
0	1	0	1	0	4	$x_1 = 4$
0	2	1	0	1	3	$x_2 = 3$

PROBLEMAS

Grupo A

1 Utilice el algoritmo simplex para resolver el problema de Giapetto (ejemplo 1 del capítulo 3).

2 Aplique el algoritmo simplex para determinar la solución del siguiente PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3 Aplique el algoritmo simplex para solucionar el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 + x_3 &\le 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\le 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

4 Suponga que usted desea resolver el problema de Dorian (ejemplo 2 del capítulo 3) mediante el algoritmo simplex. ¿Qué dificultad podría haber?

5 Utilice el algoritmo simplex para resolver el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 + x_2 &\le 80 \\ + x_1 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

6 Utilice el algoritmo simplex para resolver el PL siguiente

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

7 La recomendación ha sido que en cada iteración del algoritmo simplex, la variable entrante debe ser (en un problema de maximización) la que cause el mayor incremento en la función objetivo. Aunque esto ocasiona por lo regular menos pivoteos que con la regla para introducir al elemento más negativo del renglón 0, la regla del mayor incremento apenas si se usa. ¿Por qué no?

4.6 Solución de problemas de minimización mediante el algoritmo simplex

Hay dos maneras distintas para que, mediante el algoritmo simplex, se solucionen problemas de minimización. Se ilustran estos métodos con la resolución de la PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(PL 2)}$$

Método 1

La solución óptima para el PL 2 es el punto (x_1, x_2) en la región factible para el PL 2 que hace a $z = 2x_1 - 3x_2$ el mínimo. En forma equivalente se podría decir que la solución óptima para el PL 2 es el punto en la región factible que hace a $-z = -2x_1 + 3x_2$ el máximo. Esto significa que es posible encontrar la solución óptima para el PL 2 al resolver el PL 2':

$$\begin{aligned} \max -z &= -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 - x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(PL 2')}$$

Se usará $-z$ como la variable básica para el renglón 0 para la resolución de la PL 2'. Después de añadir las variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones, se obtiene el tableau inicial de la tabla 9. Como x_2 es la única variable con un coeficiente negativo en el renglón 0, entonces se la introduce a base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar a la base en la primera restricción, renglón 1. El tableau resultante se presenta en la tabla 10. Como cada variable en el renglón 0 tiene un coeficiente no negativo éste es un tableau óptimo. Por lo tanto, la solución óptima para el PL 2' es $-z = 12$, $x_2 = 4$, $s_2 = 10$, $x_1 = s_1 = 0$. Entonces, la solución óptima para la PL 2 es $z = -12$, $x_2 = 4$, $s_2 = 10$, $x_1 = s_1 = 0$. Al sustituir los valores de x_1 y de x_2 en la función objetivo del PL 2 se tiene

$$z = 2x_1 - 3x_2 = 2(0) - 3(4) = -12$$

En resumen, multiplique la función objetivo del problema de minimización por -1 y resuelva el problema como si fuera un problema de maximización con función objetivo $-z$. La solución óptima para el problema de maximización le dará a usted la solución óptima para el problema de minimización. Recuerde que (valor z óptimo para el problema de minimización) = $-$(valor z óptimo de la función objetivo para el problema de maximización).

Método 2

Es posible efectuar una simple modificación en el algoritmo simplex para poder resolver de modo directo problemas de minimización. Modifique el paso 3 como sigue: si todas las variables no básicas del renglón 0 tienen coeficientes no positivos, entonces la sfb actual es

TABLA 9
Tableau inicial para el PL 2. Método 1

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	2	-3	0	0	0	$-z = 0$	
0	1	1	1	0	4	$s_1 = 4$	$\frac{4}{1} = 4^*$
0	1	-1	0	1	6	$s_2 = 6$	Ninguno

TABLA 10
Tableau óptimo para el PL 2. Método 1

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica
1	5	0	3	0	12	$-z = 12$
0	1	1	1	0	4	$x_2 = 4$
0	2	0	1	1	10	$s_2 = 10$

TABLA 11
Tableau inicial para la PL 2. Método 2

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	−2	3	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	1	0	4	$s_1 = 4$	$\frac{4}{1} = 4^*$
0	1	−1	0	1	6	$s_2 = 6$	Ninguno

TABLA 12
Tableau óptimo para el PL 2. Método 2

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica
1	−5	0	−3	0	−12	$z = -12$
0	1	1	1	0	4	$x_2 = 4$
0	2	0	1	1	10	$s_2 = 10$

óptima. Si cualquier variable no básica en el renglón 0 tiene coeficiente positivo, seleccione la variable con el coeficiente "más positivo" en el renglón 0 para que entre a la base.

Esta modificación del algoritmo simplex funciona porque al incrementar una variable no básica con un coeficiente positivo en el renglón 0 *disminuirá* z. Si se usa este método para resolver PL 2, entonces el arreglo inicial será el que se ilustra en la tabla 11. Como x_2 tiene el coeficiente más positivo en el renglón 0, se introduce x_2 a la base. La prueba del cociente señala que x_2 debe entrar a la base en el renglón 1, lo que da como resultado la tabla 12. Como cada variable en el renglón 0 tiene coeficiente no positivo, éste es un arreglo óptimo.† Por lo tanto, la solución óptima para el PL 2 (como ya se vio) es $z = -12$, $x_2 = 4$, $s_2 = 10$, $x_1 = s_1 = 0$.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_2 &\le 5 \\ x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 8x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4 Utilice el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a.} \quad 4x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

†Para ver que este tableau es óptimo, obsérvese que a partir del renglón 0, $z = -12 + 5x_1 + 3s_1$. Puesto que $x_1 \ge 0$ y $s_1 \ge 0$, esto demuestra que $z \ge -12$. Por lo tanto, la sfb actual (que tiene $z = -12$) debe ser óptima.

4.7 Soluciones óptimas alternas

Refiérase al ejemplo 3 de la sección 3.3. Recuerde que para algunos PL, más de un punto extremo es óptimo. Si un PL tiene más de una solución óptima, entonces se dice que tiene **soluciones óptimas alternas** o múltiples. Enseguida se explica cómo el algoritmo simplex se puede aplicar para determinar si un PL tiene soluciones óptimas alternas.

Reconsidere el ejemplo de los muebles Dakota de la sección 4.3 con la modificación de que las mesas se venden en 35 dólares en lugar de 30 (véase tabla 13). Como x_1 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, se introduce x_1 a la base. La prueba del cociente señala que x_1 debe entrar en el tableau 3. Ahora sólo x_3 tiene coeficiente negativo en el renglón 0, así que x_3 entra a la base (véase tabla 14). La prueba del cociente indica que x_3 debe entrar a la base en el renglón 2. El tableau resultante óptimo se presenta en la tabla 15. Al igual que en la sección 4.3, este arreglo indica que la solución óptima para los muebles Dakota es $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $s_4 = 5$, y $x_2 = s_2 = s_3 = 0$.

TABLA 13
Tableau inicial para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Ld	Variable básica	Cociente
1	−60	−35	−20	0	0	0	0	0	$z = 0$	
0	8	6	1	1	0	0	0	48	$s_1 = 48$	$\frac{48}{8} = 6$
0	4	2	1.5	0	1	0	0	20	$s_2 = 20$	$\frac{20}{4} = 5$
0	2	1.5	0.5	0	0	1	0	8	$s_3 = 8$	$\frac{8}{2} = 4$*
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	Ninguno

TABLA 14
Primer tableau para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	10	−5	0	0	30	0	240	$z = 240$	
0	0	0	−1	1	0	−4	0	16	$s_1 = 16$	Ninguno
0	0	−1	0.5	0	1	−2	0	4	$s_2 = 4$	$\frac{4}{0.5} = 8$*
0	1	0.75	0.25	0	0	0.5	0	4	$x_1 = 4$	$\frac{4}{0.25} = 16$
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$	Ninguno

TABLA 15
Segundo tableau (óptimo) para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	Ld	Variable básica
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	0	−2	0	1	2	−8	0	24	$s_1 = 24$
0	0	−2	1	0	2	−4	0	8	$x_3 = 8$
0	1	1.25	0	0	−0.5	1.5	0	2	$x_1 = 2$*
0	0	1	0	0	0	0	1	5	$s_4 = 5$

TABLA 16
Otro tableau óptimo para Dakota Furniture (35 dólares/mesa)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	ld	Variable Básica
1	0	0	0	0	10	10	0	280	$z = 280$
0	1.6	0	0	1	1.2	−5.6	0	27.2	$s_1 = 27.2$
0	1.6	0	1	0	1.2	−1.6	0	11.2	$x_3 = 11.2$
0	0.8	1	0	0	−0.4	1.2	0	1.6	$x_2 = 1.6$
0	−0.8	0	0	0	0.4	−1.2	1	3.4	$s_4 = 3.4$

Recuerde que todas las variables básicas deben tener coeficiente cero en el renglón 0 (de otro modo, no serían variables básicas). No obstante, en el arreglo óptimo, hay una variable no básica, x_2, que también tiene coeficiente cero en el renglón 0. Veamos qué sucede si entra x_2 en la base. La prueba del cociente señala que x_2 debe entrar a la base en el renglón 3 (compruébelo). Este arreglo resultante se da en la tabla 16. Lo que es importante observar es que *como x_2 tiene coeficiente cero en el renglón* 0 *del arreglo óptimo, el pivote que introduce a x_2 en la base no cambia el renglón* 0. Esto quiere decir que todas las variables en el nuevo renglón 0 tendrán todavía coeficientes no negativos. Por tanto, el nuevo arreglo también es óptimo. Puesto que el pivote no modificó el valor de z, una solución óptima alterna para el ejemplo de Dakota es $z = 280$, $s_1 = 27.2$, $x_3 = 11.2$, $x_2 = 1.6$, $s_4 = 3.4$ y $x_1 = s_3 = s_2 = 0$.

En resumen, si las mesas se venden en 35 dólares, Dakota puede obtener 280 dólares como ingresos por las ventas mediante la manufactura de 2 escritorios y 8 sillas, o bien, con la producción de 1.6 mesas y 11.2 sillas. Por lo tanto, Dakota tiene puntos extremos óptimos múltiples (o alternos).

Como se estableció en el capítulo 3, se puede demostrar que cualquier punto en el segmento de recta que une dos puntos extremos óptimos también será óptimo. Para ilustrar esta idea, se expresarán los dos puntos extremos óptimos:

$$\text{Punto extremo óptimo 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Punto extremo óptimo 2} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, para $0 \le c \le 1$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + (1 - c)\begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \\ 11.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 1.6 - 1.6c \\ 11.2 - 3.2c \end{bmatrix}$$

será óptimo. Esto demuestra que aunque el ejemplo de Dakota tiene sólo dos puntos extremos óptimos, hay una cantidad infinita de soluciones óptimas para el problema de Dakota. Por ejemplo, al escoger $c = 0.5$ se obtiene la solución óptima $x_1 = 1$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 9.6$.

Si no hay variable básica con un coeficiente cero en el renglón 0 del tableau óptimo, entonces el PL tiene una solución óptima única (véase problema 3). A veces es posible que hasta cuando hay una variable no básica con un coeficiente cero en el renglón 0 del tableau óptimo el PL no tenga soluciones óptimas alternativas (véase el problema de repaso 25).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que si un soldado de juguete se vendiera en 28 dólares, entonces el problema de Giapetto tendría soluciones óptimas alternas.

2 Demuestre que el PL siguiente tiene soluciones óptimas alternas; encuentre tres de ellas.

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3 Encuentre soluciones óptimas alternas para el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ & x_1 + 2x_3 \le 1 \\ & \text{Toda } x_i \ge 0 \end{aligned}$$

4 Determine todas las soluciones óptimas alternas para el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 1 \\ & \text{Toda } x_i \ge 0 \end{aligned}$$

5 ¿Cuántos soluciones básicas factibles tiene el siguiente problema lineal?

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 13 \\ & \text{Toda } x_i \ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

6 Suponga que ha encontrado este tableau óptimo (tabla 17) para un problema de maximización. Aplique el hecho de que toda variable no básica tiene un coeficiente rigurosamente positivo en el renglón 0 para demostrar que $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $s_1 = s_2 = 0$ es la única solución óptima para este PL. (*Sugerencia*: ¿Puede cualquier punto extremo que tiene $s_1 > 0$ o $s_2 > 0$ tener $z = 10$?)

7 Explique por qué el conjunto de soluciones óptimas de un PL es un conjunto convexo.

8 Considere un PL con el tableau óptimo de la tabla 18.

a ¿Tiene este PL más de una sfb que sea óptima?

b ¿Cuántas soluciones óptimas tiene este PL? (*Sugerencia*: Si el valor de x_3 aumenta, entonces cómo cambian los valores de las variables básicas y el valor z?)

9 Caracterice todas las soluciones óptimas del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= -8x_5 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ & x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 5 \\ & \text{Toda } x_i \ge 0 \end{aligned}$$

TABLA 17

z	x_1	x_2	s_1	s_2	ld
1	0	0	2	3	10
0	1	0	3	2	4
0	0	1	1	1	3

TABLA 18

z	x_1	x_2	x_3	x_4	ld
1	0	0	0	2	2
0	1	0	−1	1	2
0	0	1	−2	3	3

4.8 PL no acotados

En la sección 3.3 se mencionó que para algunos PL existen puntos en la región factible para los cuales z asume valores arbitrariamente grandes (en los problemas de maximización) o arbitrariamente pequeños (en los problemas de minimización). Cuando se presenta esta situación, se dice que el PL es no acotado. En esta sección se explica cómo se aplica el algoritmo simplex para determinar si un PL es no acotado.

EJEMPLO 3 Breadco Bakeries : Un PL no acotado

Breadco Bakeries elabora dos clases de pan: *baguette* y pan negro. Cada *baguette* se vende en 36 centavos y cada hogaza de pan negro se vende en 30 centavos. Para elaborar una *baguette* se requieren 1 paquete de levadura y 6 onzas de harina; para el pan negro se requieren 1 paquete de levadura y 5 onzas de harina. Breadco tiene en la actualidad 5 paquetes de levadura y 10 onzas de harina. Se pueden comprar más paquetes de levadura a 3 centavos cada uno y harina a 4 centavos la onza. Plantee y resuelva un PL con el que se pueda maximizar la utilidad de Breadco (= ingresos − costos).

Solución Defina

$$x_1 = \text{número de } \textit{baguettes} \text{ horneadas}$$
$$x_2 = \text{número de hogazas de pan negro horneadas}$$
$$x_3 = \text{número de paquetes de levaduras comprados}$$
$$x_4 = \text{número de onzas de harina compradas}$$

Entonces, el objetivo de Breadco es maximizar z = ingresos − costos, donde

$$\text{Ingresos} = 36x_1 + 30x_2 \qquad \text{y} \qquad \text{Costos} = 3x_3 + 4x_4$$

Por lo tanto, la función objetivo de Breadco es

$$\max z = 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

Breadco se enfrenta a las restricciones siguientes:

Restricción 1 Número de paquetes de levadura usados para elaborar el pan, no puede exceder la levadura disponible más la levadura comprada.

Restricción 2 Las onzas de harina para elaborar el pan no pueden exceder la harina disponible más la harina comprada.

Como

$$\text{Levadura disponible} + \text{levadura comprada} = 5 + x_3$$
$$\text{Harina disponible} + \text{harina comprada} = 10 + x_4$$

La restricción 1 se podría expresar como

$$x_1 + x_2 \le 5 + x_3 \qquad \text{o bien,} \qquad x_1 + x_2 - x_3 \le 5$$

y la restricción 2 se podría escribir como

$$6x_1 + 5x_2 \le 10 + x_4 \qquad \text{o bien} \qquad 6x_1 + 5x_2 - x_4 \le 10$$

Si se suman las restricciónes $x_i \ge 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 36x_1 + 30x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \le 5 \qquad \text{(Restricción de la levadura)} \\ & 6x_1 + 5x_2 - x_4 \le 10 \qquad \text{(Restricción de la harina)} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Al agregar las variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones se obtiene el tableau de la tabla 19.

TABLA 19
Tableau initial para Breadco

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	−36	−30	3	4	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	−1	0	1	0	5	$s_1 = 5$	$\frac{5}{1} = 5$
0	6	5	0	−1	0	1	10	$s_2 = 10$	$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$*

TABLA 20
Primer tableau de Breadco

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	0	3	-2	0	6	60	$z = 60$	
0	0	$\frac{1}{6}$	-1	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{10}{3}$	$s_1 = \frac{10}{3}$	$(\frac{10}{3})/(\frac{1}{6}) = 20$*
0	1	$\frac{5}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$	$s_2 = \frac{5}{3}$	Ninguno

TABLA 21
Segundo tableau para Breadco

z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	sm	Variable Básica	Cociente
1	0	2	-9	0	12	4	100	$z = 100$	
0	0	1	-6	1	6	-1	20	$x_4 = 20$	Ninguno
0	1	1	-1	0	1	0	5	$x_1 = 5$	Ninguno

Como $-36 < -30$, x_1 entra a la base. La prueba del cociente indica que x_1 debe entrar en el renglón 2. La entrada de x_1 a la base en el renglón 2 genera el tableau de la tabla 20. Como x_4 tiene el único coeficiente negativo del renglón 0, entra x_4 a la base. La prueba del cociente señala que x_4 debe entrar a la base en el renglón 1, y el resultado se observa en la tabla 21. Como x_3 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, nos gustaría introducir a x_3 en la base. Pero la prueba del cociente no señala el renglón en el cual x_3 debe entrar a la base. ¿Qué es lo que sucede? Si regresamos a las ideas básicas que nos llevaron a la prueba del cociente, vemos que cuando x_3 se incrementa (conservando las otras variables no básicas iguales a cero), las variables básicas actuales, x_4 y x_1, cambian como se indica:

$$x_4 = 20 + 6x_3 \tag{13}$$

$$x_1 = 5 + x_3 \tag{14}$$

Cuando x_3 se incrementa, aumentan tanto x_4 como x_1. Esto quiere decir que no importa qué tan grande sea x_3, las desigualdades $x_4 \geq 0$ y $x_1 \geq 0$, seguirán siendo válidas, puesto que por cada unidad que se incrementa x_3 aumenta z en 9, es posible encontrar puntos en la región factible para los cuales z asuma un valor arbitrariamente grande. Por ejemplo, ¿se puede encontrar un punto factible con $z \geq 1\,000$? Para lograrlo es necesario incrementar z en $1\,000 - 100 = 900$. Por cada unidad que aumenta x_3, z aumenta 9, por lo que al incrementar x_3 en $\frac{900}{9} = 100$ nos debe dar $z = 1\,000$. Si hacemos $x_3 = 100$ (y se conservan las otras variables no básicas en cero), entonces (13) y (14) muestran que x_4 y x_1 deben ser ahora iguales a

$$x_4 = 20 + 6(100) = 620$$
$$x_1 = 5 + (100) = 105$$

Por lo tanto, $x_1 = 105$, $x_3 = 100$, $x_4 = 620$, $x_2 = 0$ es un punto en la región factible con $z = 1\,000$ Es posible encontrar de modo similar puntos en la región factible que tengan arbitrariamente valores de z grandes. Lo anterior significa que el problema de Breadco es un PL no acotado.

A partir del ejemplo de Breadco se observa que un PL no acotado se presenta en un problema de maximización si hay una variable no básica con coeficiente negativo en el renglón 0, y no hay restricciones que señalen qué tan grande puede llegar a ser la variable no básica. Esta situación ocurrirá cuando una variable no básica (como x_3) tiene un coeficiente negativo en el renglón 0 y coeficientes no positivos en cada restricción. En resumen, *un PL no acotado para un problema de maximización se presenta cuando una variable con coeficiente negativo en el renglón 0 tiene un coeficiente no positivo en cada restricción.*

Si un PL es no acotado, se llega finalmente a un tableau donde uno quiere introducir una variable (como x_3) en la base, pero fracasa la prueba del cociente. Ésta es quizá la manera más fácil de detectar una PL no acotada.

Según se mencionó en el capítulo 3, un PL no acotado es el resultado de un mal planteamiento. En el ejemplo de Breadco, se obtuvo un PL no acotado porque se permitió a Breadco pagar $3 + 6(4) = 27$ centavos por los ingredientes para una *baguette* y luego venderla a 36 centavos. Por lo tanto, cada *baguette* gana una utilidad de 9 centavos. Como las compras ilimitadas de levadura y harina están permitidas, es evidente que el modelo permite a Breadco elaborar tantas *baguettes* como desee, con lo que ganaría utilidades arbitrariamente grandes. Ésta es la causa del PL no acotado.

Desde luego que la formulación del ejemplo de Breadco ignoró varios aspectos de la realidad. Primero, se supuso que la demanda de los productos de Breadco es ilimitada. Segundo, se pasó por alto el hecho de que ciertos recursos para elaborar el pan (como los hornos y la mano de obra) tienen un abastecimiento limitado. Por último, se hizo la suposición irreal de que se podrían comprar cantidades ilimitadas de levadura y harina.

PL no acotados e indicadores de no acotamiento

Considere un PL cuya función objetivo es $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. Sea $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \ldots c_n]$. Si el PL es un problema de maximización, entonces el PL será no acotado si y sólo si tiene una dirección de no acotamiento $\mathbf{d}$ que satisface $\mathbf{cd} > 0$. Si el PL es un problema de minimización, entonces el PL será no acotado si y sólo si tiene una dirección de no acotamiento $\mathbf{d}$ que satisface $\mathbf{cd} < 0$. En el ejemplo 3, el último arreglo nos muestra que si se empieza en el punto

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(las variables se listan en el mismo orden que en el tableau), es posible encontrar un indicador de no acotamiento como se indica enseguida. Cada unidad que crece x_3 mantiene la factibilidad si se incrementa x_1 en una unidad y x_4 en seis unidades y se conservan sin cambio a x_2, s_1 y s_2 Puesto que es posible aumentar x_3 sin límite, esto quiere decir que

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un indicador de no acotamiento. Como

$$\mathbf{cd} = [36 \quad 30 \quad -3 \quad -4 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 9$$

ya sabemos que el PL es no acotado. Lo anterior se infiere porque cada vez que nos desplazamos una cantidad en la dirección **d** (dicha cantidad aumenta x_3 en una unidad) se incrementa z en 9, y es posible movernos tanto como queramos en la dirección **d**.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que el PL siguiente es no acotado

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Encuentre un punto en la región factible con $z \ge 10\,000$.

2 Establezca una regla mediante la cual se pueda determinar si un problema de minimización tiene una solución óptima no acotada (es decir, se puede hacer a z arbitrariamente pequeña). Aplique la regla para demostrar que

$$\begin{aligned} \min z &= -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

es un PL no acotado.

3 Suponga que al resolver un PL se obtiene el tableau de la tabla 22. Aunque x_1 puede entrar a la base, este PL es no acotado. ¿Por qué?

4 Resuelva el problema 10 de la sección 3.3 mediante el método simplex.

TABLA 22

z	x_1	x_2	x_3	x_4	ld
1	−3	−2	0	0	0
0	1	−1	1	0	3
0	2	0	0	1	4

5 Demuestre que el PL siguiente es no acotado:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad -x_1 + x_2 &\le 2 \\ -2x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

6 Demuestre que el PL siguiente es no acotado:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - 2x_2 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4.9 El paquete para computadora LINDO

Linus Schrage creó (1986) LINDO (*Linear Interactive and Discrete Optimizer*). Es un paquete para computadora de fácil uso, mediante el cual se pueden resolver problemas de programación lineal, por enteros o cuadrática.† En el apéndice A de este capítulo, se da una breve explicación de cómo se puede usar LINDO para resolver con PL. En esta sección sólo se explica la relación entre la información impresa de los resultados que da LINDO y el análisis del algoritmo simplex.

Empezamos por analizar los resultados que proporciona LINDO para el ejemplo de los muebles Dakota (*véase* figura 6). LINDO permite que el usuario nombre las variables, así que se definen

DESKS = número de escritorios producidos

TABLES = número de mesas fabricadas

CHAIRS = número de sillas producidas

Entonces, la formulación de Dakota en el primer bloque de la figura 6 es

max 60 DESKS + 30 TABLES + 20 CHAIRS (Renglón 1)

†Véanse un análisis de la programación por enteros en el capítulo 9 y de la programación cuadrática en el capítulo 11.

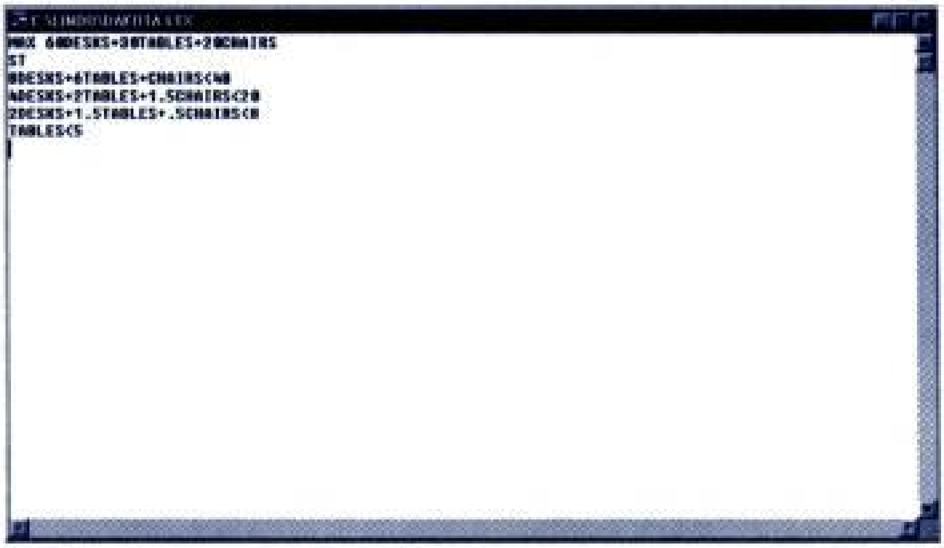


FIGURA 6
Resultados según LINDO para el ejemplo de Dakota

s.a 8 DESKS + 6 TABLES + CHAIRS $\leq$ 48 (Renglón 2) (Limitación de la madera)
4 DESKS + 2 TABLES + 1.5 CHAIRS $\leq$ 20 (Renglón 3) (Limitación del acabado)
2 DESKS + 1.5 TABLES + 0.5 CHAIRS $\leq$ 8 (Renglón 4) (Limitación de la carpintería)
TABLES + $\leq$ 5 (Renglón 5)
DESKS, TABLES, CHAIRS $\geq$ 0

(LINDO supone que todas las variables son no negativas, por lo que las restricciones de no negatividad no se tienen que introducir a la computadora.) Con el fin de ser consistentes con LINDO se ha designado como renglón 1 a la función objetivo, y a las restricciones como renglones 2 a 5.

Para introducir este problema en LINDO, asegúrese que la pantalla tenga una ventana, o área de trabajo, vacía, con "Untitled" en la parte superior del área de trabajo. Si es necesario se abre una nueva ventana mediante la selección de New (Nuevo) en el menú File (archivo), o presionando el botón de New File (Nuevo archivo).

El primer enunciado en un modelo LINDO es siempre el objetivo. Se introduce el objetivo casi como usted lo escribiría en forma de ecuación:

MAX 60 DESKS + 30 TABLES + 20 CHAIRS

Esto le dice a LINDO que maximice la función objetivo. Proceda con la introducción de las restricciones como sigue:

SUBJECT TO (OR s.a)
8 DESKS + 6 TABLES + CHAIRS < 48
4 DESKS + 2 TABLES + 1.5 CHAIRS < 20
2 DESKS + 1.5 TABLES + .5 CHAIRS < 8
TABLES < 5

Ahora su pantalla lucirá como la de la figura 6. Observe que LINDO supone en forma automática que todas las variables de decisión son no negativas.

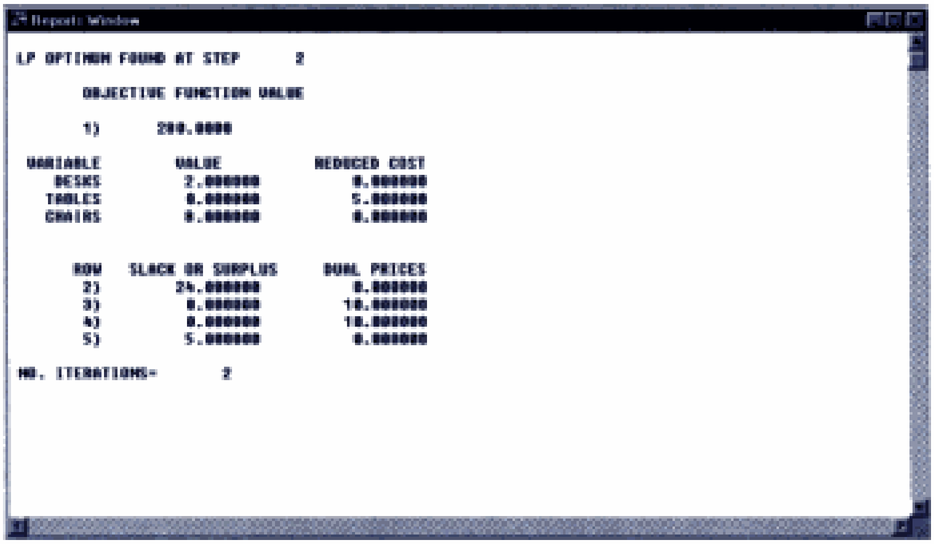
Para guardar el archivo y poderlo usar después, seleccione Save (Guardar) en el menú File (Archivo) y cuando pregunte por un nombre de archivo reemplace el símbolo * por un

Dakota

nombre que usted escoja (escogimos *Dakota*). No escriba sobre los caracteres .LTX. Enseguida podría usar el comando File Open (abrir archivo) para regresar al problema.

Para resolver el modelo se procede de la siguiente manera:

1 Seleccione la orden Solve en el menú Solve (Resolver) o dé un clic en el botón con un ojo de buey.



```
Reports Window
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      280.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
    DESKS         2.000000          0.000000
   TABLES         0.000000          5.000000
   CHAIRS         8.000000          0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)        24.000000          0.000000
       3)         0.000000         10.000000
       4)         0.000000         10.000000
       5)         5.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       2
```

FIGURA 7

2 Cuando pregunte si usted desea un intervalo (análisis de sensibilidad), escoja No. Se explica cómo interpretar un intervalo o análisis de sensibilidad en el capítulo 6.

3 Cuando esté terminada la solución, aparecerá una pantalla que muestra el estado del comando Solve. Después de revisar la información mostrada, seleccione Close (Cerrar).

4 Ahora usted debe ver la información que introdujo en una ventana que se llama "Reports Window". Dé un clic en cualquier parte de esta ventana, y sus datos desaparecerán del primer plano. Desplácese hasta la parte superior de la ventana usando la flecha única de la parte derecha de la pantalla, y enseguida ésta se verá como la de la figura 7.

Los resultados de LINDO en la figura 7 indican

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

lo que señala que LINDO encontró la solución óptima después de dos iteraciones (o pivoteos) del algoritmo simplex.

OBJECTIVE FUNCTION VALUE 280.000000

indica que el valor de z óptimo es 280.

VALUE

da el valor de la variable en la solución óptima del PL. Por lo tanto, la solución óptima le recomienda a Dakota producir 2 escritorios, 0 mesas y 8 sillas.

SLACK OR SURPLUS

proporciona el valor de holgura o excedente en la solución óptima. Por lo tanto,

$$s_1 = \text{holgura para el renglón 2 en el resultado de LINDO} = 24$$
$$s_2 = \text{holgura para el renglón 3 en el resultado de LINDO} = 0$$
$$s_3 = \text{holgura para el renglón 4 en el resultado de LINDO} = 0$$
$$s_4 = \text{holgura para el renglón 5 en el resultado de LINDO} = 5$$

REDUCED COST

proporciona el coeficiente de la variable en el renglón 0 del arreglo óptimo (en un problema de maximización). Según lo que se trató en la sección 4.3, el costo reducido para cada variable básica debe ser 0. En el caso de una variable no básica x_j, el costo reducido es la

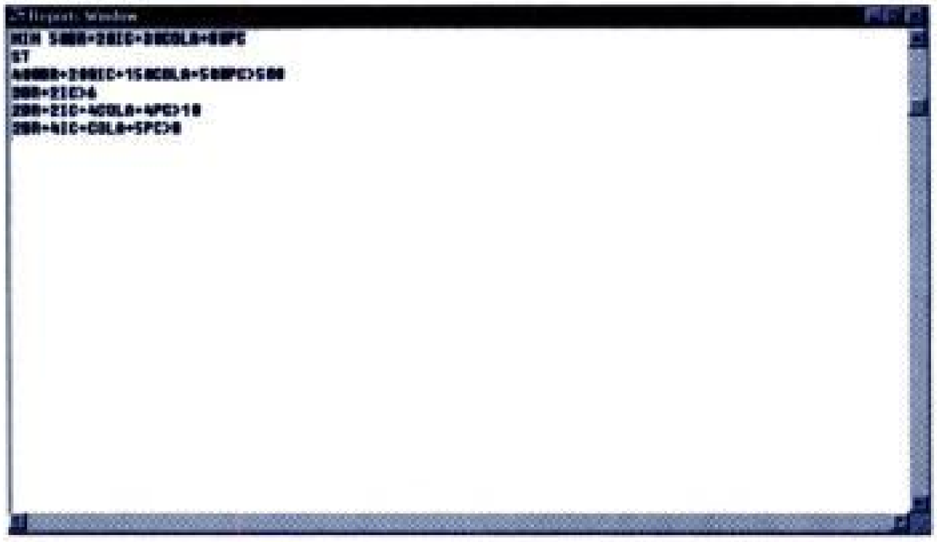


FIGURA 8

cantidad que decrece el valor de z óptimo si x_j disminuye una unidad (y todas las otras variables no básicas siguen siendo iguales a cero). En el resultado que proporciona LINDO para el problema de Dakota, el costo reducido es 0 para cada una de las variables básicas (DESKS y CHAIRS). Asimismo, el costo reducido para las TABLES es 5. Esto quiere decir que si Dakota fuera forzado a producir una mesa, el ingreso disminuiría en 5 dólares.

Por lo que se refiere a un problema de minimización, las columnas de PL óptimo, valor de la función objetivo, holgura y excedente, se interpretan como ya se explicó. Pero el costo reducido para una variable es −(coeficiente de la variable en el renglón 0 óptimo). Por lo tanto, en un problema de minimización, el costo reducido para una variable básica será también cero, pero el costo reducido para una variable no básica x_j será la cantidad en que se incremente el valor z óptimo si x_j aumenta una unidad (y todas las otras variables no básicas permanecen iguales a cero).

Para ilustrar la interpretación del resultado de LINDO para un problema de minimización, veamos el resultado de LINDO para el problema de la dieta de la sección 3.4 (véase figura 9). Si

$$
\begin{aligned}
\text{BR} &= \text{barras de chocolate ingeridas al día}\\
\text{IC} &= \text{bolas de helado de crema de chocolate ingeridas al día}\\
\text{COLA} &= \text{botellas de bebida de cola tomadas al día}\\
\text{PC} &= \text{rebanadas de pastel de queso con piña ingeridas al día}
\end{aligned}
$$

entonces, el problema de la dieta se podría formular como sigue:

$$
\begin{array}{llllll}
\min & 50\text{ BR} + 20\text{ IC} + 30\text{ COLA} + 80\text{ PC} & & & & \\
\text{s.a} & 400\text{ BR} + 200\text{ IC} + 150\text{ COLA} + 500\text{ PC} \geq 500 & & & & \text{(Restricción de las calorías)}\\
 & 3\text{ BR} + 2\text{ IC} \geq 6 & & & & \text{(Restricción del chocolate)}\\
 & 2\text{ BR} + 2\text{ IC} + 4\text{ COLA} + 4\text{ PC} \geq 10 & & & & \text{(Restricción del azúcar)}\\
 & 2\text{ BR} + 4\text{ IC} + \text{COLA} + 5\text{ PC} \geq 8 & & & & \text{(Restricción de la grasa)}\\
 & \text{BR, IC, COLA, PC} \geq 0 & & & &
\end{array}
$$

La columna Value señala que la solución óptima es comer tres bolas de helado de crema de chocolate y beber una botella de bebida de cola al día. El valor de la función objetivo en los resultados de LINDO indica que el costo de la dieta es 90 centavos. La columna Slack or Surplus muestra que la primera restricción (calorías) tiene un excedente de 250

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE


LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      90.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        BR         0.000000         27.500000
        IC         3.000000          0.000000
      COLA         1.000000          0.000000
        PC         0.000000         50.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)       250.000000          0.000000
        3)         0.000000         -2.500000
        4)         0.000000         -7.500000
        5)         5.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

FIGURA 9

calorías y que la cuarta limitación (grasa) tiene un excedente de 5 onzas. Por lo tanto, las restricciones de calorías y grasa son inactivas.

En la columna Reduced Cost se observa que si estuviéramos forzados a comer barras de chocolate (pero conservando PC = 0), el costo mínimo de la dieta diaria se incrementaría 27.5 centavos, y si tuviéramos que comer una rebanada de pastel de queso con piña (pero con BR = 0), el costo mínimo de la dieta diaria se incrementaría 50 centavos.

La orden Tableau

Si después de obtener la solución óptima para el problema de Dakota, usted cierra la ventana Reports y selecciona el comando Tableau (Tableau) (en el menú Reports), LINDO mostrará el tableau óptimo (véase figura 10). Hay que recordar que la primera restricción es el renglón 2 de LINDO, entonces se encuentra que BV = $\{s_1$, CHAIRS, DESKS, $s_4\}$. Entonces, por ejemplo, SLK5 en los resultados de LINDO corresponde a s_4. La variable artificial (ART) listada como básica en el renglón 1 es z; por consiguiente, el renglón 0 del arreglo óptimo es z + 5TABLES + $10s_2 + 10s_3 = 280$.

Cuando usted instale LINDO en su disco duro, el planteamiento de LINDO para los problemas de Dakota y de la dieta se encontrará en el directorio C:\WINSTON\LINDO-\SAMPLES.

Mayor información acerca de LINDO se encuentra en el Apéndice A del capítulo 4.

```
THE TABLEAU
     ROW    (BASIS)       DESKS       TABLES       CHAIRS       SLK    2       SLK    3
      1  ART                .000        5.000         .000         .000        10.000
      2  SLK     2          .000       -2.000         .000        1.000         2.000
      3    CHAIRS           .000       -2.000        1.000         .000         2.000
      4     DESKS          1.000        1.250         .000         .000         -.500
      5  SLK     5          .000        1.000         .000         .000          .000

     ROW    SLK     4       SLK     5
      1     10.000            .000       280.000
      2     -8.000            .000        24.000
      3     -4.000            .000         8.000
      4      1.500            .000         2.000
      5       .000           1.000         5.000
```

FIGURA 10
Ejemplo del comando TABLEAU

4.10 Generadores de matrices, LINGO y escala de PL

Muchos PL resueltos en la práctica, contienen miles de restricciones y variables de decisión. Pocos usuarios de la programación lineal querrían introducir las restricciones y la función objetivo cada vez que se tuviera que resolver un PL. Por esta razón, en las aplicaciones más modernas de PL se utiliza un **generador de matrices** para simplificar la introducción del PL. Un generador de matrices permite al usuario escribir los parámetros pertinentes para determinar las restricciones y la función objetivo del PL; luego genera la formulación del PL a partir de dicha información. Por ejemplo, considérese el ejemplo de Sailco de la sección 3.10. Si tuviera que tratar con un horizonte de planificación de 200 periodos, entonces este problema representaría 400 restricciones y 600 variables de decisión, –evidentemente demasiadas para escribirlas. Un generador de matrices para este problema, requeriría que el usuario proporcionara la información siguiente para cada periodo: costo de producción de un bote de velas con mano de obra en horario regular, costo de la mano de obra con tiempo extra, demanda y costos por conservar un cierto tiempo los botes. Con esta información, el generador de matrices obtendría la función objetivo y las restricciones del PL, activaría un *software* para PL (como LINDO) y resolvería el problema. Por último, se escribiría un analizador de resultados para mostrar la información final en un formato fácil de entender.

Paquete LINGO

El paquete LINGO es un ejemplo de un generador de matrices complejo (¡y mucho más!). LINGO es un lenguaje para modelos de optimización que le permite al usuario crear muchos (quizá miles) términos de restricciones o de función objetivo con sólo escribir una línea. Con el fin de ilustrar cómo funciona LINGO, se resuelve enseguida el problema de Sailco (ejemplo 12 del capítulo 3).

Solución del problema de Sailco

Sail.lng

Sigue el modelo de LINGO (es el archivo Sail.lng del disco compacto).

```
MODEL:
    1] SETS:
    2] QUARTERS/Q1,Q2,Q3,Q4/:TIME,DEM,RP,OP,INV;
    3] ENDSETS
    4] MIN=@SUM(QUARTERS:400*RP+450*OP+20*INV);
    5] @FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
    6] @FOR(QUARTERS(I)|TIME(I)#GT#1:
    7] INV(I)=INV(I-1)+RP(I)+OP(I)-DEM(I););
    8] INV(1)=10+RP(1)+OP(1)-DEM(1);
    9] DATA:
   10] DEM=40,60,75,25;
   11] TIME=1,2,3,4;
   12] ENDDATA
END
```

Para empezar a organizar un modelo con LINGO, piense en los objetos o conjuntos que definen el problema. En lo que se refiere a Sailco, los cuatro trimestres (Q1, Q2, Q3 y Q4) ayudan a resolver el problema. Los objetos que se tienen que conocer para determinar un programa de producción óptima [demanda (DEM), producción en el horario regular (RP), producción con tiempo extra (OP) e inventario a fines del trimestre (INV)] se determinan por cada trimestre. Las primeras tres líneas del programa de Sailco definen estas cuestiones. **SETS**: inicia la definición de los conjuntos necesarios para modelar el problema, y **ENDSETS** lo termina. El efecto de la línea 2 es definir cuatro trimestres: Q1, Q2, Q3 y Q4. Para cada trimestre, la línea 2 crea el tiempo (que indica si el trimestre es el primero, segundo, tercero o cuarto); la demanda de botes; los niveles de producción en el horario regular o con tiempo extra y el inventario final. Ahora que estos conjuntos y objetos están definidos, se utilizan para construir un modelo (que contiene una función objetivo y las restricciones). LINGO determina RP, PO e INV una vez que se introducen (en la sección de DATA del programa) las demandas y el número del trimestre.

La línea 4 crea la función objetivo; **MIN** = indica que se está efectuando una minimización. **@SUM** (QUARTERS: seguido de 400*RP + 450*OP + 20*INV significa la suma de 400*RP + 450*OP + 20*INV en todos los trimestres. Por lo tanto, por cada trimestre se calcula 400*(producción en el horario regular) + 450*(producción con el tiempo extra) + 20*(inventario final). Obsérvese que la línea 4 crea la función objetivo adecuada si son ¡4, 40, 400 o 4 000 trimestres!

La línea 5 dice que por cada trimestre, RP no puede ser mayor que 40. Una vez más, si hubiera 400 trimestres en el horizonte de planificación, este enunciado generaría 400 restricciones.

Las líneas 6 y 7 crean juntas restricciones para todos los trimestres (excepto el primero) que asegura que

Inventario final para el trimestre i = (Inventario final para el trimestre $i - 1$)
+ (Producción del trimestre i) − (Demanda del trimestre i)

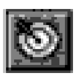
Obsérvese que al contrario que LINDO, las variables se presentan en el lado derecho de la restricción (y los números en el lado izquierdo).

La línea 8 crea la limitación asegurando que

(Inventario final del trimestre 1) = (inventario al empezar el trimestre 1)
+ (Producción del trimestre 1) − (Demanda del trimestre 1)

Las líneas 9 a 12 introducen la información necesaria (la cantidad de trimestres y la demanda en cada uno de ellos). La sección DATA debe empezar con un enunciado **DATA**: y terminar con un **END DATA**. Al igual que en LINDO, el programa LINGO termina con un enunciado **END**.

Nótese que tras haber creado el modelo LINGO para resolver el ejemplo de Sailco, es posible editar con toda facilidad el modelo con la finalidad de resolver cualquier modelo para programar la producción en n periodos. Si se estuviera resolviendo un problema de 12 trimestres, simplemente se editaría (*véase* la observación 3, más adelante) la línea 2 para que quedara así: QUARTERS/1..12/:TIME,DEM,RP,PO,INV;. Luego se introducirían las demandas de los 12 trimestres en la línea 10, y la línea 11 cambiaría a TIME = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; . Para encontrar la solución óptima al problema, se selecciona el comando Solve en el menú de LINGO o se da un clic en el botón con un ojo de buey.



En este ejemplo también se examina cómo usar algunas de las capacidades de edición de LINGO. Escriba las primeras cuatro líneas de este modelo justo como lo haría normalmente. Esto define la sección de conjuntos y la función objetivo, aparecerá lo que sigue:

```
SETS:
  QUARTERS/Q1,Q2,Q3,Q4/:TIME,DEM,RP,OP,INV;
ENDSETS
MIN = @SUM(QUARTERS:400*RP+450*OP+20*INV);
```

La siguiente línea necesaria es el enunciado @FOR que restringe la producción en el horario regular (RP) a valores menores que 40. En lugar de escribir sobre este enunciado completo se utiliza la orden Paste Function de LINGO como se indica:

1 Se selecciona Paste Function en el menú Edit (Edición). Observe que usted no tiene que hacer clic en él, sino sólo señalarlo; así aparece un submenú.

2 En el submenú se selecciona Set, y aparece otro submenú en el que aparecen varias funciones @.

3 Se selecciona la función @FOR; así aparece una forma general del enunciado @FOR en la ventana.

4 Se reemplazan los términos generales de la función con los parámetros específicos. Este enunciado debe verse como lo que sigue:

```
@FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
```

Como se requiere otro enunciado @FOR para definir más adelante las restricciones en todos los trimestres, usted podría escribirlo o usar de nuevo el comando Paste Function. Mediante el uso de otros comandos de Edit, usted podrá copiar y pegar una parte del enunciado anterior @FOR en lugar de volverlo a escribir. Se hace como se indica:

1 Coloque su cursor al principio del enunciado @FOR escrito antes.

2 Presione el botón izquierdo del ratón y seleccione la parte del enunciado que se puede reutilizar, según se señala enseguida:

```
@FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
```

3 Seleccione Copy (Copiar) en el menú Edit, o bien, use Ctrl+C para copiar el texto seleccionado.

4 Coloque el cursor en el inicio de la línea en blanco siguiente y presione Ctrl+V para pegar el texto copiado.

Ahora ya puede escribir en el resto de la línea, y las líneas siguientes según se muestra a continuación:

```
@FOR(QUARTERS(I)|TIME(I) #GT#1:
INV(I)=INV(I-1)+RP(I)+OP(I)-DEM(I););
INV(1)=10+RP(1)+OP(1)-DEM(1);
DATA:
  DEM=40,60,75,25;
  TIME=1,2,3,4;
ENDDATA
END
```

Si bien el comando Copy sólo guardó algunos caracteres en este ejemplo, puede ahorrar muchos pasos cuando usted tiene repeticiones en un modelo. De manera similar, la orden Cut puede retirar partes seleccionadas para colocarlas en otro lado dentro del modelo. La información de este ejemplo se guarda en el archivo Sail.lng.

Sail.lng

Después de resolver el modelo, la primera parte de la Reports Window debe señalar un valor objetivo de 78 450 dólares en la pantalla de resultados de la figura 11.

LINGO y el problema de la oficina de correos

Post.lng

Ahora ya sabe usted cómo utilizar LINGO para resolver el ejemplo de la oficina de correos (ejemplo 7) del capítulo 3. El modelo siguiente de LINGO (archivo Post.lng) se puede utilizar para resolver este problema.

```
MODEL:
  1] SETS:
  2] DAYS/1..7/:RQMT,START;
  3] ENDSETS
  4] MIN=@SUM(DAYS:START);
  5] @FOR(DAYS(I):@SUM(DAYS(J)|
  6]  (J#GT#I+2)#OR#(J#LE#I#AND#J#GT#I-5):
  7] START(J))>RQMT(I););
  8] DATA:
  9] RQMT=17,13,15,19,14,16,11;
 10] ENDDATA
END
```

En la línea 1 se definen los conjuntos necesarios para resolver el problema. Los días de la semana (lunes, martes, . . . , domingo) se definen en la línea 2, y se relaciona cada uno con dos cantidades: la cantidad de trabajadores necesarios (RQMT) y la cantidad de empleados que empiezan a trabajar en ese día de la semana (START). Con la línea 3 se termina la definición de los conjuntos.

Se forma una función objetivo, en la línea 4, mediante la suma de la cantidad de trabajadores que empiezan a trabajar cada día de la semana. La restricción que asegura que la cantidad de empleados que labora ese día es por lo menos tan grande como los requisitos del día, se genera en las líneas 5 a 7 para cada día de la semana. Para DAY(I), las líneas 5 y 6 suman la cantidad de empleados que empiezan a trabajar a los valores de J que satisfacen $J > I + 2$ o $J \leq I$ y $J > I - 5$. Por ejemplo, para $I = 1$, se genera la suma START(1) +

```
MODEL:
SETS:
QUARTERS/Q1.Q2.Q3.Q4/:TIME.DEM.RP.OP.INV;
ENDSETS
MIN=@SUM(QUARTERS:400*RP+450*OP+20*INV);
@FOR(QUARTERS(I):RP(I)<40);
@FOR(QUARTERS(I)|TIME(I)#GT#1:
INV(I)=INV(I-1)+RP(I)+OP(I)-DEM(I););
INV(1)=10+RP(1)+OP(1)-DEM(1);
DATA:
DEM=40,60.75,25;
TIME=1.2.3.4;
ENDDATA
 END

MIN     400 RP( Q1) + 450 OP( Q1) + 20 INV( Q1) + 400 RP( Q2)
      + 450 OP( Q2) + 20 INV( Q2) + 400 RP( Q3) + 450 OP( Q3)
      + 20 INV( Q3) + 400 RP( Q4) + 450 OP( Q4) + 20 INV( Q4)
 SUBJECT TO
 2]  RP( Q1) <=   40
 3]  RP( Q2) <=   40
 4]  RP( Q3) <=   40
 5]  RP( Q4) <=   40
 6]- INV( Q1) - RP( Q2) - OP( Q2) + INV( Q2) =  - 60
 7]- INV( Q2) - RP( Q3) - OP( Q3) + INV( Q3) =  - 75
 8]- INV( Q3) - RP( Q4) - OP( Q4) + INV( Q4) =  - 25
 9]- RP( Q1) - OP( Q1) + INV( Q1) =  - 30
 END

Global optimal solution found at step:            7
 Objective value:                          78450.00

                       Variable           Value        Reduced Cost
                      TIME( Q1)        1.000000           0.0000000
                      TIME( Q2)        2.000000           0.0000000
                      TIME( Q3)        3.000000           0.0000000
                      TIME( Q4)        4.000000           0.0000000
                       DEM( Q1)        40.00000           0.0000000
                       DEM( Q2)        60.00000           0.0000000
                       DEM( Q3)        75.00000           0.0000000
                       DEM( Q4)        25.00000           0.0000000
                        RP( Q1)        40.00000           0.0000000
                        RP( Q2)        40.00000           0.0000000
                        RP( Q3)        40.00000           0.0000000
                        RP( Q4)        25.00000           0.0000000
                        OP( Q1)       0.0000000            20.00000
                        OP( Q2)        10.00000           0.0000000
                        OP( Q3)        35.00000           0.0000000
                        OP( Q4)       0.0000000            50.00000
                       INV( Q1)        10.00000           0.0000000
                       INV( Q2)       0.0000000            20.00000
                       INV( Q3)       0.0000000            70.00000
                       INV( Q4)       0.0000000            420.0000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        78450.00            1.000000
                              2       0.0000000            30.00000
                              3       0.0000000            50.00000
                              4       0.0000000            50.00000
                              5        15.00000           0.0000000
                              6       0.0000000            450.0000
                              7       0.0000000            450.0000
                              8       0.0000000            400.0000
                              9       0.0000000            430.0000
```

FIGURA 11

START(4) + START(5) + START(6) + START(7), que es, en realidad, la cantidad de trabajadores que laboran en el día 1 (lunes). Entonces, la línea 7 (junto con las líneas 5 y 6) asegura que la cantidad de trabajadores que laboran en el día I es por lo menos igual a la cantidad necesaria en el día I [RQMT(I)]. Con la línea 8 empieza la sección DATA del programa. Los requisitos para cada día de la semana se introducen en la línea 9.

El apéndice B del capítulo 4 trata más detalles de LINGO. Los capítulos 7, 8, 9, 11 y 14 contienen más ejemplos de problemas resueltos con LINGO.

Escala de los PL

Este análisis de los paquetes para computadora se cierra con la advertencia de que un paquete para PL podría tener problemas al resolver el PL en las cuales hay coeficientes que no son iguales cero y que son muy pequeños o muy grandes en valores absolutos. Si están presentes dichos coeficientes, entonces LINDO muestra un mensaje en el que advierte que la escala del PL es inadecuado. En el manual de LINDO se recomienda que el usuario defina las unidades de la función objetivo, segundo miembro y variables de decisión, de tal manera que ningún coeficiente no cero tenga valores absolutos de más de 100 000 o menores de 0.0001.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Una compañía elabora tres productos. La utilidad por unidad, utilización de mano de obra y contaminación generada por unidad se proporcionan en la tabla 23. Se pueden utilizar cuando mucho 3 millones de horas de mano de obra para elaborar los tres productos, y las regulaciones gubernamentales exigen que la compañía genere cuando mucho 2 lb de contaminación. Si s_i = unidades producidas del producto i, entonces el PL apropiado es

$$\max z = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 3\,000\,000 \\ 0.000003x_1 + 0.000002x_2 + 0.000001x_3 &\le 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

a Explique por qué la escala de este PL es inadecuado.

b Elimine el problema de la escala inadecuada redefiniendo las unidades de la función objetivo, variables de decisión y segundos miembros.

2 Resuelva el problema 1 de la sección 3.5 mediante LINGO.

3 Resuelva el ejemplo 14 del capítulo 3 mediante LINGO.

4 El problema de la **mezcla de productos** se presenta cuando se manufacturan N productos. Cada unidad que se elabora de un producto determinado requiere una cantidad específica de M recursos. Por cada unidad que se elabora del producto j se gana una utilidad p_j. Se dispone de una cantidad r_i de recurso i. Plantee un modelo LINGO que se pueda utilizar para maximizar la utilidad en esta situación. Luego resuelva con él el problema de la mezcla de productos definida por la información de las tablas 24 y 25. Suponga que se permiten números fraccionarios de vehículos.

5 El problema de mezcla de medios se presenta cuando una compañía tiene N medios en los cuales puede poner un anuncio. Hay K grupos de personas a los cuales desea llegar la compañía; además, ésta desea que miembros del grupo i vean sus anuncios por lo menos e_i veces. Un anuncio en el medio j cuesta c_j dólares y llega a a_{ij} miembros del grupo i. El objetivo es minimizar el costo por asegurar que la cantidad deseada de personas en cada grupo ve los anuncios. Establezca un modelo LINGO que se pueda utilizar para resolver cualquier problema de mezcla de medios. Luego resuelva el problema de mezcla de medios definido con la información de las tablas 26 y 27. Suponga que es factible una cantidad fraccionaria de anuncios.

TABLA 23

Producto	Utilidad (dólares)	Utilización de mani de hobra (h)	Contaminación (lb)
1	6	4	0.000003 lb
2	4	3	0.000002 lb
3	3	2	0.000001 lb

TABLA 24

	Automóviles	Camiones	Trenes
Acero utlizado (t)	2	3	5
Caucho utilizado (t)	0.3	0.7	0.2
Mano de obra utlizada (h)	10	12	20
Utilidad por unidad (dólares)	800	1 500	2 500

TABLA 25

Recurso	Cantidad disponible
Acero	50 t
Caucho	10 t
Mano de obra	150 h

TABLA 26

Grupo	Exposiciones necesarias (en millones)
Niños	15
Varones	40
Mujeres	50

TABLA 27

Núm. de	Programa		
Observaciónes (millones)	Sponge Bob	Friends	Dawson's Creek
Niños	3	1	0
Varones	1	15	4
Mujeres	2	20	9
Costo unitario	30 000	360 000	80 000

TABLA 28

	Distrito									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Blancos	400	200	150	300	400	100	200	300	250	150
Negros	200	150	100	120	480	490	140	160	100	160
	Distancia (Millas)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Escuela de bachillerato 1	1	2	3	2	3	4	2	3	1	2
Escuela de bachillerato 2	2	1	3	3	4	2	1	2	2	3
Escuela de bachillerato 3	3	3	2	1	2	3	2	2	3	1

6 Considere el siguiente **problema de asignación de estudiantes a los distritos escolares**. Hay I distritos y J escuelas de bachillerato en una ciudad. La distancia entre el distrito i y la escuela j es d_{ij} millas. En el distrito i hay w_i residentes blancos y b_i residentes negros. Cada escuela de bachillerato debe tener entre L y U estudiantes. En interés de la armonía racial, el porcentaje de negros en cada escuela de bachillerato debe estar entre 80 y 120% del porcentaje de estudiantes negros en toda la ciudad.

a Establezca un modelo de LINGO que se pueda usar para minimizar la distancia total que los estudiantes tendrán que viajar con objeto de cumplir con los requisitos del equilibrio racial.

b Utilice el modelo para resolver el problema planteado con la información de la tabla 28.

c ¿Cuáles podrían ser algunas funciones objetivo alternativas para esta situación?

d ¿Ve algún otro problema con nuestro modelo?

4.11 Degeneración y la convergencia del algoritmo simplex

Desde el punto de vista teórico, el algoritmo simplex (como ya se explicó) puede fracasar en la búsqueda de una solución óptima de un PL. No obstante, los PL que surgen de las aplicaciones actuales, rara vez muestran este desagradable comportamiento. Para tener el panorama completo, se analiza ahora el tipo de situación en la cual el simplex falla. El análisis depende decisivamente de la relación siguiente (para un problema de maximización) entre los valores de z para la sfb actual y la nueva sfb (es decir, la sfb después del siguiente pivoteo):

$$\begin{aligned}\text{valor de } z \text{ para la nueva sfb} &= \text{valor de } z \text{ de la sfb actual}\\ &\quad - (\text{valor de la variable entrante en la nueva sfb})(\text{coeficiente}\\ &\qquad \text{de la variable entrante en el renglón 0 de la sfb actual})\end{aligned} \tag{15}$$

La ecuación (15) se infiere porque por cada unidad que se incremente la variable entrante, z se incrementa en –(coeficiente de la variable entrante en el renglón 0 de la sfb actual). Recuerde que (coeficiente de la variable entrante en el renglón 0) < 0 y (valor de la variable entrante en la nueva sfb) ≥ 0. Al combinar estos hechos con (15) es posible deducir los hechos siguientes:

1 Si (valor de la variable entrante en la nueva sfb) > 0, entonces (valor de z para la nueva sfb) $>$ (valor de z para la actual sfb).

2 Si (valor de la variable entrante en la nueva sfb) $= 0$, entonces (valor de z para la nueva sfb) $=$ (valor de z para la actual sfb).

Por el momento, suponga que el PL que se está resolviendo tiene la propiedad siguiente: en cada una de las soluciones factibles básicas del PL, todas las variables básicas son positivas (positiva quiere decir $>$ cero). Un PL con esta propiedad es un **PL no degenerado.**

Si se usa el algoritmo simplex para resolver un PL no degenerado, el hecho 1 de la lista anterior señala que cada iteración del algoritmo simplex incrementará a z. Esto quiere decir que cuando el algoritmo simplex se usa para resolver un PL no degenerado es imposible encontrar la misma sfb dos veces. Para entenderlo mejor, suponga que estamos en una solución factible básica (llamada sfb 1) cuya $z = 20$. El hecho 1 señala que nuestro siguiente pivote nos llevará a una sfb (sfb 2) cuya $z > 20$. Como ningún pivote futuro reducirá a z, ya nunca podremos regresar a una sfb que tenga $z = 20$. Por tanto, nunca regresaremos a la sfb 1. Recuérdese ahora que cada PL tiene sólo un número finito de soluciones factibles básicas. Como nunca podemos repetir una sfb, este razonamiento demuestra que cuando usamos el algoritmo simplex para resolver un PL no degenerado, tenemos la garantía de encontrar la solución óptima en un número finito de iteraciones. Por ejemplo, suponga que está resolviendo un PL no degenerado con 10 variables y 5 restricciones. Dicho PL tiene cuando mucho

$$\binom{10}{5} = 252$$

soluciones factibles básicas. Nunca se repetirá una sfb, así que ya sabe que para este problema el algoritmo simplex garantiza que encontrará una solución óptima después de cuando mucho 252 pivoteos.

Sin embargo, el algoritmo simplex podría fracasar con un PL degenerado.

DEFINICIÓN ■ Un PL es **degenerado** si tiene por lo menos una sfb en la cual una variable básica es igual a cero. ■

El PL siguiente es degenerado:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \le 0 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{16}$$

¿Qué sucede cuando se usa el algoritmo simplex para resolver (16)? Después de sumar las variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones se obtiene el tableau inicial de la tabla 29. En esta sfb, la variable básica $s_2 = 0$. Por lo tanto, (16) es uno PL degenerado. Cualquiera sfb que tenga por lo menos una variable básica igual a cero (o, en forma equivalente, por lo menos una restricción con un cero en el segundo miembro o lado derecho) es una **sfb degenerada**. Como $-5 < -2$, se introduce x_1 en la base. El cociente respectivo es 0. Esto significa que después de que x_1 entra a la base, x_1 se volverá igual a cero en la nueva sfb. Después de efectuar el pivoteo, se obtiene el tableau de la tabla 30. La nueva sfb

TABLA 29
Un PL degenerado

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	−5	−2	0	0	0	$z = 0$	
0	1	1	1	0	6	$s_1 = 6$	6
0	1	−1	0	1	0	$s_2 = 0$	0*

TABLA 30
Tableau óptimo para (16)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	−7	0	5	0	$z = 0$	
0	0	2	1	−1	6	$s_1 = 6$	$\frac{6}{2} = 3$*
0	1	−1	0	1	0	$x_1 = 0$	Ninguno

TABLA 31
Tableau óptimo para (16)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Ld	Básica variable
1	0	0	3.5	1.5	21	$z = 21$
0	0	1	0.5	-0.5	3	$x_2 = 3$
0	1	0	0.5	0.5	3	$x_1 = 3$

tiene el mismo valor z que la sfb antigua. Esto es consistente con el hecho 2. ¡Todas las variables tienen exactamente, en la nueva sfb, el mismo valor que tenían antes del pivoteo! Por tanto, la nueva sfb también es degenerada. Al continuar con el algoritmo simplex se introduce x_2 en el renglón 1. El arreglo resultante se muestra en la tabla 31. Es un arreglo óptimo, así que la solución óptima para (16) es $z = 21, x_2 = 3, x_1 = 3, s_1 = s_2 = 0$.

Ahora ya se puede explicar la razón de que el algoritmo simplex pueda tener problemas al resolver un PL degenerado. Suponga que estamos resolviendo un PL degenerado para lo cual el valor de z óptimo es $z = 20$. Si iniciamos con la sfb que tenemos, es decir, $z = 20$, sabemos (al observar el PL que apenas resolvimos) que es posible para un pivoteo dejar sin cambio el valor de z. Esto significa que es posible para una sucesión de pivoteos como la siguiente que ocurra:

$$
\begin{aligned}
\text{sfb inicial (sfb 1): } z &= 20\\
\text{Después del primer pivoteo (sfb 2): } z &= 20\\
\text{Después del segundo pivoteo (sfb 3): } z &= 20\\
\text{Después del tercer pivoteo (sfb 4): } z &= 20\\
\text{Después del cuarto pivoteo (sfb 1): } z &= 20
\end{aligned}
$$

En esta situación nos encontramos la misma sfb dos veces. Este hecho se llama **ciclo**. Si se presenta un ciclo, entonces estaremos dando vueltas por siempre entre un conjunto de soluciones factibles básicas, y nunca alcanzaremos la solución óptima ($z = 30$, en nuestro ejemplo). Ciertamente ocurren los ciclos (*véase* el problema 3 al final de esta sección). Por fortuna, el algoritmo simplex se puede modificar para que los ciclos nunca se presenten [*véase* Bland (1977) o Dantzig (1963) donde encontrará más detalles].† En Kotiah y Slater (1973) hay un ejemplo práctico acerca de ciclos.

Si un PL tiene varias soluciones factibles básicas degeneradas (o una sfb con varias variables iguales a cero), entonces el algoritmo simplex es, muchas veces, ineficaz. Para entender por qué, examine la región factible para (16) en la figura 12, el triángulo sombreado *BCD*. Los puntos extremos de la región factible son *B*, *C* y *D*. Al seguir el procedimiento descrito en la sección 4.2, observe la correspondencia entre las soluciones factibles básicas para (16) y los puntos extremos de su región factible (*véase* tabla 32). Tres conjuntos de variables básicas corresponden al punto extremo *C*. Se puede demostrar que para que un PL con n variables de decisión sea degenerado, $n + 1$ o más de las restricciones del PL (sin olvidar las restricciones de signo $x_i \geq 0$ como restricciones) deben ser activas en un punto extremo.

En (16), las restricciones $x_1 - x_2 \leq 0$, $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ son activas u obligatorias en el punto *C*. Cada punto extremo en el cual tres o más restricciones sean activas, corresponderá a más de un conjunto de variables básicas. Por ejemplo, en el punto *C*, s_1 debe ser una de las variables básicas, pero la otra variable básica debe ser x_2, x_1 o s_2.

†Bland demostró que es posible evitar los ciclos mediante la aplicación de las reglas siguientes (suponga que las variables de holgura y de excedente se numeran $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$):

1 Seleccione como variable entrante (en un problema de maximización) a la variable con coeficiente negativo que tenga el subíndice más pequeño en el renglón 0.

2 Si hay un vínculo en la prueba del cociente, deshágalo escogiendo al ganador de la prueba del cociente, de tal manera que la variable deje la base que tiene el subíndice más pequeño.

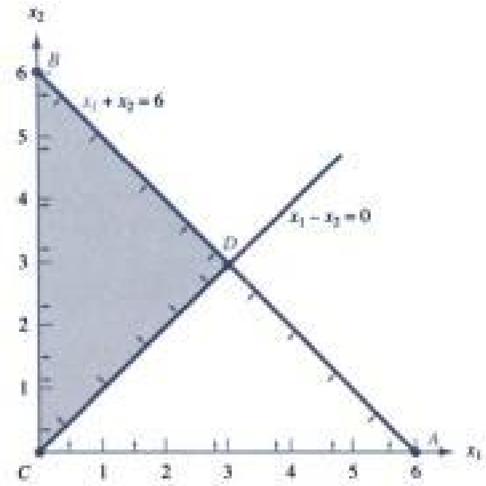


FIGURA 12
Región factible para el PL (16)

TABLA 32
Tres conjuntos de variables básicas corresponden al vértice *C*

Variables básicas	Solución factible básica	Corresponde a punto extremo
x_1, x_2	$x_1 = x_2 = 3, s_1 = s_2 = 0$	D
x_1, s_1	$x_1 = 0, s_1 = 6, x_2 = s_2 = 0$	C
x_1, s_2	$x_1 = 6, s_2 = -6, x_2 = s_1 = 0$	No factible
x_2, s_1	$x_2 = 0, s_1 = 6, x_1 = s_2 = 0$	C
x_2, s_2	$x_2 = 6, s_2 = 6, s_1 = x_1 = 0$	B
s_1, s_2	$s_1 = 6, s_2 = 0, x_1 = x_2 = 0$	C

También ya es posible analizar por qué el algoritmo simplex muchas veces es un método ineficaz para resolver PL degenerados. Suponga que un PL es degenerado. Entonces podría haber muchos conjuntos (quizá cientos) de variables básicas que corresponden a algún punto extremo no óptimo. El algoritmo simplex podría encontrar todos estos conjuntos de variables básicas antes de advertir que era un punto extremo no óptimo. Este problema se ilustró (a pequeña escala) al resolver (16): el algoritmo simplex efectuó dos pivoteos antes de encontrar que el punto C era subóptimo. Por fortuna, algunos PL degenerados tienen una estructura especial que permite resolverlas por medio de métodos distintos al algoritmo simplex (*véase* por ejemplo el análisis del problema de asignación en el capítulo 7).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Incluso si un arreglo inicial de un PL es no degenerado, los tableaus podrían mostrar después degeneración. Los tableaus degenerados se presentan a menudo en el tableau que sigue a un empate en la prueba del cociente. Con el fin de ilustrar lo anterior resuelva el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ 4x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grafique también la región factible y muestre cuáles puntos extremos corresponden a más de un conjunto de variables básicas.

2 Determine la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 1 \\ -x_1 + x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

3 Demuestre que si se rompen los empates en la prueba del cociente por preferir al renglón 1 y no al renglón 2, entonces se presentan los ciclos cuando el siguiente PL se resuelve mediante el algoritmo simplex:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 12x_4 \\
\text{s.a} \quad & -2x_1 - 9x_2 + x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
& \tfrac{x_1}{3} + x_2 - \tfrac{x_3}{3} - 2x_4 \leq 0 \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

4 Demuestre que si los empates se rompen por favorecer a los renglones de numeración baja, entonces se presentan los ciclos cuando se usa el método simplex para resolver el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= -3x_1 + x_2 - 6x_3 \\
9x_1 + x_2 - 9x_3 - 2x_4 &\leq 0 \\
x_1 + \tfrac{x_2}{3} - 2x_3 - \tfrac{x_4}{3} &\leq 0 \\
-9x_1 - x_2 + 9x_3 + 2x_4 &\leq 1 \\
x_i \geq 0 \quad (i &= 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

5 Demuestre que si la Regla de Bland para evitar los ciclos se aplica al problema 4, entonces no se presentan los ciclos.

6 Considere un PL (problema de maximización) en el cual cada solución factible básica es no degenerada. Suponga que x_i es la única variable en nuestro arreglo actual que tiene coeficiente negativo en el renglón 0. Demuestre que cualquier solución óptima para el PL debe tener $x_i > 0$.

4.12 Método de la gran M

Recuerde que el algoritmo simplex requiere una sfb inicial. En todos los problemas que se han resuelto hasta ahora se determinó una sfb inicial usando las variables de holgura como si fueran variables básicas. Pero si un PL tiene alguna restricción $\geq$ o de igualdad, no sería tan evidente una sfb inicial. Mediante el ejemplo 4 se ilustra cuán difícil podría ser encontrar una sfb. Cuando una sfb no es evidente, el **método de la gran M** (o el método simplex de dos fases de la sección 4.13) se podría aplicar para resolver el problema. En esta sección se trata el método de la gran M, una versión del algoritmo simplex que determina primero un sfb mediante la suma de variables "artificiales" al problema. Naturalmente, la función objetivo del PL original se tiene que modificar para que las variables artificiales sean iguales a cero en la conclusión del algoritmo simplex. El ejemplo siguiente ilustra el método de la gran M.

EJEMPLO 4 Bevco

Bevco elabora una bebida carbonatada sabor naranja que se llama Oranj mediante la combinación de agua carbonatada de naranja y jugo de naranja. Cada onza de agua carbonatada de naranja contiene 0.5 onzas de azúcar y 1 mg de vitamina C. Cada onza de jugo de naranja contiene 0.25 onzas de azúcar y 3 mg de vitamina C. Bevco gasta 2 centavos por producir 1 onza de agua carbonatada de naranja y 3 centavos por elaborar 1 onza de jugo de naranja. El departamento de mercadotecnia de Bevco decidió que la botella de 10 onzas de Oranj debe contener por lo menos 20 mg de vitamina C y cuando mucho 4 onzas de azúcar. Utilice la programación lineal para determinar cómo Bevco puede cumplir los requisitos del departamento de mercadotecnia a un costo mínimo.

Solución Sea

x_1 = cantidad de onzas de agua carbonatada de naranja en una botella de Oranj

x_2 = cantidad de onzas de jugo de naranja en una botella de Oranj

Entonces, el PL apropiado es

$$
\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &\leq 4 \qquad \text{(Restricción del azúcar)} \\
x_1 + 3x_2 &\geq 20 \qquad \text{(Restricción de la vitamina C)}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$\text{s.a} \qquad x_1 + x_2 = 10 \qquad \text{(10 oz en una botella de Oranj)}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(La solución se obtiene después en esta misma sección.)

Para transformar a (17) en la forma estándar se agrega una variable de holgura s_1 a la restricción del azúcar y se resta una variable de excedente e_2 de la restricción de la vitamina C. Después de escribir la función objetivo como $z - 2x_1 - 3x_2 = 0$ se obtiene la forma estándar siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Renglón 0:} & z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ \text{Renglón 1:} & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ \text{Renglón 2:} & x_1 + 3x_2 - e_2 = 20 \\ \text{Renglón 3:} & x_1 + x_2 = 10 \end{array} \tag{18}$$

Todas las variables son no negativas

En la búsqueda de una sfb se observa que $s_1 = 4$ se podría utilizar como una variable básica (y factible) para el renglón 1. Si se multiplica el renglón 2 por -1, entonces $e_2 = -20$ se podría usar como una variable básica en el renglón 2. Desafortunadamente, $e_2 = -20$ viola la restricción de signo $e_2 \geq 0$. Por último, no son evidentes las variables básicas en el renglón 3. Por lo tanto, con objeto de usar el algoritmo simplex para resolver (17), los renglones 2 y 3 necesitan cada uno una variable básica (y factible). Para solucionar este problema, se "inventa" simplemente una variable básica factible por cada limitación que necesite una. Como nosotros creamos estas variables y no son variables reales, las llamamos **variables artificiales.** Si una variable artificial se suma al renglón i, la denominamos a_i. En el problema actual se requiere añadir una variable artificial a_2 al renglón 2 y una variable artificial a_3 al renglón 3. El conjunto de ecuaciones resultante es

$$\begin{array}{r} z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \\ x_1 + x_2 + a_3 = 10 \end{array} \tag{18}$$

Entonces se tiene una sfb: $z = 0$, $s_1 = 4$, $a_2 = 20$, $a_3 = 10$. No hay garantía, desafortunadamente, de que la solución óptima para (18) sea la misma solución óptima para (17). Al resolver (18) se podría llegar a una solución óptima en la cual una o más variables artificiales son positivas. Tal solución podría no ser factible en el problema original (17). Por ejemplo, al resolver (18), se podría demostrar con toda facilidad que la solución óptima es $z = 0$, $s_1 = 4$, $a_2 = 20$, $a_3 = 10$, $x_1 = x_2 = 0$. Esta "solución" no contiene vitamina C y pone 0 onzas de agua carbonatada en una botella, ¡así que posiblemente no resuelve nuestro problema original! Si la solución óptima para (18) es resolver (17), entonces hay que estar seguros de que la solución óptima para (18) hace que todas las variables artificiales sean iguales a cero. En un problema de minimización es posible asegurar que todas las variables artificiales serán cero al sumar un término Ma_i a la función objetivo por cada variable artificial a_i. (En un problema de maximización, sume un término $-Ma_i$ a la función objetivo.) Aquí M representa un número positivo "muy grande". Por lo tanto, en (18), la función objetivo cambiaría a

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

Entonces, el renglón 0 cambiaría a

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

Modificar la función objetivo de esta manera hace extremadamente costoso que una variable artificial sea positiva. Con esta función objetivo modificada parece razonable que la solución óptima para (18) tenga $a_2 = a_3 = 0$. En este caso, la solución óptima para (18) resuelve el problema original (17). Sin embargo, sucede a veces que al resolver el análogo de (18), algunas de las variables artificiales podrían asumir valores positivos en la solución óptima. Si esto sucediera, el problema original no tiene solución factible.

Por razones obvias, el método que se ha explicado recibe el nombre de método de la gran M. Enseguida se presenta una explicación formal de este método.

Descripción del Método de la gran M

Paso 1 Modifique las restricciones de tal manera que el segundo miembro o lado derecho de cada una sea no negativo. Para lograrlo, cada restricción con un segundo miembro negativo se multiplica por –1. Recuerde que si usted multiplica una desigualdad por un número negativo, se invierte la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, este método transformaría la desigualdad $x_1 + x_2 \geq -1$ en $-x_1 - x_2 \leq 1$. También transformaría $x_1 - x_2 \leq -2$ en $-x_1 + x_2 \geq 2$.

Paso 1' Identifique cada restricción que es ahora (después del paso 1) una restricción $=$ o $\geq$. En el paso 3 se suma una variable artificial a cada una de estas restricciones.

Paso 2 Convierta cada restricción de desigualdad en la forma estándar. Esto quiere decir que si la restricción i es una restricción $\leq$ se suma una variable de holgura s_1, y si la restricción i es una restricción $\geq$, se resta una variable de excedente e_i.

Paso 3 Si (después de haber terminado el paso 1) la restricción i es una restricción $\geq$ o $=$, sume una variable artificial a_i. También sume la restricción de signo $a_i \geq 0$.

Paso 4 Sea M un número positivo muy grande. Si el PL es un problema de minimización, sume (por cada variable artificial) Ma_i a la función objetivo. Si el PL es un problema de maximización, sume (por cada variable artificial) $-Ma_i$ a la función objetivo.

Paso 5 Como cada variable artificial está en la base de inicio, todas las variables artificiales se tienen que eliminar del renglón 0 antes de empezar el simplex. De esta manera se asegura que se empieza con una forma canónica. Al elegir la variable entrante, recuerde que M es un número positivo muy grande. Por ejemplo, $4M - 2$ es más positivo que $3M + 900$, y $-6M - 5$ es más negativo que $-5M - 40$. Ahora se resuelve el problema transformado por el simplex. Si todas las variables artificiales son iguales a cero en la solución óptima, entonces se ha encontrado la solución óptima del problema original. Si algunas variables artificiales son positivas en la solución óptima, entonces el problema original es no factible.†

Cuando una variable artificial deja la base, se podría suprimir su columna desde arreglos futuros porque el objetivo de una variable artificial es sólo lograr una solución factible básica inicial. Una vez que la variable artificial abandona la base, ya no se le necesita. A pesar de este hecho se conservan a menudo las variables artificiales en todos los arreglos. La razón es evidente en la sección 6.7.

Solución **Ejemplo 4 (Continuación)**

Paso 1 Como ninguna de las restricciones tiene un lado derecho negativo, no se tiene que multiplicar restricción alguna por -1.

†Se ha ignorado la posibilidad de que cuando el PL (con las variables artificiales) se resuelve, el arreglo final podría indicar que el PL es no acotado y que todas las variables artificiales en este arreglo son iguales a cero, entonces el PL original es no acotado. Si el arreglo final indica que el PL es no acotado y por lo menos una variable artificial es positiva, entonces el PL original es no factible. Véanse más detalles en Bazaraa y Jarvis (1990).

Paso 1' Las restricciones 2 y 3 requieren variables artificiales.

Paso 2 Sume una variable de holgura s_1 al renglón 1 y reste una variable de excedente e_2 del renglón 2. El resultado es

$$\begin{aligned} &\min z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{Renglón 1:} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ &\text{Renglón 2:} \quad x_1 + 3x_2 - e_2 = 20 \\ &\text{Renglón 3:} \quad x_1 + x_2 = 10 \end{aligned}$$

Paso 3 Sume una variable artificial a_2 al renglón 2 y una variable artificial a_3 al renglón 3. El resultado es

$$\begin{aligned} &\min z = 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{Renglón 1:} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\ &\text{Renglón 2:} \quad x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20 \\ &\text{Renglón 3:} \quad x_1 + x_2 + a_3 = 10 \end{aligned}$$

A partir de este arreglo se observa que la sfb inicial es $s_1 = 4$, $a_2 = 20$ y $a_3 = 10$.

Paso 4 Como se está resolviendo un problema de minimización, se suma $Ma_2 + Ma_3$ a la función objetivo (si se estuviera trabajando con un problema de maximización, se sumaría $-Ma_2 - Ma_3$). Lo anterior hace a a_2 y a_3 muy poco atractivas, además de que el hecho de minimizar z ocasiona que a_2 y a_3 sean cero. La función objetivo es ahora

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

Paso 5 El renglón 0 es entonces

$$z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0$$

Como a_2 y a_3 están en la sfb de inicio (que es la razón de haberlas introducido) se tienen que eliminar del renglón 0. Para eliminar a_2 y a_3 del renglón 0, simplemente se reemplaza el renglón 0 por renglón 0 + M(renglón 2) + M(renglón 3). Así se obtiene

$$\begin{aligned} &\text{Renglón 0:} \quad z - 2x_1 - 3x_2 - Ma_2 - Ma_3 = 0 \\ &M(\text{renglón 2}): \quad Mx_1 + 3Mx_2 - Me_2 + Ma_2 = 20M \\ &M(\text{renglón 3}): \quad Mx_1 + Mx_2 + Ma_3 = 10M \\ &\text{Nuevo renglón 0:} \quad z + (2M - 2)x_1 + (4M - 3)x_2 - Me_2 = 30M \end{aligned}$$

Al combinar el nuevo renglón 0 con los renglones 1 a 3 se obtiene el arreglo inicial de la tabla 33.

Se está trabajando con un problema de minimización, así que la variable con el coeficiente más positivo en el renglón 0 debe entrar a la base. Como $4M - 3 > 2M - 2$, la variable x_2 debe entrar a la base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar a la base en el renglón 2, lo cual significa que la variable a_2 debe dejar la base. La parte más difícil de hacer en el pivoteo es eliminar x_2 del renglón 0. Primero se reemplaza el renglón 2 por $\frac{1}{3}$(renglón

TABLA 33
Arreglo inicial de Bevco

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica	Cociente
1	$2M - 2$	$4M - 3$	0	$-M$	0	0	$30M$	$z_2 = 30M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2 = 20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10

TABLA 34
Primer tableau para Bevco

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable Básica	Cociente
1	$\frac{2M-3}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{60+10M}{3}$	$z = \frac{60+10M}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1 = \frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2 = \frac{20}{3}$	20
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3 = \frac{10}{3}$	25*

2). Por lo tanto, el nuevo renglón 2 es

$$\tfrac{1}{3}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{3}e_2 + \tfrac{1}{3}a_2 = \tfrac{20}{3}$$

Enseguida se puede eliminar x_2 del renglón 0 sumando $-(4M - 3)$(nuevo renglón 2) al renglón 0, o bien, $(3 - 4M)$(nuevo renglón 2) + renglón 0. Ahora,

$$(3 - 4M)(\text{nuevo renglón } 2) =$$

$$\frac{(3 - 4M)x_1}{3} + (3 - 4M)x_2 - \frac{(3 - 4M)e_2}{3} + \frac{(3 - 4M)a_2}{3} = \frac{20(3 - 4M)}{3}$$

$$\text{Renglón 0:} \qquad z + (2M - 2)x_1 + (4M - 3)x_2 - Me_2 = 30M$$

$$\text{Nuevo renglón 0: } z + \frac{(2M - 3)x_1}{3} + \frac{(M - 3)e_2}{3} + \frac{(3 - 4M)a_2}{3} = \frac{60 + 10M}{3}$$

Después de efectuar algunas OER para eliminar x_2 del renglón 1 y del renglón 3 se obtiene el tableau de la tabla 34. Como $\frac{2M-3}{3} > \frac{M-3}{3}$, se introduce x_1 a la base. La prueba del cociente indica que x_1 debe entrar a la base en el tercer renglón del tableau actual. Luego a_3 dejará la base, y el siguiente tableau tendrá $a_2 = a_3 = 0$. Para introducir x_1 a la base en el renglón 3 primero se reemplaza el renglón 3 por $\frac{3}{2}$(renglón 3). Por lo tanto, el nuevo renglón 3 será

$$x_1 + \frac{e_2}{2} - \frac{a_2}{2} + \frac{3a_3}{2} = 5$$

Para eliminar x_1 del renglón 0, se reemplaza el renglón 0 por renglón 0 + $(3 - 2M)$(nuevo renglón 3)/3.

$$\text{Renglón 0:} \qquad z + \frac{(2M - 3)x_1}{3} + \frac{(M - 3)e_2}{3} + \frac{(3 - 4M)a_2}{3} = \frac{60 + 10M}{3}$$

$$\frac{(3 - 2M)(\text{nuevo renglón 3})}{3}: \frac{(3 - 2M)x_1}{3} + \frac{(3 - 2M)e_2}{6} + \frac{(2M - 3)a_2}{6} + \frac{(3 - 2M)a_3}{2} = \frac{15 - 10M}{3}$$

$$\text{Nuevo renglón 0:} \qquad z - \frac{e_2}{2} + \frac{(1 - 2M)a_2}{2} + \frac{(3 - 2M)a_3}{2} = 25$$

El nuevo renglón 1 y el nuevo renglón 2 se calculan como siempre, lo cual origina el tableau de la tabla 35. Como todas las variables en el renglón 0 tienen coeficientes no positivos, éste es un tableau óptimo; todas las variables artificiales son iguales a cero en este tableau, por lo que se ha encontrado la solución óptima del problema de Bevco: $z = 25$, $x_1 = x_2 = 5$, $s_1 = \frac{1}{4}$, $e_2 = 0$. Esto significa que Bevco puede mantener el costo de producir una botella de 10 onzas de Oranj a 25 centavos mediante la combinación de 5 onzas de agua carbonatada de naranja, y 5 onzas de jugo de naranja. Obsérvese que la columna de a_2 podría ser suprimida después de que a_2 deja la base (al concluir el primer pivoteo), y que la columna de a_3 se podría eliminar después de que a_3 deja la base (cuando concluye el segundo pivoteo).

TABLA 35
Tableau óptimo para Bevco

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ld	Variable Básica
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25	$z = 25$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

Cómo detectar un PL no factible

Ahora modificaremos el problema de Bevco: se requiere que una botella de 10 onzas de Oranj contenga por lo menos 36 miligramos de vitamina C. Aun cuando 10 onzas de jugo de naranja contienen sólo 3(10) = 30 mg de vitamina C, se sabe que Bevco posiblemente no puede cumplir con las nuevas cantidades de vitamina C. Esto quiere decir que el PL de Bevco quizá no tenga solución factible. Veamos cómo el método de la gran M revela la no factibilidad del PL. Hemos cambiado el PL de Bevco por

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &\le 4 \quad &&\text{(Restricción del azúcar)} \\ x_1 + 3x_2 &\ge 36 \quad &&\text{(Restricción de la vitamina C)} \\ x_1 + x_2 &= 10 \quad &&\text{(Restricción de las 10 oz)} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Después de efectuar los pasos 1 a 5 del método de la gran M se obtiene el tableau inicial de la tabla 36. Como $4M - 3 > 2M - 2$, se introduce x_2 a la base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar en el renglón 3, lo que ocasiona que a_3 deje la base. Después de que x_2 entra a la base, se obtiene el tableau de la tabla 37. Puesto que cada variable tiene coeficiente no positivo en el renglón 0, éste es un tableau óptimo. La solución óptima que este tableau indica es $z = 30 + 6M$, $s_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 6$, $x_2 = 10$, $a_3 = e_2 = x_1 = 0$. Una variable artificial (a_2) es positiva en el tableau óptimo, por lo que el paso 5 muestra que el PL original no tiene solución factible.[†] En resumen, *si alguna variable artificial es positiva en el arreglo óptimo de la gran M, entonces el PL original no tiene solución factible.*

TABLA 36
Arreglo inicial para Bevco (no factible)

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ld	Variable básica	Cociente
1	$2M - 2$	$4M - 3$	0	$-M$	0	0	$46M$	$z = 46M$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	36	$a_2 = 36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10*

[†]Para explicar por qué (19) no puede tener solución factible, suponga que lo es $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Evidentemente, si se establece que $a_3 = a_2 = 0$, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ será factible para el PL modificado (el PL con variables artificiales). Si se sustituye $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ en la función objetivo modificada ($z = 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + Ma_2 + Ma_3$), se obtiene $z = 2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2$ (esto se infiere porque $a_3 = a_2 = 0$). Como M es grande, este valor de z es ciertamente menor que $6M + 30$. Lo anterior contradice el hecho de que el mejor valor de z para la función objetivo modificada es $6M + 30$. Esto significa que el PL original (19) no debe tener solución factible.

TABLA 37

Tableau que indica ausencia de factibilidad para Bevco (no factible)

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	$1 - 2M$	0	0	$-M$	0	$3 - 4M$	$30 + 6M$	$z_2 = 6M + 30$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1 = \frac{3}{2}$
0	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_2 = 6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2 = 10$

Obsérvese que cuando se usa el método de la gran M, es difícil determinar qué tan grande debe ser M. Por lo regular, se elige que M sea por lo menos 100 veces más grande que el coeficiente más grande en la función objetivo original. La introducción de números tan grandes en el problema, puede ocasionar errores de redondeo (BA; ROUNDOFF) y otras dificultades de cálculo. Por esta razón, la mayoría de códigos de computadoras resuelve PL mediante el método simplex de dos fases (que se explica en la sección 4.13).

PROBLEMAS

Grupo A

Aplique el método de la M grande para resolver los PL siguientes:

1 $\min z = 4x_1 + 4x_2 + x_3$

s.a $2x_1 + x_2 + x_3 \le 2$

$2x_1 + x_2 \le 3$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 3$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

2 $\min z = 2x_1 + 3x_2$

s.a $2x_1 + x_2 \ge 4$

$x_1 - x_2 \ge -1$

$x_1, x_2 \ge 0$

3 $\max z = 3x_1 + x_2$

s.a $x_1 + x_2 \ge 3$

$2x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 + x_2 = 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

4 $\min z = 3x_1$

s.a $2x_1 + x_2 \ge 6$

$3x_1 + 2x_2 = 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

5 $\min z = x_1 + x_2$

s.a $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

6 $\min z = x_1 + x_2$

s.a $x_1 + x_2 = 2$

$2x_1 + 2x_2 = 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

4.13 Método simplex de dos fases†

Cuando una solución factible básica no está fácilmente disponible, se podría utilizar el método simplex de dos fases en lugar del método de la gran M. En el método simplex de dos fases, se suman variables artificiales a las mismas restricciones, igual que en método de la gran M. Luego se encuentra una sfb para el PL original mediante la resolución del PL de la fase I. En el PL de la fase I, la función objetivo es para minimizar la suma de todas las variables artificiales. Al finalizar la fase I, se reintroduce la función objetivo del PL original y se determina la solución óptima para el PL original.

Con los siguientes pasos se explica el método simplex de dos fases. Note que los pasos 1 a 3 de este método son idénticos a los pasos 1 a 3 del método de la gran M.

†En esta sección se tratan temas que se podrían omitir sin que se pierda la continuidad.

Paso 1 Modifique las restricciones de tal manera que el segundo miembro o lado derecho de cada una sea no negativo. Para lograrlo, se multiplica cada restricción con un segundo miembro negativo por -1.

Paso 1′ Identifique cada restricción que ahora es (después del paso 1) una restricción $=$ o $\geq$. En el paso 3 se suma una variable artificial a cada una de estas restricciones.

Paso 2 Convierta cada restricción de desigualdad en la forma estándar. Si la restricción i es una restricción $\leq$ se suma entonces una variable de holgura s_i. Si la restricción i es una restricción $\geq$, se resta una variable de excedente e_i.

Paso 3 Si (después de haber terminado el paso 1) la restricción i es una restricción $\geq$ o $=$, sume una variable artificial a_i. También sume la restricción de signo $a_i \geq 0$.

Paso 4 Por ahora ignore la función objetivo del PL original. Mientras, resuelva un PL cuya función objetivo es min w' = (suma de todas las variables artificiales). A esta parte se le denomina PL de la fase I. El hecho de resolver el PL de la fase I forzará a las variables artificiales a ser cero.

Como cada $a_i \geq 0$, al resolver el PL de la fase I dará como resultado uno de los tres casos siguientes:

Caso 1 El valor óptimo de w' es mayor que cero. En este caso, el PL original no tiene solución factible.

Caso 2 El valor óptimo de w' es igual a cero y ninguna variable artificial está en la base óptima de la fase I. En este caso, se suprimen todas las columnas del arreglo óptimo de la fase I que corresponden a las variables artificiales. Luego se combinan la función objetivo original y las restricciones del arreglo óptimo de la fase I. Así se obtiene el **PL de la fase II.** La solución óptima para el PL de la fase II es la solución óptima del PL original.

Caso 3 El valor óptimo de w' es igual a cero y por lo menos una variable artificial está en la base óptima de la fase I. En este caso se puede encontrar la solución óptima del PL original si al final de la fase I se eliminan, del arreglo óptimo de la fase I, todas las variables artificiales no básicas y cualquier variable del problema original que tenga coeficiente negativo en el renglón 0 del arreglo óptimo de la fase 1.

Antes de resolver ejemplos que ilustren los casos 1 a 3, se analiza brevemente por qué $w' > 0$ corresponde al PL original que no tiene solución factible y $w' = 0$ corresponde al PL original que tiene por lo menos una solución factible

Soluciones factibles de la fase I y fase II

Suponga que el PL original es no factible. Entonces, la única manera de obtener una solución factible para el PL de la fase 1 es hacer positiva por lo menos una variable artificial. En esta situación resultará $w' > 0$ (caso 1). Por otro lado, si el PL original tiene una solución factible, entonces esta solución (con todas las $a_i = 0$) es factible en el PL de la fase 1 y da $w' = 0$. Esto quiere decir que si el PL original tiene una solución factible, la solución óptima de la fase I tendrá $w' = 0$. Enseguida se ilustran por medio de ejemplos los casos 1 y 2 del método simplex de dos fases.

EJEMPLO 5 Simplex de dos fases: caso 2

Se usa el simplex de dos fases para resolver primero el problema de Bevco de la sección 4.12. Recuerde que el problema de Bevco era

$$\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &\leq 4 \\
x_1 + 3x_2 &\geq 20 \\
x_1 + x_2 &= 10 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Solución Al igual que en el método de la gran M, por medio de los pasos 1 a 3, se transforman las restricciones en

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad &= 4\\
x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad &= 20\\
x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad\qquad + a_3 &= 10
\end{aligned}$$

El paso 4 genera el siguiente PL de la fase I:

$$\begin{aligned}
&\min w' = a_2 + a_3\\
&\text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 \qquad\qquad = 4\\
&\qquad\quad x_1 + 3x_2 \qquad - e_2 + a_2 \qquad = 20\\
&\qquad\quad x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad\qquad + a_3 = 10
\end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones proporciona una sfb de inicio para la fase I ($s_1 = 4$, $a_2 = 20$, $a_3 = 10$).

Obsérvese que el renglón 0 de este tableau ($w' - a_2 - a_3 = 0$) contiene las variables básicas a_2 y a_3. Como en el método de la gran M, a_2 y a_3 se deben eliminar del renglón 0 antes de poder resolver la fase I. Se suman simplemente el renglón 2 y el renglón 3 al renglón 0 para eliminar a_2 y a_3 del renglón 0:

$$\begin{array}{ll}
\text{Renglón 0:} & w' \qquad\qquad\qquad\qquad - a_2 - a_3 = 0\\
+\ \text{Renglón 2:} & \qquad x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 \qquad = 20\\
+\ \text{Renglón 3:} & \qquad x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad + a_3 = 10\\
=\ \text{Nuevo renglón 0:} & w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 \qquad\quad = 30
\end{array}$$

Al combinar el nuevo renglón 0 con las restricciones de la fase I se obtiene el tableau inicial de la fase I de la tabla 38. Como el problema de la fase I es *siempre* un problema de minimización (incluso si el PL original es un problema de maximización), se introduce x_2 a la base. La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar a la base en el renglón 2, y salir a_2. Después de efectuar las OER pertinentes se llega al tableau de la tabla 39. Como $5 < 20$ y $5 < \frac{28}{5}$, x_1 entra a la base en el renglón 3. Por lo tanto, a_3 saldrá de la base. Como a_2 y a_3 serán no básicas después de que el pivoteo actual se termine, se sabe ya que el tableau siguiente será óptimo para la fase I. Una mirada al tableau en la tabla 40 confirma este hecho.

Como $w' = 0$, concluyó la fase I. Se encontró la solución factible básica $s_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 5$, $x_1 = 5$. Ninguna variable artificial está en la base de la fase I. Por consiguiente, el problema es un ejemplo del caso 2. Ahora se suprimen las columnas de la variable artificial a_2 y a_3 (ya no se les necesita), y se reintroduce la función objetiva original.

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \text{o bien,} \qquad z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Puesto que x_1 y x_2 están ambas en la base óptima de la fase 1, deben ser eliminadas del renglón 0 de la fase II. Se suma 3(renglón 2) + 2(renglón 3) del tableau óptimo de la fase I al renglón 0.

$$\begin{array}{ll}
\text{Renglón 0 de la fase II:} & z - 2x_1 - 3x_2 \qquad\quad = 0\\
+\ \text{Renglón 2:} & \qquad\qquad\quad 3x_2 - \tfrac{3}{2}e_2 = 15\\
+\ \text{Renglón 3:} & \qquad\ 2x_1 \qquad\quad + \ e_2 = 10\\
=\ \text{Nuevo renglón 0:} & z \qquad\qquad\qquad\ - \tfrac{1}{2}e_2 = 25
\end{array}$$

Se empieza entonces la fase II con el conjunto de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z - \tfrac{1}{2}e_2 &= 25\\
s_1 - \tfrac{1}{8}e_2 &= \tfrac{1}{4}\\
x_2 \quad - \tfrac{1}{2}e_2 &= 5\\
x_1 \qquad + \tfrac{1}{2}e_2 &= 5
\end{aligned}$$

TABLA 38
Tableau inicial de la fase I para Bevco

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica	Cociente
1	2	4	0	-1	0	0	30	$w' = 30$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2 = 20$	$\frac{20}{3}$*
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$	10

TABLA 39
Tableau de la fase I para Bevco después de una iteración

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica	Cociente
1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{10}{3}$	$w' = \frac{10}{3}$	
0	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$	$s_1 = \frac{7}{3}$	$\frac{28}{5}$
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	$x_2 = \frac{20}{3}$	20*
0	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$a_3 = \frac{10}{3}$	5*

TABLA 40
Tableau óptimo de la fase I para Bevco

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	0	0	0	0	-1	-1	0	$w' = 0$
0	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$s_1 = \frac{1}{4}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	$x_2 = 5$
0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5	$x_1 = 5$

Este conjunto es óptimo. Por consiguiente, en este problema, la fase II no requiere pivoteos para llegar a una solución óptima. Si el renglón 0 de la fase II no indica un tableau óptimo, entonces se prosigue simplemente con el simplex hasta que se obtenga un renglón 0. En resumen, el tableau óptimo de la fase II indica que la solución óptima para el problema de Bevco es $z = 25$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $s_1 = \frac{1}{4}$ y $e_2 = 0$. Ésta va de acuerdo, naturalmente, con la solución óptima que se determinó por medio del método de la gran M de la sección 4.12.

EJEMPLO 6 Simplex de dos fases: caso 1

Para ilustrar el caso 1, se modificará el problema de Bevco, de tal manera que se requieran 36 mg de vitamina C. Ya se sabe, por la sección 4.12, que este problema es no factible. Esto quiere decir que la solución óptima de la fase I debe tener $w' > 0$ (caso 1). Con el fin de demostrar que esto es verdadero, se empieza con el problema original:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 &\le 4 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 36 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

TABLA 41
Tableau inicial de la fase I para Bevco (no factible)

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable Básica	Cociente
1	2	4	0	−1	0	0	46	$w' = 46$	
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$	16
0	1	3	0	−1	1	0	36	$a_2 = 36$	12
0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 0$	10*

TABLA 42
Tableau que indica ausencia de factibilidad para Bevco (no factible)

w'	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	−2	0	0	−1	0	−4	6	$w' = 6$
0	$\frac{1}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$s_1 = \frac{3}{2}$
0	−2	0	0	−1	1	−3	6	$a_2 = 6$
0	1	1	0	0	0	1	10	$x_2 = 10$

Solución Tras completar los pasos 1 a 4 del simplex de dos fases, se obtiene el problema de fase I siguiente:

$$\begin{aligned}
\min w' &= a_2 + a_3 \\
\text{s.a}\quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + s_1 = 4 \\
& x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 \\
& x_1 + x_2 + a_3 = 10
\end{aligned}$$

A partir de este conjunto de ecuaciones, se encuentra que la sfb inicial de la fase I es $s_1 = 4$, $a_2 = 36$, y $a_3 = 10$. Como las variables básicas a_2 y a_3 se presentan en la función objetivo de la fase I se deben eliminar del renglón 0 de la fase I. Para hacerlo se suman los renglones 2 y 3 al renglón 0:

$$\begin{aligned}
&+ \text{Renglón 0:} \quad w' - a_2 - a_3 = 0 \\
&+ \text{Renglón 2:} \quad x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 36 \\
&+ \text{Renglón 3:} \quad x_1 + x_2 + a_3 = 10 \\
&= \text{Nuevo Renglón 0:} \quad w' + 2x_1 + 4x_2 - e_2 = 46
\end{aligned}$$

Con este nuevo renglón 0, el tableau inicial de la fase I es el que se muestra en la tabla 41. Como $4 > 2$, entonces se debe introducir x_2 a la base en el renglón 3, con lo que se obliga a a_3 a dejar la base. Este tableau resultante se proporciona en la tabla 42. Ninguna variable tiene coeficiente positivo en el renglón 0, así que éste es un tableau óptimo de la fase I, y como el valor óptimo de w' es $6 > 0$, el PL original debe tener solución no factible. Lo anterior es razonable, porque si el PL original tuviera una solución factible, ésta habría sido factible en el PL de la fase I (después de hacer $a_2 = a_3 = 0$). Esta solución factible habría dado $w' = 0$. Como el simplex no pudo encontrar una solución de la fase I con $w' = 0$, el PL debe tener solución no factible.

OBSERVACIONES 1 Al igual que en el método de la gran M, se podría eliminar la columna para cualquier variable artificial en los tableaus futuros tan pronto como la variable artificial deja la base. Por lo tanto, cuando se resolvió el problema de Bevco, la columna de a_2 pudo suprimirse después del primer pivoteo de la fase I, y la de a_3 pudo eliminarse después del segundo pivoteo de la fase I.

2 Se puede demostrar que (exceptuando los vínculos para la variable entrante y en la prueba del cociente) el método de la gran M y la fase I del método de las dos fases efectúan la misma sucesión de pivoteos. A pesar de esta equivalencia, la mayoría de los códigos para computadora utiliza el método de las dos fases para encontrar una sfb. Esto se debe a que M, por ser un número positivo grande, podría ocasionar errores de redondeo y otras dificultades de cálculo. El método de las dos fases no introduce ningún número grande en la función objetivo, por lo que se evitan estos problemas.

EJEMPLO 7 Simplex de dos fases: caso 3

Resuelva el PL siguiente por medio del método simplex de dos fases:

$$\begin{aligned}
\min z &= 40x_1 + 10x_2 + 7x_5 + 14x_6 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\
& -2x_1 + x_2 - 2x_5 = 0 \\
& x_1 + x_3 + x_5 - x_6 = 3 \\
& 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\
& \text{Toda } x_i \geq 0
\end{aligned}$$

Solución Se podría utilizar x_4 como una variable básica para la cuarta restricción, y las variables artificiales a_1, a_2 y a_3 como variables básicas para las primeras tres restricciones. El objetivo en la fase I es minimizar $w = a_1 + a_2 + a_3$. Después de sumar las primeras tres restricciones a $w - a_1 - a_2 - a_3 = 0$ se obtiene el tableau inicial de la fase I, el cual se muestra en la tabla 43.

Aun cuando x_5 tiene el coeficiente más positivo en el renglón 0, se elige introducir x_3 a la base (como una variable básica en el renglón 3). Se observa que inmediatamente se obtiene $w = 0$. El tableau final de la fase I se proporciona en la tabla 44.

Como $w = 0$, se tiene ya un tableau óptimo de la fase I. Dos variables artificiales (a_1 y a_2) permanecen en la base en un nivel cero. Ya se podría eliminar la variable artificial a_3 en el primer tableau de la fase II. La única variable original con un coeficiente negativo en el tableau óptimo de la fase I es x_1, así que se podría suprimir x_1 de todos los tableaus futuros. Esto se debe a que a partir del tableau óptimo de la fase I se encuentra que $w = x_1$. Esto quiere decir que x_1 nunca se volverá positiva en la fase II, por lo que se podría suprimir x_1 de todos los tableaus futuros. Como $z - 40x_1 - 10x_2 - 7x_5 - 14x_6 = 0$ no contiene ninguna variable básica, el tableau inicial para la fase II es como el de la tabla 45.

TABLA 43

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	0	0	1	0	1	−1	0	0	0	3	$w = 3$
0	1	−1	0	0	2	0	1	0	0	0	$a_1 = 0$
0	−2	1	0	0	−2	0	0	1	0	0	$a_2 = 0$
0	1	0	1	0	1	−1	0	0	1	3	$a_3 = 3$
0	0	2	1	1	2	1	0	0	0	4	$x_4 = 4$

TABLA 44

w	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	a_3	Ld	Variable básica
1	−1	0	0	0	0	0	0	0	−1	0	$w = 0$
0	1	−1	0	0	2	0	1	0	0	0	$a_1 = 0$
0	−2	1	0	0	−2	0	0	1	0	0	$a_2 = 0$
0	1	0	1	0	1	−1	0	0	1	3	$x_3 = 3$
0	−1	2	0	1	1	2	0	0	1	1	$x_4 = 1$

TABLA 45

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	Ld	Variables básicas
1	−10	0	0	−7	−14	0	0	0	$z = 0$
0	−1	0	0	2	0	1	0	0	$a_1 = 0$
0	1	0	0	−2	0	0	1	0	$a_2 = 0$
0	0	1	0	1	−1	0	0	3	$x_3 = 3$
0	2	0	1	1	2	0	0	1	$x_4 = 1$

TABLA 46

z	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a_1	a_2	Ld	Variables básicas
1	4	0	7	0	0	0	0	7	$z_1 = 7$
0	0	0	0	2	0	1	0	0	$a_1 = 0$
0	1	0	0	0	0	0	1	0	$a_2 = 0$
0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$	$x_3 = \frac{7}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$x_4 = \frac{1}{2}$

Ahora se introduce x_6 a la base en el renglón 4 y se obtiene el tableau óptimo que se muestra en la tabla 46.

La solución óptima del PL original es $z = 7$, $x_3 = 7/2$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_2 = x_5 = x_6 = x_3 = 0$.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva los problemas de la sección 4.12 por medio del método simplex de dos fases.

2 Explique por qué el PL de la fase I tiene por lo regular soluciones óptimas alternativas.

4.14 Variables sin restricción de signo

Al resolver el PL con el algoritmo simplex se utiliza la prueba del cociente para determinar el renglón en el cual la variable que entra se vuelve una variable básica. Recuerde que la prueba del cociente depende del hecho de que cualquier punto factible requería que todas las variables fueran no negativas. Por lo tanto, si se permite que algunas variables no tengan restricciones de signo (nrs), la prueba del cociente y, por consiguiente, el algoritmo simplex ya no tienen validez. En esta sección se demuestra cómo un PL con variables que no tienen restricciones de signo (o variables irrestrictas) se pueden transformar en un PL en el cual se requiere que todas las variables sean negativas.

Se empieza por definir dos variables nuevas x_i' y x_i'' por cada variable nrs x_i. Luego se sustituye $x_i' - x_i''$ por x_i en cada restricción y en la función objetivo. Se suman asimismo las restricciones de signo $x_i' \geq 0$ y $x_i'' \geq 0$. El objetivo de esta sustitución es expresar x_i como la diferencia de las dos variables no negativas x_i' y x_i''. Como ahora se requiere que todas las variables sean no negativas, ya se puede proseguir con el simplex. Pronto se verá que ninguna solución factible básica puede tener tanto $x_i' > 0$ como $x_i'' > 0$. Esto quiere decir que para cualquier solución factible básica, cada variable nrs x_i debe encontrarse en cualquiera de los siguientes tres casos:

Caso 1 $x_i' > 0$ y $x_i'' = 0$. Este caso se presenta si una sfb tiene $x_i > 0$. En este caso, $x_i = x_i' - x_i'' = x_i'$. Por lo tanto, $x_i = x_i'$. Por ejemplo, si $x_i = 3$ en una sfb, esto se indicará por $x_i' = 3$ y $x_i'' = 0$.

Caso 2 $x_i' = 0$ y $x_i'' > 0$. Ocurre si $x_i < 0$. Como, $x_i = x_i' - x_i''$ se obtiene $x_i = -x_i''$. Por ejemplo, si $x_i = -5$ en una sfb, se tendrá $x_i' = 0$ y $x_i'' = 5$. Entonces, $x_i = 0 - 5 = -5$.

Caso 3 $x_i' = x_i'' = 0$. En este caso $x_i = 0 - 0 = 0$.

Al resolver el siguiente ejemplo se prende por qué ninguna sfb puede tener tanto $x_i' > 0$ como $x_i'' > 0$.

EJEMPLO 8 Uso de las variables nrs

Un panadero tiene 30 onzas de harina y 5 paquetes de levadura. Para hornear una hogaza de pan necesita 5 onzas de harina y 1 paquete de levadura. Cada hogaza de pan se puede vender en 30 centavos. El panadero podría comprar más harina a 4 centavos por onza o vender el sobrante de harina al mismo precio. Plantee y resuelva un PL para ayudar al panadero a maximizar la utilidad (ingresos − costos).

Solución Defina

x_1 = cantidad de hogazas de pan horneadas

x_2 = cantidad de onzas en que se incrementa el suministro de harina por las transacciones en efectivo.

Por lo tanto, $x_2 > 0$ significa que se compraron x_2 onzas de harina, y $x_2 < 0$ quiere decir que $-x_2$ onzas de harina se vendieron ($x_2 = 0$ significa que ni se vendió ni se compró harina). Después de observar que $x_1 \geq 0$ y que x_2 no tiene restricciones de signo, el PL apropiado es

$$\begin{aligned}
\max z &= 30x_1 - 4x_2 \\
\text{s.a} \quad 5x_1 &\leq 30 + x_2 \qquad \text{(Restricción de la harina)} \\
x_1 &\leq 5 \qquad \text{(Restricción de la levadura)} \\
x_1 &\geq 0,\ x_2 \text{ urs}
\end{aligned}$$

Como x_2 es irrestricta, es decir, no tiene restricciones de signo, se sustituye $x_2' - x_2''$ por x_2 en la función objetivo y las restricciones. Así se obtiene

$$\begin{aligned}
\max z &= 30x_1 - 4x_2' + 4x_2'' \\
\text{s.a} \quad 5x_1 &\leq 30 + x_2' - x_2'' \\
x_1 &\leq 5 \\
x_1, x_2', x_2'' &\geq 0
\end{aligned}$$

Después de transformar la función objetivo en la forma de renglón 0 y sumar variables de holgura s_1 y s_2 a las dos restricciones, se llega al tableau inicial de la tabla 47. Note que la columna de x_2' es simplemente la negativa de la columna x_2''. Ya se verá que *no importa cuántos pivoteos se efectúen, la columna x_2' será siempre la negativa de la columna x_2''.* (Véase una demostración de esta afirmación en el problema 6.)

Como x_1 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, x_1 entra a la base (en el renglón 2). El tableau resultante se muestra en la tabla 48. Observe que, nuevamente, la columna de x_2' es la negativa de la columna de x_2''.

Puesto que x_2'' tiene ahora el coeficiente más negativo en el renglón 0, entonces se introduce a la base en el renglón 1. El resultado se ilustra en la tabla 49. Observe que la columna de x_2' todavía es la negativa de la columna de x_2''. Éste es un tableau óptimo, así que la solución óptima al problema del panadero es $z = 170$, $x_1 = 5$, $x_2'' = 5$, $x_2' = 0$, $s_1 = s_2 = 0$. Por lo tanto, es posible que el panadero tenga una utilidad de 170 centavos por hornear 5 hogazas de pan. Como $x_2 = x_2' - x_2'' = 0 - 5 = -5$, el panadero debe vender 5 oz de

TABLA 47
Tableau inicial para PL nrs

z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	−30	4	−4	0	0	0	$z = 0$	
0	5	−1	1	1	0	30	$s_1 = 30$	6*
0	1	0	0	0	1	5	$s_2 = 5$	5*

TABLA 48
Tableau inicial para PL nrs

z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	Ld	Variable básica	Cociente
1	0	4	−4	0	30	150	$z = 150$	
0	0	−1	1	1	−5	5	$s_1 = 5$	5*
0	1	0	0	0	1	5	$x_1 = 5$	Ninguno

TABLA 49
Tableau óptima para PL nrs

z	x_1	x_2'	x_2''	s_1	s_2	Ld	Variable básica
1	0	0	0	4	10	170	$z = 170$
0	0	−1	1	1	−5	5	$x_2'' = 5$
0	1	0	0	0	1	5	$x_1 = 5$

harina. Lo óptimo para el panadero es vender harina, porque al tener 5 paquetes de levadura limita la elaboración de pan a cuando mucho 5 hogazas. Estas 5 hogazas de pan utilizan $5(5) = 25$ oz de harina, de tal manera que $30 - 25 = 5$ oz de harina quedan para vender.

Las variables x_2' y x_2'' nunca serán ambas variables básicas en el mismo tableau. Para ver por qué, suponga que x_2'' es básica (como es en el arreglo óptimo). Entonces la columna de x_2'' contendrá un solo 1, y todas las otras entradas serán iguales a cero. La columna x_2' es siempre la negativa de la columna x_2'', así que la columna x_2' contendrá un solo −1 y todas las otras entradas serán iguales a cero. Dicho tableau no puede tener x_2' como una variable factible básica. El mismo razonamiento señala que si x_i es nrs, entonces x_i' y x_i'' no pueden ser ambas variables básicas en el mismo tableau. Esto quiere decir que x_i', x_i'' o ambas deben ser iguales a cero y que se puede presentar uno de los casos 1 a 3.

Mediante el ejemplo siguiente se ilustra cómo las variables nrs se pueden usar para modelar los costos de suavización de la producción de los que se hablaba en la sección 3.10.

EJEMPLO 9 Modelo de los costos de la suavización de la producción

Mondo Motorcycles está determinando su programa de producción para los cuatro trimestres siguientes. La demanda motocicletas es como se indica: trimestre 1, 40; trimestre 2, 70; trimestre 3, 50; trimestre 4, 20. Mondo tiene cuatro tipos de costos.

1 Manufacturar una motocicleta cuesta 400 dólares a Mondo.

2 Se incurre en un costo de 100 dólares por cada motocicleta que se conserva al final de cada trimestre.

3 Incrementar la producción desde un trimestre al siguiente genera costos por la capacitación de los empleados. Se estima que se incurre en un costo por motocicleta de 700 dólares si la producción aumenta de un trimestre al otro.

4 Reducir la producción de un trimestre al otro incurre en costos por el pago de la indemnización, la baja moral, etc. Se estima que se genera un costo de 600 dólares por motocicleta si la producción disminuye de un trimestre al otro.

Toda la demanda se debe cumplir a tiempo, y la producción de un trimestre se podría utilizar para cumplir con la demanda del trimestre actual. Durante el trimestre inmediatamente anterior al trimestre 1, se fabricaron 50 motocicletas. Suponga que al inicio del trimestre 1 no hay Mondos en inventario. Plantee un PL que minimice el costo total de Mondo durante los cuatro trimestres siguientes.

Solución Para expresar el inventario y los costos de producción se definen para $t = 1, 2, 3, 4$,

p_t = número de motocicletas producidas durante el trimestre t

i_t = inventario al final del trimestre t

Con el fin de determinar los costos de suavización (costos 3 y 4) se define

x_t = cantidad con la que la producción del trimestre t es superior a la producción del trimestre $t - 1$

Como x_t no tiene restricción de signo, se podría escribir $x_t = x_t' - x_t''$, donde $x_t' \geq 0$ y $x_t'' \geq 0$. Se sabe que si $x_t \geq 0$, entonces $x_t = x_t'$ y $x_t'' = 0$. Asimismo, si $x_t \leq 0$, entonces $x_t = -x_t''$ y $x_t' = 0$. Esto quiere decir que

x_t' = incremento en la producción del trimestre t sobre la producción del trimestre $t - 1$

($x_t' = 0$ si la producción del periodo t es menor que la producción del periodo $t - 1$)

x_t'' = decremento en la producción del trimestre t a partir de la producción del trimestre $t - 1$

($x_t' = 0$ si la producción del periodo t es mayor que la producción del periodo $t - 1$)

Por ejemplo, si $p_1 = 30$ y $p_2 = 50$, se tiene $x_2 = 50 - 30 = 20$, $x_2' = 20$, $x_2'' = 0$. De manera similar, si $p_1 = 30$ y $p_2 = 15$, se llega a $x_2 = 15 - 30 = -15$, $x_2' = 0$, y $x_2'' = 15$. Ahora se pueden usar las variables x_t' y x_t'' para expresar los costos de suavización por trimestre t.

Ahora ya se puede expresar el costo total de Mondo como

$$\begin{aligned}\text{Costo total} &= \text{costo de producción} + \text{costos por inventario}\\ &\quad + \text{costo de suavización debido al incremento de producción}\\ &\quad + \text{costo de suavización debido al decremento de producción}\\ &= 400(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + 100(i_1 + i_2 + i_3 + i_4)\\ &\quad + 700(x_1' + x_2' + x_3' + x_4') + 600(x_1'' + x_2'' + x_3'' + x_4'')\end{aligned}$$

Para completar el planteamiento, se suman dos tipos de restricciones. Primero se requieren restricciones de inventario (como en el problema de Sailco de la sección 3.10) que relaciona el inventario del trimestre actual con el inventario del trimestre anterior y la producción del trimestre actual. Para el trimestre t, las restricciones de inventario toman la forma

$$\begin{aligned}\text{Inventario del trimestre} &= (\text{inventario del trimestre } (t-1)) + (\text{producción del trimestre } t)\\ &\quad - (\text{demanda del trimestre } t)\end{aligned}$$

Para $t = 1, 2, 3, 4$, respectivamente, se llega a las cuatro restricciones siguientes:

$$i_1 = 0 + p_1 - 40 \qquad i_2 = i_1 + p_2 - 70$$
$$i_3 = i_2 + p_3 - 50 \qquad i_4 = i_3 + p_4 - 20$$

Las restricciones de signo $i_t \geq 0$ ($t = 1, 2, 3, 4$) aseguran que la demanda de cada trimestre se cumplirá justo a tiempo.

El segundo tipo de restricción refleja el hecho de que están relacionadas p_t, p_{t-1}, x'_t, y x''_t. Esta relación se refleja en

$$(\text{producción del trimestre } t) - (\text{producción del trimestre } (t-1)) = x_t = x'_t - x''_t$$

Esta relación origina las cuatro restricciones siguientes para $t = 1, 2, 3, 4$:

$$p_1 - 50 = x'_1 - x''_1 \qquad p_2 - p_1 = x'_2 - x''_2$$
$$p_3 - p_2 = x'_3 - x''_3 \qquad p_4 - p_3 = x'_4 - x''_4$$

Al combinar la función objetivo, las cuatro restricciones del inventario, las últimas cuatro restricciones y las restricciones de signo ($i_t, p_t, x'_t, x''_t \geq 0$ para $t = 1, 2, 3, 4$) se obtiene el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 400p_1 + 400p_2 + 400p_3 + 400p_4 + 100i_1 + 100i_2 + 100i_3 + 100i_4 \\
& + 700x'_1 + 700x'_2 + 700x'_3 + 700x'_4 + 600x''_1 + 600x''_2 + 600x''_3 + 600x''_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & i_1 = 0 + p_1 - 40 \\
& i_2 = i_1 + p_2 - 70 \\
& i_3 = i_2 + p_3 - 50 \\
& i_4 = i_3 + p_4 - 20 \\
& p_1 - 50 = x'_1 - x''_1 \\
& p_2 - p_1 = x'_2 - x''_2 \\
& p_3 - p_2 = x'_3 - x''_3 \\
& p_4 - p_3 = x'_4 - x''_4 \\
& i_t, p_t, x'_t, x''_t \geq 0 \quad (t = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo 7, la columna para x'_t en las restricciones es la negativa de la columna x''_t. Por lo tanto, como en el ejemplo 7, ninguna sfb del PL de Mondo puede tener tanto $x'_t > 0$ como $x''_t > 0$. Esto quiere decir que x'_t en realidad es el incremento de la producción durante el trimestre t, y que x''_t de hecho es la cantidad que disminuye la producción durante el trimestre t.

Hay otra manera de mostrar que la solución óptima no tendrá tanto $x'_t > 0$ como $x''_t > 0$. Suponga que, por ejemplo, $p_2 = 70$ y $p_1 = 60$. Entonces, la restricción

$$p_2 - p_1 = 70 - 60 = x'_2 - x''_2 \tag{20}$$

se puede cumplir con muchas combinaciones de x'_2 y x''_2. Por ejemplo, $x'_2 = 10$ y $x''_2 = 0$ satisface a (20), así como $x'_2 = 20$ y $x''_2 = 10$; $x'_2 = 40$ y $x''_2 = 30$; etcétera. Si $p_2 - p_1 = 10$, la solución óptima del PL siempre elegirá $x'_2 = 10$ y $x''_2 = 0$ y ninguna otra posibilidad. Para entender por qué, examine la función objetivo. Si $x'_2 = 10$ y $x''_2 = 0$, entonces x'_2 y x''_2 contribuyen con 10(700) = 7 000 dólares en los costos de suavización. Por otro lado, cualquier otra elección de x'_2 y x''_2 que satisfaga (20) contribuye con más que 7 000 dólares en los costos de suavización. Por ejemplo, $x'_2 = 20$ y $x''_2 = 10$ contribuye con $20(700) + 10(600) = 20\,000$ dólares en los costos de suavización. Como se está minimizando el costo total, el simplex nunca escogerá una solución donde se cumplan tanto $x'_t > 0$ como $x''_t > 0$.

La solución óptima para el problema de Mondo es $p_1 = 55$, $p_2 = 55$, $p_3 = 50$, $p_4 = 50$. Con esta solución, se genera un costo total de 95 000. Con el programa de producción óptima se fabrica un total de 210 Mondos. Como la demanda total para los cuatro trimestres es de sólo 180 Mondos, habrá un inventario final de $210 - 180 = 30$ Mondos. Obsérvese que esto contrasta con el modelo del inventario de Sailco de la sección 3.10, en el cual el inventario final era siempre 0. La solución óptima para el problema de Mondo tiene un inventario no cero en el trimestre 4, entonces, como el inventario es cero en el trimestre 4, la producción del trimestre 4 debe ser menor que la del trimestres 3. Antes que incurrir en los costos de suavización excesivos con los que se relaciona esta estrategia, la solución óptima prefiere conservar 30 Mondos en inventario al final del trimestre 4.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que Mondo ya no debe cumplir a tiempo con su demanda. Por cada trimestre en que se incumple la demanda de una motocicleta, se fija un costo de penalización de 110 dólares por motocicleta. Por consiguiente, la demanda se puede acumular ahora. Sin embargo, todas las demandas se deben cumplir al finalizar el trimestre 4. Modifique el planteamiento del problema de Mondo para permitir que la demanda se acumule. (*Sugerencia*: La demanda incumplida corresponde a $i_t \leq 0$. Por lo tanto, i_t ahora no tiene restricciones de signo, y se tiene que sustituir $i_t = i_t' - i_t''$. Ahora i_t'' será la cantidad de demanda que se incumple al final del trimestre t.)

2 Resuelva la siguiente PL mediante el algoritmo simplex

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 \geq 0&, x_2 \text{ urs} \end{aligned}$$

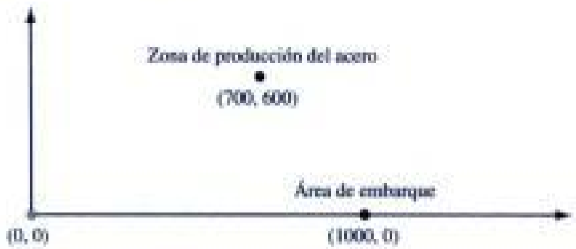
Grupo B

3 Steelco hace frente a la demanda siguiente de acero durante los tres meses siguientes: 100 toneladas (t) (mes 1); 200 t (mes 2); 50 t (mes 3). Durante cualquier mes, un trabajador produce hasta 15 t de acero. Cada trabajador recibe como pago 5 000 dólares al mes. Los trabajadores pueden ser contratados o despedidos a un costo de 3 000 dólares por trabajador despedido y 4 000 dólares por trabajador contratado (toma 0 tiempo contratar a un obrero). El costo de retener una tonelada de acero en inventario por un mes es 100 dólares. La demanda se podría acumular (*backlog*) a un costo de 70 dólares por cada mes. Es decir, si una t de la demanda del mes 1 se cumple durante el mes 3, entonces se incurre en un costo por acumulación de 140 dólares. Al empezar el mes 1, Steelco tiene 8 trabajadores. Pueden ser contratados cuando mucho 2 trabajadores al mes. Toda la demanda debe quedar cumplida al final del mes 3. La materia prima usada para producir una tonelada de acero cuesta 300 dólares. Plantee un PL para minimizar los costos de Steelco.

4 Demuestre cómo podría usar la programación lineal para resolver el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= |2x_1 - 3x_2| \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 - x_2 &\leq 0.5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

FIGURA 13



5† La planta principal de Steelco tiene en la actualidad un área de manufactura y una zona de embarque, ubicadas como se indica en la figura 13 (distancias en pies). La compañía debe determinar dónde ubicar las instalaciones de fundición y las de ensamble y almacenamiento, con el fin de minimizar los costos diarios por desplazar el material por la planta. La cantidad de viajes hechos todos los días son los que se indican en la tabla 50.

Si se supone que todos los viajes (acarreo) son sólo en dirección este-oeste o norte-sur, plantee un PL que se pueda aplicar para determinar dónde se podrían ubicar las instalaciones de fundición y de ensamble y almacenamiento con objeto de minimizar los costos de transporte diario. (*Sugerencia*: Si las instalaciones de fundición tienen coordenadas (c1, c2) ¿cómo se debería interpretar la restricción $c1 - 700 = e_1 - w_1$?)

6 Demuestre que después de cierto número de pivoteos el coeficiente de x_i' en cada renglón del tableau simplex será igual al negativo del coeficiente de x_i'' en el mismo renglón.

7 Clothco fabrica pantalones. Durante los seis meses siguientes puede vender *hasta* la cantidad de pantalones de la tabla 51.

La demanda que no se surte durante un mes se pierde. Entonces, Clothco puede vender hasta, por ejemplo, 500 pantalones durante el mes 1. Un pantalón se vende en 40 dólares, requiere 2 horas de mano de obra y 10 dólares de materia prima. Cuando empieza el mes 1, Clothco tiene 4 obreros. Un obrero puede trabajar haciendo pantalones hasta 200 horas al mes, y su salario es de 2 000 dólares mensuales (sin tener en cuenta cuántas horas trabaja). Al principio de todos los meses, se puede contratar o despedir empleados. Cuesta 1 500 dólares contratar un empleado y 1 000 despedirlo. Se fija un

TABLA 50

De	A	Cantidad diaria de viajes	Costo (centavos) por 100 pies de acarreo
Fundición	Ensamble y almacenamiento	40	10
Producción de acero	Fundición	8	10
Produción de acero	Ensamble y almacenamiento	8	10
Embarque	Ensamble y almacenamiento	2	20

TABLA 51

Mes	Demanda máxima
1	500
2	600
3	300
4	400
5	300
6	800

†Basado en Love y Yerex (1976).

costo de 5 dólares por retener un pantalón contra el inventario final de cada mes.

Determine cómo Clothco puede maximizar su utilidad para los seis meses siguientes. Ignore el hecho de que durante cada mes la cantidad de empleados contratados o despedidos tiene que ser un entero.

4.15 Método de Karmarkar para resolver PL

A continuación se presenta una explicación breve del método de Karmarkar para resolver PL. Si desea una explicación más detallada, refiérase a la sección 10.6. El método de Karmarkar requiere que el PL esté en la forma siguiente

$$\begin{aligned} &\min z = \mathbf{cx} \\ &\text{s.a} \quad K\mathbf{x} = 0 \\ &\qquad x_1 + x_2 + \cdots x_n = 1 \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{aligned}$$

y que

1 El punto $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \cdots \quad \frac{1}{n}]$ debe ser factible para este PL.

2 El valor óptimo de z para el PL es igual a cero.

Lo más sorprendente es que cualquier PL se puede expresar en esta forma. En el método de Karmarkar se utiliza una transformación de la geometría proyectiva para crear un conjunto de variables transformadas $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Esta transformación (llamémosla f) transforma siempre el punto actual en el "centro" de la región factible en el espacio definido por las variables transformadas. Si la transformación convierte al punto $\mathbf{x}$ en el punto $\mathbf{y}$, se escribe $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. En el espacio transformado, el algoritmo empieza con el desplazamiento desde $f(\mathbf{x}^0)$ en el espacio transformado en una "buena" dirección (una dirección que tiende a mejorar z y conserva la factibilidad). Con lo anterior se genera un punto $\mathbf{y}^1$ en el espacio transformado, el cual está cercano a la frontera de la región factible. Este nuevo punto es $\mathbf{x}^1$, que satisface $f(\mathbf{x}^1) = \mathbf{y}^1$. El procedimiento se repite (esta vez $\mathbf{x}^1$ reemplaza a $\mathbf{x}^0$) hasta que el valor z para $\mathbf{x}^k$ es suficientemente cercano a 0.

Si el punto actual es $\mathbf{x}^k$, entonces la transformación tendrá la propiedad de que $f(\mathbf{x}^k) = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \cdots \quad \frac{1}{n}]$. Por lo tanto, en el espacio transformado, siempre nos alejamos del "centro" de la región factible.

Se ha demostrado que el método de Karmarkar es un **algoritmo de tiempo polinómico**. Esto implica que si un PL de tamaño n se resuelve mediante el método de Karmarkar, entonces existen los números positivos a y b tales que para cualquier n se puede resolver un PL de tamaño n en un tiempo de cuando mucho an^b.[†]

En contraste con el método de Karmarkar, el algoritmo simplex es un **algoritmo de tiempo exponencial** para resolver los PL. Si un PL de tamaño n se resuelve mediante el simplex, entonces existe un número positivo c tal que, para cualquier n, el algoritmo simplex encontrará la solución óptima en un tiempo de cuando mucho $c2^n$. Para n suficientemente grande (para a, b y c positivas), $c2^n > an^b$. Esto significa que, en teoría, un algoritmo de tiempo polinómico es superior a un algoritmo de tiempo exponencial. Las pruebas preliminares del método de Karmarkar (efectuadas por Karmarkar) demuestran que para PL grandes que surgen en la aplicación actual, este método podría ser hasta 50 veces más rápido que el algoritmo simplex. Esperemos que el método de Karmarkar ayude a los investigadores a resolver varios problemas grandes de PL que, en la actualidad, requieren una cantidad prohibitivamente elevada de tiempo de computadora cuando se busca la solución del PL mediante el simplex. Si el método de Karmarkar cumple su promesa preliminar, la capacidad para plantear modelos de PL será aun más importante en el futuro cercano de lo que es hoy.

El *Military Airlift Command* utilizó recientemente el método de Karmarkar para determinar la frecuencia en que se deben volar varias rutas y qué aviones usar. El PL resultan-

[†]La dimensión de un PL podría ser definida como el número de símbolos necesarios para representar el PL en la notación binaria.

te contenía 150 000 variables y 12 000 restricciones, y se resolvió en una hora de tiempo de computadora mediante el método de Karmarkar. Un PL de estructura similar que contenga 36 000 variables y 10 000 restricciones requeriría 4 horas de tiempo de computadora si se utiliza el método simplex. Delta Airlines utilizó el método de Karmarkar para elaborar los horarios mensuales para 7 000 pilotos y más de 400 aviones. Cuando el proyecto finalizó, Delta esperaba ahorrar millones de dólares.

4.16 Toma de decisiones con varios atributos en ausencia de incertidumbre: programación por objetivos

En ciertas situaciones, un tomador de decisiones podría hacer frente a varios objetivos, y podría no haber un punto en la región factible del PL que satisfaga todos los objetivos. En tal caso, ¿cómo puede quien toma las decisiones elegir una decisión satisfactoria? La **programación por objetivos** es una técnica a la que se puede recurrir en estas situaciones. Por medio del ejemplo siguiente, se ilustran las ideas principales de la programación por objetivos.

EJEMPLO 10 Programación por objetivos de Burnit

La agencia de publicidad Leon Burnit trata de determinar un horario de anuncios por TV para la compañía automotriz Priceler. Priceler tiene tres objetivos:

Objetivo 1 Por lo menos 40 millones de varones de altos ingresos (VAI) deben ver los anuncios.

Objetivo 2 Por lo menos 60 millones de personas de bajos ingresos (PBI) deben ver los anuncios.

Objetivo 3 Por lo menos 35 millones de mujeres de altos ingresos (MAI) deben ver los anuncios.

Leon Burnit puede comprar dos tipos de anuncios: los que se muestren en los juegos de futbol americano y los que se vean en las telenovelas. Puede gastar, cuando mucho, 600 000 dólares en los anuncios. Los costos de publicidad y los posibles televidentes para un anuncio de cada tipo de un minuto se proporcionan en la tabla 52. Leon Burnit tiene que determinar cuántos anuncios en el futbol y cuántos en las telenovelas debe comprar para Priceler.

Solución Sea

x_1 = número de minutos de anuncios mostrados en los juegos de futbol

x_2 = número de minutos de anuncios mostrados en las telenovelas

Entonces, cualquier solución factible del PL siguiente cumpliría con los objetivos de Priceler:

$$
\begin{aligned}
&\min \text{ (o max) } z = 0x_1 + 0x_2 && \text{(o cualquier otra función objetivo)}\\
&\text{s.a} \quad 7x_1 + 3x_2 \geq 40 && \text{(restricción de los VAI)}\\
&\qquad 10x_1 + 5x_2 \geq 60 && \text{(restricción de las PBI)}\\
&\qquad 5x_1 + 4x_2 \geq 35 && \text{(restricción de las MAI)}\\
&\qquad 100x_1 + 60x_2 \leq 600 && \text{(Restricción del presupuesto)}\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

En la figura 14 se encuentra que ningún punto que cumple con la restricción del presupuesto satisface los otros tres objetivos de Priceler. Por lo tanto, (21) no tiene solución factible. Es imposible cumplir todos los objetivos de Priceler, así que Burnit podría pedir a Priceler establecer, por cada objetivo, un costo (por unidad faltante para cumplir cada objetivo) que se genera por no cumplir con la meta. Suponga que Priceler determina que

TABLA 52
Costo y número de televidentes de los anuncios de Priceler

Anuncio	Millones de televidentes			
	VAI	PBI	MAI	Costo (dólares)
Futbol	7	10	5	100 000
Telenovela	3	5	4	60 000

Por cada millón de exposiciones con el que Priceler no alcanza el objetivo de los VAI genera a esta compañía una penalización de 200 000 dólares debido a las ventas perdidas.

Por cada millón de exposiciones con el que Priceler no alcanza el objetivo de las PBI genera a esta compañía una penalización de 100 000 dólares debido a las ventas perdidas.

Por cada millón de exposiciones con el que Priceler no alcanza el objetivo de las MAI genera a esta compañía una penalización de 50 000 dólares debido a las ventas perdidas.

Ahora, Burnit puede plantear un PL que minimiza el costo incurrido por desviarse de los tres objetivos de Priceler. La estrategia es transformar cada restricción de desigualdad en (21) que representa uno de los objetivos de Priceler en una restricción de igualdad. Como no se sabe si la solución que minimiza el costo estará por abajo o por arriba de un objetivo dado, es necesario definir las variables siguientes:

s_i^+ = cantidad con la que se excede numéricamente el i-ésimo objetivo

s_i^- = cantidad con la que queda por debajo numéricamente del i-ésimo objetivo

Tanto s_i^+ como s_i^- reciben el nombre de **variables de desviación.** Por lo que se refiere al problema de Priceler, se supone que cada s_i^+ y s_i^- se mide en millones de exposiciones. Es posible volver a escribir las tres primeras restricciones de (21), usando las variables de desviación, como

$$7x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 40 \qquad \text{(restricción de los VAI)}$$
$$10x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ = 60 \qquad \text{(restricción de las PBI)}$$
$$5x_1 + 4x_2 + s_3^- - s_3^+ = 35 \qquad \text{(restricción de las MAI)}$$

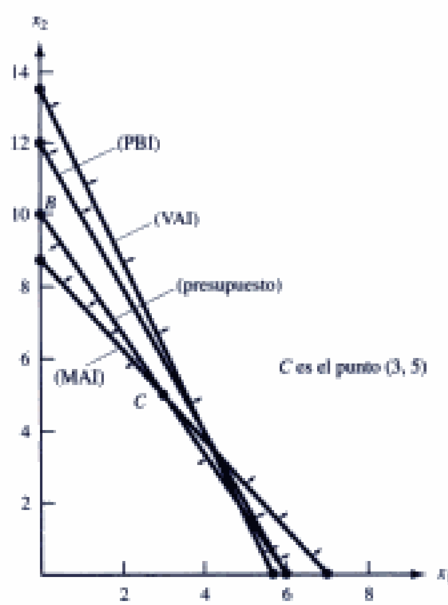


FIGURA 14
Restricciones de Priceler

Por ejemplo, suponga que $x_1 = 5$ y $x_2 = 2$. Con este programa de anuncios se obtiene $7(5) + 3(2) = 41$ millones de exposiciones de VAI. Este valor excede el objetivo de VAI por $41 - 40 = 1$ millón de exposiciones, y $s_1^- = 0$ y $s_1^+ = 1$. Asimismo, este plan origina $10(5) + 5(2) = 60$ millones de exposiciones de PBI. Así se cumple exactamente el requisito de PIB, y $s_2^- = s_2^+ = 0$. Por último, este programa da como resultado $5(5) + 4(2) = 33$ millones de exposiciones de MAI. Este valor está por abajo del objetivo de MAI con $35 - 33 = 2$ millones de exposiciones, y $s_3^- = 2$ y $s_3^+ = 0$.

Suponga que Priceler quiere minimizar la penalización total por las ventas perdidas. En términos de las variables de desviación, la penalización total por las ventas perdidas (en miles de dólares) ocasionadas por desviarse de los tres objetivos es $200s_1^- + 100s_2^- + 50s_3^-$. El coeficiente de la función objetivo para la variable asociada con el objetivo i se llama peso o ponderación para el objetivo i. El objetivo más importante tiene el peso más elevado (es decir, es el más ponderado), etcétera. Por consiguiente, en el ejemplo de Priceler, el objetivo 1 (VAI) es el más importante, el objetivo 2 (PBI) es el segundo en importancia y el objetivo 3 (MAI) es el menos importante.

Burnit puede minimizar la penalización por las ventas perdidas mediante la resolución del PL siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\min z = 200s_1^- + 100s_2^- + 50s_3^- & & \\
\text{s.a} \quad 7x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 40 & \text{(restricción de los VAI)} & \\
\quad 10x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ = 60 & \text{(restricción de las PBI)} & \\
\quad 5x_1 + 4x_2 + s_3^- - s_3^+ = 35 & \text{(restricción de las MAI)} & (22)\\
\quad 100x_1 + 60x_2 \leq 600 & \text{(restricción del presupuesto)} & \\
\text{Todas las variables son no negativas} & &
\end{array}
$$

La solución óptima para este PL es $z = 250$, $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $s_1^+ = 2$, $s_2^+ = 0$, $s_3^+ = 0$, $s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s_3^- = 5$. De esta manera se cumplen el objetivo 1 y el 2 (los objetivos con los costos más altos, o pesos, por cada unidad de desviación desde el objetivo), pero no se cumple con el objetivo menos importante (objetivo 3).

OBSERVACIONES Si se fracasa en el cumplimiento del objetivo i cuando el valor logrado de un atributo es numéricamente menor que el valor deseado del objetivo i, entonces aparecerá un término con s_i^- en la función objetivo. Si el incumplimiento con el objetivo i se presenta cuando el valor logrado de un atributo es numéricamente mayor que el valor deseado del objetivo i, entonces aparecerá un término con s_i^+ en la función objetivo. Asimismo, si se desea alcanzar exactamente un objetivo y se fija una penalización al quedar por arriba o por abajo del mismo, entonces aparecerán los términos s_i^- y s_i^+.

Suponga que se modifica el ejemplo de Priceler y se toma la decisión de que la restricción del presupuesto de 600 000 dólares es un objetivo. Si se establece una penalización de 1 dólar por cada dólar con el que se incumpla el objetivo, entonces la formulación apropiada de la programación por objetivos sería

$$
\begin{array}{ll}
\min z = 200s_1^- + 100s_2^- + 50s_3^- + s_4^+ & \\
\text{s.a} \quad 7x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 40 & \text{(restricción de los VAI)} \\
\quad 10x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ = 60 & \text{(restricción de las PBI)} \\
\quad 5x_1 + 4x_2 + s_3^- - s_3^+ = 35 & \text{(restricción de las MAI)} \\
\quad 100x_1 + 60x_2 + s_4^- - s_4^+ = 600 & \text{(restricción del presupuesto)} \\
\text{Todas las variables son no negativas} &
\end{array}
$$

En contraste con la solución óptima previa, la solución óptima para este PL es $z = 33\frac{1}{3}$, $x_1 = 4\frac{1}{3}$, $x_2 = 3\frac{1}{3}$, $s_1^+ = \frac{1}{3}$, $s_2^+ = 0$, $s_3^+ = 0$, $s_4^+ = 33\frac{1}{3}$, $s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s_3^- = 0$, $s_4^- = 0$. Por lo tanto, cuando se define que la restricción del presupuesto es un objetivo, la solución óptima es cumplir los tres objetivos publicitarios quedando $33\frac{1}{3}$ miles de dólares por arriba del presupuesto.

Programación por objetivos prioritarios

En el planteamiento del PL para el ejemplo de Burnit, se supuso que Priceler podría determinar con exactitud la importancia relativa de los tres objetivos. Por ejemplo, Priceler determinó que el objetivo de los VAI era $\frac{200}{100} = 2$ veces la importancia del objetivo PBI, y que el objetivo PBI era $\frac{100}{50} = 2$ veces la importancia del objetivo de los VAI. Sin embargo, en muchas situaciones, el tomador de decisiones podría no ser capaz de determinar con toda precisión la importancia relativa de los objetivos. Cuando éste es el caso, la *programación por objetivos prioritarios* podría ser una herramienta útil. Para poder aplicar este tipo de programación, el tomador de decisiones tiene que jerarquizar sus objetivos desde el más importante (objetivo 1) hasta el menos importante (objetivo n). El coeficiente de la función objetivo para la variable que representa el objetivo i será P_i. Se supone que

$$P_1 >>> P_2 >>> P_3 >>> \cdots >>> P_n$$

Por lo tanto, la ponderación o peso del objetivo 1 es mucho mayor que el del objetivo 2, y el peso del objetivo 2 es mucho mayor que el del objetivo 3, y así sucesivamente. Esta definición de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ asegura que quien toma las decisiones primero trata de satisfacer el objetivo más importante (objetivo 1). Entonces, entre todos los puntos que satisfacen el objetivo 1, el tomador de decisiones trata de acercarse tanto como sea posible al objetivo 2, y así sucesivamente. Se continúa de este modo hasta que la única manera de cumplir en forma aproximada con un objetivo es incrementar la desviación desde un objetivo de alta prioridad.

Para el problema de Priceler, el planteamiento de la programación por objetivos prioritarios se consigue a partir de (22) al reemplazar la función objetivo de (22) por $P_1s_1^- + P_2s_2^- + P_3s_3^-$. Por lo tanto, el planteamiento del problema de Priceler con programación por objetivos prioritarios es

$$\begin{array}{lll} \min z = P_1s_1^- + P_2s_2^- + P_3s_3^- & & \\ \text{s.a} \quad 7x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 40 & \text{(restricción de los VAI)} & \\ 10x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ = 60 & \text{(restricción de las PBI)} & \\ 5x_1 + 4x_2 + s_3^- - s_3^+ = 35 & \text{(restricción de las MAI)} & \\ 100x_1 + 60x_2 \le 600 & \text{(restricción del presupuesto)} & \\ \text{Todas las variables son no negativas} & & \end{array} \tag{23}$$

Supóngase que el tomador de decisiones tiene n objetivos. Para aplicar la programación por objetivos prioritarios, es necesario separar la función objetivo en n componentes, donde el componente i es el término de la función objetivo que se relaciona con el objetivo i. Se define

$$z_i = \text{término de la función objetivo que se relaciona con el objetivo } i$$

Por lo que se refiere al ejemplo de Priceler, $z_1 = P_1s_1^-$, $z_2 = P_2s_2^-$ y $z_3 = P_3s_3^-$. Los problemas de programación por objetivos prioritarios se pueden resolver mediante una generalización del simplex conocida como **programación por objetivos simplex**. Para preparar un problema que se pueda solucionar por medio de programación por objetivos simplex es necesario calcular n renglones 0, en donde el i-ésimo renglón 0 corresponde al objetivo i. Por consiguiente, para el problema de Priceler, se tiene

$$\begin{aligned} &\text{Renglón 0 (objetivo 1): } z_1 - P_1s_1^- = 0 \\ &\text{Renglón 0 (objetivo 2): } z_2 - P_2s_2^- = 0 \\ &\text{Renglón 0 (objetivo 3): } z_3 - P_3s_3^- = 0 \end{aligned}$$

A partir de (23) se encuentra que $BV = \{s_1^-, s_2^-, s_3^-, s_4\}$ (s_4 = variable de holgura para la cuarta restricción) es una solución factible básica inicial que se podría usar para resolver (23) por medio del algoritmo simplex (o el algoritmo de la programación por objetivos simplex). Al igual que con el simplex regular, primero se tienen que eliminar de cada renglón 0 todas las variables en la base inicial. Al sumar P_1 (restricción de los VAI) al renglón 0 (objetivo 1) se obtiene

$$\text{Renglón 0 (objetivo 1): } z_1 + 7P_1x_1 + 3P_1x_2 - P_1s_1^+ = 40P_1 \qquad \text{(VAI)}$$

Al sumar P_2 (restricción de las PBI) al renglón 0 (objetivo 2) se tiene

$$\text{Renglón 0 (objetivo 2): } z_2 + 10P_2x_1 + 5P_2x_2 - P_2s_2^+ = 60P_2 \qquad \text{(PBI)}$$

Al sumar P_3 (restricción de los VAI) al renglón 0 (objetivo 3) se tiene

$$\text{Renglón 0 (objetivo 3): } z_3 + 5P_3x_1 + 4P_3x_2 - P_3s_3^+ = 35P_3 \qquad \text{(VAI)}$$

El problema de Priceler ya se puede resolver mediante la programación por objetivos simplex.

Las diferencias entre la programación por objetivos simplex y el simplex ordinario, son las siguientes:

1 El simplex ordinario tiene un solo renglón 0, en tanto que la programación por objetivos simplex requiere n renglones 0 (uno por cada objetivo).

2 En la programación por objetivos simplex se utiliza el método que sigue para determinar la variable entrante: se determina el objetivo con la prioridad más alta (objetivo i') que no ha sido satisfecho (o se busca el objetivo i' cuya prioridad es la más alta que tiene $z_{i'} > 0$). Se busca la variable con el coeficiente más positivo en el renglón 0 (objetivo i') y se introduce esta variable (sujeta a las restricciones siguientes) en la base. Con esto se reduce $z_{i'}$ y se asegura que se está cerca de cumplir con el objetivo i'. *Pero si una variable tiene un coeficiente negativo en el renglón 0 relacionado con un objetivo que tiene una prioridad mayor que i', entonces la variable no puede entrar a la base.* Si se introdujera dicha variable a la base, se incrementaría la desviación respecto a algún objetivo de mayor prioridad. Si la variable con el coeficiente más positivo en el renglón 0 (objetivo i') no puede entrar a la base, entonces trate de hallar otra variable con un coeficiente positivo en el renglón 0 (objetivo i'). Si ninguna variable del renglón 0 (objetivo i') puede entrar a la base, entonces no hay modo de aproximarse en el cumplimiento del objetivo i' sin incrementar la desviación respecto a un objetivo de mayor prioridad. En este caso, cambie de renglón 0 (objetivo $i' + 1$) para intentar cumplir lo más aproximadamente posible con el objetivo $i' + 1$.

3 Cuando se ejecuta un pivoteo, es necesario actualizar el renglón 0 para cada objetivo.

4 Un tableau generará la solución óptima si se cumplen todos los objetivos (es decir, $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$), o si cada variable que entra a la base y disminuye el valor de z_i' para un objetivo incumplido i' incrementará la desviación respecto a algún objetivo i que tiene una prioridad mayor que el objetivo i'.

Enseguida se utiliza la programación por objetivos simplex para resolver el ejemplo de Priceler. En cada tableau, los renglones 0 se listan según las prioridades de los objetivos (desde la prioridad mayor, a la menor prioridad). El tableau inicial está en la tabla 53. La sfb actual es $s_1^- = 40$, $s_2^- = 60$, $s_3^- = 35$, $s_4 = 600$. Como $z_1 = 40P_1$, el objetivo 1 no se satisface. Con el fin de reducir la penalización relacionada con el incumplimiento del objetivo 1, se introduce la variable con el coeficiente más positivo (x_1) en el renglón 0 (VAI). La prueba del cociente indica que x_1 debe entrar a la base en la restricción de los VAI.

Después de que x_1 entra a la base, se llega a la tabla 54. La solución básica actual es $x_1 = \frac{40}{7}$, $s_2^- = \frac{20}{7}$, $s_3^- = \frac{45}{7}$, $s_4 = \frac{200}{7}$. Como $s_1^- = 0$ y $z_1 = 0$, se cumplió con el objetivo 1. Enseguida se trata de satisfacer el objetivo 2 (con la certeza de que se alcanzó el objetivo 1 de mayor prioridad). La variable con el coeficiente más positivo en el renglón 0 (PBI) es s_1^+. Observe que al introducir s_1^+ a la base no se incrementa z_1 [porque el coeficiente de s_1^+ en el renglón 0 (VAI) es 0]. Por lo tanto, después de introducir s_1^+ en la base, el objetivo 1 quedará satisfecho. La prueba del cociente indica que s_1^+ podría entrar a la base en la restricción de las PBI o en la del presupuesto. Se elige en forma arbitraria introducir s_1^+ en la base en la restricción del presupuesto.

Después de efectuar iteraciones con s_1^+ en la base se obtiene la tabla 55. Puesto que $z_1 = z_2 = 0$, se alcanzan los objetivos 1 y 2. Como $z_3 = 5P_3$, no se cumple el objetivo 3. La sfb actual es $x_1 = 6$, $s_2^- = 0$, $s_3^- = 5$, $s_1^+ = 2$. Ahora se trata de llegar lo más cerca posible del objetivo 3 (sin violentar el objetivo 1 o el objetivo 2). Como x_2 es la única variable con un coeficiente positivo en el renglón 0 (MAI), la única manera de acercarse al objetivo 3 (MAI)

TABLA 53
Tableau inicial de la programación por objetivos prioritarios para Priceler

	x_1	x_2	s_1^+	s_2^+	s_3^+	s_1^-	s_2^-	s_3^-	s_4	Ld
Renglón 0 (VAI)	$7P_1$	$3P_1$	$-P_1$	0	0	0	0	0	0	$z_1 = 40P_1$
Renglón 0 (PBI)	$10P_2$	$5P_2$	0	$-P_2$	0	0	0	0	0	$z_2 = 60P_2$
Renglón 0 (MAI)	$5P_3$	$4P_3$	0	0	$-P_3$	0	0	0	0	$z_3 = 35P_3$
VAI	7	3	−1	0	0	1	0	0	0	40
PBI	10	5	0	−1	0	0	1	0	0	60
MAI	5	4	0	0	−1	0	0	1	0	35
Presupuesto	100	60	0	0	0	0	0	0	1	600

TABLA 54
Primer tableau de la programación por objetivos prioritarios para Priceler

	x_1	x_2	s_1^+	s_2^+	s_3^+	s_1^-	s_2^-	s_3^-	s_4	Ld
Renglón 0 (VAI)	0	0	0	0	0	$-P_1$	0	0	0	$z_1 = 0$
Renglón 0 (PBI)	0	$\frac{5P_2}{7}$	$\frac{10P_2}{7}$	$-P_2$	0	$-\frac{10P_2}{7}$	0	0	0	$z_2 = \frac{20P_2}{7}$
Renglón 0 (MAI)	0	$\frac{13P_3}{7}$	$\frac{5P_3}{7}$	0	$-P_3$	$-\frac{5P_3}{7}$	0	0	0	$z_3 = \frac{45P_3}{7}$
VAI	1	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	0	0	0	$\frac{40}{7}$
PBI	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	−1	0	$-\frac{10}{7}$	1	0	0	$\frac{20}{7}$
MAI	0	$\frac{13}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	−1	$-\frac{5}{7}$	0	1	0	$\frac{45}{7}$
Presupuesto	0	$\frac{120}{7}$	$\frac{100}{7}$	0	0	$-\frac{100}{7}$	0	0	1	$\frac{200}{7}$

TABLA 55
Tableau óptimo de la programación por objetivos prioritarios para Priceler

	x_1	x_2	s_1^+	s_2^+	s_3^+	s_1^-	s_2^-	s_3^-	s_4	Ld
Renglón 0 (VAI)	0	0	0	0	0	$-P_1$	0	0	0	$z_1 = 0$
Renglón 0 (PBI)	0	$-P_2$	0	$-P_2$	0	0	0	0	$-\frac{P_2}{10}$	$z_2 = 0$
Renglón 0 (MAI)	0	P_3	0	0	$-P_3$	0	0	0	$-\frac{P_3}{20}$	$z_3 = 5P_3$
VAI	1	$\frac{3}{5}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{100}$	6
PBI	0	−1	0	−1	0	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	0
MAI	0	1	0	0	−1	0	0	1	$-\frac{1}{20}$	5
Presupuesto	0	$\frac{6}{5}$	1	0	0	−1	0	0	$\frac{7}{100}$	2

es introducir x_2 a la base. Pero observe que x_2 tiene un coeficiente negativo en el renglón 0 para el objetivo 2 (PBI). Por lo tanto, la única manera de alcanzar casi el objetivo 3 (MAI) es incumplir un objetivo de mayor prioridad, el objetivo 2 (PBI). Éste es, por lo tanto, un tableau óptimo. La solución de la programación por objetivos prioritarios es comprar 6 minutos de anuncios en el futbol y ninguno en las telenovelas. Se cumplen los objetivos 1 y 2 (VAI y PBI), y a Priceler le faltan 5 millones de exposiciones para cumplir con el objetivo 3 (MAI).

Si el analista tiene acceso a un código de programación por objetivos computarizado, entonces, es posible generar muchas soluciones al reordenar las prioridades asignadas a los objetivos. De entre estas soluciones, el tomador de decisiones puede elegir una solución que se ajuste mejor a sus preferencias. En la tabla 56 se listan las soluciones determinadas mediante el método de la programación por objetivos prioritarios para cada conjunto posible de prioridades. Por lo tanto, acomodos diferentes de prioridades originan distintas estrategias de publicidad.

Cuando un problema de programación por objetivos prioritarios tiene sólo dos variables de decisión, es posible determinar en forma gráfica la solución óptima. Por ejemplo, supon-

TABLA 56
Soluciones óptimas para Priceler determinadas mediante programación por objetivos prioritarios

Prioridades			Óptimo				
					Desviaciónes con respecto a		
La más alta	Segunda en importancia	La más baja	Valor x_1	Valor x_2	VAI	PBI	MAI
VAI	PBI	MAI	6	0	0	0	5
VAI	MAI	PBI	5	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$
PBI	VAI	MAI	6	0	0	0	5
PBI	MAI	VAI	6	0	0	0	5
MAI	VAI	PBI	3	5	4	5	0
MAI	PBI	VAI	3	5	4	5	0

ga que MAI es el objetivo de mayor prioridad, PBI es el segundo en importancia y los VAI es el de menor prioridad. En la figura 14, se observa que el conjunto de puntos que satisfacen el objetivo de mayor prioridad (VAI) y la restricción del presupuesto está limitado por el triángulo *ABC*. Se trata ahora de buscar entre estos puntos la manera de satisfacer lo más posible el objetivo segundo en importancia (PBI). Infortunadamente, ningún punto en el triángulo *ABC* satisface el objetivo PBI. No obstante, en la figura se observa que entre todos los puntos que satisfacen el objetivo de mayor prioridad, el punto *C* (*C* es donde el objetivo MAI se satisface con exactitud y la restricción del presupuesto es activa) es el único punto que está lo más cerca de satisfacer el objetivo PBI. Al resolver en forma simultánea las ecuaciones

$$5x_1 + 4x_2 = 35 \qquad \text{(el objetivo MAI se cumple exactamente)}$$
$$100x_1 + 60x_2 = 600 \qquad \text{(restricción activa del presupuesto)}$$

se encuentra el punto $C = (3, 5)$. Por lo tanto, para este conjunto de prioridades, la solución con la programación por objetivos prioritarios es comprar 3 anuncios en el futbol y 5 en las telenovelas.

La programación por objetivos no es el único recurso usado para analizar problemas de toma de decisiones de objetivos múltiples cuando hay certidumbre. Otros métodos para tomar decisiones cuando los objetivos son varios y hay certidumbre se encuentran en Steuer (1985) y en Zionts y Wallenius (1976).

Solución de problemas de programación por objetivos prioritarios con la ayuda de LINDO y LINGO

Los estudiantes que no tienen acceso a un programa de computadora que resuelva problemas de programación por objetivos prioritarios puede recurrir a LINDO (o a cualquier otro paquete de PL) para solucionarlos. Con el fin de ilustrar cómo se puede usar LINDO para resolver este tipo de problemas de programación examinemos el ejemplo de Priceler con el conjunto original de prioridades (VAI seguido por PBI seguido por MAI).

Comenzamos pidiendo LINDO para reducir al mínimo la derivación del objetivo de mayor prioridad solucionando el PL:

$$\begin{aligned}
&\min z = s_1^- \\
&\text{s.a} \quad 7x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 40 &&\text{(restricción de VAI)}\\
&\qquad 10x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ = 60 &&\text{(restricción de PBI)}\\
&\qquad 5x_1 + 4x_2 + s_3^- - s_3^+ = 35 &&\text{(restricción de MAI)}\\
&\qquad 100x_1 + 60x_2 \le 600 &&\text{(restricción del presupuesto)}
\end{aligned}$$

Todas las variables son no negativas

El objetivo 1 (VAI) se puede satisfacer, así que LINDO informa que hay un valor óptimo de $z = 0$. Ahora queremos llegar tan cerca como sea posible al objetivo 2 mientras se asegura que la desviación respecto al objetivo 1 se conserva en su nivel actual (0). Se usa una función objetivo de s_2^- (para minimizar el objetivo 2) y se suma la restricción $s_1^- = 0$ (para asegurar que el objetivo 1 todavía se cumple), y se pide a LINDO que resuelva

$$
\begin{aligned}
&\min z = s_2^- \\
&\text{s.a} \quad 7x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 40 \qquad \text{(restricción de VAI)} \\
&\qquad 10x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ = 60 \qquad \text{(restricción de PBI)} \\
&\qquad 5x_1 + 4x_2 + s_3^- - s_3^+ = 35 \qquad \text{(restricción de MAI)} \\
&\qquad 100x_1 + 60x_2 \le 600 \qquad \text{(restricción del presupuesto)} \\
&\qquad s_1^- = 0 \\
&\qquad \text{Todas las variables son no negativas}
\end{aligned}
$$

Como es posible cumplir en forma simultánea con los objetivos 1 y 2, este PL también generará un valor óptimo de $z = 0$. Ahora se pretende alcanzar el objetivo 3 (MAI) tan cerca como sea posible, mientras se conservan las desviaciones respecto a los objetivos 1 y 2 en sus niveles actuales. Esto requiere que LINDO resuelva

$$
\begin{aligned}
&\min z = s_3^- \\
&\text{s.a} \quad 7x_1 + 3x_2 + s_1^- - s_1^+ = 40 \qquad \text{(restricción de VAI)} \\
&\qquad 10x_1 + 5x_2 + s_2^- - s_2^+ = 60 \qquad \text{(restricción de PBI)} \\
&\qquad 5x_1 + 4x_2 + s_3^- - s_3^+ = 35 \qquad \text{(restricción de MAI)} \\
&\qquad 100x_1 + 60x_2 + s_3^- - s_3^+ \le 600 \qquad \text{(restricción del presupuesto)} \\
&\qquad s_1^- = 0 \\
&\qquad s_2^- = 0 \\
&\qquad \text{Todas las variables son no negativas}
\end{aligned}
$$

Naturalmente, el editor de pantalla completa de LINDO (o LINGO) facilita ir de un paso del problema de programación por objetivos al siguiente paso. Para ir del paso i al paso $i + 1$, se modifica simplemente la función objetivo para minimizar la desviación desde el objetivo de mayor prioridad $i + 1$ y se suma una restricción que asegura que la desviación desde el objetivo i-ésimo de la más alta prioridad se mantiene en su nivel actual.

OBSERVACIONES

1 La solución óptima para este PL es $z = 5, x_1 = 6, x_2 = 0, s_1^- = 0, s_2^- = 0, s_3^- = 5, s_1^+ = 2, s_2^+ = 0, s_3^+ = 0$, lo cual va de acuerdo con la solución obtenida mediante el método de la programación por objetivos prioritarios. El valor de $z = 5$ indica que si los objetivos 1 y 2 se cumplen, entonces lo mejor que puede hacer Priceler es llegar a los 5 millones de exposiciones que cumplen con el objetivo 3.

2 Incidentalmente, suponga que sólo se pudo llegar a dos unidades de alcanzar el objetivo 1. Cuando se resuelve el segundo PL se tendrían que sumar las restricciones $s_1^- = 2$ (en lugar de $s_1^- = 0$).

3 La metodología de la programación por objetivos de esta sección se puede aplicar sin cambios cuando algunas o todas las variables de decisión están restringidas a ser enteros o variables 0-1 (véanse problemas 11, 12 y 14).

4 Si se usa LINGO, la metodología de la programación por objetivos de esta sección se puede aplicar sin cambios aun cuando la función objetivo o algunas de las restricciones sean no lineales.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Determine en forma gráfica la solución de la programación por objetivos prioritarios para el ejemplo de Priceler con las prioridades siguientes:

a PBI es el objetivo con la prioridad más alta, seguido por MAI y luego por VAI.

b El objetivo con la prioridad más alta es VAI, seguido por PBI y luego por MAI.

c El objetivo con la prioridad más alta es VAI seguido por MAI y luego por PBI.

d El objetivo con la prioridad más alta es MAI, seguido por VAI y luego por PBI.

2 La compañía de computadoras Fruit está lista para hacer su compra anual de microprocesadores para sus computadoras. Fruit puede comprar microprocesadores (en lotes de 100) con tres proveedores. Cada microprocesador se clasifica, de acuerdo con su calidad, en excelente, bueno o mediocre. El año venidero, Fruit necesitará 5 000 microprocesadores excelentes, 3 000 microprocesadores buenos y 1 000 mediocres.

Las características de los microprocesadores comprados a cada proveedor se proporcionan en la tabla 57. Fruit presupuesta cada año 28 000 dólares para gastarlos en microprocesadores. Si la compañía no consigue suficientes microprocesadores de una calidad dada, entonces podría hacer un pedido especial de más microprocesadores a 10 dólares el excelente, 6 dólares el bueno y 4 dólares el mediocre. Fruit establece una penalización de 1 dólar por cada dólar que la cantidad pagada a los proveedores 1 a 3 sobrepase el presupuesto anual. Plantee y resuelva un PL con el cual Fruit minimice la penalización asociada con el cumplimiento de los requisitos de los microprocesadores en el año. Además aplique la programación por objetivos prioritarios para establecer una estrategia de compra. Demos a la limitación del presupuesto la más alta prioridad seguida por las restricciones de los microprocesadores excelentes, buenos y mediocres.

3 Highland Appliance tiene que determinar cuántos televisores a color y videocaseteras debe mantener en existencia. La compra de un televisor a color le cuesta a Highland 300 dólares, y la de una videocasetera, 200 dólares. Un televisor a color requiere 3 yardas cuadradas de espacio para el almacenamiento y una videocasetera necesita una yarda cuadrada de espacio. La venta de un televisor a color le proporciona a Highland una utilidad de 150 dólares, en tanto que la venta de una videocasetera da una utilidad de 100 dólares. Highland se ha fijado los objetivos siguientes (en orden de importancia):

Objetivo 1 Se puede gastar un máximo de 20 000 dólares en la compra de televisores a color y videocaseteras.
Objetivo 2 Highland debe ganar por lo menos 11 000 dólares en utilidades por la venta de televisores a color y videocaseteras.
Objetivo 3 Los televisores y las videocaseteras deben abarcar no más de 200 yardas cuadradas de espacio de almacenamiento.

Plantee un modelo de programación por objetivos prioritarios que Highland pueda usar para determinar cuántos televisores a color y videocaseteras tiene que pedir. ¿Cómo se modificaría el planteamiento por objetivos prioritarios si los objetivos de Highland tuvieran una utilidad de exactamente 11 000 dólares?

4 Una compañía elabora dos productos. La información pertinente para cada producto se proporciona en la tabla 58. La compañía tiene un objetivo de 48 dólares en utilidades e incurre en una penalización de 1 dólar por cada dólar que le falta para cumplir con este objetivo. Dispone de un total de 32 horas de mano de obra. Se incurre en una penalización de 2 dólares por cada hora de tiempo extra utilizada (mano de obra después de 32 horas). Por último, hay una penalización de 1 dólar por cada hora de mano de obra disponible que no se use. Las consideraciones de mercado exigen que se elaboren por lo menos 10 unidades del producto 2. Por cada unidad (de cualquier producto) que falte para cubrir la demanda, se fija una penalización de 5 dólares.

a Plantee un PL que se pueda usar para minimizar la penalización en que incurre la compañía.
b Suponga que la compañía establece (en orden de importancia) los objetivos siguientes:

Objetivo 1 Evitar la subutilización de la mano de obra.
Objetivo 2 Cumplir con la demanda del producto 1.
Objetivo 3 Cumplir con la demanda del producto 2.
Objetivo 4 No usar nada de tiempo extra.

Plantee y resuelva un modelo de programación por objetivos prioritarios para esta situación.

TABLA 57

	Características de un lote de 100 microprocesadores			Precio por 100
Proveedor	Excelente	Bueno	Mediocre	microprocesadores(dól.)
1	60	20	20	400
2	50	35	15	300
3	40	20	40	250

TABLA 58

	Producto 1	Producto 2
Mano de obra requerida	4 h	2 h
Contribución a la utilidad	\$4	\$2

5[1] Deancorp produce embutidos mediante la mezcla de cabeza de res, lomo de cerdo, carne de oveja y agua. El costo por libra, grasa por libra, proteína por libra de estos ingredientes se da en la tabla 59. Deancorp necesita producir 100 lb de embutido y ha establecido los objetivos siguientes, listadas en orden de prioridad:

Objetivo 1 El embutido debe contener por lo menos 15% de proteína.
Objetivo 2 El embutido debe contener cuando mucho 8% de grasa.
Objetivo 3 El costo por libra de embutido no debe exceder 8 centavos.

Plantee un modelo de programación por objetivos prioritarios para Deancorp.

6[2] La firma contable Touche Young debe terminar tres trabajos durante el mes próximo. El trabajo 1 requiere 500 horas de labor, el trabajo 2 requiere 300 horas y el trabajo 3, de 100 horas. En la actualidad, la compañía tiene 5 socios, 5 empleados con amplia experiencia y 5 empleados jóvenes; todos trabajan hasta 40 horas al mes. La cantidad en dólares (por hora) que la compañía puede facturar depende del tipo de contador que se asigne a cada trabajo, como se indica en la tabla 60. (La X quiere decir que un empleado joven no tiene suficiente experiencia para desempeñar el trabajo 1.) Todos los trabajos se tienen que terminar. Touche Young ha fijado también los objetivos siguientes, que se listan en orden de prioridad:

Objetivo 1 La facturación mensual debe sobrepasar 68 000 dólares.
Objetivo 2 Se debe contratar cuando mucho un socio.
Objetivo 3 Se deben contratar cuando mucho tres empleados con experiencia.
Objetivo 4 Se deben contratar cuando mucho cinco empleados jóvenes.

TABLA 59

	Cabeza	Lomo	Oveja	Humedad
Grasa (por lb)	0.05	0.24	0.11	0
Proteína (por lb)	0.20	0.26	0.08	0
Costo (en centavos)	0.12	9	8	0

[1]Basado en Steuer (1984).
[2]Basado en Welling (1977).

TABLA 60

	Trabajo 1	Trabajo 2	Trabajo 3
Socio	160	120	110
Empleado con experiencia	120	90	70
Empleado joven	X	50	40

Formule un modelo de programación por objetivos prioritarios para esta situación.

7 Hay cuatro maestros en la Escuela de Contaduría de la Universidad Faber. Cada semestre, 200 estudiantes toman todos los siguientes cursos: mercadotecnia, finanzas, producción y estadística. La "efectividad" de cada maestro al enseñar su materia se da en la tabla 61. Cada maestro puede enseñar a un total de 200 alumnos durante el semestre. El director ha establecido el objetivo de obtener un nivel de efectividad en la enseñanza promedio de alrededor de 6 en cada curso. Las desviaciones respecto a este objetivo en cualquier curso se consideran de igual importancia. Plantee un modelo de programación por objetivos que se pueda usar para determinar los niveles de la enseñanza en el semestre.

Grupo B

8† La universidad Faber está admitiendo aspirantes a los cursos del 2008. Hay cuatro objetivos para ellos, que se listan en orden de prioridad:

Objetivo 1 Los estudiantes que ingresen deben ser por lo menos 5 000.
Objetivo 2 Los estudiantes que ingresen deben tener por lo menos una calificación promedio de 640 en la prueba de aptitudes.
Objetivo 3 Por lo menos, 25% de los estudiantes que ingresen deben ser de otros estados.
Objetivo 4 Por lo menos, 2 000 estudiantes de los que ingresen no deben ser *nerds*.

Los aspirantes que recibe Faber se clasifican según la tabla 62. Formule un modelo de programación por objetivos prioritarios con el que se pueda determinar cuántos aspirantes de cada tipo deben ser admitidos. Suponga que todos los aspirantes que son admitidos deciden asistir a esta universidad.

9‡ Wivco encara la demanda siguiente de *globots* durante los próximos cuatro trimestres: trimestre 1, 13 *globots*; trimestre 2, 14 *globots*; trimestre 3, 12 *globots*; trimestre 4, 15 *globots*. Los *globots* se pueden fabricar con mano de obra en el horario regular o con mano de obra en tiempo extra. La capacidad de producción (cantidad de *globots*) y costos de producción durante los próximos cuatro trimestres se proporcionan en la tabla 63. Wivco ha establecido los objetivos siguientes en orden de importancia:

Objetivo 1 Cumplir la demanda de cada trimestre a tiempo.
Objetivo 2 El inventario al final de cada trimestre no puede ser mayor de 3 unidades.
Objetivo 3 El costo de producción total debe mantenerse por abajo de 250 dólares.

Desarrolle un modelo de programación por objetivos prioritarios que se pueda usar para determinar el programa de producción para los siguientes cuatro trimestres. Suponga que al principio del primer trimestre hay un *globot* en inventario.

TABLA 61

Maestro	Mercadotecnia	Finanzas	Produción	Estadística
1	7	5	8	2
2	7	8	9	4
3	3	5	7	9
4	5	5	6	7

†Basado en Lee y Moore, "University Admissions Planning" (1974).
‡Basedo en Lee y Moore, "Production Scheduling" (1974).

TABLA 62

Lugar de residencia	Calificación en la prueba de aptitudes	Núm. Nerds	Núm. no-Nerds
Mismo estado	700	1500	400
Mismo estado	600	1300	700
Mismo estado	500	500	500
Otro estado	700	350	450
Otro estado	600	400	400
Otro estado	500	400	600

10 La tienda de discos Ricky emplea ya 5 empleados de tiempo completo y tres empleados de medio tiempo. La carga de trabajo normal es de 40 horas a la semana para los empleados de tiempo completo y de 20 horas a la semana para los empleados de medio tiempo. Cada empleado de tiempo completo recibe 6 dólares por hora por trabajar hasta 40 horas a la semana y puede vender 5 discos por hora. Un empleado de tiempo completo que trabaja tiempo extra, recibe 10 dólares por hora. Los empleados de medio tiempo reciben 3 dólares por hora y pueden vender 3 discos por hora. A Ricky le cuesta 6 dólares comprar un disco y vende cada disco en 9 dólares. Ricky tiene gastos fijos a la semana de 500 dólares. Ha establecido los objetivos siguientes por semana, listados en orden de prioridad:

Objetivo 1 Vender por lo menos 1 600 discos por semana.
Objetivo 2 Tener una utilidad de por lo menos 2 200 dólares por semana.
Objetivo 3 Los empleados de tiempo completo deben trabajar cuando mucho 100 horas de tiempo extra.
Objetivo 4 Para aumentar el sentido de seguridad en el trabajo, se debe minimizar la cantidad de horas que cada empleado de tiempo completo trabaja después de las 40 horas.

Establezca un modelo de programación por objetivos prioritarios que se pueda usar para determinar cuántas horas por semana debe trabajar cada empleado.

TABLA 63

	Horario regular		Tiempo extra	
Trimestre	Capacidad	Costo/Unidad	Capacidad	Costo/Unidad
1	9	$4	5	$6
2	10	$4	5	$7
3	11	$5	5	$8
4	12	$6	5	$9

11 Gotham City pretende determinar el tipo y la ubicación de las instalaciones recreativas que se construirán en la década próxima. Se está pensando en cuatro tipos de instalaciones: campos de golf, albercas, gimnasios y canchas de tenis. Hay seis lugares para ello. Si se construye un campo de golf, tiene que ser en el sitio 1 o en el sitio 6. Otras instalaciones se pueden erigir en los sitios 2 a 5. El terreno disponible (en miles de pies cuadrados) en cada sitio se señala en la tabla 64.

El costo de la construcción de cada instalación (en miles de dólares), el mantenimiento anual (en miles de dólares) por cada instalación y el terreno (en miles de pies cuadrados) que requiere cada instalación se indican en la tabla 65.

La cantidad de días-usuario (en miles) por cada tipo de instalación depende del lugar donde se construya. Esta relación de dependencia se proporciona en la tabla 66.

a Considere el siguiente conjunto de prioridades:

Prioridad 1 Uso límite del terreno en cada sitio respecto al terreno disponible.
Prioridad 2 Los costos de construcción no deben exceder 1.2 millones de dólares.
Prioridad 3 Los días-usuario deben exceder 200 000.
Prioridad 4 Los costos de mantenimiento al año no deben ser mayores de 200 000 dólares.

Por lo que se refiere a este conjunto de prioridades, utilice la programación por objetivos prioritarios para determinar el tipo y ubicación de las instalaciones recreativas en Gotham City.

b Considere el siguiente conjunto de prioridades:

Prioridad 1 Uso del terreno límite en cada sitio respecto al terreno disponible.
Prioridad 2 La cantidad de días-usuario deben ser mayores que 200 000.
Prioridad 3 Los costos de construcción no deben exceder 1.2 millones de dólares.
Prioridad 4 Los costos de mantenimiento al año no deben sobrepasar 200 000 dólares.

Por lo que toca a este conjunto de prioridades, utilice la programación por objetivos prioritarios para determinar el tipo y ubicación de las instalaciones recreativas en Gotham City.[†]

12 Una pequeña compañía aeroespacial planea ocho proyectos:

Proyecto 1 Desarrollar una instalación de pruebas automatizadas.

TABLA 64

	Sitio			
	2	3	4	5
Terreno	70	80	95	120

TABLA 65

Sitio	Costo de construcción	Costo de mantenimiento	Terreno requerido
Golf	340	80	No relevante
Natación	300	36	29
Gimnasio	840	50	38
Canchas de tenis	85	17	45

[†]Basado en Taylor y Keown (1984).

TABLA 66

Sitio	1	2	3	4	5	6
Golf	31	X	X	X	X	27
Natación	X	25	21	32	32	X
Gimnasio	X	37	29	28	38	X
Canchas de tenis	X	20	23	22	20	X

Proyecto 2 Asignar un código de barras a todo el inventario y maquinaria de la compañía.
Proyecto 3 Introducir un sistema CAD/CAM.
Proyecto 4 Comprar un torno y un sistema nuevos para eliminar rebabas.
Proyecto 5 Instituir el sistema de manufactura flexible.
Proyecto 6 Instalar una red de área local.
Proyecto 7 Desarrollar la simulación de inteligencia artificial.
Proyecto 8 Establecer una iniciativa de administración de calidad total.

Cada proyecto se clasificó según cinco atributos: rendimiento de la inversión (RDI), costo, mejoramiento de la productividad, trabajadores necesarios y grado de riesgo tecnológico. Los valores se dan en la tabla 67.

La compañía ha fijado los siguientes cinco objetivos (listados en orden de prioridad):

Objetivo 1 Alcanzar un rendimiento de la inversión de por lo menos 3 250 dólares.
Objetivo 2 Costo límite de 1 300 dólares.
Objetivo 3 Alcanzar un mejoramiento en la productividad de por lo menos 6.
Objetivo 4 Limitar la fuerza de trabajo a 108.
Objetivo 5 Limitar el riesgo tecnológico a un total de 4.

Utilice la programación por objetivos prioritarios para determinar qué proyectos se deben emprender.

13 Apenas fue elegido el nuevo presidente y ya se establecieron los objetivos económicos siguientes (listados en orden descendente de prioridad):

Objetivo 1 Equilibrar el presupuesto (esto significa ingresos por lo menos iguales a los costos).
Objetivo 2 Recortar los gastos cuando mucho en 150 mil millones de dólares.
Objetivo 3 Aumentar cuando mucho 550 mil millones de dólares en impuestos de los ricos.
Objetivo 4 Aumentar cuando mucho 350 mil millones de dólares en impuestos de los pobres.

En la actualidad, el gobierno gasta un millón de millones al año. El ingreso puede aumentar de dos maneras: mediante un impuesto a la gasolina y un impuesto sobre la renta. Usted debe determinar:

G = impuesto por galón (en centavos).
LTR = % de impuesto cargado en los primeros 30 000 dólares de renta.
HTR = % de impuesto cargado sobre cualquier ingreso obtenido por arriba de los 30 000 dólares.
C = recorte en gastos (en miles de millones).

Si el gobierno escoge G, LTR y HTR, entonces se elevan los ingresos que se muestran en la tabla 68 (en miles de millones). Naturalmente, el impuesto sobre los ingresos mayores de 30 000 dólares debe ser por lo menos igual al impuesto sobre los primeros 30 000 dólares de ingresos. Encuentre un mode-

TABLA 67

	Proyecto							
	1	2	3	4	5	6	7	8
ROI (dól.)	2 070	456	670	350	495	380	1 500	480
Costo (dól.)	900	240	335	700	410	190	500	160
Mejoramiento de la productividad	3	2	2	0	1	0	3	2
Fuerza de trabajo necesaria	18	18	27	36	42	6	48	24
Grado riesgo	3	2	4	1	1	0	2	3

TABLA 68

	Ingresos bajos	Ingreso alto
Impuesto a la gasolina	G	.5G
Impuesto sobre la renta hasta 30 000 dólares	20LTR	5LTR
Impuesto sobre la renta por arriba de los 30 000 dólares	0	15HTR

lo de programación por objetivos prioritarios para ayudar al presidente a lograr sus metas.

14 Las computadoras HAL deben determinar cuál de los siete proyectos de investigación y desarrollo (I y D) empezar. Para cada uno de los proyectos hay cuatro valores que son de interés:

a Valor presente neto (VNP en millones de dólares) del proyecto.

b Tasa de crecimiento anual en ventas generadas por el proyecto.

c Probabilidad de que el proyecto tenga éxito.

d Costo (en millones de dólares) del proyecto.

La información pertinente se proporciona en la tabla 69. HAL estableció los cuatro siguientes objetivos:

Objetivo 1 VPN = el valor presente neto de todos los proyectos seleccionados debe ser por lo menos de 200 millones de dólares.

TABLA 69

Proyecto	VNA (en millones)	Tasa de crecimiento anual	Probabilidad de éxito	Costo (en millones)
1	40	20	0.75	220
2	30	16	0.70	140
3	60	12	0.75	280
4	45	8	0.90	240
5	55	18	0.65	300
6	40	18	0.60	200
7	90	19	0.65	440

Objetivo 2 La probabilidad promedio de éxito para todos los proyectos elegidos debe ser por lo menos de 0.75.

Objetivo 3 La tasa de crecimiento promedio de todos los proyectos escogidos debe ser por lo menos de 15%.

Objetivo 4 El costo total de todos los proyectos seleccionados debe ser cuando mucho de mil millones.

Determine qué proyectos deben ser elegidos mediante programación por objetivos prioritarios para los conjuntos siguientes de prioridades:

Conjunto de prioridades 1 2>>>4>>>1>>>3

Conjunto de prioridades 2 1>>>3>>>4>>>2

4.17 Uso de Solver de Excel para solucionar PL

Excel tiene la capacidad de resolver problemas de programación lineal (y con frecuencia no lineal). En esta sección se ilustra cómo utilizar el Solver para Excel† para determinar la solución óptima para el problema de la dieta de la sección 3.4 y el ejemplo del inventario de la sección 3.10.

La clave para resolver un PL en una hoja de cálculo es establecer una que siga la pista a todo lo de interés (costos o utilidades, uso de recursos, etc.). Luego identifique las celdas de interés que puedan ser distintas. Éstas se denominan **celdas de cambio** (Changing Cells). Después de definir dichas celdas, identifique la celda que contiene su función objetivo como **celda blanco** (Target Cell). Enseguida identifique las restricciones e indique a Solver que resuelva el problema. En este momento, la solución óptima para el problema se colocará en la hoja de cálculo.

†Para activar Solver para Excel por primera vez, seleccione Tools (Herramientas) y luego Add-Ins (Complementos). Marque la casilla de Solver; esto hace que Excel abra Solver siempre que usted marque Tools (Herramientas) y luego Solver.

Uso de Solver para Excel para solucionar el problema de la dieta

Diet1.xls

En el archivo Diet1.xls se desarrolló un modelo en hoja de cálculo para el problema de la dieta (ejemplo 6 del capítulo. 3). Para empezar (véase figura 15) se introducen los encabezados por cada tipo de alimento en B3:E3. Se introducen los valores de ensayo para la cantidad de cada alimento consumido en el intervalo B4:E4. Por ejemplo, en la figura 15 se indica que se está considerando comer tres barras de chocolate, cuatro bolas de helado de crema de chocolate, cinco botellas de bebida de cola y seis rebanadas de pastel de queso con piña. Para ver si la dieta de la figura 15 es una dieta "óptima", se tiene que determinar su costo, así como las calorías, el chocolate, azúcar y grasa que proporciona. En el intervalo B5:E5 se introduce el costo por unidad de cada alimento disponible. Luego se calcula el costo de la dieta en la celda F5.

Se podría calcular el costo de la dieta en la celda F5 con la fórmula:

$$=B4 \cdot B5 + C4 \cdot C5 + D4 \cdot D5 + E4 \cdot E5$$

pero es más fácil introducir la fórmula

$$=\text{SUMPRODUCT}(B\$4{:}E\$4,\ B5{:}E5)$$

La función =SUMPRODUCT requiere dos intervalos como datos de entrada. La primera celda en el primer intervalo se multiplica por la primera celda del segundo intervalo; luego, la segunda celda del primer intervalo se multiplica por la segunda celda en el segundo intervalo; y así sucesivamente. Luego se suman todos estos productos. En esencia, la función =SUMPRODUCT copia la idea de los productos escalares de los vectores analizados en la sección 2.1. Por lo tanto, la función =SUMPRODUCT calcula el costo total como $(3)(50) + 4(20) + 5(30) + 6(80) = 860$ centavos en la celda F5.

Las calorías de cada alimento se introducen en el intervalo B6:E6; el contenido de chocolate en B7:E7; el contenido de azúcar en B8:E8, y el contenido de grasa en B9:E9. Al copiar la fórmula de F5 al intervalo de celdas F6:F9 ahora se calculan las calorías, chocolate, azúcar y grasa contenida en la dieta definida por los valores en B4:E4. Obsérvese que la función =SUMPRODUCT facilita la creación de varias restricciones al introducir una fórmula y usar el comando copy (copiar).

Las cantidades mínimas necesarias por día de cada nutriente se listan en el intervalo de celdas H6:H9. En la figura 15 se puede ver que la dieta actual es factible (cumple con las cantidades diarias necesarias de cada nutriente) y cuesta 8.70 dólares. A continuación se explica cómo usar Solver para hallar la solución óptima del problema de la dieta.

Paso 1 En el menú Tools (Herramientas), seleccione Solver. Aparecerá la ventana de diálogo de la figura 16.

Paso 2 Desplace el ratón hasta la porción de la celda blanco (Set Target Cell) de la ventana de diálogo, y dé un clic (o escriba la dirección de la celda) en la *target cell* (celda blanco) (costo total en la celda F5) y seleccione Min. De esta manera se le indica a Solver que debe minimizar el costo total.

Paso 3 Mueva el ratón hacia la parte de *By Changing Cells* (las celdas de cambio) de la ventana de diálogo y dé un clic en las celdas de cambio (B4:E4). Esto le indica a Solver que se puede cambiar la cantidad consumida de cada alimento.

Paso 4 Dé un clic en el botón *Add* para añadir las restricciones. Aparecerá la pantalla de la figura 17. Desplácese a la parte de la ventana de diálogo de *Add Constraint* y seleccione

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			**Feasible**					
2			**solution to Diet Problem**					
3		Brownie	Choc IC	Cola	Pine Cheese	Totals		Required
4	Eaten	3	4	5	6			
5	Cost	50	20	30	80	860		
6	Calories	400	200	150	500	5750	>=	500
7	Chocolate	3	2	0	0	17	>=	6
8	Sugar	2	2	4	4	58	>=	10
9	Fat	2	4	1	5	57	>=	8

FIGURA 15

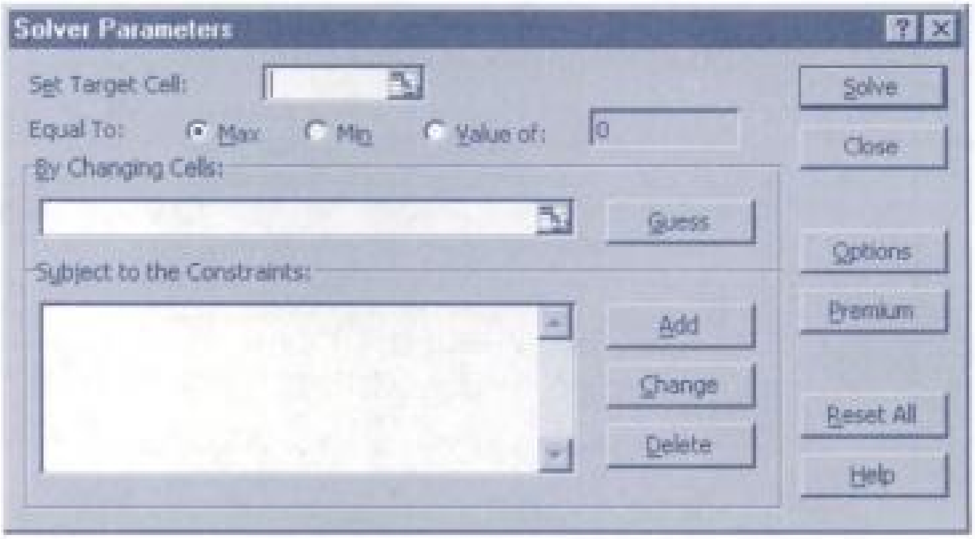


FIGURA 16

F6:F9. Luego muévase al cuadro con la flecha hacia abajo y seleccione >=. Por último, dé un clic donde dice *Constraints* y seleccione H6:H9. Escoja OK, porque ya no hay más restricciones. Si usted necesita agregar más restricciones, seleccione *Add*. Desde la ventana principal de Solver, usted puede cambiar una restricción si selecciona *Change*, o bien, borrar una limitación si selecciona *Delete*.

Ya se generaron cuatro restricciones. Solver asegurará que las *Changing Cells* se escojan de tal manera que F6>=H6, F7>=H7, F8>=H8, y F9>=H9. En pocas palabras, la dieta se escogerá para asegurar que se consuman suficientes calorías, chocolate, azúcar y grasa.

La ventana de Solver debe ser como la de la figura 18.

Paso 5 Antes de resolver el problema, es necesario indicarle a Solver que todas las *Changing Cells* deben ser no negativas. También se requiere indicarle que se tiene un modelo lineal. Si no se indica que el modelo es lineal, entonces Solver no sabrá que debe usar el método simplex para resolver el problema, y podría obtener una respuesta incorrecta. Se consiguen estos requisitos mediante la selección de *Options*. Entonces aparece la pantalla de la figura 19. Marque en ella el cuadro *Assume non-Negative*, lo cual segura que todas las celdas de cambio (*changing cells*) serán no negativas. Marque el cuadro *Assume Linear Model*, lo cual asegura que Solver utilizará el método simplex para resolver el PL. En ocasiones, Solver no identificará al PL como un modelo lineal si el PL tiene escalas poco apropiadas (un PL tanto con cantidades grandes como pequeñas presentes en la función objetivo, segundos miembros o las restricciones). Al marcar la casilla *Use Automatic Scaling* se reducen al mínimo las oportunidades de que un PL con escalas poco apropiadas sea interpretado como un modelo no lineal. Incidentalmente, *Max Time* es el tiempo máximo que Solver trabajará antes de avisar al usuario respecto a la terminación del procedimiento de solución. *Iterations* es el número máximo de pivoteos con simplex que Solver efectuará antes de preguntar al usuario si continúa con el procedimiento de la solución. El parámetro *Precision* señala cuánto "error" se tolera antes de decidir si una restricción no se satisface. Por ejemplo, con una precisión de 0.001, se consideraría que una celda de cambio (*chan-*

FIGURA 17

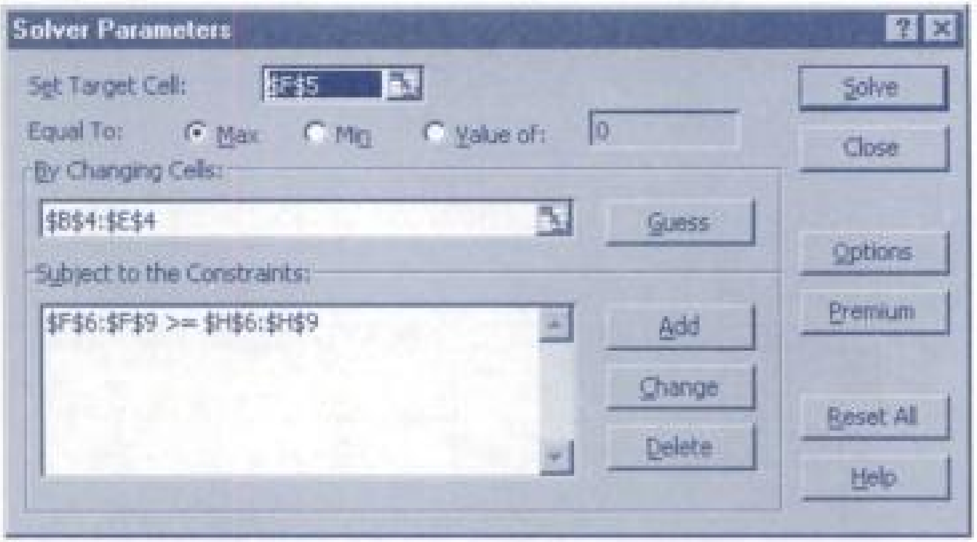


FIGURA 18

ging cell) con un valor de −0.0009 satisface una restricción no negativa. Los parámetros tolerancia y convergencia se tratan en el capítulo 8.

Paso 6 Luego de seleccionar *OK* en el cuadro de opciones de Solver, se elige *Solve*. Solver obtiene la solución óptima mostrada en la figura 20.

Al igual que con LINDO, Solver señala que el costo mínimo es 90 centavos. El costo mínimo se consigue comiendo nada de barras de chocolate, aunque sí 3 onzas de helado de chocolate, una botella de bebida de cola y nada de pastel de queso con piña.

Solución del ejemplo de Sailco mediante Solver

Sailco.xls

Ahora se desarrollará una hoja de cálculo (Sailco.xls) para resolver el ejemplo de Sailco (ejemplo 12 del capítulo 13). Véase la figura 21. Se requiere seguir con atención el inventario inicial, el inventario final y los costos. Observe que para cada mes

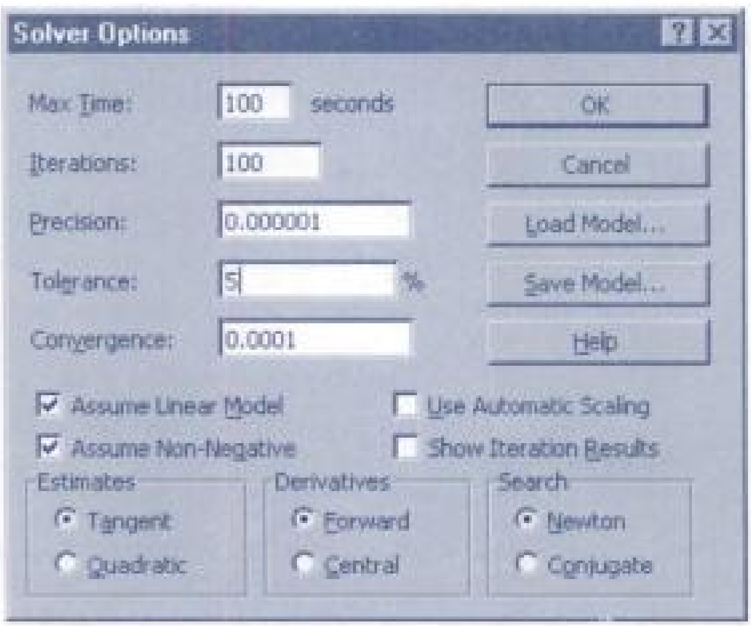


FIGURA 19

FIGURA 20

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Optimal Solution					
2			to the Diet Problem					
3		Brownie	Choc IC	Cola	Pine Cheese	Totals		Required
4	Eaten	0	3	1	0			
5	Cost	50	20	30	80	90		
6	Calories	400	200	150	500	750	>=	500
7	Chocolate	3	2	0	0	6	>=	6
8	Sugar	2	2	4	4	10	>=	10
9	Fat	2	4	1	5	13	>=	8

FIGURA 21

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			Optimal solution					RT unit cost	$ 400.00		
2			to Sailco problem					OT unit cost	$ 450.00		
3								Unit Holding cost	$ 20.00		
4	Month	Beg Inventory	OT Production	RT Production		RT Capacity	Demand	Ending Inventory			Monthly Cost
5	1	10	0	40	<=	40	40	10	>=	0	$ 16,200.00
6	2	10	10	40	<=	40	60	0	>=	0	$ 20,500.00
7	3	0	35	40	<=	40	75	0	>=	0	$ 31,750.00
8	4	0	0	25	<=	40	25	0	>=	0	$ 10,000.00
9										Total Cost	$ 78,450.00

$$\text{Costo mensual} = 400(\text{producción en horario regular}) + 450(\text{producción con tiempo extra}) + 20(\text{costo por retener las unidades})$$

$$\text{Inventario final} = \text{inventario inicial} + \text{producción mensual} - \text{demanda mensual}$$

Paso 1 Introducir los costos unitarios en I1:I3, las capacidades mensuales en horario regular en F5:F8, demandas en G5:G8 e inventario del mes 1 en B5.

Paso 2 Introducir los valores de ensayo de la producción de cada mes en horario regular y con tiempo extra en C5:D8.

Paso 3 Determinar el inventario final del mes 1 en H5 mediante la fórmula

=B5 + C5 + D5 − G5

Esto representa la siguiente relación:

$$\text{Inventario final} = \text{inventario al principio} + \text{producción mensual} - \text{demanda mensual}$$

Paso 4 Asignar el inventario inicial del mes 2 al inventario final del mes 1 al ingresar en la celda B6 la fórmula

=H5

Paso 5 Al copiar la fórmula desde B5 hasta B6:B8 se calcula el inventario inicial para los meses 2 a 4. Al copiar la fórmula desde H5 hasta H6:H8 se calcula el inventario final para los meses 2 a 4.

Paso 6 En la celda K5 se calcula el costo del mes 1 mediante la fórmula

=$I$1*D5 + C5*$I$2 + $I$3*H5

Lo anterior representa el hecho de que el costo de cada mes está dado por

$$\text{Costo mensual} = 400(\text{producción en el horario regular}) + 450(\text{producción con tiempo extra}) + 20(\text{costo por conservar las unidades})$$

Al copiar esta fórmula desde K5 hasta K6:K8 se calculan los costos para los meses 2 a 4. Los costos totales se calculan en la celda K9 mediante la fórmula

=SUM(K5:K8)

Paso 7 Se llena ahora la ventana de diálogo de Solver como se ilustra en la figura 22. El objetivo es minimizar el costo total (celda K9). Las *changing cells* son producción con tiempo extra y en horario regular (C5:D8). Es necesario asegurarse de que la producción de ca-

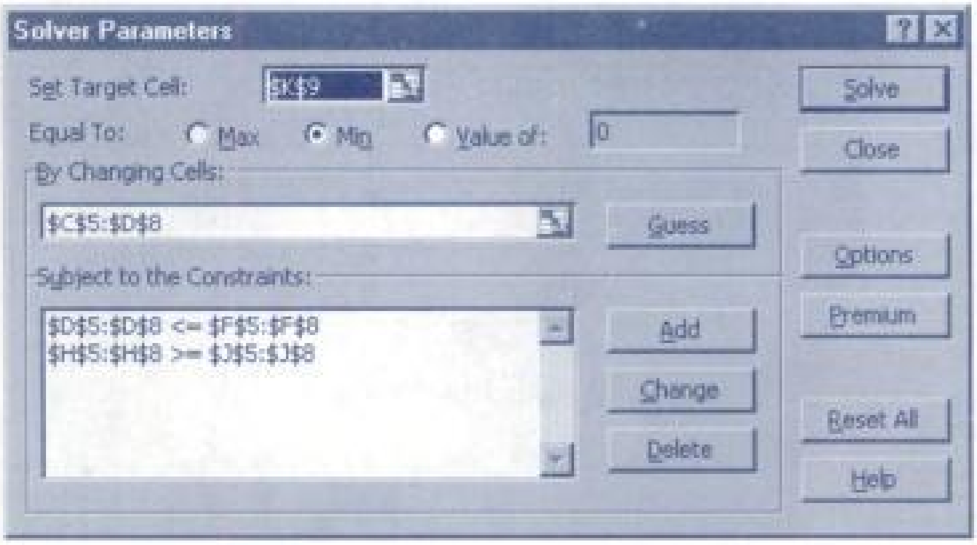


FIGURA 22

da mes en el horario regular es cuando mucho 40(D5:D8 <=F5:F8). Por último, si se obliga a que el inventario final de cada mes sea no negativo (H5:H8 > = J5:J8) se asegura que la demanda mensual se cumple a tiempo. Se marca *Assume Linear Model, Assume Non-Negative* y *Use Automatic Scaling* en *Options*. Después de elegir Solver se llega a la solución óptima que se ilustra en la figura 21. Se logra un costo mínimo de 78 450 dólares con la fabricación de 40 unidades elaboradas en el horario regular en los meses 1 a 3, 25 unidades producidas en horario regular durante el mes 4, 10 unidades producidas con tiempo extra durante el mes 2 y 35 unidades manufacturadas con tiempo extra durante el mes 3.

Uso del valor de opción

Sailco.xls

Recuerde que el costo mínimo era de 78 450 dólares en el problema de Sailco. Suponga que se desea determinar una solución que proporcione exactamente un costo de 90 000 dólares. Entonces se utiliza el valor de opción de Solver. Se llena el cuadro de diálogo de Solver como se muestra en la figura 23 (véase la hoja titulada *Cost of $90,000* en el archivo Sailco.xls).

Solver da la solución de la figura 24. Observe que Solver encontró una solución factible que tiene un costo total exactamente de 90 000 dólares.

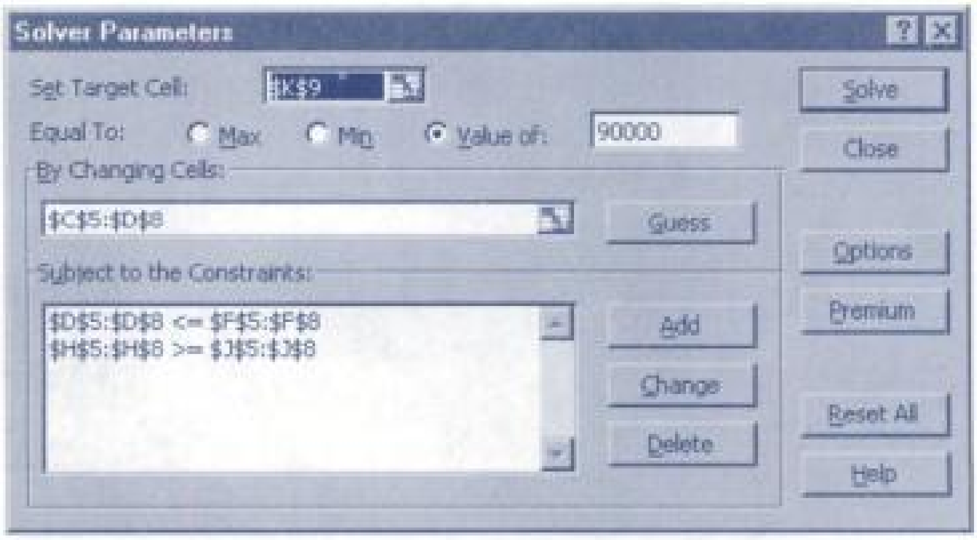


FIGURA 23

FIGURA 24

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			**Optimal solution**					RT unit cost	$ 400.00		
2			**to Salico problem**					OT unit cost	$ 450.00		
3								Unit Holding cost	$ 20.00		
4	Month	Beg Inventory	OT Production	RT Production		RT Capacity	Demand	Ending Inventory			Monthly Cost
5	1	10	179.090909	0	<=	40	40	149.0909091	>=	0	$ 83,572.73
6	2	149.0909	0	0	<=	40	60	89.09090909	>=	0	$ 1,781.82
7	3	89.09091	0	0	<=	40	75	14.09090909	>=	0	$ 281.82
8	4	14.09091	0	10.909091	<=	40	25	0	>=	0	$ 4,363.64
9										Total Cost	$ 90,000.00

Solver y PL no factibles

Bevco.xls

Recuerde que si por lo menos 36 mg de vitamina C se requieren, entonces el problema de Bevco (ejemplo 4 de este capítulo) es no factible. Hemos establecido este problema en Solver en el archivo Bevco.xls. En la figura 25 se ilustra la hoja de cálculo, y la ventana de Solver en la figura 26.

Cuando se elige Solver, aparece el mensaje que se presenta en la figura 27. Esto indica que el PL no tiene solución factible.

Solver y los PL no acotados

El ejemplo 3 de este capítulo es un PL no acotado. El archivo Breadco.xls (figura 28) contiene un planteamiento de este PL. En la figura 29 se presenta una ventana de Solver para el ejemplo de Breadco. Cuando se elige *Solve* aparece el mensaje de la figura 30.

Breadco.xls

	A	B	C	D	E	F
1						
2	**Infeasible LP**					
3						
4					Total Cost	
5		Soda	Juice		30	
6	Amount	0	10			
7	Unit cost	2	3			
8				Available		Needed
9	Sugar	0.5	0.25	2.5	>=	4
10	Vitamin C	1	3	30	>=	36
11	Total oz.	1	1	10	=	10

FIGURA 25

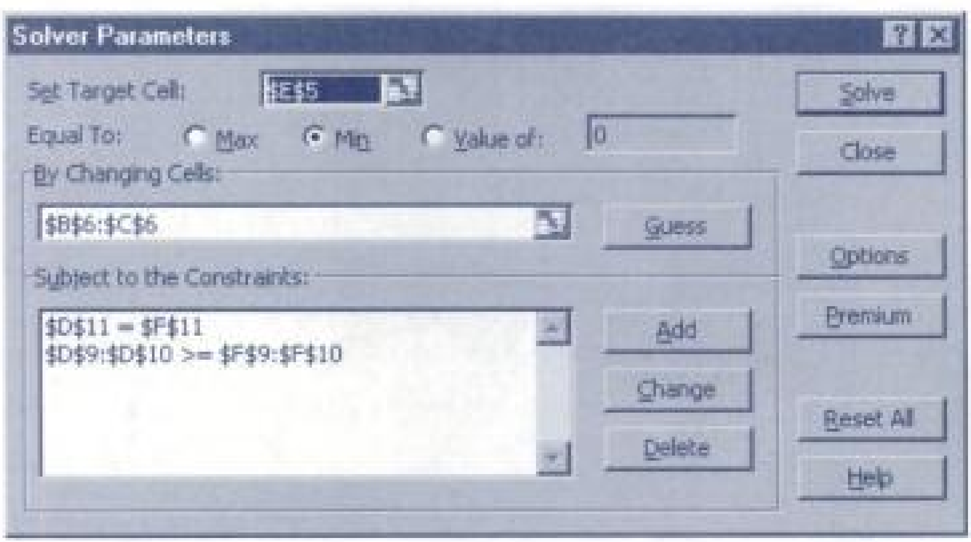


FIGURA 26

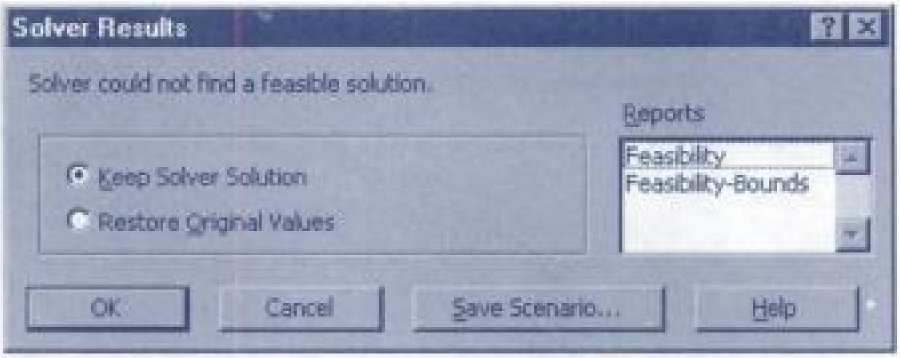
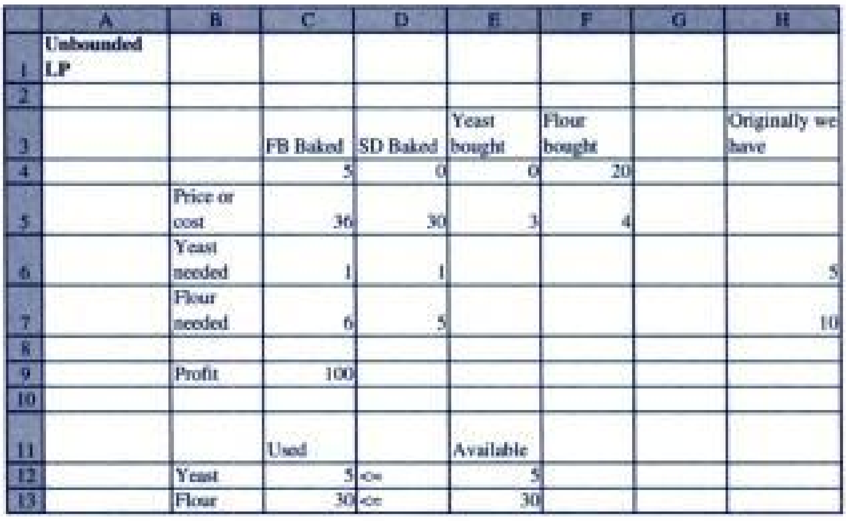


FIGURA 27



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Unbounded LP							
2								
3			FB Baked	SD Baked	Yeast bought	Flour bought		Originally we have
4			5	0	0	20		
5		Price or cost	36	30	3	4		
6		Yeast needed	1	1				5
7		Flour needed	6	5				10
8								
9		Profit	100					
10								
11			Used		Available			
12		Yeast	5	<=	5			
13		Flour	30	<=	30			

FIGURA 28

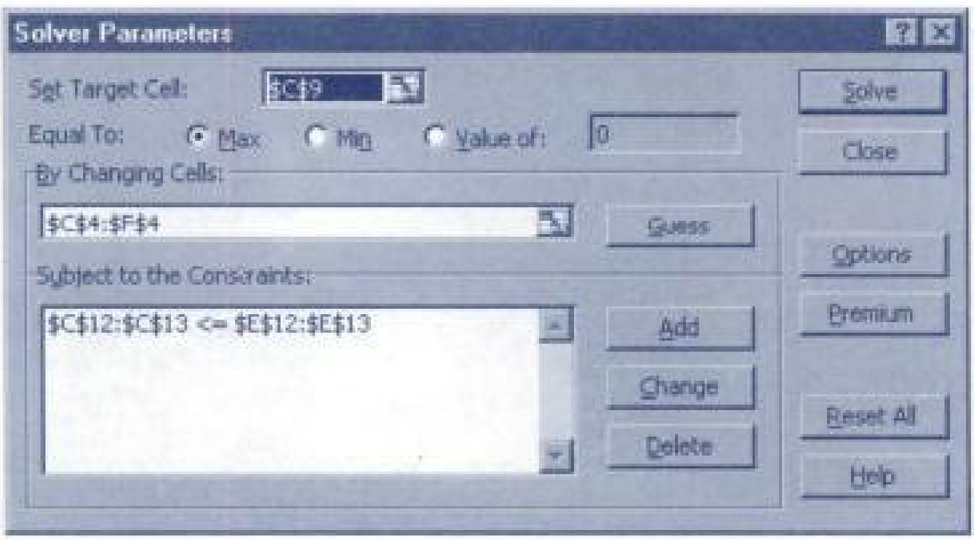


FIGURA 29

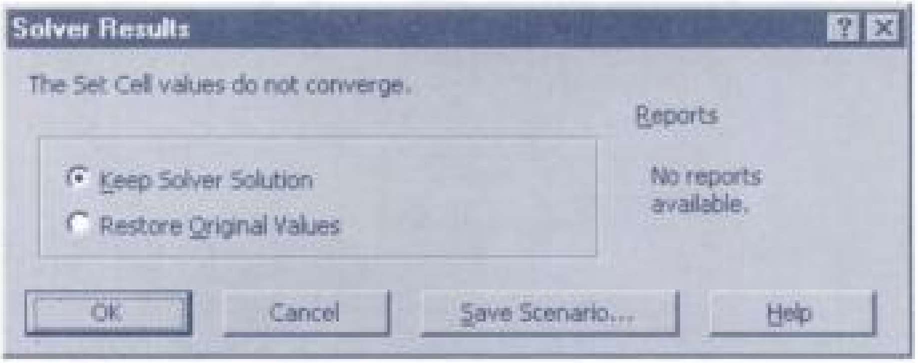


FIGURA 30

El mensaje "*Set Cell values do not converge*" ("los valores de las celdas no convergen") quiere decir que el PL es no acotado; es decir, hay valores de las celdas de cambio que satisfacen todas las restricciones y originan una utilidad arbitrariamente grande.

PROBLEMAS

Grupo A

Encuentre la solución óptima de los problemas siguientes con Solver para Excel.

1 Problema 2 de la sección 3.4.

2 Ejemplo 7 del capítulo 3.

3 Ejemplo 11 del capítulo 3.

4 Problema 3 de la sección 3.10.

5 Ejemplo 14 de la sección 3.12.

Grupo B

6 Problema 4 de la sección 3.11.

7 Problema 5 de la sección 3.11.

8 Problema 3 de la sección 3.12.

9 Problema 5 de la sección 3.12.

RESUMEN

Preparación de un PL para resolverlo mediante simplex

Un PL está en la **forma estándar** si todas las restricciones son restricciones de igualdad y todas las variables son no negativas. Para transformar un PL en forma estándar se efectúa lo siguiente:

Paso 1 Si la i-ésima restricción es una restricción $\leq$, entonces se convierte en una restricción de igualdad mediante la suma de una variable de holgura s_i y la restricción de signo $s_i \geq 0$.

Paso 2 Si la i-ésima restricción es una restricción $\geq$, entonces se convierte en una restricción de igualdad mediante la sustracción de una variable de excedente e_i y la suma de la restricción de signo $e_i \geq 0$.

Paso 3 Si la variable x_i no tiene restricción de signo (nrs), se reemplaza x_i tanto en la función objetivo como en las restricciones por $x_i' - x_i''$, donde $x_i' \geq 0$ y no $x_i'' \geq 0$.

Suponga que tras haber transformado el PL en la forma estándar tiene m restricciones y n variables.

Una solución básica para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene haciendo a $n - m$ variables iguales a 0 y despejando los valores de las m variables restantes. Cualquier solución básica en la cual todas las variables son no negativas es una **solución factible básica** (sfb) del PL.

Para cualquier PL hay un punto extremo único de la región factible del PL que corresponde a cada sfb. Asimismo, por lo menos una sfb corresponde a cada punto extremo de la región factible.

Si un PL tiene una solución óptima, entonces hay un punto extremo que es óptimo. Por lo tanto, al buscar una solución óptima para un PL, la búsqueda se podría restringir a las soluciones factibles básicas del PL.

El algoritmo simplex

Si el PL está en la forma estándar y es muy evidente una sfb, entonces el algoritmo simplex (para un problema de maximización) procede como sigue:

Paso 1 Si todas las variables no básicas tienen coeficiente no negativo en el renglón 0, entonces la sfb actual es óptima. Si algunas variables en el renglón 0 tienen coeficiente negativo, entonces elija la variable con el coeficiente más negativo en el renglón 0 para que entre a la base.

Paso 2 Para cada restricción en la cual la variable entrante tiene un coeficiente positivo, se calcula la razón siguiente:

$$\frac{\text{Segundo miembro de la restricción}}{\text{Coeficiente de la variable de entrada en la restricción}}$$

Cualquier restricción que alcance el valor más pequeño de esta razón es la ganadora de la prueba del cociente. Aplique OER para hacer de la variable entrante una variable básica en cualquier restricción que gane la prueba del cociente. Vuelva al paso 1.

Si el PL (en un problema de maximización) es no acotada, entonces con el paso del tiempo se alcanza un arreglo en el cual una variable no básica tiene un coeficiente negativo en el renglón 0 y coeficiente no positivo en cada restricción. De otro modo (exceptuando la ocurrencia rarísima de *los ciclos*), el algoritmo simplex encontrará una solución óptima para el PL.

Si una sfb no es muy evidente, entonces se tiene que usar el método de la gran M o el método simplex de dos fases para llegar a una sfb.

Método de la gran M

Paso 1 Modifique las restricciones de tal manera que el segundo miembro o lado derecho de cada una de ellas sea no negativo.

Paso 1′ Identifique las restricciones que son ahora (después del paso 1) restricciones = o ≥. En el paso 3 se suma una variable artificial a cada una de estas restricciones.

Paso 2 Convierta cada restricción de desigualdad en la forma estandar.

Paso 3 Si (después de haber completado el paso 1) la restricción i es una restricción ≥ o =, entonces sume una variable artificial a_i y la restricción de signo $a_i \geq 0$.

Paso 4 Sea M un número positivo muy grande. Si el PL es un problema de minimización, entonces sume (por cada variable artificial) Ma_i a la función objetivo. Para un problema de maximización sume $-Ma_i$.

Paso 5 Puesto que cada variable artificial estará en la base inicial, se deben eliminar del renglón 0 antes de empezar el simplex. Si todas las variables artificiales son iguales a 0 en la solución óptima, entonces se ha encontrado la solución óptima del problema original. Si algunas variables artificiales son positivas en la solución óptima, entonces el problema original es no factible.

Método de las dos fases

Paso 1 Modifique las restricciones de tal manera que el segundo miembro de cada restricción sea no negativo.

Paso 1′ Identifique las restricciones que sean ahora (después del paso 1) restricciones = o ≥. En el paso 3 se sumará una variable artificial a cada una de dichas restricciones.

Paso 2 Convierta las restricciones de desigualdad en la forma estándar.

Paso 3 Si (después del paso 1′) la restricción i es una restricción ≥ o =, entonces sume una variable artificial a_i y la restricción de signo $a_i \geq 0$.

Paso 4 Por lo pronto, ignore la función objetivo del PL original. Resuelva un PL cuya función objetivo sea min w' = (suma de todas las variables artificiales). Esto recibe el nombre de **PL de la Fase I.**

Como cada $a_i \geq 0$, luego de resolver el PL de la Fase I se tiene uno de los tres casos siguientes:

Caso 1 El valor óptimo de w' es mayor que cero. En este caso, el PL original no tiene solución factible.

Caso 2 El valor óptimo de w' es igual a cero y ninguna variable artificial está en la base óptima de la fase I. En este caso, elimine todas las columnas del tableau óptimo de la fase I que correspondan a las variables artificiales, y combine la función objetivo original con las restricciones del tableau óptimo de la fase I. Así se origina el **PL de la Fase II**. La solución óptima para este PL y el PL original son iguales.

Caso 3 El valor óptimo de w' es igual a cero y por lo menos una variable artificial está en la base óptima de la fase I. Es posible determinar la solución óptima del PL original en este caso si al final de la fase I se suprimen del arreglo óptimo de la fase I todas las variables artificiales no básicas y cualquier variable proveniente del problema original que tenga coeficiente negativo en el renglón 0 del tableau óptimo de la fase I.

Solución de problemas de minimización

Para resolver un problema de minimización mediante el simplex, elija como la variable entrante la variable no básica del renglón 0 cuyo coeficiente sea el más positivo. Un tableau, o forma canónica, es óptimo si cada variable del renglón 0 tiene coeficiente no positivo.

Soluciones óptimas alternativas

Si una variable no básica tiene coeficiente 0 en el renglón 0 de un tableau óptimo, y la variable no básica puede ser pivoteada en la base, el PL podría tener **soluciones óptimas alternativas.** Si dos soluciones factibles básicas son óptimas, entonces cualquier punto sobre el segmento de recta que une las dos soluciones factibles básicas óptimas es también una solución óptima para el PL.

Variables que no tienen restricción de signo (nrs)

Si se reemplaza una variable nrs x_i con $x_i' - x_i''$, la solución óptima del PL tendrá x_i', x_i'' o tanto x_i' como x_i'' iguales a cero.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Mediante el algoritmo simplex determine *dos* soluciones óptimas del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\leq 15 \\ x_3, x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2 Determine con el algoritmo simplex la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= -4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3 Utilice el método de la gran M y el método de las dos fases para encontrar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4 Encuentre la solución óptima del PL siguiente por medio del algoritmo simplex:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - 3x_2 &\le 1 \\ x_1 - 4x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5 Encuentre la solución óptima del PL siguiente por medio del algoritmo simplex:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

6 Encuentre la solución óptima del PL siguiente por medio del método de la gran M y el método de las dos fases:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\ge 3 \\ 3x_1 + x_2 &\le 3.5 \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7 Aplique el algoritmo simplex para determinar *dos* soluciones óptimas del PL siguiente. ¿Cuántas soluciones óptimas tiene este PL? Encuentre una tercera solución óptima.

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + 3x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ 4x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8 Use el algoritmo simplex para determinar la solución óptima del PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

9 Encuentre la solución óptima del PL siguiente por medio del método de la gran M y el método de las dos fases.

$$\begin{aligned} \min z &= -3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - 2x_2 &\ge 2 \\ -x_1 + x_2 &\ge 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

10 Suponga que se pudieran manufacturar 10 tipos de muebles en el problema de los muebles Dakota. ¿Cuántos tipos de muebles (cuando mucho) se tendrían que fabricar para obtener una solución óptima?

11 Considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 &\le 1 \\ 20x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a Encuentre todas las soluciones factibles básicas de este PL.

b Demuestre que cuando el simplex se aplica para resolver el PL toda solución básica se tiene que examinar antes de encontrar la solución óptima.

Mediante la generalización de este ejemplo, Klee y Minty (1972) construyeron (para $n = 2, 3, \ldots$) un PL con n variables de decisión y n restricciones para las cuales el algoritmo simplex examina $2^n - 1$ soluciones factibles básicas antes de encontrar la solución óptima. Por lo tanto, existe un PL con 10 variables y 10 restricciones para las cuales el algoritmo simplex requiere $2^{10} - 1 = 1\,023$ pivoteos para hallar la solución óptima. Por fortuna estos PL "patológicos" rara vez se presentan en las aplicaciones prácticas.

12 Productco elabora tres productos. Todos requieren mano de obra, madera y pintura. Los recursos necesarios, precio unitario y costo variable (exclusivo de la materia prima) para cada producto se proporcionan en la tabla 70. Se dispone en la actualidad de 900 horas de mano de obra, 1 550 galones de pintura y 1 600 pies tablón de madera. Además, se puede comprar mano de obra adicional a 6 dólares la hora; la pintura extra costaría 2 dólares/galón y la madera adicional, 3 dólares/pie tablón. Para los dos conjuntos siguientes de prioridades utilice programación por objetivos prioritarios para determinar un plan de producción óptimo. Para el conjunto 1:

Prioridad 1 Obtener utilidad de por lo menos 10 500 dólares.
Prioridad 2 No comprar mano de obra adicional.
Prioridad 3 No comprar más pintura.
Prioridad 4 No comprar más madera.

Para el conjunto 2:

Prioridad 1 No adquirir más mano de obra.
Prioridad 2 Obtener utilidad de por lo menos 10 500 dólares.
Prioridad 3 No comprar más pintura.
Prioridad 4 No comprar más madera.

13 Los empleos en la Universidad de Indiana (UI) se clasifican según tres factores:

Factor 1 Complejidad de las funciones.
Factor 2 Instrucción necesaria.
Factor 3 Demanda mental, o visual, o ambas.

Para cada empleo en la UI, lo necesario para cada factor se califica según una escala de 1 a 4, en donde un 4 en el factor 1 representa alta complejidad de funciones; un 4 en el factor 2 significa alta escolaridad, y un 4 en el factor 3 quiere decir alta demanda mental, o visual, o ambas.

TABLA 70

Producto	Mano de obra	Madera	Pintura	Precio(dól.)	Costo variable (dól.)
1	1.5	2	3	26	10
2	3	3	2	28	6
3	2	4	2	31	7

La UI desea encontrar una fórmula para determinar el grado de cada empleo. Para hacerlo asignará un valor en puntos a la calificación de cada factor que requiere un empleo. Por ejemplo, suponga que el nivel 2 del factor 1 da un total de puntos de 10; el nivel 3 del factor 2 genera un total de puntos de 20 y que el nivel 3 del factor 3 origina un valor en puntos de 30. Entonces, un empleo con estos requisitos tendría un total de puntos de 10 + 20 + 30. El salario por hora del empleo es igual a la mitad de su total de puntos.

La universidad tiene dos objetivos (listados en orden de prioridad) al establecer los puntos dados a cada nivel de cada factor del empleo.

Objetivo 1 Cuando se incrementa el nivel de un factor en 1, los puntos se deben incrementar por lo menos en 10. Por ejemplo, el nivel 2 del factor 1 debe ganar por lo menos 10 puntos más que el nivel 1 del factor 1. El objetivo 1 es minimizar la suma de desviaciones respecto a estos requisitos.

Objetivo 2 Por lo que se refiere a los empleos de referencia de la tabla 71, el total de puntos real para cada empleo debe acercarse tanto como sea posible al total de puntos listado en la tabla. El objetivo 2 es minimizar la suma de las desviaciones absolutas de los totales de puntos respecto a las calificaciones deseadas.

Aplique la programación por objetivos prioritarios para alcanzar los totales de puntos apropiados. ¿Qué salario se debe pagar en un empleo con niveles de habilidad de 3 para cada factor?

14 Una clínica hospital de pacientes externos ejecuta cuatro tipos de operaciones. La utilidad por operación, así como los minutos de rayos X y el tiempo de laboratorio utilizados se dan en la tabla 72. La clínica tiene 500 habitaciones privadas y 500 cuartos de cuidados intensivos. Las operaciones tipo 1 y tipo 2 requieren que el paciente permanezca en el cuarto de cuidados intensivos durante un día, en tanto que para las operaciones tipo 3 y tipo 4 es necesario que el paciente permanezca en una habitación privada durante un día. Se practican todos los días por lo menos 100 operaciones de cada tipo en el hospital. El hospital tiene los objetivos siguientes:

Objetivo 1 Lograr una utilidad diaria de por lo menos 100 000 dólares.

Objetivo 2 Utilizar a lo sumo 50 h al día de tiempo de rayos X.

Objetivo 3 Utilizar a lo más 40 h al día de tiempo de laboratorio.

TABLA 71

	Nivel de factor			
Empleo	1	2	3	Calificación deseada
1	4	4	4	105
2	3	3	2	93
3	2	2	2	75
4	1	1	2	68

TABLA 72

	Tipo de operación			
	1	2	3	4
Utilidad (dólares)	200	150	100	80
Tiempo de rayos (minutos)	6	5	4	3
Tiempo de laboratorio (minutos)	5	4	3	2

El costo por desviación unitaria respecto a cada objetivo es como se indica:

Objetivo 1 Costo de 1 dólar por cada dólar con el que se incumpla el objetivo de la utilidad.

Objetivo 2 Costo de 10 dólares por cada hora con la que se incumpla el objetivo del tiempo de rayos X.

Objetivo 3 Costo de 8 dólares por cada hora por la que se incumpla el objetivo del laboratorio.

Establezca un modelo de programación por objetivos para minimizar el costo diario en que se incurre por el incumplimiento de los objetivos del hospital.

Grupo B

15 Considere un problema de maximización con el arreglo óptimo que aparece en la tabla 73. La solución óptima para este PL es $z = 10$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_1 = x_2 = 0$. Determine la sfb segunda en importancia para este PL. (*Sugerencia*: Demuestre que la segunda mejor solución tiene que ser una sfb que es un pivote alejado de la solución óptima.)

16 Un senderista está considerando llevar consigo dos tipos de objetos en un viaje por el campo. El objeto 1 pesa a_1 lb y el objeto 2 pesa a_2 lb. El senderista obtiene un beneficio de c_1 unidades con cada objeto tipo 1, y con cada objeto tipo 2 logra un beneficio de c_2 unidades. La mochila puede llegar a contener objetos que pesen a lo más b lb.

a Si el senderista puede llevar una cantidad fraccionaria de objetos en su viaje, formula un PL que maximice el beneficio.

b Demuestre que si

$$\frac{c_2}{a_2} \geq \frac{c_1}{a_1}$$

entonces, el senderista puede maximizar el beneficio llenando la mochila con $\frac{b}{a_2}$ objetos tipo 2.

c ¿Cuáles de las suposiciones de la programación lineal se incumplen con este planteamiento del problema del senderista?

17 Usted recibe el tableau mostrado en la tabla 74 para un problema de maximización. Proporcione las condiciones de las incógnitas a_1, a_2, a_3, b y c que hacen que los enunciados siguientes sean verdaderos:

a La solución actual es óptima.

b La solución actual es óptima y hay soluciones óptimas alternas.

c El PL es no acotado (en este inciso suponga que $b \geq 0$).

18 Suponga que se ha obtenido el tableau de la tabla 75 para un problema de maximización. Establezca condiciones sobre a_1, a_2, a_3, b, c, y c_2 que se requieren para que los enunciados siguientes sean verdaderos:

a La solución actual es óptima y hay soluciones óptimas alternas.

b La solución básica actual no es una solución factible básica.

TABLA 73

z	x_1	x_2	x_3	x_4	ld
1	2	1	0	0	10
0	3	2	1	0	3
0	4	3	0	1	5

TABLA 74

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ld
1	$-c$	2	0	0	0	10
0	-1	a_1	1	0	0	4
0	a_2	-4	0	1	0	1
0	a_3	3	0	0	1	b

TABLA 75

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ld
1	c_1	c_2	0	0	0	0	10
0	4	a_1	1	0	a_2	0	b
0	-1	-5	0	1	-1	0	2
0	a_3	-3	0	0	-4	1	3

c La solución básica actual es una sfb degenerada.

d La solución básica actual es factible, pero el PL es no acotado.

e La solución básica actual es factible, pero el valor de la función objetivo puede ser mejorado al reemplazar x_6 como una variable básica con x_1.

19 Suponga que estamos resolviendo un problema de maximización y que la variable x_r casi deja la base.

a ¿Cuál es el coeficiente de x_r en el renglón 0 actual?

b Demuestre que después de que el pivoteo actual se ejecuta, el coeficiente de x_r en el renglón 0 no puede ser menor que cero.

c Explique por qué una variable que ya dejó la base en un pivoteo dado no puede volver a entrar a la base en el siguiente pivoteo.

20 Una compañía de autobuses opina que necesitará las cantidades siguientes de conductores durante cada uno de los cinco años siguientes: año 1, 60 conductores; año 2, 70 conductores; año 3, 50 conductores; año 4, 65 conductores; año 5, 75 conductores. Al inicio de cada año, la compañía tiene que decidir cuántos conductores se deben contratar o despedir. Cuesta 4 000 dólares contratar un conductor y 2 000 dólares despedir a uno. El salario de un conductor es de 10 000 dólares al año. Al empezar el año 1, la compañía tiene 50 conductores. Un conductor contratado al inicio del año puede ayudar a cumplir las necesidades del año actual y se le paga salario completo por el año actual. Determine un PL que minimice el salario y los costos de la contratación y del despido en los siguientes cinco años.

21 Los Zapateros de América pronostican la demanda siguiente para cada uno de los seis meses próximos: mes 1, 5 000 pares; mes 2, 6 000 pares; mes 3, 5 000 pares; mes 4, 9 000 pares; mes 5, 6 000 pares; mes 6, 5 000 pares. Un zapatero hace un par de zapatos en 15 minutos. Todos los zapateros trabajan 150 horas por mes más hasta 40 horas por mes de tiempo extra. Un zapatero recibe un salario regular de 2 000 dólares al mes más 50 dólares por hora de tiempo extra. Al inicio de cada mes, la empresa puede contratar o despedir trabajadores. A la compañía le cuesta 1 500 dólares contratar un trabajador y 1 900 dólares despedir a uno. El costo por mes por retener un par de zapatos es 3% del costo de producción de un par de zapatos con mano de obra y horario regular. (La materia prima para un par de zapatos cuesta 10 dólares.) Plantee un PL con el que se puedan minimizar los costos para cumplir (a tiempo) las demandas de los próximos seis meses. Al inicio del mes 1 la empresa tiene 13 trabajadores.

22 El condado de Monroe pretende determinar dónde ubicar la estación de bomberos del condado. Las ubicaciones de las cuatro ciudades principales del condado se dan en la figura 31. La ciudad 1 está en (10, 20); la ciudad 2 está en (60, 20); ciudad 3 está en (40, 30); ciudad 4 está en (80, 60). El promedio de incendios en la ciudad 1 es de 20 por año; el de la ciudad 2 es de 30; el de la ciudad 3 es de 40; el de la ciudad 4 es de 25 incendios. El condado quiere construir la estación de bomberos en un lugar que minimice la distancia promedio que una motobomba debe recorrer para acudir al incendio. Como la mayoría de caminos va de oriente a poniente o de norte a sur, se supone que la motobomba sólo puede hacer lo mismo. Por lo tanto, si la estación de bomberos se ubicara en (30, 40) y un incendio ocurriera en la ciudad 4, la motobomba tendría que recorrer $(80 - 30) + (60 - 40) = 70$ millas hasta el incendio. Aplique la programación lineal para determinar dónde se debe ubicar la estación de bomberos. (*Sugerencia*: Si la estación de bomberos se ubicara en el punto (x, y) y hay una ciudad en el punto (a, b) defina las variables e, w, n, s (este, oeste, norte, sur) que satisfacen las ecuaciones $x - a = w - e$ y $y - b = n - s$. Debe ser fácil obtener la formulación del PL correcto.)

23† Durante la temporada de futbol americano de 1972, los Delfines de Miami, los Bills de Buffalo y los Jets de Nueva York jugaron los partidos mostrados en la tabla 76. Suponga que según las bases de estos partidos queremos clasificar a los tres equipos. Sea M = la clasificación de Miami, J = la clasificación de los Jets y b = la clasificación de los Bills. Dados los valores de M, J y B, usted pronosticaría que cuando, por ejemplo, los Bills jugaran contra Miami, era de esperarse que Miami ganaría por $M - B$ puntos. Por lo tanto, su predicción habría sido errónea para el primer partido Miami-Bills por $|M - B - 1|$ puntos. Muestre cómo se puede aplicar la programación lineal para determinar la clasificación de cada equipo que minimice la suma de los errores de pronóstico para todos los juegos.

Al terminar la temporada, este método se usa para determinar las clasificaciones del futbol colegial y el basquetbol colegial. ¿Qué problemas se pueden prever si este método se usara para clasificar equipos al principio de la temporada?

24 Durante los cuatro trimestres próximos, Dorian Auto debe cumplir (a tiempo) la demanda siguiente de automóviles: trimestre 1, 4 000; trimestre 2, 2 000; trimestre 3, 5 000; trimestre 4, 1 000. Al inicio del trimestre 1 hay 300 automóviles en existencia y la compañía tiene la capacidad de producir a lo más 3 000 automóviles por trimestre. La compañía puede cambiar, al empezar cada trimestre, la capacidad de producción en un automóvil. Aumentar cada trimestre la capacidad de produc-

FIGURA 31

TABLA 76

Miami	Bills	Jets
27	—	17
28	—	24
24	23	—
30	16	—
—	24	41
—	3	41

†Basado en Wagner (1954).

ción cuesta 100 dólares. Cuesta 50 dólares por trimestre mantener un automóvil de la capacidad de producción (incluso si éste no se usa durante el trimestre actual). El costo variable por fabricar un automóvil es de 2 000 dólares. El costo por retener un automóvil es de 150 dólares por unidad, y se fija contra el inventario final de cada trimestre. Es necesario que al final del trimestre 4 la capacidad de la planta sea de por lo menos 4 000 automóviles. Plantee un PL con el que se minimice el costo total en que se incurre durante los próximos cuatro trimestres.

25 Ghostbusters, Inc., exorciza, es decir, libra a uno de los fantasmas. La compañía recibirá durante los siguientes tres meses la siguiente cantidad de llamadas telefónicas de personas que desean desembarazarse de sus fantasmas: enero, 100 llamadas; febrero, 300 llamadas; marzo, 200 llamadas. La empresa cobra 800 dólares por cada fantasma exorcizado durante el mes en que el cliente llama. No es necesario atender las llamadas durante el mes en que son hechas, pero si se atiende una llamada un mes después de que es hecha, entonces la compañía pierde 100 dólares en la clientela futura, y si una llamada se atiende a los dos meses de haber sido hecha, la firma pierde 200 dólares en la clientela. Cada empleado de Ghostbusters puede exorcizar 10 fantasmas al mes. Cada empleado recibe un salario de 4 000 dólares por mes. Al empezar enero, la compañía tiene 8 trabajadores. Los empleados pueden ser contratados o capacitados (en el tiempo 0) a un costo de 5 000 dólares por trabajador. El despido de trabajadores cuesta 4 000 dólares por empleado. Establezca un PL con el que se pueda maximizar la utilidad de Ghostbusters (ingresos menos costos) en los tres meses próximos. Suponga que todas las llamadas tienen que ser atendidas a fines de marzo.

26 Carco utiliza robots para manufacturar automóvil. La demanda siguiente se debe cumplir (no necesariamente a tiempo, pero todos los automóviles deben ser entregados al finalizar el trimestre 4): trimestre 1, 600; trimestre 2, 800; trimestre 3, 500; trimestre 4, 400. Carco tiene dos robots al empezar el trimestre. Los robots pueden comprarse al inicio de cada trimestre, pero sólo un máximo de dos por trimestre. Cada robot puede producir 200 automóviles por trimestre. La compra de un robot cuesta 5 000 dólares. Cada robot incurre en un costo de 500 dólares por mantenimiento cada trimestre (incluso si no se utiliza para fabricar automóviles). Los robots se pueden vender también al inicio de cada trimestre en 3 000 dólares. Al final de cada trimestre se incurre en un costo de 200 dólares por automóvil que se conserva. Si se acumula alguna de las demandas, entonces se incurre en un costo de 300 dólares por automóvil por cada trimestre que la demanda deja de surtirse.

Al final del trimestre 4, Carco debe tener por lo menos dos robots. Determine un PL con el que se minimice el costo total en que se incurre al cumplir la demanda de automóviles de los próximos cuatro trimestres.

27 Suponga que hemos encontrado un tableau óptimo para un PL, y que la sfb para dicho tableau es no degenerada. También suponga que hay una variable no básica en el renglón 0 con coeficiente cero. Demuestre que el PL tiene más de una solución óptima.

28 Suponga que la sfb para un tableau óptimo es degenerada, y que una variable no básica en el renglón 0 tiene coeficiente cero. Muestre con un ejemplo que cualquiera de los dos casos siguientes puede ocurrir:

Caso 1 El PL tiene más de una solución óptima.
Caso 2 El PL tiene una única solución óptima.

29 Usted es el alcalde de Gotham City, por lo que debe determinar una política fiscal para la ciudad. Se utilizan cinco tipos de impuestos para conseguir ingresos:

a Impuestos sobre la propiedad. Sea p = tasa porcentual del impuesto sobre la propiedad.

b Un impuesto sobre las ventas de todos los productos, excepto alimentos, medicamentos y bienes duraderos. Sea s = tasa porcentual del impuesto sobre las ventas.

c Un impuesto sobre la venta de bienes duraderos. Sea d = tasa porcentual del impuesto sobre las ventas de bienes duraderos.

d Un impuesto sobre la venta de gasolina. Sea g = tasa porcentual del impuesto sobre la venta de gasolina.

e Un impuesto sobre la venta de alimentos y medicamentos. Sea f = impuesto sobre la venta de alimentos y medicamentos.

La ciudad consta de tres grupos de personas: bajos ingresos (BI), ingresos medios (IM) y altos ingresos (AI). La cantidad de ingresos (en millones de dólares) proveniente de cada grupo al fijar un impuesto particular en un nivel de 1% se proporciona en la tabla 77.

Por ejemplo, un impuesto de 3% sobre las ventas de bienes duraderos generará 360 millones de dólares provenientes de las personas de bajos ingresos. Su política fiscal debe satisfacer las siguientes:

Restricción 1 La carga fiscal sobre las personas de IM no puede sobrepasar 2.8 miles de millones de dólares.

Restricción 2 La carga fiscal sobre las personas de AI no puede sobrepasar 2.4 miles de millones de dólares.

Restricción 3 Los ingresos totales reunidos tienen que exceder el nivel actual de 6.5 miles de millones de dólares.

Restricción 4 s tiene que estar entre 1 y 3%.

Dadas estas restricciones, el alcalde estableció los tres objetivos siguientes:

Objetivo P Mantener la tasa de impuestos sobre la propiedad menor a 3%.

Objetivo BI Limitar la carga fiscal sobre las personas de BI a 2 mil millones de dólares.

Objetivo suburbios Si la carga fiscal resulta demasiado alta, 20% de las personas BI, 20% de las personas IM y 40% de las personas de AI podrían cambiarse a las afueras de la ciudad. Suponga que esto sucederá si su carga fiscal total excede 1.5 mil millones de dólares. Para desanimar este éxodo, el objetivo suburbios es mantener la carga fiscal total sobre estas personas abajo de 2.5 mil millones de dólares.

Aplique la programación lineal para determinar una política fiscal óptima si los objetivos del alcalde tienen el siguiente conjunto de prioridades:

$$\text{LI} >>> \text{P} >>> \text{Suburbios}^{\dagger}$$

TABLA 77

	p	s	d	g	f
BI	900	300	120	30	90
IM	1 200	400	100	20	60
AI	1 000	250	60	10	40

†Basado en Chrisman, Fry, Reeves, Lewis, y Weinstein (1989).

APÉNDICE A Comandos de los menús e instrucciones de LINDO

Comandos de los menús

Se puede tener acceso a los comandos u órdenes de LINDO desde un menú conveniente similar a los de otros programas de Windows. El menú principal está formado por seis submenús a lo largo de la parte superior de la pantalla que señalan los diferentes comandos. Cuando usted da un clic en uno de los submenús —File, Edit, Solve, Reports, Window o Help, aparece un menú que se extiende hacia abajo con los diversos comandos. Usted puede seleccionar los comandos de la misma manera que en los programas de Windows dando un clic sobre la orden con el ratón o escribiendo la letra subrayada en el nombre del comando cuando el submenú apropiado está resaltado. Muchos comandos tienen también asignada una combinación de teclas (F2, Ctrl+Z, etc.). Como una facilidad más, también se puede tener acceso a algunos de los comandos que se usan con mayor frecuencia por medio de un icono que se localiza en una barra de herramientas en la parte superior de la pantalla. Diversos comandos de menús se describen brevemente y se da la lista de las combinaciones de teclas aplicables y los iconos en las secciones siguientes.

Menú Archivo (File Menu)

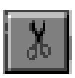
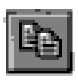
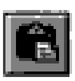
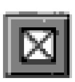
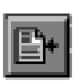
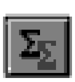
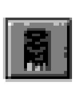
Los comandos del menú *File* le permiten a usted manipular en varios modos sus archivos de datos de LINDO. Puede usar este menú para abrir, cerrar, guardar e imprimir archivos, así como ejecutar varias tareas exclusivas de LINDO. A continuación se presenta una descripción de los comandos de *File*.

COMANDO		DESCRIPCIÓN
New	F2	Crea una ventana nueva para introducir datos.
Open	F3	Abre un archivo existente. Los cuadros de diálogo le permiten seleccionar entre varios tipos de archivos y ubicaciones.
View	F4	Abre un archivo existente sólo para verlo. No se pueden efectuar cambios en el archivo.
Save	F5	Guarda la ventana. Usted puede guardar los datos introducidos (un modelo), una Reports window o una ventana de comandos. La información se puede guardar en los formatos siguientes: *.LTX, un formato de texto que puede ser editado con *software* de procesador de palabras; *.LPK, para guardar modelos compilados en un formato "empaquetado", pero sin formato especial ni comentarios; y *.MPS, el formato estándar de la industria de máquinas independientes para transferir problemas de PL en LINDO a otro *software* para PL.
Save As...	F6	Guarda la ventana activa con un nombre de archivo específico. Es útil para dar un nuevo nombre a un archivo revisado y conservar intacto el archivo original.
Close	F7	Cierra la ventana activa. Si la ventana contiene información nueva, se le preguntará a usted si desea guardar los cambios.
Print	F8	Envía la ventana activa a la impresora.
Printer Setup...	F9	Selecciona la impresora y varias opciones para el formato de impresión.
Log Output...	F10	Envía toda la actividad posterior de la pantalla, que normalmente se enviaría a la *Report window*, a un archivo de texto. Cuando usted especificó una ubicación del archivo log, una marca aparecerá en el menú *File* en la línea *Log Output*. Para inhabilitar *Log Output* seleccione simplemente de nuevo el comando.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Take Commands... F11	"Toma" un *batch file* de LINGO con comandos y texto para operación automatizada. Se puede poner un modelo en la memoria, resolverlo, y la solución es colocada en la ventana *Reports* y guardada en un archivo. Si usted usa el comando *Batch* antes del inicio del texto del modelo, el modelo y los comandos contenidos en el archivo, así como la solución se verán en la ventana *Reports*.
Basis Read F12	Recupera una solución de un modelo que se guardó usando el comando *Basis Save*.
Basis Save Shift+F2	Guarda la solución para el modelo activo en disco con un nombre de archivo específico.
Title Shift+F3	Muestra el título del modelo activo, si se ha incluido uno con la instrucción opcional *Title* en el modelo.
Date Shift+F4	Abre una ventana *Reports* y muestra fecha y hora actuales según el reloj de su computadora.
Elapsed Time Shift+F5	Abre una ventana *Reports* y muestra el tiempo total transcurrido en su sesión actual de LINDO.
Exit Shift+F6	Cierra LINDO.

Menú Edit

Los comandos del menú *Edit* le permiten efectuar tareas básicas de edición comunes a la mayoría de aplicaciones de Windows, así como ejecutar varias tareas exclusivas de LINDO. Sigue una descripción de los comandos de *Edit*.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Undo Ctrl+Z	Deshace la última acción.
 Cut Ctrl+X	Corta el texto seleccionado y lo coloca en el portapapeles para pegarlo.
 Copy Ctrl+C	Copia el texto seleccionado en el portapapeles para pegarlo.
 Paste Ctrl+V	Inserta o pega el contenido del portapapeles en el punto de inserción.
Clear Delete	Borra el texto seleccionado, pero no lo coloca en el portapapeles.
 Find/Replace... Ctrl+F	Busca la ventana activa para encontrar el texto seleccionado y reemplazarlo con el texto introducido en el cuadro "Replace with".
 Options Alt+O	Permite ver y cambiar varios parámetros usados en las sesiones de LINDO.
 Go To Line... Ctrl+T	Le permite mover el cursor a cualquier línea en la ventana activa.
 Paste Symbol... Ctrl+P	Le permite pegar nombres de variables y símbolos reservados en la ventana activa.
Select All Ctrl+A	Selecciona todo lo que haya en la ventana activa para cortarlo o copiarlo.
 Clear All	Borra el contenido total de la ventana activa.
Choose New Font	Selecciona una nueva fuente para el texto en la ventana activa.

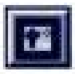
Menú Solve

Los comandos del menú *Solve* se usan después de que usted introdujo datos y están listos para obtener una solución. Enseguida se presenta la descripción de los comandos.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Solve Ctrl+S 	Envía el modelo de la ventana activa al Solver de LINDO para obtener la solución.
Compile Model Ctrl+E 	Traduce el modelo al formato aritmético requerido por el Solver de LINDO. Los modelos también se compilan en forma automática cuando usted usa el comando *Solve*.
Debug Ctrl+D	Ayuda a determinar problemas con modelos no factibles y no acotados. Se pueden identificar conjunto (renglones) suficientes y necesarios, como las restricciones cruciales, aquellas que hacen factible un modelo no factible si se eliminaran del modelo.
Pivot Ctrl+N	Hace que LINDO ejecute el paso siguiente en el proceso de la solución, con lo que es posible que los problemas de programación lineal se resuelvan paso a paso.
Preemptive Goal Ctrl+G	Ejecuta la optimización Lexico (una forma de programación por objetivos) en un modelo.

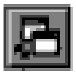
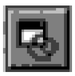
Menú Reports

Los comandos del menú *Reports* permiten a usted especificar cómo generar los informes con LINDO. Las descripciones de los comandos de *Reports* se presentan enseguida.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Solution Alt+0 	Abre el cuadro de diálogo de *Solutions Report Options*, el cual le facilita especificar cómo quiere usted que aparezca su informe.
Range Alt+1	Crea un informe del intervalo, o análisis de sensibilidad, para la ventana activa con el modelo.
Parametrics Alt+2	Ejecuta un análisis paramétrico sobre el segundo miembro o lado derecho de una restricción.
Statistics Alt+3	Despliega las variables estadísticas para el modelo de la ventana activa.
Peruse Alt+4 	Se usa para ver informes o partes seleccionadas de la estructura o solución del modelo actual.
Picture Alt+5 	Representa el modelo actual en la forma de matriz. Los coeficientes no cero de la matriz se podrían representar como texto o como gráficos.
Basis Picture Alt+6	Muestra un informe con formato de texto con un "panorama" de la base actual, y ordena los renglones y las columnas según la última inversión o triangulación ejecutada por el Solver. El informe *Basis Picture* se envía a la ventana *Reports*.
Tableau Alt+7	Muestra el tableau simplex para el modelo activo. Facilita la observación del algoritmo simplex en cada paso.
Formulation Alt+8	Muestra su modelo completo o en partes específicas en la ventana *Reports*.
Show Column Alt+9	Muestra una columna seleccionada sin el resto del modelo.
Positive Definite	Busca una garantía de optimalidad global en un modelo cuadrático.

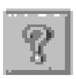
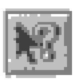
Menú Window

Los comandos del menú *Window* permiten que usted ajuste ventanas activas de comandos y de estado, y organice el despliegue de varias ventanas. A continuación se describen los comandos de *Window*.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Open Command Window Alt+C	Proporciona acceso a la interfaz de la línea de comandos de LINDO, donde usted podría introducir comandos en el indicador de dos puntos.
Open Status Window	Abre la ventana *Solver Status* de LINDO, la cual despliega información acerca del estado del optimizador, tal como un número de iteraciones o tiempo transcurrido. Esta ventana aparece también cuando usted selecciona *Solve* en el menú *Solve*.
Send to Back  Ctrl+B	Envía la ventana más al frente hasta atrás.
Cascade Alt+A	Acomoda todas las ventanas abiertas en forma de cascada desde la parte superior izquierda hasta la parte inferior derecha; la ventana activa está en la parte superior.
Tile Alt+T	Acomoda todas las ventanas abiertas de tal manera que ocupen el espacio equivalente dentro de la ventana del programa.
Close All Alt+X 	Cierra todas las ventanas activas.
Arrange Icons Alt+I	Desplaza los iconos que representan ventanas minimizadas, de tal manera que se acomodan en la parte inferior de la pantalla.
List of Windows	En la parte inferior del menú Window se despliega una lista de las ventanas abiertas. Se marca la ventana activa.

Menú Help

Los comandos del menú *Help* proporcionan acceso a la ayuda en línea de LINDO. Se describen en seguida los comandos de *Help*.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Contents   F1	Muestra el contenido de la sección de ayuda. El segundo icono (el de la flecha y el signo de interrogación) posibilita la ayuda sensible al contexto, donde el indicador del cursor cambia a un signo de interrogación y la ayuda se le proporciona específicamente según el comando seleccionado.
Search for Help on... Alt+F1	Busca la sección de ayuda para una palabra o un tema.
How to Use Help Ctrl+F1	Proporciona ayuda para aprender a usar el sistema de ayuda en línea.
About LINDO...	Muestra la pantalla inicial de arranque con información general acerca de LINDO.

Instrucciones de modelado opcionales

Aparte de los elementos básicos de un modelo, LINDO reconoce varias instrucciones opcionales que podrían aparecer después de la instrucción END. Estas instrucciones significan capacidades mayores de modelado, tal como asignar límites adicionales a las variables. La descripción de estas instrucciones se proporciona enseguida.

INSTRUCCIÓN	DESCRIPCIÓN
FREE <Variable>	Elimina todos los límites de la variable, por lo cual ésta asume cualquier valor real: positivo o negativo.
GIN <Variable>	Una variable queda restringida a ser un entero general (es decir, en el conjunto de los enteros no negativos).
INT <Variable>	Una variable queda restringida a ser un entero binario (es decir, 0 o 1).
SLB <Variable> <Value>	Establece un límite inferior simple para una variable (es decir, SLB X 10 requeriría que *X* fuera mayor que 10 o igual a 10).

SUB <Variable> <Value> Establece un límite superior simple para una variable (es decir, SUB X 10 requeriría que X fuera menor que 10 o igual a 10).

QCP <Constraint> Señala la primera restricción "real" en un modelo de programación cuadrática.

TITLE <Title> Permite que usted asigne un título a su modelo. El título se despliega mediante el comando *Title* del menú *File*.

APÉNDICE B Inicio con LINGO

Bienvenido a la parte de LINGO de este libro. El apéndice proporciona información básica breve sobre LINGO y le ayuda a instalar el *software*. Las características del software y cómo aplicarlo a los problemas muestra se explican en los capítulos posteriores.

¿Qué es LINGO?

LINGO es un paquete de *software* interactivo que se usa para resolver problemas de programación lineal, por enteros y no lineal. Es posible aplicarlo en situaciones similares en las que se utiliza LINDO, pero ofrece mayor flexibilidad en términos de cómo se expresan los modelos. Al contrario de LINDO, LINGO permite usar paréntesis y variables en el segundo miembro de una ecuación. Por lo tanto, las restricciones se escriben en la forma original y no se tiene que volver a escribirlas con constantes en el lado derecho. LINGO es capaz también de generar modelos grandes con relativamente pocas líneas de datos. Asimismo, el programa proporciona una gran biblioteca de funciones matemáticas, estadísticas y probabilísticas, y tiene mayor aptitud para leer información de archivos externos y hojas de cálculo.

Fundamentos de LINGO

De una manera muy parecida a LINDO, LINGO se puede usar para resolver problemas en forma interactiva con la ayuda del teclado, o bien, resolver problemas usando archivos creados en otro lado, en un programa independiente o como parte de un programa integrado que contiene códigos personalizados y bibliotecas de optimización de LINGO. Este apéndice se centra principalmente en el primer método, es decir, en resolver problemas de manera interactiva. Mayor información acerca de los otros métodos se encuentra en LINDO Systems, Inc.

Introducir un modelo en la versión de LINGO para Windows es similar a escribir en un formato del procesador de palabras de Windows: usted escribe simplemente los datos del modelo como los escribiría si resolviera en forma manual el problema. La ventana interior que se llama al inicio "*untitled*" (sin título) está lista para aceptar datos LINGO también posee comandos u órdenes básicas de edición para cortar, copiar y pegar texto. Esta herramienta, y otras características se encuentran en los comandos de *Window* tratados en el apéndice C.

Los elementos requeridos de LINGO son similares a los de LINDO. LINGO requiere también un objetivo, una o más variables y una o más restricciones. Pero al contrario que LINDO, las restricciones de LINGO *no* están precedidas por ningún término especial tal como SUBJECT TO (sujeto a) o SUCH THAT (tal como).

La sintaxis de LINGO es similar a la de LINDO, con las diferencias siguientes:

- Las instrucciones de LINGO terminan con ; (punto y coma).
- LINGO incluye operadores matemáticos adicionales, como se explica en el apéndice C. Se requiere un asterisco para denotar multiplicaciones.
- A veces se incluyen paréntesis para definir el orden de las operaciones matemáticas si así lo desea usted.
- Los nombres de las variables pueden tener hasta 32 caracteres.

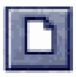
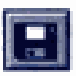
APÉNDICE C Comandos de los menús y funciones de LINGO

Comandos de los menús

Se puede tener acceso a los comandos u órdenes de LINGO desde un menú conveniente similar a los de los otros programas de Windows. El menú principal comprende cinco submenús acomodados en la parte superior de la pantalla, en los que se listan los diversos comandos. Cuando usted da un clic en uno de los submenús (File, Edit, LINGO, Window o Help) aparece un menú con los distintos comandos. Usted puede seleccionar los comandos de la misma manera que lo hace en la mayoría de los programas de Windows: haciendo clic en el comando con el ratón o escribiendo la letra que está subrayada en el nombre del comando cuando el submenú apropiado está remarcado. Muchos comandos también tienen asignada una combinación de teclas que funcionan como orden corta (F2, Ctrl1+Z, etc.). Otra ventaja más es que también se puede tener acceso a algunos de los comandos más usados mediante un icono localizado en una barra de herramientas en la parte superior de la pantalla.

Menú File

Los comandos del menú File (archivo) le permiten manejar sus archivos de datos en LINGO de distintas maneras. Usted puede usar este menú para abrir, cerrar, guardar e imprimir archivos, así como para ejecutar varias tareas únicas con LINGO. Enseguida se describen los comandos de File.

COMANDO			DESCRIPCIÓN
New	F2		Crea una nueva ventana para ingresar datos.
Open	F3		Abre un archivo existente. Mediante los cuadros de diálogo usted puede seleccionar de entre varios tipos de archivos y ubicaciones.
Save	F4		Guarda la ventana activa. Usted puede guardar los datos de entrada (un modelo), una *reports window* (ventana de informes) o una ventana de comandos.
Save As...	F5		Guarda la ventana activa con un nombre de archivo específico. Es útil para volver a asignar un nombre a un archivo revisado y conservar intacto el archivo original.
Close	F6		Cierra la ventana activa. Si la ventana contiene nuevos datos, entonces se le preguntará a usted si desea guardar los cambios.
Print	F7		Envía la ventana activa a su impresora.
Printer Setup...	F8		Selecciona la impresora y varias opciones para el formato de impresión.
Log Output...	F9		Envía toda la actividad posterior de la pantalla, que normalmente se enviaría a la ventana *Reports*, a un archivo de texto. Si usted especifica una ubicación *log file*, aparece una marca en el menú *File* en la línea de *Log Output*. Para inactivar Log Output, seleccione simplemente el comando de nuevo.
Take Commands	F11		"Toma" un *batch file* de LINGO con comandos y texto del modelo para operación automatizada. Se puede poner un modelo en la memoria, resolverlo, y la solución es colocada en la ventana *Reports* y guardada en un archivo. Si usted usa el comando *BATCH* antes del inicio del texto del modelo, el modelo y los comandos contenidos en el archivo, así como la solución, se verán en la ventana *Reports*.
Import LINDO file	F12		Abre un archivo que contiene un modelo de LINDO en el formato TAKE de LINDO, y traduce el modelo en un formato que LINGO acepta.
Exit	F10		Cierra LINGO.

Menú Edit

Los comandos del menú Edit permiten a usted ejecutar tareas básicas de edición, comunes a la mayoría de aplicaciones para Windows, así como efectuar varias tareas que son exclusivas para LINGO. A continuación se describen los comandos Edit.

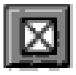
COMANDO	DESCRIPCIÓN
Undo Ctrl+Z	Deshace la última acción.
Cut Ctrl+X	Corta el texto seleccionado y lo coloca en el portapapeles para pegarlo.
Copy Ctrl+C	Copia el texto seleccionado en el portapapeles para pegarlo.
Paste Ctrl+V	Inserta o pega el contenido del portapapeles en el punto de inserción.
Clear Delete	Borra el texto seleccionado, pero no lo coloca en el portapapeles.
Find/Replace... Ctrl+F	Busca la ventana activa para encontrar el texto seleccionado y reemplazarlo con el texto introducido en el cuadro "*Replace with*".
Go To Line... Ctrl+T	Usted puede mover el cursor a cualquier línea especificada de la ventana activa.
Match Parenthesis Ctrl+P	Encuentra el paréntesis cerrado que corresponde al paréntesis abierto seleccionado.
Paste Function	Pega las funciones incorporadas en LINGO en el punto de inserción actual. Después de seleccionar este comando aparece otro submenú con las distintas categorías de las funciones
Select All Ctrl+A	Selecciona toda la ventana activa para cortarla o copiarla.
Choose New Font	Selecciona una nueva fuente para el texto en la ventana activa.

Menú LINGO

Los comandos del menú LINGO se usan después de que usted ya introdujo datos y están listos para obtener una solución. Siguen las descripciones de los comandos de LINGO:

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Solve Ctrl+S	Envía el modelo que se encuentra en la ventana activa al Solver de LINGO.
Solution... Ctrl+O	Abre el cuadro de diálogo *Solution Report Options* (Opciones para mostrar la solución), el cual permite a usted especificar cómo quiere que aparezca su solución.
Range Ctrl+R	Despliega un informe de intervalos, el cual le muestra dentro de qué valores usted puede cambiar coeficientes sin modificar los valores óptimos.
Look... Ctrl+L	Despliega todo el modelo o las líneas seleccionadas.
Generate... Ctrl+S	Crea otra versión del modelo actual en formato algebraico, de LINDO o MPS. Se puede usar para numerar renglones y desplegar el modelo en un formato más fácil de leer. El comando GEN proporciona una capacidad similar desde la ventana de comandos.
Export to Spreadsheet Ctrl+E	Exporta valores de variables seleccionadas a intervalos nombrados en una hoja de cálculo. Primero se tiene que crear una hoja de cálculo con intervalos dimensionados para que se puedan acomodar en ellos los valores exportados. Los intervalos *tienen* que contener números. Al seleccionar este comando se abrirá un cuadro de diálogo que pide la plantilla y las

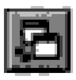
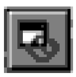
hojas de trabajo (nombres del archivo de la hoja de cálculo), variables por exportar y el intervalo para el cual se exportarán los valores. Las variables y el intervalo se introducen por pares y se añaden a la lista de pares de variable e intervalo dando un clic en el botón de agregar.

Options Alt+O  Le permite ver y modificar varios parámetros usados en las sesiones de LINGO.

Workspace Limit Ctrl+S Asigna memoria a LINGO. Si usted elige "None", (Ninguna), LINGO usará toda la memoria disponible.

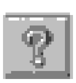
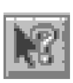
Menú Window

Los comandos del menú *Window* le permiten ajustar cualquier comando abierto y ventanas de estado, así como organizar el despliegue de varias ventanas. Enseguida se proporcionan las descripciones de los comandos de *Window*.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Open Command Window	Permite el acceso a la interfaz de la línea de comandos de LINGO, donde usted puede introducir comandos en el indicador : (dos puntos).
Open Status Window	Abre la ventana de estado del Solver para LINGO, la cual muestra información respecto al estado del optimizador, tal como número de iteraciones y tiempo transcurrido. Esta ventana aparece también cuando selecciona *Solve* en el menú de LINGO:
Send to Back Alt+B 	Envía la ventana del frente hasta atrás.
Close All Alt+X 	Cierra todas las ventanas activas.
Cascade Alt+A	Acomoda todas las ventanas en forma de cascada desde la parte superior izquierda a la inferior derecha; la ventana activa queda en la parte de encima.
Tile Alt+T	Acomoda todas las ventanas abiertas de tal manera que ocupen el espacio equivalente dentro de la ventana del programa.
Arrange Icons Alt+I	Desplaza los iconos que representan ventanas minimizadas de tal manera que se acomodan en la parte inferior de la pantalla.
List of Windows	En la parte inferior del menú Window se despliega una lista de las ventanas abiertas. Resalta la ventana activa.

Menú Help

Los comandos del menú *Help* permiten tener acceso a la ayuda en línea de LINGO. Se describen a continuación los comandos de *Help*.

COMANDO	DESCRIPCIÓN
Contents   F1	Muestra el contenido de la sección de ayuda. El segundo icono (el de la flecha y el signo de interrogación) posibilita la ayuda sensible al contexto; el indicador del cursor cambia a un signo de interrogación y la ayuda se le proporciona específicamente según el comando seleccionado.
Search for Help on... Alt+F1	Busca la sección de ayuda para una palabra o un tema.
How to Use Help Ctrl+F1	Proporciona ayuda para aprender a usar el sistema de ayuda en línea.
About LINGO...	Muestra la pantalla inicial de arranque con información general acerca de LINGO.

Funciones

LINGO tiene siete funciones principales: operadores estándar, importación de archivos, finanzas, matemáticas, iteraciones en conjuntos, dominio de variable y probabilidad, y una variedad de otras funciones. La mayoría de estas funciones está disponible por medio de los comandos del menú. El *software* de LINGO incluye una descripción detallada de sus funciones en pantallas de ayuda en línea; por lo tanto, sólo se proporciona aquí una descripción breve de las funciones de LINGO.

Operadores estándar

Entre estos operadores se encuentran los aritméticos (es decir., ^, *, /, +, y −), operadores lógicos (#EQ#, #NE#, #GT#, #GE#, #LT#, y #L3#) para determinar la calidad del conjunto y operadores de igualdad-desigualdad (<, =, >, <=, y >=) para especificar si el primer miembro de una expresión debe ser menor que, igual a, o mayor que el segundo miembro. Estos operadores constituyen algunas de las funciones más básicas disponibles en LINGO. Obsérvese que los símbolos "mayor que" y el "menor que" (> y <) se interpretan como desigualdades "sueltas" [es decir, mayor que o igual a (≥) y menor que o igual a (≤), respectivamente]. Usted escriba simplemente estos operadores en el teclado, en lugar de "jalarlos" desde un comando de *Window*.

Funciones de importación de archivos

Estas funciones le permiten importar texto y datos de fuentes externas. La función @FILE le permite importar texto o datos desde un archivo en ASCII, y la función @IMPORT le permite importar datos sólo de una hoja de cálculo.

Funciones de finanzas

Entre estas funciones están @FPA(I,N), la cual da el valor presente de una anualidad, y la función @FPL(I,N), la cual regresa el valor presente de un valor global de *N* periodos de $1 a partir de ahora si la tasa de interés es *I* por periodo. *I* no es un porcentaje, sino un número no negativo que representa la tasa de interés.

Funciones matemáticas

Comprenden las funciones generales y trigonométricas siguientes: @ABS(X), @COS(X), @EXP(X), @LGM(X), @LOG(X), @SIGN(X), @SIN (X), @SMAX(list), @SMIN(list), @TAN(X). Se pueden utilizar combinaciones de las tres funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) para obtener otras funciones trigonométricas.

Funciones de iteraciones en conjuntos

Comprenden @FOR (set_name : constraint_expressions), @MAX (set_name : expression), @MIN (set_name : expression) y @SUM (set_name : expression). Estas funciones operan sobre un conjunto completo, y producen un solo resultado en todos los casos, excepto con la función @FOR, la cual genera restricciones independientemente de cada elemento del conjunto.

Funciones del dominio de la variable

Estas funciones fijan restricciones adicionales sobre variables y atributos. Comprenden las siguientes: @BND(L, X, U), @BIN(X), @FREE(X) y @GIN(X).

Funciones de probabilidad

LINGO posee capacidades estadísticas comunes con sus funciones de probabilidad: @PSN(X), @PSL(X), @PPS(A,X), @PPL(A,X), @PBN(P,N,X), @PHG(POP,G,N,X), @PEL(A,X), @PEB(A,X), @PFS(A,X,C), @PFD(N,D,X), @PCX(N,X), @PTD(N,X) y @RAND(X).

Otras funciones

Otras funciones que posee LINGO son @IN(set_name, set_element), @SIZE(set_name), @WARN('text',condition), @WRAP(I,N) y @USER. Estas funciones ofrecen una variedad de capacidades además de las de las categorías ya mencionadas.

BIBLIOGRAFÍA

Hay muchos textos sobre programación lineal, sin olvidar los siguientes:

Bazarna, M. y J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows*. Nueva York: Wiley, 1990.

Bersitmas, D. y J. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass.: Athena Publishing, 1997.

Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Chvàtal, V. *Linear Programming*. San Francisco: Freeman, 1983.

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Gass, S. *Linear Programming: Methods and Applications*, 5a´. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1985.

Luenberger, D. Linear and Nonlinear Programming, 2a ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.

Murty, K. *Linear Programming*. Nueva York: Wiley, 1983.

Nash, S. y A. Sofer. *Linear and Nonlinear Programming*. Nueva York: McGraw-Hill, 1995.

Nering, E. y A. Tucker. *Linear Programs and Related Problems*. Nueva York: Academic Press, 1993.

Simmons, D. *Linear Programming for Operations Research*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1972.

Simonnard, M. *Linear Programming*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1966.

Wu, N. y R. Coppins. *Linear Programming and Extensions*. Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

Bland, R. "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method", *Mathematics of Operations Research*, 2(1977):103-107. Explica un enfoque sencillo e ingenioso para evitar los ciclos.

Dantzig, G. y N. Thapa. *Linear Programming*. Nueva York: Springer-Verlag, 1997.

Karmarkar, N. "A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica* 4(1984):373-395. El método de Karmarkar para resolver PL.

Klee, V. y G. Minty. "How Good Is the Simplex Algorithm?" En *Inequalities-III*. Nueva York: Academic Press, 1972. Describe los PL para los cuales el método simplex examina cada solución factible básica antes de encontrar la solución óptima.

Kotiah, T. y N. Slater. "On Two-Server Poisson Queues with Two Types of Customers", *Operations Research* 21(1973):597-603. Describe una aplicación real que genera un PL en el cual surgen los ciclos.

Lowe, R. y L. Yerex. "An Application of a Facilities Location Model in the Prestressed Concrete Industry", *Interfaces* 6(no.4, 1976):45-49.

Papadimitriou, C. y K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1982. Más análisis de algoritmos de tiempo polinómico y tiempo exponencial.

Schrage, L. *User's Manual for LINDO*. Palo Alto, Calif.: Scientific Press, 1990. Proporciona detalles acerca de LINDO.

Schrage, L. *User's Manual for LINGO*. Chicago, Ill.: LINDO Systems Inc., 1991. Ofrece detalles sobre LINGO.

Schrage, L. *User's Manual for What's Best*: Chicago, Ill.: LINDO Systems Inc., 1993. Proporciona detalles acerca de qué es mejor.

Wagner, H. "Linear Programming Techniques for Regression Analysis", *Journal of the American Statistical Association* 54(1954):206-212.

5

Análisis de sensibilidad: un enfoque aplicado

En este capítulo se explica cómo las modificaciones de los parámetros del PL influyen en la solución óptima. Esto recibe el nombre de *análisis de sensibilidad*. También se explica cómo usar los resultados de LINDO para responder preguntas acerca de cuestiones administrativas tal como "¿Cuál es la mayor cantidad que estaría dispuesta a pagar una compañía por una hora extra de trabajo?" Se empieza por explicar en forma gráfica el análisis de sensibilidad.

5.1 Introducción gráfica al análisis de sensibilidad

El **análisis de sensibilidad** se relaciona con la manera en que los cambios en los parámetros del PL afectan la solución óptima.

Reconsidere el problema de Giapetto de la sección 3.1:

$$\begin{array}{llll} \max z = 3x_1 + 2x_2 & & & \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 \leq 100 & & \text{(Restricción del acabado)} \\ & x_1 + x_2 \leq 80 & & \text{(Restricción de la carpintería)} \\ & x_1 \quad\quad \leq 40 & & \text{(Restricción de la demanda)} \\ & +x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

donde

$$x_1 = \text{cantidad de soldados producidos por semana}$$
$$x_2 = \text{cantidad de trenes fabricados por semana}$$

La solución óptima para este problema es $z = 180$, $x_1 = 20$, $x_2 = 60$ (punto B en la figura 1), y tiene x_1, x_2, y s_3 (la variable de holgura para la restricción de la demanda) como variables básicas. ¿Cuál sería el cambio que provocarían las modificaciones en los coeficientes de la función objetivo del problema, o en los segundos miembros en esta solución óptima?

Análisis gráfico del efecto de un cambio en un coeficiente de la función objetivo

Si la contribución de un soldado a la utilidad fuera un incremento suficiente, entonces parecería razonable que lo óptimo para Giapetto sería producir más soldados (es decir, s_3 se volvería no básica). De manera similar, si con la contribución de un soldado a la utilidad ésta disminuyera de manera suficiente, entonces lo óptimo para Giapetto sería producir sólo trenes (x_1 sería ahora no básica). Enseguida se muestra cómo determinar los valores de la contribución por parte de los soldados a la utilidad para los cuales la base actual óptima seguirá siendo óptima.

Sea c_1 la contribución a la utilidad por parte de cada soldado. ¿Para qué valores de c_1 la base actual sigue siendo óptima?

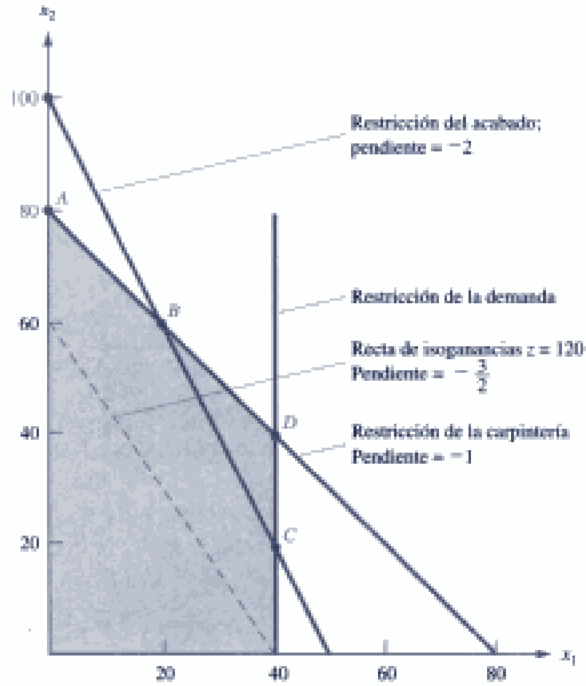


FIGURA 1
Análisis del rango de los valores para los cuales c^1 sigue siendo óptima en el problema de Giapetto

En la actualidad, $c_1 = 3$, y cada recta de isoganancias tiene la forma $3x_1 + 2x_2 =$ constante, es decir,

$$x_2 = -\frac{3x_1}{2} + \frac{\text{constante}}{2}$$

y cada recta de isoganancias tiene una pendiente de $-\frac{3}{2}$. Al examinar la figura 1, se ve que si un cambio en c_1 ocasiona que las rectas de isoganancias se aplanen más que la restricción de la carpintería, entonces la solución óptima cambiará desde la solución óptima actual (punto B) hasta una nueva solución óptima (punto A). Si la utilidad por cada soldado es c_1, la pendiente de cada recta de isoganancias será $-\frac{c_1}{2}$. Como la pendiente de la restricción de la carpintería es -1, las rectas de isoganancias serán más planas que la restricción de la carpintería si $-\frac{c_1}{2} > -1$, es decir, $c_1 < 2$, y la base actual ya no será óptima. La solución óptima nueva será (0, 80), el punto A de la figura 1.

Si las rectas de isoganancias tienen mayor pendiente que la restricción del acabado, entonces la solución óptima pasará del punto B al punto C. La pendiente de la restricción del acabado es -2. si $-\frac{c_1}{2} < -2$, o $c_1 > 4$, entonces la base actual ya no será óptima y el punto C (40, 20) será el óptimo. En resumen, ya se mostró que (si todos los otros parámetros permanecen sin cambio) la base actual sigue siendo óptima para $2 \leq c_1 \leq 4$, y Giapetto debería manufacturar 20 soldados y 60 trenes. Naturalmente, incluso si $2 \leq c_1 \leq 4$, la utilidad de Giapetto cambiará. Por ejemplo, si $c_1 = 4$, entonces la utilidad de Giapetto será $4(20) + 2(60) = 200$ dólares en lugar 180 dólares.

Análisis gráfico del efecto de un cambio en el lado derecho de la solución óptima del PL

También se puede usar el análisis gráfico para determinar si un cambio en el lado derecho de una restricción hará que la base actual ya no sea óptima. Sea b_1 el número de horas de acabado disponibles. Actualmente, $b_1 = 100$. ¿Para qué valores de b_1 la base actual sigue siendo óptima? Al inspeccionar la figura 2 se ve que un cambio en b_1 desplaza la restricción del acabado en forma paralela a su posición actual. La solución óptima actual (punto B de la figura 2) es donde las restricciones de la carpintería y el acabado son activos. Si se modifica el valor de b_1, *siempre que el punto donde las restricciones del acabado y la car-*

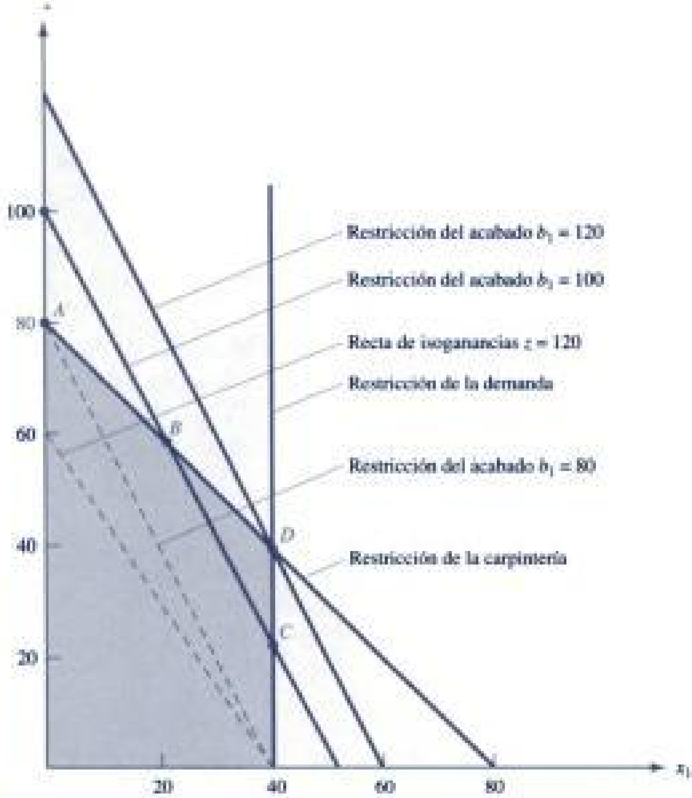


FIGURA 2
Rango de valores de las horas de acabado para los cuales la base actual sigue siendo óptima en el problema de Giapetto

pintería son activas siga siendo factible, la solución óptima será donde las restricciones del acabado y la carpintería se cortan. En la figura 2 se observa que si $b_1 > 120$, entonces el punto donde las restricciones del acabado y la carpintería son activas quedará en la parte de la restricción de la carpintería abajo del punto D. Obsérvese que en el punto D, $2(40) + 40 = 120$ horas de acabado se usan. En esta región, $x_1 > 40$, y la restricción de la demanda para los soldados no se cumple. Por lo tanto, para $b_1 > 120$, la base actual ya no será óptima. De igual manera, si $b_1 < 80$, entonces las restricciones de la carpintería y el acabado serán activas en un punto no factible que tiene $x_1 < 0$, y la base actual ya no será óptima. Observe que en el punto A, $0 + 80 = 80$ horas de acabado se utilizan. Por consiguiente (si todos los otros parámetros no cambian), la base actual sigue siendo óptima si $80 \leq b_1 \leq 120$.

Obsérvese que aunque para $80 \leq b_1 \leq 120$, la base actual sigue siendo óptima, *cambian los valores de las variables de decisión y el valor de la función objetivo.* Por ejemplo, si $80 \leq b_1 \leq 100$, entonces la solución óptima pasará del punto B a algún otro punto del segmento de recta AB. De manera similar, si $100 \leq b_1 \leq 120$, entonces la solución óptima cambiará del punto B a algún otro punto sobre la recta BD.

Siempre que la base actual siga siendo óptima, es cosa de rutina determinar cómo un cambio en el segundo miembro de una restricción modifica los valores de las variables de decisión. Con el fin de ilustrar la idea, sea b_1 = número de horas disponibles de acabado. Si se modifica b_1 a $100 + \Delta$, entonces se sabe que la base actual sigue siendo óptima para $-20 \leq \Delta \leq 20$. Note que como cambia b_1 (siempre que $-20 \leq \Delta \leq 20$), la solución óptima para el PL es todavía el punto donde las restricciones de las horas de acabado y horas de carpintería son activas. Por lo tanto, si $b_1 = 100 + \Delta$, es posible encontrar los valores nuevos de las variables de decisión al resolver

$$2x_1 + x_2 = 100 + \Delta \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 80$$

Esto genera que $x_1 = 20 + \Delta$ y $x_2 = 60 - \Delta$. Por tanto, un aumento en la cantidad de horas de acabado disponibles ocasiona un incremento en el número de soldados producidos y una disminución en la cantidad de trenes fabricados.

Si b_2 (número de horas de carpintería disponibles) es igual a $80 + \Delta$, entonces, se puede demostrar (véase problema 2) que la base actual sigue siendo óptima para $-20 \leq \Delta \leq 20$. Si se modifica el valor de b_2 (conservando $-20 \leq \Delta \leq 20$), entonces la solución óptima para el PL es aún el punto donde las restricciones del acabado y la carpintería son activas. Por lo tanto, si $b_2 = 80 + \Delta$, la solución óptima para el PL es la solución de

$$2x_1 + x_2 = 100 \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 80 + \Delta$$

Luego se llega a $x_1 = 20 - \Delta$ y $x_2 = 60 + 2\Delta$, lo cual muestra que un aumento en la cantidad de horas de carpintería disponible reduce el número de soldados producidos e incrementa el de trenes fabricados.

Suponga que b_3, la demanda de soldados, cambia a $40 + \Delta$. Entonces es posible demostrar que (véase problema 3) la base actual sigue siendo óptima para $\Delta \geq -20$. Para Δ en este intervalo, la solución óptima para el PL estará todavía donde las restricciones del acabado y la carpintería son activas. Por lo tanto, la solución óptima será la solución de

$$2x_1 + x_2 = 100 \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 80$$

Naturalmente, con esto se obtiene $x_1 = 20$ y $x_2 = 60$, lo cual ilustra un hecho importante. Considere una restricción con holgura positiva (o exceso positivo) en una solución óptima del PL; si se modifica el segundo miembro de esta restricción en el intervalo donde la base actual sigue siendo óptima, entonces la solución óptima del PL no se modifica.

Precios sombra

Según se estudia en las secciones 5.2 y 5.3, a menudo es importante que los administradores determinen qué tanto se modifica el valor ópimo de z del PL cuando hay un cambio en el segundo miembro de una restricción. Con esto en mente, el precio sombra para la i-ésima restricción de un PL se define como la cantidad en que mejora el valor óptimo de z, –incremento en un problema de maximización y disminución en un problema de minimización– si el lado derecho de la i-ésima restricción aumenta en uno. Esta definición se aplica sólo si el cambio en el lado derecho de la restricción i es óptima la base actual.

Para cualquier PL de dos variables, es fácil determinar el precio sombra de cada restricción. Por ejemplo, ya sabemos que si $100 + \Delta$ horas de acabado están disponibles (suponiendo que la base actual sigue siendo óptima), entonces la solución óptima del PL es $x_1 = 20 + \Delta$ y $x_2 = 60 - \Delta$. Entonces el valor óptimo de z será igual a $3x_1 + 2x_2 = 3(20 + \Delta) + 2(60 - \Delta) = 180 + \Delta$. Entonces, siempre que la base actual siga siendo óptima, el incremento de una unidad en la cantidad de horas de acabado disponibles incrementa el valor óptimo de z en 1 dólar. Entonces, el precio sombra de la primera restricción (horas de acabado) es 1 dólar.

En el caso de la segunda restricción (horas de carpintería), sabemos que si $80 + \Delta$ horas de carpintería están disponibles (y la base actual permanece óptima), entonces la solución óptima para el PL es $x_1 = 20 - \Delta$ y $x_2 = 60 + 2\Delta$. Por lo tanto, el valor óptimo de z nuevo es $3x_1 + 2x_2 = 3(20 - \Delta) + 2(60 + 2\Delta) = 180 + \Delta$. Así, un incremento de una unidad en la cantidad de horas de acabado incrementa el valor z óptimo en 1 dólar (siempre que la base actual siga siendo óptima). Entonces, el precio sombra de la segunda restricción (horas de carpintería) es 1 dólar.

Y ahora se determina el precio sombra de la tercera restricción (demanda). Si el segundo miembro es $40 + \Delta$, entonces (siempre que la base actual siga siendo óptima) los valores óptimos de las variables de decisión se conservan sin cambio. Por lo tanto, el valor óptimo de z también se conservará sin cambio, lo cual muestra que el precio sombra de la tercera restricción (demanda) es 0 dólares. Esto significa que cada vez que la variable de holgura o la excedente para una restricción es positiva en una solución óptima de un PL, la restricción tendrá un precio sombra de cero.

Suponga que la base actual es óptima a medida que se da un incremento de Δb_i en el segundo miembro de la i-ésima restricción de un PL. ($\Delta b_i < 0$ quiere decir que estamos disminuyendo el segundo miembro de la i-ésima restricción.) Entonces, por cada unidad que aumente el segundo miembro de la restricción i-ésima, el valor óptimo de z aumentará un precio sombra (en el caso de un problema de maximización). Por tanto, el nuevo valor óptimo de z está dado por:

$$\text{(Nuevo valor óptimo de } z) = \text{(antiguo valor óptimo de } z) + \text{(precio sombra de la } i\text{-ésima restricción) } \Delta b_i \qquad (1)$$

Por lo que se refiere a un problema de minimización,

$$\text{(Nuevo valor óptimo de } z) = \text{(antiguo valor óptimo de } z) - \text{(precio sombra de la } i\text{-ésima restricción) } \Delta b_i \qquad (2)$$

Por ejemplo, si 95 horas de carpintería están disponibles, entonces $\Delta b_2 = 15$, y el nuevo valor de z está dado por:

$$\text{Nuevo valor óptimo de } z = 180 + 15(1) = 195 \text{ dólares}$$

El estudio de los precios sombra continúa en las secciones 5.2 y 5.3.

Importancia de los análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad es importante por varias razones. En diversas aplicaciones, los valores de los parámetros de un PL podrían cambiar. Por ejemplo, podrían cambiar los precios a los cuales los soldados y trenes se venden o la disponibilidad de las horas de carpintería y acabado. Si cambia un parámetro, entonces con el análisis de sensibilidad ya no es necesario resolver el problema de nuevo. Por ejemplo, si la contribución a la utilidad de un soldado aumenta a 3.50 dólares, ya no se tendría que volver a resolver el problema de Giapetto, porque la solución actual sigue siendo óptima. Naturalmente, resolver de nuevo el problema de Giapetto ya no sería muy difícil, pero resolver otra vez un PL con miles de variables y restricciones sería una tarea bastante pesada. Cuando el analista sabe manejar el análisis de sensibilidad puede determinar, a partir de la solución original, cómo los cambios en los parámetros de un PL modifican la solución óptima.

Téngase en cuenta que podríamos no tener certeza acerca de los valores de los parámetros del PL. Por ejemplo, se podría tener incertidumbre en la demanda semanal de soldados. Con el método gráfico, se puede demostrar que si la demanda semanal de soldados es por lo menos de 20, entonces la solución óptima para el problema de Giapetto es todavía (20, 60) (véase problema 3 al final de esta sección). Por consiguiente, incluso si Giapetto tiene incertidumbre sobre la demanda de soldados, la compañía puede tener bastante confianza en que sigue siendo óptimo producir 20 soldados y 60 trenes.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que si la contribución a la utilidad por parte de los trenes está entre 1.50 y 3 dólares, la base actual sigue siendo óptima. Si la contribución a la utilidad por lo que corresponde a los trenes es 2.50 dólares, entonces ¿cuál sería la nueva solución óptima?

2 Demuestre que si las horas de carpintería disponibles se conservan entre 60 y 100, la base actual sigue siendo óptima. Si hay entre 60 y 100 horas de carpintería disponibles, ¿Giapetto todavía produciría 20 soldados y 60 trenes?

3 Demuestre que si la demanda semanal de soldados es por lo menos de 20, entonces la base actual sigue siendo óptima, y Giapetto todavía debería producir 20 soldados y 60 trenes.

4 Para el problema de Dorian Auto (ejemplo 2 del capítulo 3):

a Encuentre el intervalo de valores para los costos de un anuncio en programas de comedia para los cuales la base actual sigue siendo óptima.

b Encuentre el intervalo de valores para los costos de un anuncio en el futbol para los cuales la base actual sigue siendo óptima.

c Determine el intervalo de valores para las exposiciones requeridas de MAI para los cuales la base actual sigue siendo óptima. Encuentre la nueva solución óptima si se requieren 28 + Δ millones de exposiciones de MAI.

d Encuentre el intervalo de valores para las exposiciones requeridas MAI para el cual la base actual sigue siendo óptima. Determine la nueva solución óptima si se requieren 24 + Δ millones de exposiciones MAI.

e Encuentre el precio sombra de cada restricción.

f Si se requieren 26 millones de exposiciones MAI, encuentre el nuevo valor óptimo de z.

5 Radioco fabrica dos tipos de radios. El único recurso escaso que es necesario para producir los radios es la mano de obra. En la actualidad, la compañía tiene dos trabajadores. El trabajador 1 está dispuesto a laborar hasta 40 horas por semana y recibe como pago 5 dólares por hora. El trabajador 2 trabajará hasta 50 h por semana a 6 dólares la hora. El precio así como los recursos requeridos para elaborar cada tipo de radio, se proporcionan en la tabla 1.

Si x_i es el número de radios tipo i que se producen cada semana, entonces Radioco debe resolver el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\le 40 \\ 2x_1 + x_2 &\le 50 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a ¿Para qué valores del precio de un radio tipo 1 seguiría siendo óptima la base actual?

b ¿Para qué valores del precio de un radio tipo 2 seguiría siendo óptima la base actual?

TABLA 1

Radio 1		Radio 2	
Precio (dólares)	Recurso necesario	Precio (dólares)	Recurso necesario
25	Trabajador 1: 1 hora	22	Trabajador 1: 2 horas
	Trabajador 2: 2 horas		Trabajador 2: 2 horas
	Costo de materia prima 5 dólares		Costo de materia prima 4 dólares

c Si el trabajador 1 está dispuesto a trabajar sólo 30 horas por semana, entonces ¿la base actual seguiría siendo óptima? Encuentre la nueva solución óptima para el PL.

d Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar hasta 60 horas por semana, ¿seguiría siendo óptima la base actual? Encuentre la nueva solución óptima para el PL.

e Encuentre el precio sombra de cada restricción.

5.2 La computadora y el análisis de sensibilidad

Si un PL tiene más de dos variables de decisión, no es posible determinar en forma gráfica el intervalo de valores para un segundo miembro (o coeficiente de la función objetivo) para el cual la base actual sigue siendo óptima. Estos intervalos se pueden calcular mediante cálculos a mano (véase sección 6.3), pero es tedioso, por lo que se determinan regularmente mediante paquetes para computadora. En esta sección se estudia la interpretación de la información del análisis de sensibilidad en los resultados que proporciona LINDO.

Para obtener un informe de sensibilidad en LINDO, seleccione *Yes* cuando se le pregunte (después de resolver un PL) si desea un *Range analysis* (análisis de intervalos). Si quiere un informe de sensibilidad en LINGO, vaya a *Options* y seleccione *Range* (después de resolver un PL). Si esto no funciona, entonces vaya a *Options* y seleccione la pestaña *General Solver*. Luego vaya a *Dual Computations* y seleccione la opción *Ranges and Values*.

EJEMPLO 1 Producto Winco 1

Winco vende cuatro tipos de productos. Los recursos necesarios para producir una unidad de cada uno y los precios de venta se presentan en la tabla 2. En la actualidad se dispone de 4 600 unidades de materia prima y 5 000 horas de mano de obra. Para cumplir con la demanda de los clientes, se tienen que producir exactamente un total de 950 unidades. Los clientes demandan también que por lo menos se elaboren 400 unidades del producto 4. Determine un PL con el que se maximicen los ingresos por las ventas de Winco.

Solución Sea x_i = número de unidades del producto i fabricados por Winco

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 950 \\ x_4 &\ge 400 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\le 4\,600 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\le 5\,000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

TABLA 2
Costos y recursos necesarios para Winco

Recursos	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
Materia prima	2	3	4	7
Horas de mano de obra	3	4	5	6
Precio de venta (dólares)	4	6	7	8

El resultado que proporciona LINDO se ilustra en la figura 3.

Cuando se trate la interpretación de los resultados que da LINDO para los problemas de minimización, nos referiremos al ejemplo siguiente:

EJEMPLO 2 Tucker Inc.

Esta compañía debe fabricar 1 000 automóviles Tucker. La empresa tiene cuatro plantas de producción. El costo de producción de un Tucker en cada planta, junto con la materia prima, la mano de obra necesaria se proporciona en la tabla 3.

```
MAX        4  X1 + 6  X2  + 7  X3  + 8  X4
SUBJECT TO
        2)     X1  +  X2  +  X3  +  X4  =        950
        3)     X4   >=     400
        4)     2  X1  +  3  X2  +  4  X3 + 7  X4  <=      4600
        5)     3  X1  +  4  X2  +  5  X3 + 6  X4  <=      5000
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP              4
                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE
                 1)   6650.00000

VARIABLE        VALUE                REDUCED COST
      X1          .000000                1.000000
      X2       400.000000                 .000000
      X3       150.000000                 .000000
      X4       400.000000                 .000000

     ROW        SLACK OR SURPLUS       DUAL PRICES
      2)              .000000             3.000000
      3)              .000000            -2.000000
      4)              .000000             1.000000
      5)           250.000000              .000000

NO. ITERATIONS=          4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                            OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE     CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
               COEF           INCREASE           DECREASE
      X1     4.000000         1.000000           INFINITY
      X2     6.000000          .666667            .500000
      X3     7.000000         1.000000            .500000
      X4     8.000000         2.000000           INFINITY

                            RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW     CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
               RHS            INCREASE           DECREASE
       2    950.000000        50.000000         100.000000
       3    400.000000        37.000000         125.000000
       4   4600.000000       250.000000         150.000000
       5   5000.000000        INFINITY          250.000000
```

FIGURA 3
Resultados que proporciona LINDO para Winco

TABLA 3
Costos y requerimientos para producir un Tucker

Planta	Costo (en miles de dólares)	Mano de obra	Materia prima
1	15	2	3
2	10	3	4
3	9	4	5
4	7	5	6

El sindicato de los trabajadores de la compañía automotriz requiere se fabriquen por lo menos 400 automóviles en la planta 3; se dispone de 3 300 horas de mano de obra y 4 000 unidades de materia prima para ser asignadas a las cuatro plantas. Plantee un PL cuya solución permita a Tucker Inc., minimizar el costo de producción de 1 000 automóviles.

Solución Sea x_i la cantidad de automóviles producidos en la planta i. Entonces, al expresar la función objetivo en miles de dólares, el PL apropiado es

$$\begin{aligned}
\min z = 15x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 & \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1000 \\
x_3 &\geq 400 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\leq 3300 \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 4000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Los resultados que se obtienen con LINDO para este PL se muestran en la figura 4.

Intervalos para los coeficientes de la función objetivo

Ya se vio en la sección 5.1 que (por lo menos en un problema de dos variables) es posible determinar el intervalo de los valores para los coeficientes de una función objetivo para los cuales la base actual se conserva óptima. Para cada coeficiente de la función objetivo, este intervalo se especifica en la parte que se denomina *OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES* (Intervalos de los coeficientes objetivo) en los resultados que proporciona LINDO. La sección *ALLOWABLE INCREASE* (AI) (Incremento permisible) señala la cantidad que puede aumentar el coeficiente de una función objetivo sin que la base actual deje de ser óptima. De igual manera, la sección *ALLOWABLE DECREASE* (AD) (Decremento permisible) señala la cantidad que puede disminuir un coeficiente de la función objetivo sin que la base actual deje de ser óptima. Para ilustrar estas ideas, sea c_i el coeficiente de la función objetivo para x_i en el ejemplo 1. Si c_1 cambia, entonces la base actual sigue siendo óptima si

$$-\infty = 4 - \infty \leq c_1 \leq 4 + 1 = 5$$

Si c_2 cambia, entonces la base actual sigue siendo óptima si

$$5.5 = 6 - 0.5 \leq c_2 \leq 6 + 0.666667 = 6.666667$$

Denominaremos al intervalo de las variables de c_i para el cual la base actual sigue siendo óptima como el **intervalo permisible** para c_i. Como se estableció en la sección 5.1, si c_i permanece en su intervalo permisible, entonces los valores de las variables de decisión se conservan sin cambio, aunque el valor z óptimo pudiera cambiar. Mediante los ejemplos siguientes se ilustran estas ideas.

```
MIN       15  X1 + 10  X2  + 9  X3  + 7  X4
SUBJECT TO
        2)    X1  +  X2  +  X3  +  X4  =       1000
        3)    X3   >=     400
        4)    2  X1  +  3  X2  +  4  X3 + 5  X4  <=      3300
        5)    3  X1  +  4  X2  +  5  X3 + 6  X4  <=      4000
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP              3
                    OBJECTIVE FUNCTION VALUE
                    1)  11600.0000

VARIABLE           VALUE         REDUCED COST
      X1        400.000000           .000000
      X2        200.000000           .000000
      X3        400.000000           .000000
      X4           .000000          7.000000

     ROW     SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      2)           .000000        -30.000000
      3)           .000000         -4.000000
      4)        300.000000           .000000
      5)           .000000          5.000000

NO. ITERATIONS=          3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE      CURRENT         ALLOWABLE            ALLOWABLE
               COEF            INCREASE             DECREASE
      X1   15.000000           INFINITY             3.500000
      X2   10.000000           2.000000             INFINITY
      X3    9.000000           INFINITY             4.000000
      X4    7.000000           INFINITY             7.000000

                            RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW      CURRENT          ALLOWABLE            ALLOWABLE
                RHS             INCREASE             DECREASE
       2   1000.000000         66.666660           100.000000
       3    400.000000        100.000000           400.000000
       4   3300.000000          INFINITY           300.000000
       5   4000.000000        300.000000           200.000000
```

FIGURA 4
Resultados que se obtienen con LINDO para Tucker

EJEMPLO 3 Interpretación del análisis de sensibilidad de los coeficientes de la función objetivo

a Suponga que Winco aumenta 50 centavos por unidad el precio del producto 2. ¿Cuál es la nueva solución óptima del PL?

b Suponga que se incrementa 60 centavos por unidad el precio de venta del producto 1. ¿Cuál es la nueva solución óptima del PL?

c Suponga que el precio de venta del producto 3 disminuye 60 centavos. ¿Cuál es la nueva solución óptima del PL?

Solución **a** Como el AI para c_2 es 0.666667, y c_2 sólo se incrementa 0.5 de dólar, la base actual sigue siendo óptima. Los valores óptimos de las variables de decisión se conservan sin cambio ($x_1 = 0$, $x_2 = 400$, $x_3 = 150$ y $x_4 = 400$ es aún óptima). El nuevo valor óptimo de z se podría calcular de dos maneras. Primero, se podría sustituir simplemente los valores óptimos de las variables de decisión en la nueva función objetivo, lo que daría

$$\text{Nuevo valor óptima de } z = 4(0) + 6.5(400) + 7(150) + 8(400) = 6\,850 \text{ dólares}$$

Otra manera de saber que el nuevo valor óptimo de z es 6 850 dólares es observar la diferencia única en los ingresos por las ventas: cada unidad del producto 2 agrega 50 centavos más en los ingresos. Por lo tanto, el ingreso total se incrementa 400(0.50) = 200, por lo que

$$\text{Nuevo calor de } z = \text{valor original de } z + 200 = 6\,850 \text{ dólares}$$

b El AI para c_1 es 1, por lo que la base actual todavía es óptima, y los valores óptimos de las variables de decisión permanecen sin cambio. Puesto que el valor de x_1 en la solución óptima es 0, el cambio en los precios de venta para el producto 1 no cambiará el valor óptimo de z, −éste permanecerá en 6 650 dólares.

c Para c_3, AD = 0.50, por lo que la base actual ya no es óptima. Si no se resuelve el problema a mano o en la computadora, no es posible determinar la nueva solución óptima.

Costos reducidos y análisis de sensibilidad

La parte de *REDUCED COST* (Costos reducidos) de los resultados que proporciona LINDO nos brinda información acerca de cómo cambia la solución óptima del PL cuando se modifica el coeficiente de la función objetivo en el caso de una variable no básica. Para simplificar el problema, supongamos que la sfb óptima actual es no degenerada (es decir, si el PL tiene m restricciones, entonces la solución actual óptima tiene m variables que asumen valores positivos). Para cualquier variable no básica x_k, el costo reducido es lo que debe mejorar el coeficiente de x_k de la función objetivo antes que el PL tenga una solución óptima en la que x_k sea una variable básica. Si el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica x_k mejora en la cantidad equivalente a su costo reducido, entonces el PL tendrá soluciones óptimas alternas, por lo menos una en la cual x_k es una variable básica, y por lo menos una en la cual x_k no es una variable básica. Si la mejoría del coeficiente de la función objetivo de una variable no básica x_k es un valor mayor que el de su costo reducido, entonces (exceptuando la degeneración) cualquier solución óptima para el PL tendrá a x_k como una variable básica y $x_k > 0$. Para ilustrar estas ideas obsérvese que, en el ejemplo 1, las variables básicas asociadas con la solución óptima son x_2, x_3, x_4 y s_4 (la holgura para la restricción de la mano de obra). El costo reducido de la variable no básica x_1 es un 1 dólar. Esto implica que si aumenta exactamente 1 dólar el coeficiente de x_1 de la función objetivo (en este caso, el precio de ventas por unidad de x_1), entonces habrá soluciones óptimas alternas, por lo menos en una de las cuales x_1 será variable básica. Si el coeficiente de x_1 de la función objetivo aumenta en más de un dólar, entonces (como la sfb óptima actual es no degenerada) cualquier solución óptima para el PL tendrá como variable básica a x_1 (con $x_1 > 0$). Por lo tanto, el costo reducido para x_1 es la cantidad que le sobra o le falta a x_1 para estar en la base óptima. Debemos guardar una estrecha vigilancia sobre los precios de venta de x_1 porque un leve incremento modificará la solución óptima del PL.

Considérese ahora el ejemplo 2, un problema de minimización. En este caso, las variables básicas asociadas con la solución óptima son x_1, x_2, x_3 y s_3 (la variable de holgura para la restricción de la mano de obra). Una vez más, la sfb es no degenerada. La variable no básica x_4 tiene un costo reducido de 7 (7 000 dólares), por eso sabemos que si el costo de producción x_4 disminuye en 7, entonces habrá soluciones óptimas alternas. Por lo menos en una de estas soluciones óptimas x_4 es una variable básica. Si el costo de producción x_4 disminuye en más de 7, entonces (por ser la solución actual óptima no degenerada) cualquier solución óptima del PL tendrá como variable básica a x_4 (con $x_4 > 0$).

Intervalos para los lados derechos

Como se estableció en la sección 5.1, es posible determinar (por lo menos en problemas de dos variables) el intervalo de valores para un segundo miembro dentro del cual la base actual sigue siendo óptima. Esta información se encuentra en la sección *RIGHTHAND SIDE RANGES* de los resultados que proporciona LINDO. Para ilustrar lo anterior, considérese la primera restricción del ejemplo 1. En la actualidad, el lado derecho de la restricción (llámesele b_1) es 950. La base actual continúa siendo óptima si b_1 disminuye hasta en 100 (el decremento permisible, o AD; para b_1) o aumenta hasta en 50 (el incremento permisible, o AI, para b_1). Por lo tanto, la base sigue siendo óptima si

$$850 = 950 - 100 \le b_1 \le 950 + 50 = 1\,000$$

A esta expresión se le llama intervalo permisible para b_1. Aun cuando un cambio en el lado derecho de una restricción deja óptima la base actual, los resultados que proporciona LINDO no ofrecen información suficiente para determinar los nuevos valores de las variables de decisión. No obstante, los resultados de LINDO nos permiten determinar el nuevo valor de z óptimo para el PL.

Precios sombra y precios dual

El precio sombra de la i-ésima restricción de un PL se definió en la sección 5.1 la cantidad en que mejora el valor z óptimo del PL si el segundo miembro aumenta una unidad (suponiendo que este cambio deja óptima la base actual). Si, después de un cambio en el lado derecho de una restricción, la base actual ya no es óptima, entonces podrían modificarse los precios sombra de *todas* las restricciones. Este tema se trata en la sección 5.4. El precio sombra para cada restricción se encuentra en la sección *DUAL PRICES* (Precios dual) de los resultados que proporciona LINDO. Si se da un incremento Δb_i al segundo miembro de la i-ésima restricción (una disminución en b_i implica que $\Delta b_i < 0$) y el nuevo valor de dicho miembro para la restricción i sigue estando dentro del intervalo admisible para el segundo miembro dado en la sección *RIGHTAND SIDE RANGES* de los resultados, entonces las fórmulas (1) y (2) se podrían utilizar para determinar el valor óptimo de z después de modificar el segundo miembro.

EJEMPLO 4 Interpretación del análisis de sensibilidad del (Ld)

a En el ejemplo 1 suponga que se debe producir un total de 980 unidades. Determine el nuevo valor óptimo de z.

b En el ejemplo 1 suponga que están disponibles 4 500 unidades de materia prima. ¿Cuál es el nuevo valor óptimo de z? ¿Cuál si sólo se dispone de 4 400 unidades de materia prima?

c En el ejemplo 2 suponga que se dispone de 4 100 unidades de materia prima. Encuentre el nuevo valor óptimo de z.

d En el ejemplo 2 suponga que se tienen que producir exactamente 950 automóviles. ¿Cuál es el nuevo valor óptimo de z?

Solución **a** $\Delta b_1 = 30$. Como el incremento permisible es 50, la base actual sigue siendo óptima y el precio sombra de 3 dólares es aún aplicable. Entonces, con (1) se obtiene

$$\text{Nuevo valor óptimo de } z = 6\,650 + 30(3) = 6\,740 \text{ dólares}$$

Aquí se observa que (siempre que la base actual siga siendo óptima) cada unidad adicional de demanda incrementa los ingresos en 3 dólares.

b $\Delta b_3 = -100$. Como el decremento permisible es 150, el precio sombra de 1 dólar sigue siendo válido. Entonces con (1) se obtiene

$$\text{Nuevo valor óptimo de } z = 6\,650 - 100(1) = 6\,550 \text{ dólares}$$

Por lo tanto, siempre que la base actual continúe siendo óptima, un decremento de una unidad en la materia prima disponible disminuye el ingreso en 1 dólar. Si se tienen disponibles sólo 4 400 unidades de materia prima, entonces $\Delta b_3 = -200$. Como el decremento permisible es 150 no es posible determinar el nuevo valor de z óptimo.

c $\Delta b_4 = 100$. El precio dual (o precio sombra) es 5 (cinco mil). La base actual sigue siendo óptima, de tal manera que con (2) se obtiene

$$\text{Nuevo valor óptimo de } z = 11\,600 - 100(5) = 11\,100 \text{ (11 100 000 dólares)}$$

Por lo tanto, siempre y cuando la base actual siga siendo óptima, con cada unidad adicional de materia prima hay una disminución en los costos de 5 000 dólares.

d $\Delta b_1 = -50$. El decremento permisible es 100, por lo que el precio sombra de –30 (30 000) y con (2) se tiene

$$\text{Nuevo valor óptimo de } z = 11\,600 - (-50)(-30) = 10\,100 = 10\,100\,000 \text{ dólares}$$

Por lo tanto, por cada unidad en que disminuya la demanda (siempre que la base actual siga siendo óptima) decrecen los costos en 30 000 dólares.

Enseguida se da una interpretación para el precio sombra por cada restricción en los ejemplos 1 y 2. Una vez más, todo el análisis se basa en la suposición de que estemos dentro del intervalo admisible donde la base actual es óptima. El precio sombra de 3 dólares para la Restricción 1 en el ejemplo 1 implica que cada incremento de una unidad en la demanda total incrementará los ingresos por las ventas en 3 dólares. El precio sombra de -2 dólares para la Restricción 2, quiere decir que por cada incremento de una unidad en las cantidades necesarias para el producto 4, el ingreso disminuirá 2 dólares. El precio sombra de 1 dólar para la Restricción 3, significa que por cada unidad adicional de materia prima dada para Winco (para ningún costo) incrementa el ingreso total 1 dólar. Por último, el precio sombra de 0 dólares para la Restricción 4, implica que una unidad adicional de mano de obra dada para Winco (a ningún costo), no aumentará el ingreso total. Esto es razonable; en la actualidad, 250 de las 5 000 horas de mano de obra disponibles no se usan, ¿por qué deberíamos esperar mano de obra adicional para elevar los ingresos?

El precio sombra de –30 (30 mil) dólares para la Restricción 1 del ejemplo 2 significa que cada automóvil extra que tiene que ser fabricado disminuirá los costos en –30 000 dólares (o incrementará los costos en 30 000). El precio sombra de -4 dólares (4 mil) para la Restricción 2 quiere decir que un automóvil extra que la compañía está obligada a producir en la planta 3, disminuirá los costos -4 000 (o incrementará los costos 4 000 dólares). El precio sombra de 0 dólares para la tercera restricción, significa que una hora extra de mano de obra en Tucker disminuirá en cero dólares los costos. Por lo tanto, si Tucker recibe una hora adicional de mano de obra, no cambian los costos. Lo anterior es razonable; ahora 300 horas de mano de obra disponible están sin usar. El precio sombra para la Restricción 4 es 5 dólares (5 mil), lo cual quiere decir que si Tucker recibiera una unidad adicional de materia prima, entonces los costos disminuirían 5 000 dólares.

Los signos de los precios sombra

Una restricción $\geq$ tendrá siempre un precio sombra no positivo; una restricción $\leq$ siempre tendrá un precio sombra no negativo, y una restricción de igualdad siempre tendrá un precio sombra positivo, negativo o cero. Para ver por qué esto es verdadero, observe que al sumar puntos a la región factible de un PL, sólo puede mejorar el valor óptimo de z o dejarlo igual. Eliminar puntos de la región factible de un PL sólo puede hacer que el valor de x óptimo empeore o quede igual. Por ejemplo, veamos el precio sombra de la restricción de materia prima (una restricción $\leq$) en el ejemplo 1. ¿Por qué tiene que ser no negativo este precio sombra? El precio sombra de la restricción de la materia prima representa lo que mejoraría el valor óptimo de z si están disponibles 4 601 unidades (en lugar de 4 600) de materia prima. Tener disponible una unidad más de materia prima, añade puntos a la región factible (puntos para los cuales Winco usa $>$ 4 600 pero $\leq$ 4 601 unidades de materia prima), así sabemos que el valor óptimo de z tiene que aumentar o permanecer igual. Por lo tanto, el precio sombra de esta restricción $\leq$ tiene que ser no negativo.

Consideremos, de igual manera, el precio sombra de la restricción $x_4 \geq 400$ del ejemplo 1. Si se incrementa el lado derecho de esta restricción a 401, se eliminan puntos de la región factible (puntos para los cuales Winco produce $\geq$ 400, pero $<$ 401 unidades del producto 4). Por lo tanto, el valor óptimo de z tiene que disminuir o seguir igual, lo que significa que el precio sombra de esta restricción tiene que ser no positivo. Un razonamiento similar muestra que, para un problema de minimización, una restricción ≥ tendrá un precio sombra no positivo, y una restricción ≤ tendrá un precio sombra no negativo.

El precio sombra de una restricción de igualdad puede ser positivo, negativo o cero. Para ver la razón, considere las dos siguientes PL:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(LP 1)}$$

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad -x_1 - x_2 &= -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(LP 2)}$$

Ambas PL tienen la misma región factible y el mismo conjunto de soluciones óptimas (la parte del segmento de recta $x_1 + x_2 = 1$ en el primer cuadrante). Sin embargo, la restricción del PL 1 tiene un precio sombra de $+1$, en tanto que la restricción del PL 2 tiene un precio sombra de -1. Por lo tanto, el signo del precio sombra para una restricción de igualdad podría ser positivo, negativo o cero.

Análisis de sensibilidad y variables de holgura y excedente

Es posible mostrar (véase sección 6.10) que para cualquier restricción de desigualdad, el producto de los valores de la variable de holgura o excedente de la restricción y el precio sombra de la misma tienen que ser iguales a cero. Esto quiere decir que cualquier restricción cuya variable de holgura o excedente es > 0, tendrá un precio sombra de cero. También quiere decir que cualquier restricción con un precio sombra no cero tiene que ser activa (tener holgura o excedente igual a cero). Con el fin de ilustrar estas ideas, considere la restricción de la mano de obra del ejemplo 1. Esta restricción tiene holgura positiva, por eso su precio sombra tiene que ser 0. Lo anterior es razonable porque holgura = 250 para esta restricción indica que no se usan 250 horas de mano de obra disponibles en la actualidad. Por lo tanto, una hora extra de mano de obra, no incrementaría los ingresos. Ahora refiérase a la restricción de la materia prima del ejemplo 1. Como esta restricción tiene un precio sombra no cero, debe tener una holgura = 0. Esto es razonable; el precio no cero significa que más materia prima incrementará el ingreso. Es el caso sólo si toda la materia prima disponible en la actualidad se está utilizando.

Para restricciones con holgura o excedente no cero, el valor de la variable de holgura, o excedente, se relaciona con las secciones *ALLOWABLE INCREASE* y *ALLOWABLE DECREASE* de la parte *RIGHTHAND SIDE RANGES* de los resultados que proporciona LINDO. Se dan detalles de esta relación en la tabla 4.

Para cualquier restricción que tiene holgura o excedente positivo, el valor óptimo de z y los valores de las variables de decisión permanecen sin cambio dentro del intervalo admisible del lado derecho. Con el fin de ilustrar estas ideas, considere la restricción de la mano de obra del ejemplo 1. Como la holgura = 250, se observa en la tabla 4 que AI = ∞ y AD = 250. Por lo tanto, la base actual sigue siendo óptima para 4 750 ≤ mano de obra

TABLA 4
Incrementos y decrementos permisibles para las restricciones con holgura o excedente no cero

Tipo de restricción	AI para el Ld	AD para el Ld
≤	∞	= Valor de holgura
≥	= Valor de exceso	= ∞

disponible ≤ ∞. Dentro de este intervalo, tanto el valor óptimo de z como los valores de las variables de decisión siguen sin cambio.

Degeneración y análisis de sensibilidad

Cuando la solución óptima para un PL es degenerada, se deben tomar ciertas precauciones al interpretar los resultados que proporciona LINDO. Ya se mencionó en la sección 4.11 que una sfb es degenerada si por lo menos una variable básica en la solución óptima es igual a cero. Para un PL con m restricciones, si los resultados de LINDO indican que menos de m variables son positivas, entonces la solución óptima es una sfb degenerada. Con el fin de aclarar las ideas, considérese el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z = 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \\
\text{s.a} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 400 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\le 150 \\
2x_1 + x_2 + x_3 + .5x_4 &\le 200 \\
3x_1 + x_2 \qquad\qquad x_4 &\le 250 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Los resultados de LINDO para este PL se muestran en la figura 5. El PL tiene cuatro restricciones, y sólo dos variables son positivas en la solución, por eso la solución óptima es una sfb degenerada. A propósito, si se usa el comando **TABLEAU** indica que toda la base óptima es BV = $\{x_2, x_3, s_3, x_1\}$.

Enseguida se estudian tres "particularidades" que se podrían presentar cuando es degenerada la solución óptima que encuentra LINDO.

Particularidad 1 En los *RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED*, por lo menos una restricción tendrá un AI o AD igual a 0. Esto quiere decir que por lo menos una restricción, el *DUAL PRICE* puede indicarnos el nuevo valor z cuando hay un incremento o una disminución en el lado derecho, pero no para ambos.

Para entender la Particularidad 1, refiérase a la primera restricción. Su AI es 0. Esto significa que el *DUAL PRICE* de la primera restricción de 0.50 no se puede usar para determinar un nuevo valor z resultante de cualquier incremento en el lado derecho de la primera restricción.

Particularidad 2 En el caso de que una variable no básica se vuelva positiva, el coeficiente de la función objetivo tendría que ser mejorado con un valor mayor que su *REDUCED COST*.

Para entender la Particularidad 2 considere la variable no básica x_4; su *REDUCED COST* es 1.5. Si su coeficiente de la función objetivo se incrementa en 2, se observa todavía que la nueva solución óptima tiene $x_4 = 0$. Esta particularidad se presenta porque el incremento modifica el conjunto de variables básicas, pero no la solución óptima del PL.

Particularidad 3 Si se incrementa el coeficiente de la variable de la función objetivo con más de su AI o disminuye por más de su AD entonces la solución óptima del PL podría quedar igual.

La Particularidad 3 y la Particularidad 2 son similares. Para entenderlo, considérese la variable no básica x_4. Su AI es 1.5. Si aumenta 2 el coeficiente de la función objetivo, la nueva solución óptima todavía sigue sin cambio. Esta particularidad obedece a que el incremento modifica el conjunto de variables básicas, pero no la solución óptima del PL.

Esta sección termina con la advertencia de que el análisis sólo se aplica si un coeficiente de la función objetivo o un lado derecho se modifica. Si cambia más de un coeficiente de la función objetivo o el lado derecho, a veces es posible todavía utilizar los resultados de LINDO para determinar si la base actual sigue siendo óptima. Los detalles se proporcionan en la sección 6.4.

```
MAX       6  X1 + 4  X2  + 3  X3  + 2  X4
SUBJECT TO
        2)      2  X1  +  3 X2  +  X3  +  2  X4  <= 400
        3)      X1  +  X2  +  2  X3  +  X4  <=      150
        4)      2  X1  +  X2  +  X3  +  0.5  X4  <=      200
        5)      3  X1  +  X2  +  X4  <=      250
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP           3
                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE
                 1)  700.00000

VARIABLE          VALUE           REDUCED COST
      X1        50.000000           .000000
      X2       100.000000           .000000
      X3          .000000           .000000
      X4          .000000          1.500000


     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)          .000000          .500000
      3)          .000000         1.250000
      4)          .000000          .000000
      5)          .000000         1.250000

NO. ITERATIONS=        3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                        OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE    CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
             COEF          INCREASE         DECREASE
      X1   6.000000        3.000000         3.000000
      X2   4.000000        5.000000         1.000000
      X3   3.000000        3.000000         2.142857
      X4   2.000000        1.500000         INFINITY

                        RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW    CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
              RHS          INCREASE         DECREASE
       2  400.000000        .000000       200.000000
       3  150.000000        .000000          .000000
       4  200.000000       INFINITY          .000000
       5  250.000000        .000000       120.000000

THE TABLEAU
      ROW   (BASIS)    X1       X2       X3       X4     SLK  2
       1  ART        .000     .000     .000    1.500     .500
       2       X2    .000    1.000     .000     .500     .500
       3       X3    .000     .000    1.000     .167    -.167
       4  SLK  4     .000     .000     .000    -.500     .000
       5       X1   1.000     .000     .000     .167    -.167

      ROW     SLK     3     SLK     4     SLK     5
       1         1.250          .000         1.250      700.000
       2         -.250          .000         -.250      100.000
       3          .583          .000         -.083         .000
       4         -.500         1.000         -.500         .000
       5          .083          .000          .417       50.000
```

FIGURA 5

PROBLEMAS

Grupo A

1 El agricultor Leary cultiva trigo y maíz en sus tierras de 45 acres. Es capaz de vender cuando más 140 bushels de trigo y 120 bushels de maíz. Cada acre sembrado con trigo rinde 5 bushels, y cada acre sembrado con maíz produce 4 bushels. El trigo se vende en 30 dólares por bushel y el maíz se vende a 50 dólares el bushel. La cosecha de un acre con trigo requiere 6 horas de mano de obra, y la de un acre con maíz consume 10 horas. Se pueden comprar hasta 350 horas de mano de obra a 10 dólares la hora. Sea A1 = acres plantados con trigo; A2 = acres sembrados con maíz, y L = horas de mano de obra que se compran. Para maximizar la utilidad, Leary debe resolver el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z = 150A1 + 200A2 - 10L \\
\text{s.a} \quad A1 + A2 \quad &\le 45 \\
6A1 + 10A2 - L &\le 0 \\
L &\le 350 \\
5A1 \quad &\le 140 \\
4A2 \quad &\le 120 \\
A1, A2, L &\ge 0
\end{aligned}
$$

Utilice los resultados de LINDO de la figura 6 para dar respuesta a las preguntas siguientes:

a Si sólo se dispusiera de 40 acres de tierra, ¿cuál sería la utilidad de Leary?

b Si el precio del trigo cayera a 26 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema de Leary?

c Utilice la parte *SLACK* de los resultados para determinar el incremento permisible y el decremento permisible para la cantidad de trigo que es posible vender. Si sólo 130 bushels de trigo se pudieran vender, entonces, ¿cambiaría la respuesta del problema?

2 Carco fabrica automóviles y camiones. Cada automóvil contribuye con 300 dólares a la utilidad y cada camión aporta 400 dólares. Los recursos requeridos para fabricar un automóvil y un camión se señalan en la tabla 5. Carco renta todos los días hasta 98 máquinas tipo 1 a un costo de 50 dólares por máquina. La compañía tiene 73 máquinas tipo 2 y 260 toneladas de acero disponible. Las consideraciones de mercadotecnia dictan que se tienen que producir por lo menos 88 automóviles y 26 camiones. Sea x_1 = cantidad de automóviles que se producen diariamente; x_2 = cantidad de camiones que se producen diariamente, y m_1 = máquinas tipo 1 que se rentan todos los días.

Para maximizar la utilidad, Carco debe resolver el PL de la figura 7. Utilice los resultados de LINDO para responder las preguntas siguientes:

a Si cada automóvil contribuye con 310 dólares a la utilidad, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema?

TABLA 5

Vehículo	Días con la máquina tipo 1	Días con la máquina tipo 2	Toneladas de acero
Automóvil	0.8	0.6	2
Camión	1.8	0.7	3

FIGURA 6
Resultados de LINDO para el trigo y el maíz

```
MAX     150  A1 + 200  A2  -  10 L
SUBJECT TO
       2)    A1 + A2 <=   45
       3)    6 A1 + 10 A2 - L <=  0
       4)    L <=   350
       5)    5 A1 <=   140
       6)    4 A2 <=   120
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP               4

                    OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                    1)  4250.00000

VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
      A1        25.000000           .000000
      A2        20.000000           .000000
       L       350.000000           .000000

     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           .000000       75.000000
      3)           .000000       12.500000
      4)           .000000        2.500000
      5)         15.000000         .000000
      6)         40.000000         .000000

NO. ITERATIONS=          4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                  OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE   CURRENT     ALLOWABLE      ALLOWABLE
            COEF       INCREASE       DECREASE
      A1  150.000000  10.000000      30.000000
      A2  200.000000  50.000000      10.000000
       L  -10.000000   INFINITY       2.500000

                      RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW   CURRENT     ALLOWABLE      ALLOWABLE
            RHS        INCREASE       DECREASE
       2   45.000000    1.200000       6.666667
       3     .000000   40.000000      12.000000
       4  350.000000   40.000000      12.000000
       5  140.000000    INFINITY      15.000000
       6  120.000000    INFINITY      40.000000
```

FIGURA 7
Resultados de LINDO para Carco

```
MAX     300  X1 + 400  X2  -  50  M1
SUBJECT TO
        2)    0.8 X1  +  X2  -  M1  <=   0
        3)    M1  <=    98
        4)    0.6  X1 +  0.7  X2 <=   73
        5)    2 X1   + 3  X2  <=   260
        6)    X1 >=  88
        7)    X2 >=  26
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP               4

                    OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                    1)  32540.0000

VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
      X1        88.000000           .000000
      X2        27.600000           .000000
      M1        98.000000           .000000

     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           .000000      400.000000
      3)           .000000      350.000000
      4)           .879999         .000000
      5)          1.200003         .000000
      6)           .000000      -20.000000
      7)          1.599999         .000000

NO. ITERATIONS=          4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                    OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE     CURRENT       ALLOWABLE      ALLOWABLE
              COEF         INCREASE       DECREASE
      X1    300.000000     20.000000       INFINITY
      X2    400.000000      INFINITY      25.000000
      M1    -50.000000      INFINITY     350.000000

                      RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW     CURRENT       ALLOWABLE      ALLOWABLE
              RHS          INCREASE       DECREASE
       2      .000000       .400001       1.599999
       3    98.000000       .400001       1.599999
       4    73.000000       INFINITY       .879999
       5   260.000000       INFINITY      1.200003
       6    88.000000       1.999999      3.000008
       7    26.000000       1.599999       INFINITY
```

b Si Carco tuviera que fabricar por lo menos 86 automóviles, ¿cuál sería la utilidad de Carco?

3 Considere el problema de la dieta analizado en la sección 3.4. Utilice los resultados de LINDO de la figura 8 para contestar las preguntas siguientes:

a Si una barra de chocolate cuesta 30 centavos de dólar, entonces, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema?

b Si una botella de bebida de cola cuesta 35 centavos, entonces, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema?

c Si se requirieran por lo menos 8 onzas de chocolate, entonces, ¿cuál sería el costo de la dieta óptima?

d Si se requirieran por lo menos 600 calorías, entonces, ¿cuál sería el costo de la dieta óptima?

e Si el requisito fuera por lo menos 9 onzas de azúcar, entonces ¿cuál sería el costo de la dieta óptima?

f ¿Cuál tendría que ser el precio de la rebanada de pastel de queso con piña antes de que resulte óptimo comer este pastel?

FIGURA 8
Resultados de LINDO para el problema de la dieta

```
MAX      50 BR + 20 IC + 30 COLA + 80 PC
SUBJECT TO
        2)     400 BR + 200 IC + 150 COLA
                              + 500 PC >=   500
        3)     3  BR  + 2  IC  >=  6
        4)     2  BR  + 2  IC  +  4 COLA
                              + 4  PC >=  10
        5)     2  BR  + 4  IC  +  COLA
                              + 5  PC  >=  8
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP              2

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)   90.0000000

VARIABLE        VALUE         REDUCED COST
      BR        .000000         27.500000
      IC       3.000000           .000000
    COLA       1.000000           .000000
      PC        .000000         50.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS   DUAL PRICES
      2)     250.000000          .000000
      3)        .000000        -2.500000
      4)        .000000        -7.500000
      5)       5.000000          .000000

NO. ITERATIONS=         2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                 OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE    CURRENT      ALLOWABLE       ALLOWABLE
             COEF        INCREASE        DECREASE
      BR   50.000000      INFINITY       27.500000
      IC   20.000000     18.333330        5.000000
    COLA   30.000000     10.000000       30.000000
      PC   80.000000      INFINITY       50.000000

                 RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW    CURRENT      ALLOWABLE       ALLOWABLE
             RHS         INCREASE        DECREASE
       2   500.000000   250.000000       INFINITY
       3     6.000000     4.000000       2.857143
       4    10.000000     INFINITY       4.000000
       5     8.000000     5.000000       INFINITY
```

g ¿Cuál tendría que ser el precio de la barra de chocolate antes de que resulte óptimo comer chocolate?

h Utilice la parte de SLACK o SURPLUS de los resultados de LINDO para determinar el incremento permisible y el decremento permisible para la restricción de la grasa. Si el requisito fuera 10 onzas de grasa, entonces, ¿cambiaría la solución óptima del problema?

4 Gepbab Corporation elabora tres productos en dos plantas distintas. El costo por producir una unidad en cada planta se indica en la tabla 6. Cada planta puede producir un total de 10 000 unidades. Se tienen que fabricar por lo menos 6 000 unidades del producto 1, por lo menos 8 000 unidades del producto 2 y por lo menos 5 000 unidades del producto 3. Para minimizar el costo de cumplir con la demanda se debe resolver el PL siguiente:

$$
\begin{array}{llr}
\min z = 5x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 8x_{21} + 7x_{22} + 10x_{23} & & \\
\text{s.a} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} & \le & 10\,000 \\
\qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} & \le & 10\,000 \\
\qquad x_{11} + x_{21} & \ge & 6\,000 \\
\qquad x_{12} + x_{22} & \ge & 8\,000 \\
\qquad x_{13} + x_{23} & \ge & 5\,000 \\
\qquad \text{Todas las variables} & \ge & 0
\end{array}
$$

Aquí, x_{ij} = cantidad de unidades de producto j fabricada en la planta i. Utilice los resultados de LINDO de la figura 9 para responder las preguntas siguientes:

a ¿Cuál tendría que ser el costo para elaborar el producto 2 en la planta 1 para que la compañía elija esta opción?

b ¿Cuál sería el costo total si la planta 1 tuviera 9 000 unidades de capacidad?

c Si cuesta 9 dólares producir una unidad del producto 3 en la planta 1, entonces, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

5 Mondo fabrica motocicletas en tres plantas. La mano de obra, materia prima y costos de producción (sin incluir los costos de mano de obra) necesarios para fabricar una motocicleta en cada planta se indican en la tabla 7. Cada planta tiene suficiente capacidad de maquinaria para producir hasta 750 motocicletas por semana. Todos los trabajadores de Mondo pueden trabajar hasta 40 horas por semana y reciben 12.50 dólares por hora trabajada. Mondo tiene un total de 525 trabajadores y ahora posee 9 400 unidades de materia prima. Se tienen que producir cada semana, por lo menos, 1 400 Mondos. Sea x_1 = motocicletas fabricadas en la planta 1; x_2 = motocicletas fabricadas en la planta 2, y x_3 = motocicletas fabricadas en la planta 3.

La información que proporciona LINDO en la figura 10 le permite a Mondo minimizar el costo variable (mano de obra + producción) por cumplir con la demanda. Utilice esta información para contestar las preguntas siguientes:

a ¿Cuál sería la nueva solución óptima del problema si el costo de producción fuera de sólo 40 dólares en la planta 1?

TABLA 6

	Producto (dólares)		
Planta	1	2	3
1	5	6	18
2	8	7	10

FIGURA 9
Resultados de LINDO para Gepbab

```
MAX      5  X11 + 6 X12 + 8 X13 + 8 X21
                                + 7 X22 + 10 X23
SUBJECT TO
       2)     X11   +  X12   +  X13 <=    10000
       3)     X21   +  X22   +  X23 <=    10000
       4)     X11   +  X21   >=    6000
       5)     X12   +  X22   >=    8000
       6)     X13   +  X23   >=    5000
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP              5

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)   128000.000

VARIABLE       VALUE             REDUCED COST
     X11     6000.000000             .000000
     X12         .000000            1.000000
     X13     4000.000000             .000000
     X21         .000000            1.000000
     X22     8000.000000             .000000
     X23     1000.000000             .000000


     ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
      2)         .000000           2.000000
      3)     1000.000000            .000000
      4)         .000000          -7.000000
      5)         .000000          -7.000000
      6)         .000000         -10.000000

NO. ITERATIONS=          5

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                       OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE     CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
               COEF            INCREASE           DECREASE
     X11   5.000000            1.000000           7.000000
     X12   6.000000            INFINITY           1.000000
     X13   8.000000            1.000000           1.000000
     X21   8.000000            INFINITY           1.000000
     X22   7.000000            1.000000           7.000000
     X23  10.000000            1.000000           1.000000

                       RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW     CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
               RHS             INCREASE           DECREASE
       2   10000.000000    1000.000000        1000.000000
       3   10000.000000       INFINITY        1000.000000
       4    6000.000000    1000.000000        1000.000000
       5    8000.000000    1000.000000        8000.000000
       6    5000.000000    1000.000000        1000.000000
```

b ¿Cuánto dinero ahorraría Mondo si la capacidad de la planta 3 se incrementara 100 motocicletas?

c ¿Cuánto se incrementaría el costo de Mondo si tuviera que producir una motocicleta más?

6 Steelco requiere carbón, hierro y mano de obra para producir tres tipos de acero. Los insumos (y los precios de venta) para una tonelada de cada tipo de acero se indican en la tabla 8. Se pueden comprar hasta 200 toneladas de carbón a un precio de 10 dólares por tonelada. Se pueden comprar hasta 60 toneladas de hierro a 8 dólares la tonelada y hasta 100 horas de mano de obra a 5 dólares por hora. Sea x_1 = toneladas de acero 1 fabricado; x_2 = toneladas de acero 2 fabricado y x_3 = toneladas producidas de acero 3.

TABLA 7

Planta	Mano de obra necesaria (horas)	Materia prima (unidades)	Costo de producción (dólares)
1	20	5	050
2	16	8	080
3	10	7	100

FIGURA 10
Información de LINDO para Mondo

```
MAX       300  X1 + 280  X2  +  225  X3
SUBJECT TO
       2)     20 X1   + 16 X2   + 10  X3 <=  21000
       3)      5  X1   + 8  X2   +  7  X3 <=  9400
       4)      X1   <=      750
       5)      X2   <=      750
       6)      X3   <=      750
       7)      X1   +  X2   +  X3   >=    1400
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP              3

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)   357750.000

VARIABLE       VALUE             REDUCED COST
      X1      350.000000             .000000
      X2      300.000000             .000000
      X3      750.000000             .000000


     ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
      2)     1700.000000            .000000
      3)         .000000           6.666668
      4)      400.000000            .000000
      5)      450.000000            .000000
      6)         .000000          61.666660
      7)         .000000        -333.333300

NO. ITERATIONS=          3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                       OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE     CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
               COEF            INCREASE           DECREASE
      X1    300.000000         INFINITY          20.000000
      X2    280.000000        20.000010          92.499990
      X3    225.000000        61.666660           INFINITY

                       RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW     CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
               RHS             INCREASE           DECREASE
       2   21000.000000        INFINITY        1700.000000
       3    9400.000000     1050.000000         900.000000
       4     750.000000        INFINITY         400.000000
       5     750.000000        INFINITY         450.000000
       6     750.000000      450.000000         231.818200
       7    1400.000000       63.750000         131.250000
```

La información de LINDO que genera una utilidad máxima para la compañía se da en la figura 11. Utilice la información para contestar las preguntas siguientes:

a ¿Cuál sería la utilidad si sólo se pudieran comprar 40 toneladas de hierro?

TABLA 8

Acero	Carbón necesario (toneladas)	Hierro necesario (toneladas)	Mano de obra necesaria (horas)	Precio de venta (dólares)
1	3	1	1	51
2	2	0	1	30
3	1	1	1	25

FIGURA 11
Información de LINDO para Steelco

```
MAX        8  X1 + 5  X2  + 2  X3
SUBJECT TO
        2)      3  X1  +  2  X2  +  X3 <=  200
        3)      X1  +  X3    <=      60
        4)      X1  +  X2  +  X3 <=  100
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP              2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)   530.000000

VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
      X1        60.000000           .000000
      X2        10.000000           .000000
      X3          .000000          1.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)          .000000          2.500000
      3)          .000000           .500000
      4)        30.000000           .000000

NO. ITERATIONS=          2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                       OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE     CURRENT       ALLOWABLE        ALLOWABLE
              COEF         INCREASE          DECREASE
      X1    8.000000       INFINITY           .500000
      X2    5.000000        .333333          5.000000
      X3    2.000000       1.000000          INFINITY

                       RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW     CURRENT       ALLOWABLE        ALLOWABLE
               RHS         INCREASE          DECREASE
       2  200.000000      60.000000         20.000000
       3   60.000000       6.666667         60.000000
       4  100.000000       INFINITY         30.000000
```

b ¿Cuál es el precio mínimo por tonelada de acero 3 que haría más atractivo producirlo?

c Encuentre la nueva solución óptima si el acero 1 se vende a 55 dólares la tonelada.

Grupo B

7 Shoeco tiene que cumplir (a tiempo) las siguientes demandas de pares de zapatos: mes 1, 300; mes 2, 500; mes 3, 100 y mes 4, 100. Al empezar el mes 1 se dispone de 50 pares de zapatos, y Shoeco tiene tres empleados. Un trabajador recibe 1 500 dólares por mes. Cada empleado puede trabajar hasta 160 horas por mes antes de laborar tiempo extra. Durante cualquier mes, cada empleado podría ser obligado a trabajar hasta 20 horas de tiempo extra; los trabajadores reciben 25 dólares por hora de tiempo extra. Cada par de zapatos requiere 4 horas de mano de obra y 5 dólares de materia prima para su fabricación. Se puede contratar o despedir al inicio de cada mes a los trabajadores. Cada trabajador contratado cuesta 1 600 dólares y cada empleado despedido cuesta 2 000. Al final de cada mes se fija un costo por almacenar los zapatos a razón de 30 dólares por par. Plantee un PL con la que se pueda minimizar el costo total de cumplir las demandas de los próximos cuatro meses. Luego resuelva el PL con la ayuda de LINDO, y por último, utilice la información que proporciona LINDO para responder las preguntas que siguen a estas recomendaciones (las cuales podrían ayudar en la formulación). Sea

x_t = pares de zapatos producidos durante el mes t sin tiempo extra

o_t = pares de zapatos producidos durante el mes t con tiempo extra

i_t = inventario de pares de zapatos al final del mes t

h_t = trabajadores contratados al inicio del mes t

f_t = trabajadores despedidos al inicio del mes t

w_t = trabajadores disponibles por mes t (después de la contratación o del despido del mes t)

Se necesitan cuatro tipos de restricciones:

Tipo 1 Ecuaciones de inventario. Por ejemplo, durante el mes 1, $i_1 = 50 + x_1 + o_1 - 300$.

Tipo 2 Relaciones de trabajadores disponibles con la contratación y el despido. Para el mes 1, por ejemplo, se requiere la restricción siguiente: $w_1 = 3 + h_1 - f_1$.

Tipo 3 Por cada mes, la cantidad de zapatos producidos sin recurrir al tiempo extra está limitada por el número de trabajadores. Por ejemplo, para el mes 1, se requiere la siguiente restricción: $4x_1 \leq 160w_1$.

Tipo 4 Para cada mes, la cantidad de horas de mano de obra en tiempo extra utilizada está limitada por el número de trabajadores. Por ejemplo, para el mes 1 se requiere la restricción siguiente: $4(o_1) \leq 20w_1$.

Por lo que se refiere a la función objetivo, se tienen que considerar los costos siguientes:

1 Salarios de los trabajadores
2 Costos de contratación
3 Costos de despido
4 Costos por almacenamiento
5 Costos del tiempo extra
6 Costos de la materia prima

a Describir el plan de producción óptimo de la compañía, política de contratación y políticas de despidos. Suponga que es aceptable tener un número fraccionario de empleados, contrataciones o despidos.

b Si la mano de obra en tiempo extra cuesta 16 dólares por hora en el mes 1, ¿se debe usar tiempo extra?

c Si el costo por despedir empleados fuera 1 800 dólares en el mes 3, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema?

d Si el costo de contratar empleados durante el mes 1 fuera 1 700 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema?

e ¿Cuánto se reducirían los costos totales si la demanda en el mes 1 fuera de 100 pares de zapatos?

f ¿De cuánto sería el costo total si la compañía tuviera 5 trabajadores al iniciar el mes 1 (antes de que se efectúen las contrataciones o los despidos del mes 1)?

g ¿Por cuánto se incrementarían los costos si la demanda en el mes 2 aumentara en 100 pares de zapatos?

8 Considere el PL:

$$\begin{aligned}
\max\ & 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
\text{s.a}\ & x_1 + x_4 \le 200 \\
& x_2 + x_3 \le 150 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 350 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 550 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

a Resuelva este PL con ayuda de LINDO y use los resultados para mostrar que la solución óptima es degenerada.

b Utilice los resultados de LINDO para determinar un ejemplo de particularidades 1 a 3.

5.3 Aplicación administrativa de los precios sombra

El significado administrativo de los precios sombra se analiza en esta sección. Aprenderemos, en particular, cómo es posible usar con frecuencia los precios sombra para contestar las preguntas siguientes: ¿cuál es la cantidad máxima que un administrador debería estar dispuesto a pagar por una unidad adicional de un cierto recurso? Para poder contestar esta pregunta centramos por lo regular nuestra atención en el precio sombra de la restricción que describe la disponibilidad del recurso. Enseguida analizamos cuatro ejemplos de la interpretación de los precios sombra.

EJEMPLO 5 Productos Winco 2

En el ejemplo 1, ¿cuál es lo máximo que Winco estaría dispuesto a pagar por una unidad de materia prima? ¿Y por una hora extra de mano de obra?

Solución Como el precio sombra de la restricción de la disponibilidad de la materia prima es 1, una unidad extra incrementaría el ingreso total en 1 dólar. Por lo tanto, Winco podría pagar hasta 1 dólar por una unidad extra de materia prima y estar tan bien como ahora. Esto quiere decir que Winco debería estar dispuesto a pagar hasta 1 dólar por una unidad extra de materia prima. La restricción de la disponibilidad de la mano de obra tiene un precio sombra de 0. Esto quiere decir que una hora extra de mano de obra no incrementa los ingresos, por eso Winco no debería estar dispuesto a pagar nada por una hora extra de mano de obra. (Téngase en cuenta que este análisis es válido porque los AI para las restricciones de mano de obra y materia prima son mayores que 1.)

EJEMPLO 6 Productos Winco 3

Volvamos a referirnos al ejemplo 1, pero con los cambios siguientes. Suponga que se dispone de 4 600 unidades de materia prima, pero se tienen que comprar a un costo de 4 dólares por unidad. Además, se dispone de 5 000 h de mano de obra, pero se tienen que comprar a un costo de 6 dólares por hora. El precio de venta por unidad de cada producto es como sigue: producto 1, 30 dólares; producto 2, 42 dólares; producto 3, 53 dólares; producto 4, 72 dólares. Se tiene que fabricar un total de 950 unidades, de las cuales por lo menos 400 tienen que ser del producto 4. Determine la cantidad máxima que la compañía debería estar dispuesta a pagar por una unidad extra de materia prima y una hora extra de mano de obra.

Solución La contribución a la utilidad por una unidad de cada producto podría se calculada como se indica:

Producto 1: $30 - 4(2) - 6(3) = 4$ dólares
Producto 2: $42 - 4(3) - 6(4) = 6$ dólares
Producto 3: $53 - 4(4) - 6(5) = 7$ dólares
Producto 4: $72 - 4(7) - 6(6) = 8$ dólares

Por lo tanto, la utilidad de Winco es $4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4$. Para maximizar la utilidad, Winco debe resolver el mismo PL que en el ejemplo 1, y los resultados pertinentes de LINDO son de nuevo los de la figura 3. Para determinar lo más que Winco debería estar dispuesta a pagar por una unidad extra de materia prima, observe que el precio sombra de la restricción de la materia prima se podría interpretar como sigue: si Winco tiene el derecho de comprar una unidad más de materia prima (a 4 dólares por unidad), entonces la utilidad aumenta 1 dólar. Por lo tanto, al pagar $4 + 1 = 5$ dólares por una unidad adicional de materia prima incrementa la utilidad $1 - 1 = 0$ dólares. Por eso Winco podría pagar hasta 5 dólares por una unidad más de materia prima y todavía estar en mejor posición. Por lo que toca a la restricción de la materia prima, el precio sombra de 1 dólar representa un *premio* mucho más allá del precio actual que Winco está dispuesta a pagar por una unidad extra de materia prima.

El precio sombra de la restricción de la disponibilidad de mano de obra es 0 dólares, lo cual significa que el derecho a comprar una hora extra de mano de obra a 4 dólares por hora no incrementará la utilidad. Infortunadamente, lo que nos dice todo esto es que Winco no debe comprar más mano de obra al precio actual de 4 dólares por hora.

EJEMPLO 7 Precio sombra del agricultor Leary

Considere el problema del agricultor Leary (problema 1 en la sección 5.2).

a ¿Cuál es lo más que Leary debe pagar por una hora adiconal de mano de obra?

b ¿Cuál es lo más que Leary debe pagar por un acre adicional de tierra?

Solución **a** A partir del precio sombra de 2.5 de la restricción $L \leq 350$, se observa que si hay disponibles 351 horas de mano de obra, entonces (después de pagar 10 dólares por otra hora de mano de obra) el ingreso aumenta 2.50 dólares. Por eso, si Leary paga $10 + 2.50 = 12.50$ dólares por una hora extra de mano de obra, la utilidad se incrementaría $2.50 - 2.50 = 0$ dólares. Esto implica que Leary debe estar dispuesto a pagar hasta 12.50 dólares por otra hora de mano de obra.

Para verlo desde otro punto de vista, el precio sombra de la restricción $6A1 + 10A2 - L \leq 0$ es 12.5. Esto significa que si la restricción $6A1 + 10A2 \leq L$ fuera reemplazada por la restricción $6A1 + 10A2 \leq L + 1$, la utilidad se incrementaría 12.50 dólares. Así, si una hora extra de mano de obra le fuera "cedida" a Leary (a un costo cero), la utilidad se incrementaría 12.50 dólares. Por lo tanto, Leary debería estar dispuesto a pagar hasta 12.50 dólares por una hora extra de mano de obra.

b Si hubiera 46 acres de tierra disponibles, la utilidad se incrementaría 75 dólares (el precio sombra de la restricción $A1 + A2 \leq 45$). Esto comprende el costo (cero dólares) por comprar un acre adicional de tierra. Por lo tanto, Leary debe estar dispuesto a pagar hasta 75 dólares por un acre extra de tierra.

Enseguida se ilustran algunas de las reflexiones administrativas a las que se puede llegar al analizar los precios sombra para un problema de minimización.

EJEMPLO 8 Precio sombra de Tucker Inc.

Las preguntas siguientes se refieren al ejemplo 2.

a ¿Cuál es lo más que Tucker debe pagar por una hora extra de mano de obra?

b ¿Cuál es lo más que Tucker debe pagar por una unidad extra de materia prima?

c Un nuevo cliente está dispuesto a comprar 20 automóviles a un precio de 25 000 dólares por vehículo. ¿Debe Tucker surtir el pedido?

Solución **a** Como el precio sombra de la restricción de la disponibilidad de mano de obra (renglón 4) es 0, una hora extra de mano de obra reduce los costos 0 dólares. Por lo tanto, Tucker no debe pagar nada por una hora extra de mano de obra.

b Como el precio sombra de la restricción de la disponibilidad de la materia prima (renglón 5) es 5 (miles de dólares), una unidad más de materia prima disminuye los costos 5 000 dólares. Por lo tanto, Tucker debería estar dispuesto a pagar hasta 5 000 dólares por una unidad extra de materia prima.

c El incremento permisible para la restricción $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\,000$ es 66.666660. Como el precio sombra de esta restricción es -30 (miles de dólares), sabemos que si Tucker surte el pedido, sus costos se incrementarán $-20(-30\,000) = 600\,000$ dólares. Por esta razón, Tucker no debe surtir el pedido.

El lector sagaz podría darse cuenta de que producir cada automóvil cuesta a lo más 15 000 dólares. Entonces, ¿cómo es posible que un incremento de una unidad en la cantidad de automóviles que tiene que ser producida aumente los costos 30 000 dólares? Para ver por qué es así, volveremos a resolver el PL de Tucker incrementando la cantidad de automóviles que se tiene que fabricar a 1 001. En la nueva solución óptima, $z = 11\,630$, $x_1 = 404$, $x_2 = 197$, $x_3 = 400$, $x_4 = 0$. Ahora ya se ve por qué al incrementar la demanda en un automóvil los costos se elevan 30 000 dólares. Para producir un automóvil más, Tucker tiene que fabricar cuatro automóviles más tipo 1 y tres automóviles menos tipo 2. Así se asegura que Tucker todavía utiliza 4 400 unidades de materia prima, pero el costo total aumenta $4(15\,000) - 3(10\,000) =$ ¡30 000 dólares!

PROBLEMAS

Grupo A

1 En el problema 2 de la sección 5.2, ¿cuál es lo más que Carco debe estar dispuesto a pagar por una tonelada adicional de acero?

2 En el problema 2 de la sección 5.2, ¿cuál es lo más que Carco debe estar dispuesto a pagar por rentar por un día una máquina adicional tipo 1?

3 En el problema 3 de la sección 5.2, ¿cuál es lo más que uno debe estar dispuesto a pagar por una onza adicional de chocolate?

4 En el problema 4 de la sección 5.2, ¿cuánto debe estar dispuesto a pagar Gepbab por otra unidad de capacidad en la planta 1?

5 En el problema 5 de la sección 5.2, suponga que Mondo podría comprar una unidad más de materia prima a un costo de 6 dólares. ¿Debe la compañía hacerlo? Explique.

6 En el problema 6 de la sección 5.2, ¿cuál es lo más que Steelco debe estar dispuesto a pagar por una tonelada extra de carbón?

7 En el problema 6 de la sección 5.2, ¿cuál es lo más que Steelco debe estar dispuesto a pagar por una tonelada extra de hierro?

8 En el problema 6 de la sección 5.2, ¿cuál es lo más que Steelco debe estar dispuesto a pagar por una hora extra de mano de obra?

9 Suponga que un cliente nuevo desea comprar un par de zapatos durante el mes 1 por 70 dólares en el problema 7 de la sección 5.2. ¿Debe Shoeco complacerlo?

10 ¿Cual es lo más que la compañía debe estar dispuesta a pagar por tener un trabajador más al inicio del mes 1 en el problema 7 de la sección 5.2?

11 En la resolución del inciso (c) del ejemplo 8, un gerente razona de la manera siguiente: el costo medio de fabricar un automóvil es 11 600 dólares hasta 1 000 automóviles. Por lo tanto, si un cliente está dispuesto a pagarme 25 000 por un automóvil, debo surtir el pedido. ¿Qué es lo que está mal en este razonamiento?

5.4 ¿Qué sucede con el valor óptimo de z si la base actual ya no es óptima?

En la sección 5.2 se usaron los precios sombra para determinar el nuevo valor óptimo de z si el lado derecho de una restricción se modifica, pero se conserva en el intervalo donde la base actual sigue siendo óptima. Suponga que modificamos el lado derecho de una restricción a un valor donde la base actual ya no es óptima. En tales circunstancias, la característica *LINDO Parametrics* se puede utilizar para determinar cómo cambian el precio sombra de una restricción y el valor óptimo de z.

Para ilustrar el uso de la característica Parametrics se variará la cantidad de materia prima disponible en el ejemplo 1. Suponga que se desea determinar cómo cambian el valor óptimo de z y el precio sombra cuando la cantidad de materia prima disponible varía entre 0 y 10 000 unidades. Primero se advierte que con poca materia prima disponible, el PL será no factible. Para empezar, se modifica la cantidad de materia prima disponible a 0. Entonces se sabe a partir de los resultados del intervalo y del análisis de sensibilidad, que el renglón 4 tiene un *Allowable Decrease* (Decremento permisible) de $-3\ 900$. Esto quiere decir que si se dispone por lo menos de 3 900 unidades de materia prima el problema es factible. Por lo tanto, se cambia el lado derecho de la restricción de la materia prima a 3 900, y se resuelve el PL. Después de encontrar la solución óptima, seleccione *Reports Parametrics*. En el cuadro de diálogo elija renglón 4 y fije el valor en 10 000. Se escoge luego el resultado en *Text*. La información que se obtiene se muestra en la figura 12.

En la figura 12 se observa que si la cantidad de materia prima disponible es 3 900, entonces el precio sombra (o precio dual) de la materia prima es ahora 2 dólares, y el valor z óptimo es 5 400. La base actual sigue siendo óptima hasta rm = 4 450 (rm = *raw material*, materia prima); entre rm = 3 900 y rm = 4 450, por cada incremento de una unidad en la rm, el valor óptimo de z sufrirá un aumento igual al precio sombra de 2 dólares. Por lo tanto, cuando rm = 4 450, el valor óptimo de z será

$$5\,400 + 2(4\,450) - 3\,900) = 6\,500 \text{ dólares}$$

Asimismo, en la figura 12 se ve que cuando rm = 4 450, x_3 entra a la base y sale x_1. Entonces, el precio sombra de rm es 1 dólar, y cada unidad adicional de rm (hasta el siguiente cambio de base) hace que el valor óptimo de z crezca 1 dólar. El cambio siguiente de base se presenta cuando rm = 4 850. En este punto, el nuevo valor óptimo de z se podría calcular como (valor óptimo de z para rm = 6 500) + (4 850 − 4 450)(1 dólar) = 6 900. Cuando rm = 4 850, se pivotea en SLACK3 (la variable de holgura para el renglón 3 o restricción 2) y sale SLACK5. El nuevo precio sombra para rm es 0 dólares. Por lo tanto, cuando rm > 4 850, se observa que una unidad adicional de rm no acrecentará el valor óptimo de z. Este análisis se resume en la figura 13, en donde se ve que el valor óptimo de z es una función de la cantidad de materia prima disponible.

Para cualquier PL, una gráfica del valor de la función objetivo óptimo como una función de un segundo miembro constará de varios segmentos de recta con pendientes posiblemente distintas. (Tal función se llama *función lineal por segmentos*). La pendiente de cada segmento de recta es justamente el precio sombra de la restricción. En los puntos donde la base óptima cambia (puntos B, C y D en la figura 13), podría cambiar la pendiente de la gráfica. Para una restricción ≤ en un problema de maximización, la pendiente en cada segmento de

RIGHTHANDSIDE PARAMETRICS REPORT FOR ROW: 4

VAR OUT	VAR IN	PIVOT ROW	RHS VAL	DUAL PRICE BEFORE PIVOT	OBJ VAL
			3900.00	2.00000	5400.00
X1	X3	2	4450.00	2.00000	6500.00
SLK 5	SLK 3	5	4850.00	1.00000	6900.00
X3	SLK 4	2	5250.00	-0.333067E-15	6900.00
			10000.0	0.555112E-16	6900.00

FIGURA 12

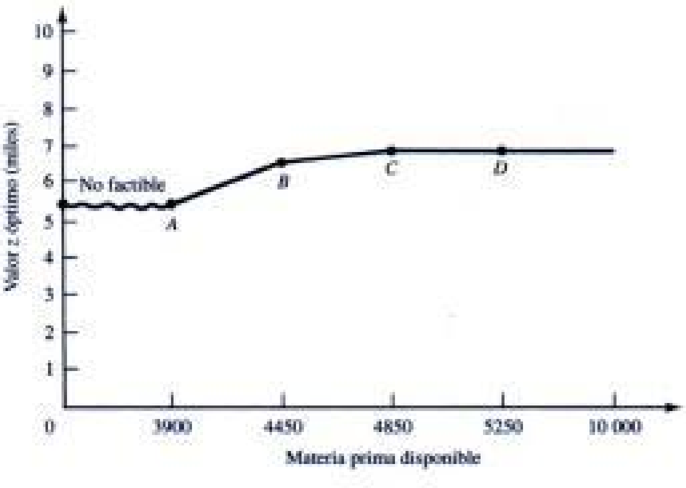


FIGURA 13
Valor z óptimo contra materia prima

recta tiene que ser no negativo, más de un recurso no puede causar daño. En un problema de maximización, las pendientes de segmentos de recta sucesivos para una restricción $\leq$ serán no crecientes. Esto es simplemente una consecuencia de rendimientos decrecientes; cuando obtenemos más de un recurso (y la disponibilidad de otros recursos es constante), no puede aumentar el valor de una unidad adicional del recurso.

Para una restricción $\geq$ en un problema de maximización, la gráfica del valor óptimo de z como una función del lado derecho será una vez más una función lineal por segmentos. La pendiente de cada segmento de recta será no positivo (que corresponde al hecho de que una restricción $\geq$ tiene precio sombra no positivo). Las pendientes de los segmentos de recta sucesivos no son crecientes. Para la restricción $x_4 \geq 400$ del ejemplo 1, se obtiene la gráfica de la figura 14 al trazar el valor óptimo de z como una función del lado derecho de la restricción.

Para una restricción de igualdad en un problema de maximización, la gráfica del valor óptimo de z como una función del segundo miembro será de nuevo lineal por segmentos. La pendiente de cada segmento de recta puede ser positivo o negativo, pero las pendientes de segmentos de recta sucesivos serán nuevamente no crecientes. Para la restricción $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 950$ en el ejemplo 1 se obtiene la gráfica de la figura 15.

Por lo que toca a un problema de minimización, la gráfica del valor óptimo de z contra el lado derecho de una restricción es una vez más una función lineal por segmentos. Para todos los problemas de minimización, las pendientes de segmentos de recta sucesivos serán no decrecientes. Para una restricción $\leq$ la pendiente de cada segmento de recta es no positiva; para una restricción $\geq$, la pendiente es no negativa, y para una restricción de igualdad, la pendiente podría ser positiva o negativa.

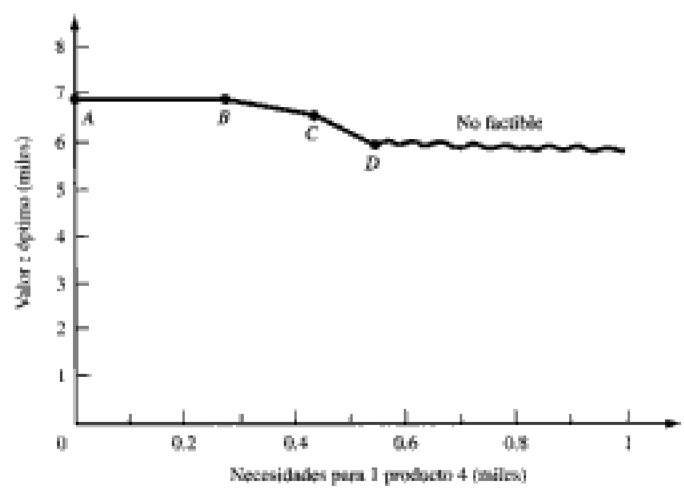


FIGURA 14
Valor z óptimo contra necesidades para el producto 4

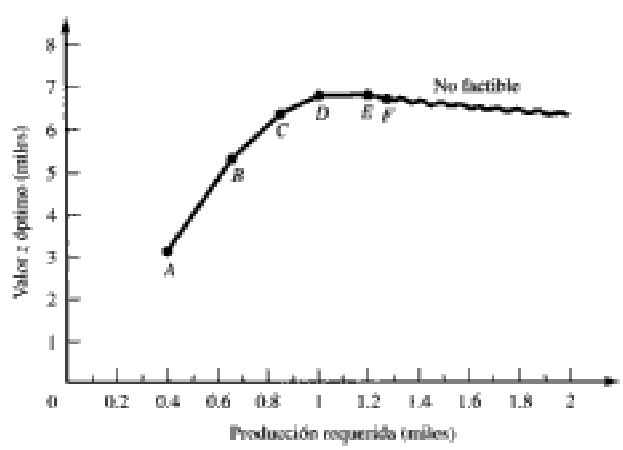


FIGURA 15
Valor z óptimo contra requisitos de producción

Efecto del cambio en un coeficiente de la función objetivo sobre el valor óptimo de z

Ahora se analiza cómo encontrar la gráfica del valor óptimo de la función objetivo como una función del coeficiente de la función objetivo de la variable. Para saber cómo funciona esto, reconsideremos el problema de Giapetto.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 + x_2 &\le 80 \\ x_1 \quad &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Sea c_1 = coeficiente de la función objetivo para x_1. En la actualidad se tiene $c_1 = 3$. Se desea determinar qué tanto depende el valor óptimo de z de c_1. Para establecer esta relación, se tienen que encontrar los valores óptimos de las variables de decisión para cada valor de c_1. Refiérase a la figura 1 (página 228); el punto $A = (0, 80)$ es óptimo si la recta de isoutilidades es más plana que la restricción de la carpintería. También observe que el punto $B = (20, 60)$ es óptimo si la pendiente de la recta de isoutilidades es mayor que la de la restricción de la carpintería y es más plana que la restricción de las horas de acabado. Por último, el punto $C = (40, 20)$ es óptimo si la pendiente de la recta de isoutilidades es mayor que la de la restricción de las horas de acabado. Una recta de isoutilidades representativa es $c_1x_1 + 2x_2 = k$, por eso sabemos que la pendiente de una recta de isoutilidades característica es $-\frac{c_1}{2}$. Esto implica que el punto A es óptimo si $-\frac{c_1}{2} \ge -1$ (o bien, $c_1 \le 2$). También encontramos que el punto B es óptimo si $-2 \le -\frac{c_1}{2} \le -1$ (o bien, $2 \le c_1 \le 4$). Por último, el punto C es óptimo si $-\frac{c_1}{2} \le -2$ (o bien $c_1 \ge 4$). Al sustituir los valores óptimos de las variables de decisión en la función objetivo $(c_1x_1 + 2x_2)$ se obtiene la información siguiente:

Valor de c_1	Valor óptimo de z
$0 \le c_1 \le 2$	$c_1(0) + 2(80) = \$160$
$2 \le c_1 \le 4$	$c_1(20) + 2(60) = 120 + 20c_1$
$c_1 \ge 4$	$c_1(40) + 2(20) = 40 + 40c_1$

La relación entre c_1 y el valor óptimo de z se muestra en forma gráfica en la figura 16. Como se puede ver en ésta, la gráfica del valor óptimo de z como una función de c_1 es una función lineal por segmentos. La pendiente de cada segmento de recta en la gráfica es igual al valor de x_1 en la solución óptima. En un problema de maximización, se puede demostrar (véase problema 5) que cuando se incrementa el valor de un coeficiente de la función objetivo, el valor de la variable en la solución óptima del PL no puede disminuir. Por lo tanto, la pendiente de la gráfica del valor óptimo de z, como una función de un coeficiente de la función objetivo, será no decreciente.

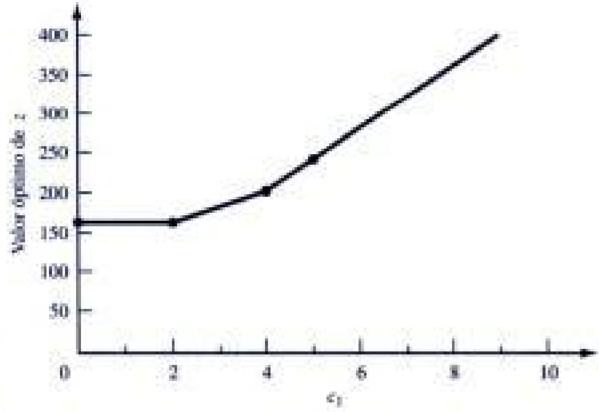


FIGURA 16
Valor óptimo de z comparado con c_1

De igual manera, en un problema de minimización, la gráfica del valor óptimo de z como una función del coeficiente c_i de la función objetivo de la variable x_i es una función lineal por segmentos. Una vez más, la pendiente de cada segmento de recta es igual al valor óptimo de x_i en la sfb correspondiente al segmento de recta. Se puede demostrar (problema 6) que el valor de x_i óptimo es una función no creciente de c_i. Por lo tanto, en un problema de minimización, la gráfica del valor óptimo de z como una función de c_i será una función lineal por segmentos cuya pendiente es no creciente.

PROBLEMAS

Grupo A

En lo que sigue, b_i representa el segundo miembro de una i-ésima restricción del PL.

1 Utilice el comando **PARA** de LINDO para graficar el valor óptimo de z del ejemplo 1 como una función de b_4.

2 Use el comando **PARA** para graficar el valor óptimo de z del ejemplo 2 como una función de b_1. Luego haga lo mismo para b_2, b_3 y b_4, respectivamente.

3 En el caso del ejemplo de Giapetto de la sección 3.1, grafique el valor óptimo de z como una función del coeficiente de la función objetivo de x_2. También grafique el valor óptimo de z como una función de b_1, b_2 y b_3.

4 Para el ejemplo de Dorian Auto (ejemplo 2 del capítulo 3), sea c_1 el coeficiente de la función objetivo de x_1. Determine el valor óptimo de z como una función de c_1.

Grupo B

5 Suponga en el ejemplo 1 que incrementamos los precios de venta de un producto. Demuestre que en la nueva solución óptima, la cantidad fabricada de ese producto no puede disminuir.

6 Para el ejemplo 2 suponga que aumentamos el costo de producción de un tipo de automóvil. Demuestre que, en la nueva solución óptima del PL, la cantidad fabricada de automóviles de ese tipo no puede aumentar.

7 Considere el problema de Sailco (ejemplo 12 del capítulo 3). Suponga que queremos saber cuál es el efecto sobre la utilidad si modificamos la cantidad de botes de vela que se pueden producir cada mes con mano de obra en horario regular. ¿Cómo se puede usar el comando **PARA** para contestar la pregunta? (*Sugerencia*: sea c cambio en la cantidad de botes de vela que se pueden fabricar cada mes con mano de obra en horario regular. Modifique el lado derecho de algunas restricciones a $40 + c$ y añada otra restricción al problema.)

RESUMEN

Análisis gráfico de sensibilidad

Para determinar si la base actual todavía es óptima después de cambiar un coeficiente de la función objetivo, observe que al modificar el coeficiente de la función objetivo de una variable cambia la pendiente de la recta de isoutilidades. La base actual continúa siendo óptima siempre que la solución óptima actual sea el último punto en la región factible que tenga contacto con las rectas de isoutilidades a medida que uno se desplaza en la dirección en que se incrementa z (para un problema de maximización). Si la base actual es óptima, los valores de las variables de decisión se conservan sin cambio, pero sí podría cambiar el valor óptimo de z.

Para determinar si la base actual sigue siendo óptima después de cambiar el segundo miembro de una restricción, empiece por encontrar las restricciones (posiblemente incluyendo restricciones de signo) que son activas para la solución óptima actual. Como cambiamos el segundo miembro de la restricción, la base actual sigue siendo óptima siempre que el punto donde las restricciones son activas se conserve factible. Incluso si la base actual continúa siendo óptima, podrían cambiar los valores de las variables de decisión y el valor óptimo de z.

Precios sombra

El **precio sombra** de la i-ésima restricción de un problema de programación lineal es la cantidad con que mejora el valor óptimo z si el segundo miembro de la i-ésima restricción se incrementa una unidad (suponiendo que la base actual sigue siendo óptima). El precio sombra de la i-ésima restricción es el precio dual para el renglón $i + 1$ dado en los resultados de LINDO.

Si el lado derecho de la i-ésima restricción se incrementa Δb_i, entonces (suponiendo que la base actual sigue siendo óptima) el nuevo valor óptimo de z para un problema de maximización podría encontrarse como se indica:

$$(\text{Nuevo valor óptimo de } z) = (\text{antiguo valor óptimo de } z) + (\text{precio sombra de la restricción } i)\ \Delta b_i \quad (1)$$

En el caso de un problema de minimización, el nuevo valor óptimo de z se podría determinar a partir de

$$(\text{Nuevo valor óptimo de } z) = (\text{antiguo valor óptimo de } z) - (\text{precio sombra de la restricción } i)\Delta b_i \quad (2)$$

Intervalo del coeficiente de la función objetivo

La parte *OBJ COEFFICIENT RANGE* de los resultados que proporciona LINDO señala el intervalo de valores para un coeficiente de la función objetivo para el cual la base actual es óptima. Dentro de este intervalo, los valores de las variables de decisión se conservan sin cambio, pero el valor óptimo de z podría cambiar a no.

Costo reducido

Por lo que se refiere a una variable no básica, el costo reducido para la variable es lo que debe mejorar el coeficiente de la función objetivo de la variable no básica antes de que ésta se convierta en una variable básica en alguna solución óptima del PL.

Intervalo del segundo miembro

Si el segundo miembro de una restricción permanece dentro del valor *RIGHTHAND SIDE RANGES* dado en los resultados que proporciona LINDO, entonces la base actual es óptima, y se podría usar el precio dual para determinar qué tanto se modifica el valor z óptimo cuando se altera el segundo miembro. Incluso si el segundo miembro de una restricción se mantiene dentro del valor *RIGHTHAND SIDE RANGES* de los resultados de LINDO, entonces probablemente cambiarán los valores de las variables de decisión.

Signos de los precios sombra

Una restricción $\geq$ tendrá un precio sombra no positivo; una restricción $\leq$ tendrá un precio sombra no negativo, y una restricción de igualdad puede tener un precio sombra positivo, negativo o cero.

Valor óptimo de *z* como función del segundo miembro de una restricción

En todos los casos, el valor óptimo de z será una función lineal por segmentos del lado derecho de una restricción. La forma exacta de la función es como la que se muestra en la tabla 9.

Valor óptimo de *z* como función del coeficiente de la función objetivo

En un problema de maximización, el valor óptimo de z será una función lineal por segmentos, no decreciente, del coeficiente de una función objetivo. La pendiente será una función no decreciente del coeficiente de la función objetivo.

TABLA 9

Tipo de PL	Tipo de restricción	Pendientes de cada segmento de recta del conjunto discreto es
Maximización	≤	No negativa y no creciente
Maximización	≥	No positiva y no creciente
Maximización	=	Sin restricción de signo y no creciente
Minimización	≤	No positiva y no decreciente
Minimización	≥	No negativa y no decreciente
Minimización	=	Sin restricción de signo y no decreciente

El valor óptimo de z será una función lineal por segmentos, no decreciente, del coeficiente de una función objetivo en un problema de minimización. La pendiente será una función no creciente del coeficiente de la función objetivo.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 HAL fabrica dos tipos de computadoras: PC y VAX. Las computadoras se fabrican en dos lugares: Nueva York y Los Ángeles. Nueva York puede producir hasta 800 computadoras y Los Ángeles hasta 1 000. HAL puede vender hasta 900 PC y 900 VAX. La utilidad asociada con cada lugar de producción y venta de computadoras es como se indica: Nueva York, PC, 600 dólares; VAX, 800 dólares; Los Ángeles, PC, 1 000 dólares; VAX, 1 300 dólares. La mano de obra calificada requerida para elaborar cada computadora en cada sitio, es como se señala a continuación: Nueva York, PC, 2 horas; VAX, 2 horas; Los Ángeles, PC, 3 horas; VAX, 4 horas. Se dispone de un total de 4 000 horas de mano de obra. La mano de obra se compra a un costo de 20 dólares la hora. Sea

XNP = PC producidas en Nueva York

XLP = PC producidas en Los Ángeles

XNV = VAX producidas en Nueva York

XLV = VAX producidas en Los Ángeles

Utilice los resultados de LINDO de la figura 17 para contestar las preguntas siguientes:

a Si estuvieran disponibles 3 000 horas de mano de obra requerida, ¿cuál sería la utilidad de HAL?

b Suponga que un contratista externo ofrece incrementar la capacidad de Nueva York a 850 computadoras a un costo de 5 000 dólares. ¿Debe HAL contratar a esta persona?

c ¿En cuánto tendría que incrementarse la utilidad para una VAX producida en Los Ángeles antes de que HAL quiera fabricar VAX en Los Ángeles?

d ¿Cuál es lo más que HAL debería pagar por una hora extra de mano de obra?

2 La Compañía Gem de Vivian elabora dos tipos de joyas: el tipo 1 y el tipo 2. Las joyas del tipo 1 constan de 2 rubíes y 4 diamantes. Una joya tipo 1 se vende en 10 dólares y cuesta 5 dólares producirla. Las joyas del tipo 2 tienen 1 rubí y 1 diamante. Una joya tipo 2 se vende en 6 dólares y cuesta 4 dólares producirla. Se dispone de un total de 30 rubíes y 50 diamantes. Es posible vender todas las joyas que se elaboran, pero las consideraciones mercadotécnicas señalan que se produzcan por lo menos 11 joyas del tipo 1. Sea x_1 = cantidad de joyas tipo 1 elaboradas y x_2 = cantidad de joyas del tipo 2 fabricadas. Suponga que Vivian quiere maximizar la utilidad. Utilice la información que proporciona LINDO de la figura 18 para contestar las preguntas siguientes:

a ¿Cuál sería la utilidad de Vivian si hubiera disponibles 46 diamantes?

b Si las joyas del tipo 2 se vendieran por sólo 5.50 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema?

c ¿Cuál sería la utilidad de Vivian si se tuvieran que fabricar por lo menos 12 joyas del tipo 1?

3 Wivco elabora el producto 1 y el producto 2 procesando materia prima. Se podrían comprar hasta 90 libras de materia prima a un costo de 10 dólares por libra. Es posible usar una libra de materia prima para fabricar una libra del producto 1, o bien, 0.33 libras del producto 2. Si se utiliza una libra de materia prima para fabricar una libra del producto 1, se requieren 2 horas de mano de obra, o bien, 3 horas para producir 0.33 libras del producto 2. Se dispone de 200 horas de mano de obra, y se pueden vender cuando mucho 40 libras del producto 2. El producto 1 se vende en 13 dólares la libra y, el producto 2, en 40 dólares la libra. Sea

RM = libras de materia prima procesada

P1 = libras de materia prima usada para elaborar el producto 1

P2 = libras de materia prima usada para elaborar el producto 2

Con el objeto de maximizar la utilidad, Wivco debe resolver el siguiente PL:

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 13P1 + 40(0.33)P2 - 10RM \\
\text{s.a} \quad & RM \geq P1 + P2 \\
& 2P1 + 3P2 \leq 200 \\
& RM \leq 90 \\
& 0.33P2 \leq 40 \\
& P1, P2, RM \geq 0
\end{aligned}
$$

Utilice la información de LINDO de la figura 19 para contestar las preguntas siguientes:

a Si sólo se pudieran comprar 87 libras de materia prima ¿cuál sería la utilidad de Wivco?

FIGURA 17
Información de LINDO para HAL

```
MAX        600  XNP + 1000 XLP + 800 XNV
                           + 1300 XLV - 20 L
SUBJECT TO
        2)     2 XNP + 3 XLP + 2 XNV
                          + 4 XLV - L <=     0
        3)     XNP  +  XNV   <=   800
        4)     XLP  +  XLV   <=  1000
        5)     XNP  +  XLP   <=   900
        6)     XNV  +  XLV   <=   900
        7)     L   <=    4000
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP                  3

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)  1360000.00

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
     XNP          .000000          200.000000
     XLP       800.000000             .000000
     XNV       800.000000             .000000
     XLV          .000000           33.333370
       L      4000.000000             .000000


     ROW   SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
      2)          .000000       333.333300
      3)          .000000       133.333300
      4)       200.000000          .000000
      5)       100.000000          .000000
      6)       100.000000          .000000
      7)          .000000       313.333300

NO. ITERATIONS=          3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                     OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE      CURRENT      ALLOWABLE         ALLOWABLE
                COEF       INCREASE          DECREASE
     XNP   600.000000     200.000000         INFINITY
     XLP  1000.000000     200.000000        25.000030
     XNV   800.000000       INFINITY       133.333300
     XLV  1300.000000      33.333370         INFINITY
       L   -20.000000       INFINITY       313.333300

                     RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW   CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
             RHS          INCREASE         DECREASE
       2      .000000    300.000000      2400.000000
       3   800.000000    100.000000       150.000000
       4  1000.000000      INFINITY       200.000000
       5   900.000000      INFINITY       100.000000
       6   900.000000      INFINITY       100.000000
       7  4000.000000    300.000000      2400.000000
```

b Si el producto 2 se vende a 39.50 dólares la libra, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema de Wivco?

c ¿Cuánto es lo más que Wivco debería pagar por otra libra de materia prima?

d ¿Cuánto es lo más que Wivco debería pagar por otra hora de mano de obra?

FIGURA 18
Resultados de LINDO para Gem de Vivian

```
MAX        5  X1 + 2  X2
SUBJECT TO
        2)     2  X1  +  X2 <=  30
        3)     4  X1  +  X2 <=  50
        4)     X1  >=     11
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP                 2

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)  67.0000000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1      11.000000            .000000
      X2       6.000000            .000000


     ROW    SLACK OR SURPLUS   DUAL PRICES
      2)        2.000000        0.000000
      3)         .000000        2.000000
      4)         .000000       -3.000000

NO. ITERATIONS=          2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                  OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE    CURRENT      ALLOWABLE        ALLOWABLE
              COEF       INCREASE         DECREASE
      X1    5.000000      3.000000         INFINITY
      X2    2.000000      INFINITY          .750000

                  RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW    CURRENT      ALLOWABLE        ALLOWABLE
              RHS        INCREASE         DECREASE
       2   30.000000      INFINITY         2.000000
       3   50.000000      2.000000         6.000000
       4   11.000000      1.500000         1.000000
```

4 La joyería Zales utiliza rubíes y zafiros para fabricar dos tipos de anillos. Un anillo tipo 1 requiere 2 rubíes, 3 zafiros y una hora de mano de obra de un joyero. Un anillo tipo 2 necesita 3 rubíes, 2 zafiros y 2 horas de mano de obra de un joyero. Cada anillo tipo 1 se vende en 400 dólares y un anillo tipo 2, en 500 dólares. Todos los anillos que fabrica Zales se pueden vender. En la actualidad, Zales tiene 100 rubíes, 120 zafiros y 70 horas de mano de obra de joyería. Es posible comprar rubíes adicionales a un precio de 100 dólares por rubí. La demanda del mercado requiere que la compañía produzca por lo menos 20 anillos tipo 1 y por lo menos 25 anillos tipo 2. Para maximizar la utilidad, Zales debe resolver el PL siguiente:

X1 = Anillos tipo 1 producidos
X2 = Anillos tipo 2 producidos
R = Cantidad de rubíes comprados

$$\max z = 400X1 + 500X2 - 100R$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.}\quad & 2X1 + 3X2 - R \le 100 \\ & 3X1 + 2X2 \le 120 \\ & X1 + 2X2 \le 70 \\ & X1 \ge 20 \\ & X2 \ge 25 \\ & X1, X2 \ge 0 \end{aligned}$$

Utilice la información de LINDO de la figura 20 para contestar las preguntas siguientes:

a Suponga que en lugar de costar 100 dólares cada rubí cuesta 190 dólares. ¿Aún así compraría Zales rubíes? ¿Cuál sería la nueva solución óptima del problema?

b Suponga que Zales sólo tuviera que fabricar por lo menos 23 anillos del tipo 2. ¿Cuál sería entonces su utilidad?

c ¿Cuánto es lo más que Zales estaría dispuesto a pagar por otra hora de mano de obra de joyería?

FIGURA 19
Resultados de LINDO para Wivco

```
MAX       13 P1 + 13.2 P2 - 10 RM
SUBJECT TO
       2) - P1 - P2 + RM >=  0
       3)   2 P1 + 3 P2  <=  200
       4)    RM    <=  90
       5)   0.33  P2  <=  40
END

         LP OPTIMUM FOUND AT STEP        3

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)                274.000000

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
      P1        70.000000            0.000000
      P2        20.000000            0.000000
      RM        90.000000            0.000000

     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         0.000000         -12.600000
      3)         0.000000           0.200000
      4)         0.000000           2.600000
      5)        33.400002           0.000000

NO. ITERATIONS=          3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                  OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE    CURRENT        ALLOWABLE       ALLOWABLE
             COEF          INCREASE        DECREASE
      P1  13.000000         0.200000        0.866667
      P2  13.200000         1.300000        0.200000
      RM -10.000000         INFINITY        2.600000

                   RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW    CURRENT        ALLOWABLE       ALLOWABLE
              RHS          INCREASE        DECREASE
       2   0.000000        23.333334       10.000000
       3 200.000000        70.000000       20.000000
       4  90.000000        10.000000       23.333334
       5  40.000000         INFINITY       33.400002
```

FIGURA 20
Información de LINDO para Zales

```
MAX       400  X1 +  500  X2  -  100  R
SUBJECT TO
       2)     2  X1  +  3  X2  -  R <=   100
       3)     3  X1  +  2  X2 <=  120
       4)        X1  +  2  X2 <= 70
       5)        X1  >=   20
       6)        X2  >=   25
END

         LP OPTIMUM FOUND AT STEP        2

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)   19000.0000

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
      X1        20.000000            0.000000
      X2        25.000000            0.000000
       R        15.000000            0.000000

     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         0.000000         100.000000
      3)        10.000000           0.000000
      4)         0.000000         200.000000
      5)         0.000000           0.000000
      6)         0.000000        -200.000000

NO. ITERATIONS=          2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                  OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE    CURRENT        ALLOWABLE       ALLOWABLE
             COEF          INCREASE        DECREASE
      X1   400.000000       INFINITY      100.000000
      X2   500.000000     200.000000        INFINITY
       R  -100.000000     100.000000      100.000000

                   RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW    CURRENT        ALLOWABLE       ALLOWABLE
              RHS          INCREASE        DECREASE
       2  100.000000      15.000000        INFINITY
       3  120.000000       INFINITY       10.000000
       4   70.000000       3.333333        0.000000
       5   20.000000       0.000000        INFINITY
       6   25.000000       0.000000        2.500000
```

d ¿Cuánto es lo más que Zales estaría dispuesto a pagar por otro zafiro?

5 Beerco produce cerveza tipo *ale* y cerveza a partir de maíz, lúpulo y malta. Dispone en la actualidad de 40 libras de maíz, 30 libras de lúpulo y 40 libras de malta. Un barril de cerveza tipo *ale* se vende en 40 dólares y requiere 1 libra de maíz, 1 libra de lúpulo y 2 libras de malta. Un barril de cerveza se vende en 50 dólares y requiere 2 libras de maíz, 1 libra de lúpulo y 1 libra de malta. Beerco puede vender toda la cerveza tipo *ale* y la cerveza que produce. Suponga que la meta de Beerco es maximizar el ingreso total de las ventas y resuelva el PL siguiente:

$$\max z = 40\text{ALE} + 50\text{BEER}$$

$$\begin{array}{llr}
\text{s.a} & \text{ALE} + 2\text{BEER} \leq 40 & \text{(Restricción del maíz)} \\
& \text{ALE} + \text{BEER} \leq 30 & \text{(Restricción del lúpulo)} \\
& 2\text{ALE} + \text{BEER} \leq 40 & \text{(Restricción de la malta)} \\
& \text{ALE, BEER} \geq 0 &
\end{array}$$

ALE = barriles de cerveza tipo *ale* producidos y BEER = barriles de cerveza producidos.

a Encuentre de modo gráfico el intervalo de los valores para el precio de la cerveza tipo *ale* en el que la base actual siga siendo óptima.

b Determine de modo gráfico el intervalo de los valores para el precio de la cerveza en el que la base actual siga siendo óptima.

c Determine de modo gráfico el intervalo de los valores para la cantidad de maíz disponible para la cual la base actual sigue siendo óptima. ¿Cuál es el precio sombra de la restricción del maíz?

d Establezca de modo gráfico el intervalo de los valores para la cantidad de lúpulo disponible para la cual la base actual sigue siendo óptima. ¿Cuál es el precio sombra de la restricción del lúpulo?

e Determine gráficamente el intervalo de los valores para la cantidad de malta disponible para la cual la base actual sigue siendo óptima. ¿Cuál es el precio sombra de la restricción de la malta?

f Encuentre el precio sombra de cada restricción si las restricciones se expresaran en onzas en lugar de libras.

g Dibuje una gráfica del valor óptimo de z como una función del precio de la cerveza tipo *ale*.

h Dibuje una gráfica del valor óptimo de z en función de la cantidad de maíz disponible.

i Dibuje una gráfica del valor óptimo de z como una función de la cantidad de lúpulo disponible.

j Dibuje una gráfica del valor óptimo de z como una función de la cantidad de malta disponible.

6 Gepbab Production Company utiliza mano de obra y materia prima para elaborar tres productos. Los recursos necesarios y el precio de venta para los tres productos se proporcionan en la tabla 10. Se dispone en la actualidad de 60 unidades de materia prima. Se pueden comprar hasta 90 horas de mano de obra a 1 dólar/hora. Para maximizar la utilidad de Gepbab resuelva el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 6X1 + 8X2 + 13X3 - L \\
\text{s.a} \quad & 3X1 + 4X2 + 6X3 - L \leq 0 \\
& 2X1 + 2X2 + 5X3 \leq 60 \\
& L \leq 90 \\
& X1, X2, X3, L \geq 0
\end{aligned}
$$

En este problema, X_i = unidades del producto i elaborado y L = cantidad de horas de mano de obra compradas. Utilice la información de LINDO de la figura 21 para contestar las preguntas siguientes:

a ¿Cuál es lo más que la compañía debe pagar por otra unidad de materia prima?

b ¿Cuál es lo más que la compañía debe pagar por otra hora de mano de obra?

c ¿Cuánto del producto 1 se tendría que vender para hacer que la compañía deseara producirlo?

d Si se pudieran comprar 100 horas de mano de obra, ¿cuál sería la utilidad de la compañía?

e Determine la nueva solución óptima si el producto 3 se vendiera a 15 dólares.

7 Giapetto Inc., vende soldados de madera y trenes de madera. Los recursos utilizados para fabricar un soldado y un tren se proporcionan en la tabla 11. Se dispone de un total de 145 000 pies tablón de madera y 90 000 h de mano de obra. Es posible vender no menos de 50 000 soldados y 50 000 trenes; los trenes se venden a 55 dólares y los soldados a 32. Aparte de fabricar trenes y soldados por sí mismo, Giapetto puede comprar (con un proveedor externo) soldados adicionales a 27 dólares cada uno y trenes a 50 dólares cada uno. Sea

SM = miles de soldados fabricados
SB = miles de soldados comprados a 27 dólares
TM = miles de trenes fabricados
TB = miles de trenes comprados a 50 dólares

Giapetto puede maximizar la utilidad luego de resolver el PL de la información que proporciona LINDO en la figura 22. Utilice estos datos para contestar las preguntas siguientes. (*Sugerencia:* Medite sobre las unidades de las restricciones y la función objetivo.)

a Si Giapetto pudiera comprar trenes a 48 dólares por cada uno, entonces, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el PL?

TABLA 10

	Producto		
Recurso	**1**	**2**	**3**
Mano de obra (horas)	3	4	06
Materia prima (unidades)	2	2	05
Precio de venta (dólares)	6	8	13

FIGURA 21
Información de LINDO para Gepbab

```
MAX        6 X1 + 8 X2 + 13 X3 - L
SUBJECT TO
       2)    3 X1 + 4 X2 + 6 X3 - L  <=   0
       3)    2 X1 + 2 X2 + 5 X3 <=   60
       4)    L    <=   90
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP              3

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)   97.5000000

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
      X1           .000000          .250000
      X2         11.250000          .000000
      X3          7.500000          .000000
       L         90.000000          .000000

     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           .000000         1.750000
      3)           .000000          .500000
      4)           .000000          .750000

NO. ITERATIONS=          3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                         OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE      CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
               COEF          INCREASE          DECREASE
      X1    6.000000          .250000          INFINITY
      X2    8.000000          .666667           .666667
      X3   13.000000         3.000000          1.000000
       L   -1.000000         INFINITY           .750000

                         RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW      CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                RHS          INCREASE          DECREASE
       2       .000000       30.000000         18.000000
       3     60.000000       15.000000         15.000000
       4     90.000000       30.000000         18.000000
```

TABLA 11

	Soldado	Tren
Madera (pies tablón)	3	5
Mano de obra (horas)	2	4

b ¿Cuál es lo más que Giapetto estaría dispuesto a pagar por otros 100 pies tablón de madera? ¿Y por otras 100 horas de mano de obra?

c Si se dispone de 60 000 horas, de mano de obra ¿cuál sería la utilidad de Giapetto?

d Si sólo se pudieran vender 40 000 trenes, ¿cuál sería la utilidad de Giapetto?

8 Wivco elabora dos productos: 1 y 2. Los datos pertinentes se muestran en la tabla 12. Se pueden comprar cada semana hasta 400 unidades de materia prima a un costo de 1.50 dólares por unidad. La compañía emplea cuatro trabajadores, quienes laboran 40 horas a la semana. (Se considera que sus salarios son un costo fijo.) Los empleados reciben 6 dólares por hora al laborar tiempo extra. Se dispone cada semana de 320 horas de tiempo de máquina.

Por falta de publicidad, la demanda semanal del producto 1 es 50 unidades y 60 unidades del producto 2. Se puede usar

FIGURA 22
Datos de LINDO para Giapetto

```
MAX       32 SM + 55 TM + 5 SB + 5  TB
SUBJECT TO
      2)    3 SM + 5 TM     <=    145
      3)    2 SM + 4 TM     <=    90
      4)   SM + SB   <=    50
      5)   TM + TB  <=    50
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP               4

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)  1715.00000

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
      SM       45.000000            .000000
      TM         .000000           4.000000
      SB        5.000000            .000000
      TB       50.000000            .000000

     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)       10.000000            .000000
      3)         .000000          13.500000
      4)         .000000           5.000000
      5)         .000000           5.000000

NO. ITERATIONS=         4

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                      OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE    CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
              COEF          INCREASE         DECREASE
      SM   32.000000        INFINITY         2.000000
      TM   55.000000        4.000000         INFINITY
      SB    5.000000        2.000000         5.000000
      TB    5.000000        INFINITY         4.000000

                      RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW    CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
              RHS           INCREASE         DECREASE
       2   145.000000       INFINITY        10.000000
       3    90.000000       6.666667        90.000000
       4    50.000000       INFINITY         5.000000
       5    50.000000       INFINITY        50.000000
```

TABLA 12

	Producto 1	Producto 2
Precio de venta (dólares)	15	8
Mano de obra requerida (horas)	0.75	0.50
Tiempo de máquina requerido (horas)	1.5	0.80
Materia prima requerida (unidades)	2	1

la publicidad para estimular la demanda de los productos. Cada dólar gastado para anunciar al producto 1 incrementa su demanda 10 unidades, y cada dólar gastado para el producto 2 aumenta su demanda 15 unidades. Se puede gastar cuando mucho 100 dólares en publicidad. Definamos

P1 = cantidad de unidades del producto 1 elaborado cada semana

P2 = cantidad de unidades del producto 2 elaborado cada semana

OT = cantidad de horas de mano de obra en tiempo extra usadas cada semana

RM = cantidad de unidades de materia prima compradas cada semana

A1 = dólares gastados cada semana en la publicidad del producto 1

A2 = dólares gastados cada semana en la publicidad del producto 2

Wivco debe resolver luego el PL siguiente:

$$\max z = 15\text{P1} + 8\text{P2} - 6(\text{OT}) - 1.5\text{RM} - \text{A1} - \text{A2}$$

$$\begin{array}{llr}
\text{s.a} & \text{P1} - 10\text{A1} \le 50 & (1)\\
& \text{P2} - 15\text{A2} \le 60 & (2)\\
& 0.75\text{P1} + 0.5\text{P2} \le 160 + (\text{OT}) & (3)\\
& 2\text{P1} + \text{P2} \le \text{RM} & (4)\\
& \text{RM} \le 400 & (5)\\
& \text{A1} + \text{A2} \le 100 & (6)\\
& 1.5\text{P1} + 0.8\text{P2} \le 320 & (7)
\end{array}$$

Todas las variables son no negativas

Utilice LINDO para resolver este PL. Luego use los resultados que proporciona la computadora para responder las preguntas siguientes:

a Si el costo del tiempo extra fuera de sólo 4 dólares por hora, ¿Wivco lo debería usar?

b Si cada unidad del producto 1 se vendiera a 15.50 dólares, ¿seguiría siendo óptima la base actual? ¿Cuál sería la nueva solución óptima?

c ¿Cuál es lo más que Wivco debería estar dispuesta a pagar por otra unidad de materia prima?

d ¿Cuánto estaría dispuesta Wivco a pagar por otra hora de tiempo máquina?

e Si se le exigiera a cada trabajador laborar 45 horas a la semana (como parte de la semana de trabajo regular), ¿cuál sería la utilidad de la compañía?

f Explique por qué el precio sombra del renglón (1) es 0.10. (*Sugerencia*: Si el segundo miembro de (1) se incrementara de 50 a 51, entonces por no haber publicidad para el producto 1, las unidades del producto 1 que se podrían vender cada semana son 51.)

9 En este problema se analiza cómo interpretar los precios sombra en los problemas de mezclas (véase sección 3.8). Para ilustrar las ideas se estudia el problema 2 de la sección 3.8. Si definimos

x_{6J} = libras de naranjas grado 6 en jugo

x_{9J} = libras de naranjas grado 9 en jugo

x_{6B} = libras de naranjas grado 6 en bolsas

x_{9B} = libras de naranjas grado 9 en bolsas

entonces la formulación apropiada es

$$\max z = 0.45(x_{6J} + x_{9J}) + 0.30(x_{6B} + x_{9B})$$

$$\begin{array}{llll}
\text{s.a} & x_{6J} + x_{6B} \le 120{,}000 & \text{(Restricción del grado 6)} & \\
& x_{9J} + x_{9B} \le 100{,}000 & \text{(Restricción del grado 9)} & \\
& \dfrac{6x_{6J} + 9x_{9J}}{x_{6J} + x_{9J}} \ge 8 & \text{(Restricción del jugo de naranja)} & (1)\\
& \dfrac{6x_{6B} + 9x_{9B}}{x_{6B} + x_{9B}} \ge 7 & \text{(Restricción de las bolsas)} & (2)\\
& x_{6J}, x_{9J}, x_{6B}, x_{9B} \ge 0 & &
\end{array}$$

Las restricciones (1) y (2) son ejemplos de restricciones de mezclas, porque en ellas se especifica la proporción de naranjas grado 6 y grado 9 que se debe mezclar para elaborar el jugo de naranja y llenar las bolsas de naranjas. Sería útil determinar qué efecto ocasionaría en la utilidad un leve cambio en los estándares para el jugo de naranja y las bolsas de naranjas. Al final de este problema, se explica cómo usar los precios sombra de las restricciones (1) y (2) para contestar las preguntas siguientes:

a Suponga que el grado promedio para el jugo de naranja se incrementa a 8.1. Si se supone que la base actual sigue siendo óptima, ¿qué tanto se modificaría la utilidad?

b Suponga que el requisito del grado promedio para las bolsas de naranjas disminuye a 6.9. ¿Qué tanto se modificaría la utilidad si se supone que la base actual continúa siendo óptima?

El precio sombra para (1) y (2) es -0.15. La solución óptima para el problema de O.J. es $x_{6J} = 26\,666.67$, $x_{9J} = 53\,333.33$, $x_{6B} = 93\,333.33$, $x_{9B} = 46\,666.67$. Para interpretar los precios sombra de las restricciones de mezclas (1) y (2) *suponemos que un cambio leve en el estándar de la calidad para un producto no cambiará en forma importante la cantidad del producto que se elabora.*

Observe que (1) se podría escribir como

$$6x_{6J} + 9x_{9J} \geq 8(x_{6J} + x_{9J}) \quad \text{o bien} \quad -2x_{6J} + x_{9J} \geq 0$$

Si el estándar de calidad para el jugo de naranja se modifica a $8 + \Delta$, entonces

$$6x_{6J} + 9x_{9J} \geq (8 + \Delta)(x_{6J} + x_{9J})$$

o bien,

$$-2x_{6J} + x_{9J} \geq \Delta(x_{6J} + x_{9J})$$

Como estamos suponiendo que al modificar la calidad del jugo de naranja de 8 a $8 + \Delta$ no cambia la cantidad de jugo de naranja producido, x_{6J} y x_{9J} siguen siendo iguales a 80 000, y (1) se convertirá en

$$-2x_{6J} + x_{9J} \geq 80\,000\Delta$$

Conteste los incisos (a) y (b) usando la definición de precio sombra.

10 Aplique LINDO para resolver el problema de Sailco de la sección 3.10, luego utilice los resultados para dar respuesta a las preguntas siguientes:

a Si la demanda del mes 1 disminuye a 35 botes de vela, ¿cuál será el costo total de cumplir con la demanda durante los cuatro meses siguientes?

b Si el costo de producir un bote de vela en el horario regular durante el mes 1 fuera de 420 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema de Sailco?

c Suponga que un cliente nuevo está dispuesto a pagar 425 dólares por un bote de vela. Si su demanda se tiene que cumplir en el mes 1, ¿debe Sailco surtir el pedido? ¿Qué pasa si su demanda se tiene que cumplir en el mes 4?

11 Autoco posee tres plantas ensambladoras ubicadas en distintos lugares del país. La primera planta (construida en 1937 y ubicada en Norwood, Ohio) requiere 2 horas de mano de obra y 1 hora de tiempo de máquina para ensamblar un automóvil. La segunda planta (construida en 1958 y ubicada en Bakersfield, California) requiere 1.5 horas de mano de obra y 1.5 horas de tiempo de máquina para ensamblar un automóvil. La tercera planta (construida en 1981 y ubicada en Kingsport, Tennessee) requiere 1.1 horas de mano de obra y 2.5 horas de tiempo de máquina para ensamblar un automóvil.

La compañía paga a 30 dólares la hora de mano de obra y 10 dólares la hora de tiempo de máquina en todas sus plantas. La capacidad de la primera planta es de 1 000 horas de tiempo de máquina por día; la de la segunda es de 900 horas, y la de la tercera es de 2 000 horas. El objetivo de producción del fabricante es 1 800 automóviles por día.

El departamento de producción establece el programa de cada planta mediante la resolución de un problema de programación lineal diseñado para identificar el patrón que minimiza los costos en el ensamble en las tres plantas.

a Utilice LINDO para determinar el método para minimizar los costos para cumplir con el objetivo de producción diaria de Autoco.

b La UWA local en Norwood, Ohio ha propuesto concesiones salariales en dicha planta para aumentar el empleo. ¿Cuál es la disminución mínima en la tasa de salarios de esa planta que podría incrementar allí el empleo?

c ¿Cuál es el costo por ensamblar un automóvil extra dado el nivel de producción actual de 1800 automóviles? ¿Su respuesta podría ser distinta si el objetivo de la producción fuera de sólo 1 000 automóviles? ¿Por qué si o por qué no?

d Un grupo de especialistas en producción manifiesta que el fabricante de automóviles es capaz de lograr eficiencias en su planta de Bakersfield si reconfigura la línea de ensamble. La reconfiguración tiene el efecto de incrementar, en esta planta, la productividad de la mano de obra desde 1.5 horas a 1 hora por automóvil. ¿Cuánto disminuirán los costos de la compañía como resultado de este cambio, si se supone que continúa produciendo 1 800 automóviles?

e Si se tienen que fabricar 2 000 automóviles, ¿en cuánto aumentarán los costos?

f Si la mano de obra cuesta 32 dólares en Bakersfield, California, ¿cuál será la nueva solución del problema?

12 Machinco elabora cuatro productos, los cuales requieren tiempo en dos máquinas y dos tipos de mano de obra (calificada y no calificada). La cantidad de tiempo de máquina y de mano de obra (en horas necesarias para cada producto y los precios de venta se proporcionan en la tabla 13. Se dispone, todos los meses, de 700 horas en la máquina 1 y 500 horas en la máquina 2. Machinco puede comprar cada mes hasta 600 horas de mano de obra calificada a 8 dólares la hora, y hasta 650 horas de mano de obra no calificada a 6 dólares la hora. Plantee un PL con el que Machinco pueda maximizar su utilidad mensual. Resuelva este PL y utilice los resultados para contestar los puntos siguientes:

a ¿Cuánto tendrá que aumentar el precio del producto 3 antes de que sea óptimo fabricarlo?

b Si el producto 1 se vende en 290 dólares, entonces ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema?

c ¿Cuál es la mayor cantidad que Machinco estaría dispuesta a pagar por una hora extra de tiempo en cada máquina?

d ¿Cuál es lo más que Machinco estaría dispuesta a pagar por una hora extra de cada tipo de mano de obra?

e Si se pueden comprar cada mes hasta 700 horas de mano de obra calificada, entonces, ¿cuál sería la utilidad mensual de Machinco?

13 Una compañía fabrica herramientas en dos plantas y las vende a tres clientes. El costo por producir mil herramientas en una planta y embarcarlas hasta un cliente se da en la tabla 14. Los clientes 1 y 3 pagan 200 dólares por mil herramientas; el cliente 2 paga 150 dólares por mil herramientas. Se requieren 200 horas de mano de obra para producir 1 000 herramientas en la planta 1, en tanto que 300

TABLA 13

Producto	Máquina 1	Máquina 2	Mano de obra calificada	Mano de obra no calificada	Ventas (dólares)
1	11	4	8	7	300
2	7	6	5	8	260
3	6	5	4	7	220
4	5	4	6	4	180

horas son las necesarias en la planta 2. Se dispone de un total de 5 500 horas de mano de obra para las dos plantas. Es posible comprar horas de mano de obra adicionales, a 20 dólares la hora. En la planta 1 se pueden producir hasta 10 000 herramientas, y en la planta 2, hasta 12 000. Se supone que la demanda de cada cliente es ilimitada. Si X_{ij} = herramientas (en miles) fabricadas en la planta i y embarcadas al cliente j, entonces la compañía debe resolver el PL según la información de LINDO de la figura 23. Utilice la misma información para responder los puntos siguientes:

a Si cuesta 70 dólares producir 1 000 herramientas en la planta 1 y embarcarlas al cliente 1, ¿cuál sería la nueva solución del problema?

b Si el precio de una hora adicional de mano de obra se redujera a 4 dólares, ¿la compañía compraría cualquier mano de obra adicional?

c Un asesor ofrece incrementar la capacidad de producción de la planta 1 en 5 000 herramientas a un costo de 400 dólares. ¿La compañía debe aceptar la oferta?

d Si a la compañía se le dieran 5 horas extra de mano de obra, ¿cómo sería su utilidad?

14 Resuelva el problema de repaso 24 del capítulo 3 con LINDO y solucione las cuestiones siguientes:

a ¿Para qué tipo de GRD el hospital debe buscar incrementar la demanda?

b ¿Qué recursos tiene un abastecimiento excesivo? ¿Qué recursos debe ampliar el hospital?

c ¿Cuál es la mayor cantidad que el hospital estaría dispuesto a pagar a las enfermeras adicionales?

15 La granja de 200 acres Old Macdonald vende trigo, alfalfa y ganado de engorda. El trigo se vende en 30 dólares el bushel; la alfalfa se vende a 200 dólares el bushel y las cabezas de ganado a 300 dólares la tonelada. Se pueden vender hasta 1 000 bushels de trigo y hasta 1 000 bushels de alfalfa, pero la demanda de carne es ilimitada. El rendimiento y la mano de obra necesaria se dan en la tabla 15 para cuando se destina un acre de tierra al cultivo de trigo, alfalfa o ganado. Se pueden comprar tantas como 2 000 h de mano de obra a 15 dólares la hora. Cada acre destinado al ganado requiere 5 bushels de alfalfa. La información que proporciona LINDO en la figura 24 muestra cómo maximizar la utilidad; utilícela para resolver las cuestiones siguientes. Las variables son las siguientes:

TABLA 14

	Cliente (dólares)		
Planta	1	2	3
1	60	30	160
2	130	70	170

FIGURA 23
Información de LINDO para el problema 13

```
MAX    140 X11 + 120 X12 + 40 X13
             + 70 X21 + 80 X22 + 30 X23 - 20 L
SUBJECT TO
       2) X11 + X12 + X13      <=       10
       3) X21 + X22 + X23      <=       12
       4) 200 X11 + 200 X12 + 200 X13 + 300 X21
               + 300 X22 + 300 X23 - L <= 5500
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP            2

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)   2333.3330

VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
     X11       10.000000            .000000
     X12         .000000          20.000000
     X13         .000000         100.000000
     X21         .000000          10.000000
     X22       11.666670            .000000
     X23         .000000          50.000000
       L         .000000          19.733330

     ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)         .000000          86.666660
      3)         .333333            .000000
      4)         .000000            .266667

NO. ITERATIONS=          2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                  OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE     CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
               COEF         INCREASE         DECREASE
     X11   140.000000        INFINITY        20.000000
     X12   120.000000       20.000000         INFINITY
     X13    40.000000      100.000000         INFINITY
     X21    70.000000       10.000000         INFINITY
     X22    80.000000      130.000000        10.000000
     X23    30.000000       50.000000         INFINITY
       L   -20.000000       19.733330         INFINITY

                  RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW     CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
               RHS          INCREASE         DECREASE
       2    10.000000       17.500000          .500000
       3    12.000000        INFINITY          .333333
       4  5500.000000      100.000000      3500.000000
```

TABLA 15

Cultivo	Rendimiento/acre	Mano de obra/acre (horas)
Trigo	50 bushels	30
Alfalfa	100 bushels	20
Ganado	10 toneladas	50

W = acres destinados al trigo
AS = bushels de alfalfa vendidos
A = acres destinados a la alfalfa
B = acres destinados al ganado
AB = bushels de alfalfa destinados al ganado
L = horas de mano de obra compradas

a ¿Cuánto se tiene que incrementar el precio del bushel de trigo antes de que se vuelva beneficioso cultivar trigo?

b ¿Cuánto es lo más que Old Macdonald debe pagar

FIGURA 24
Información de LINDO para Old Macdonald

```
MAX        1500 W + 200 AS + 3000 B - 15  L
SUBJECT TO
       2)   50  W     <=     1000
       3)   AS     <=     1000
       4)   AS + AB - 100  A  =     0
       5)   -  5  B +  AB =    0
       6)   W  +  B +  A <= 200
       7)   L  <=  2000
       8)   30 W + 50 B - L + 20  A  <=  0
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP            1

                 OBJECTIVE FUNCTION VALUE

                 1)  275882.300

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
       W          .000000         264.705800
      AS      1000.000000            .000000
       B        35.294120            .000000
       L      2000.000000            .000000
      AB       176.470600            .000000
       A        11.764710            .000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)     1000.000000            .000000
       3)         .000000         188.235300
       4)         .000000          11.764710
       5)         .000000         -11.764710
       6)      152.941200            .000000
       7)         .000000          43.823530
       8)         .000000          58.823530

NO. ITERATIONS=          1

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                        OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE    CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
             COEF          INCREASE         DECREASE
       W  1500.000000     264.705800        INFINITY
      AS   200.000000       INFINITY      188.235300
       B  3000.000000   48000.000000      449.999800
       L   -15.000000       INFINITY       43.823530
      AB      .000000    9599.999000       89.999980
       A      .000000       INFINITY     8999.998000

                        RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW    CURRENT       ALLOWABLE        ALLOWABLE
              RHS         INCREASE         DECREASE
       2  1000.000000      INFINITY      1000.000000
       3  1000.000000   8999.999000      1000.000000
       4      .000000   1200.000000      8999.999000
       5      .000000   8999.999000       180.000000
       6   200.000000      INFINITY       152.941200
       7  2000.000000   7428.571000      1800.000000
       8      .000000   7428.571000      1800.000000
```

por otra hora de mano de obra?

c ¿Cuál es lo más que Old Macdonald debe pagar por otro bushel de alfalfa?

d ¿Cuál sería la nueva solución óptima si la alfalfa se vende a 20 dólares por bushel?

16 Cornco elabora dos productos: PS y QT. El precio de venta de cada producto y la cantidad máxima que se puede vender de cada uno durante cada uno de los tres meses siguientes, se dan en la tabla 16.

Cada producto debe ser procesado en dos líneas de ensamble: 1 y 2. Las horas que requiere cada producto en cada línea de ensamble se dan en la tabla 17.

Las horas disponibles en cada línea de ensamble en cada mes se dan en la tabla 18.

Cada unidad de PS requiere 4 libras de materia prima; cada unidad de QT necesita 3 libras. Se pueden comprar no menos de 710 unidades de materia prima a 3 dólares la libra. Cuando empieza el mes 1 se dispone de 10 unidades de PS y de 5 unidades de QT. Cuesta 10 dólares conservar una unidad de cualquier producto en el inventario durante un mes. Resuelva este PL con LINDO y utilice los resultados para contestar las preguntas siguientes:

a Encuentre la nueva solución óptima si cuesta 11 dólares conservar una unidad de PS en el inventario al final del mes 1.

b Determine la nueva solución óptima de la compañía si se dispone de 210 horas en la línea 1 durante el mes 1.

c Encuentre el nuevo nivel de utilidad de la compañía si hay disponibles 109 horas en la línea 2 durante el mes 3.

d ¿Cuánto es lo más que Cornco debería estar dispuesto a pagar por una hora extra de tiempo en la línea 1 durante el mes 2?

e ¿Cuánto es lo más que Cornco debería estar dispuesto a pagar por una libra extra de materia prima?

f ¿Cuánto es lo más que Cornco debería estar dispuesto a pagar por una hora extra de tiempo en la línea 1 durante el mes 3?

g Establezca la nueva solución óptima si PS se vende a 50 dólares en el mes 2.

h Halle la nueva solución óptima si QT se vende a 50 dólares en el mes 3.

i Suponga que al gastar 20 dólares en publicidad incrementaría 5 unidades la demanda de QT en el mes 2. ¿Se debe efectuar la publicidad?

TABLA 16

	Mes 1		Mes 2		Mes 3	
Producto	Precio (dólares)	Demanda	Precio (dólares)	Demanda	Precio (dólares)	Demanda
PS	40	50	60	45	55	50
QT	35	43	40	50	44	40

TABLA 17

	Horas	
Producto	Línea 1	Línea 2
PS	3	2
QT	2	2

TABLA 18

	Mes		
Línea	1	2	3
1	1 200	160	190
2	2 140	150	110

6

Análisis de sensibilidad y dualidad

Dos de los temas más importantes en la programación lineal son análisis de sensibilidad y dualidad. Después de estudiar estos temas tan importantes, el estudiante podrá apreciar lo magnífico y lo lógico que es la programación lineal, y estará listo para estudiar temas avanzados de la programación lineal, como los que se tratan en el capítulo 10.

En la sección 6.1 se ilustró el concepto del análisis de sensibilidad mediante un ejemplo gráfico. En la sección 6.2 se aplica el conocimiento de matrices para deducir algunas fórmulas importantes, que se usan en las secciones 6.3 y 6.4 para desarrollar la mecánica del análisis de sensibilidad. El concepto importante de la dualidad de presenta en el resto del capítulo. La dualidad ayuda a reflexionar sobre la naturaleza de la programación lineal, brinda el concepto útil de los precios sombra y ayuda a entender el análisis de sensibilidad. Es una base necesaria para los estudiantes que planean tomar cursos avanzados de programación lineal y no lineal.

6.1 Introducción gráfica al análisis de sensibilidad

El **análisis de sensibilidad** tiene que ver con el efecto en la solución óptima del PL debido a los cambios en los parámetros del mismo PL.

Reconsidere el problema de Giapetto de la sección 3.1:

$$
\begin{array}{lrl}
\max z = 3x_1 + 2x_2 & & \\
\text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 \le 100 & & \text{(Restricción del acabado)} \\
x_1 + x_2 \le 80 & & \text{(Restricción de la carpintería)} \\
x_1 \qquad \le 40 & & \text{(Restricción de la demanda)} \\
x_1, x_2 \ge 0 & &
\end{array}
$$

donde

$$x_1 = \text{cantidad de soldados fabricados a la semana}$$
$$x_2 = \text{cantidad de trenes fabricados a la semana}$$

La solución óptima de este problema es $z = 180$, $x_1 = 20$, $x_2 = 60$ (punto B en la figura 1), y las variables básicas son x_1, x_2 y s_3 (la variable de holgura para la restricción de la demanda). ¿Qué tanto se modificaría la solución óptima si hay cambios en los coeficientes de la función objetivo del problema o en los lados derechos?

Análisis gráfico del efecto de un cambio en el coeficiente de una función objetivo

Si la contribución a la utilidad por parte de un soldado se incrementara de manera suficiente, entonces sería óptimo para Giapetto fabricar más soldados (s_3 se volvería no básica). De igual manera, si la contribución a la utilidad por parte de un soldado disminuyera de manera suficiente, lo óptimo para Giapetto sería producir sólo trenes (x_1 sería ahora

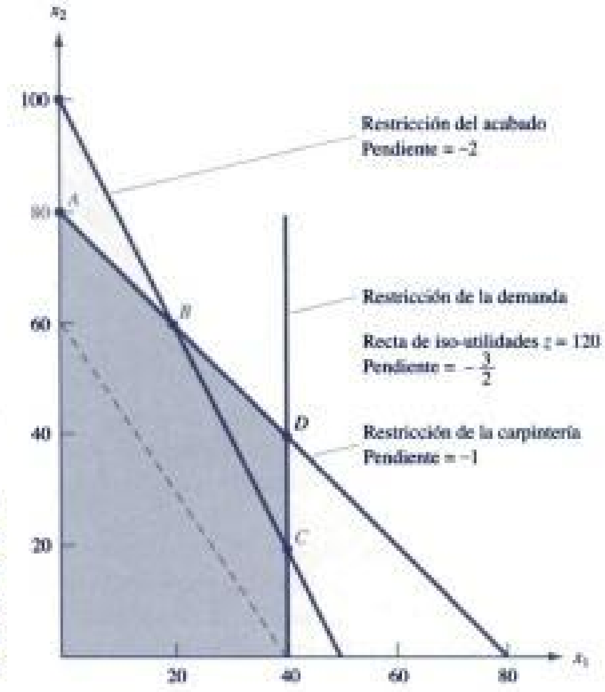


FIGURA 1
Análisis del intervalo de valores para los cuales c_1 sigue siendo óptima para el problema de Giapetto

no básica). Enseguida se muestra cómo determinar los valores de la contribución a la utilidad por parte de los soldados para los cuales la base actual óptima sigue siendo óptima.

Sea c_1 la contribución a la utilidad por parte de cada soldado. ¿Para qué valores de c_1 la base actual continúa siendo óptima?

En la actualidad, $c_1 = 3$, y cada recta de iso-utilidades tiene la forma $3x_1 + 2x_2 =$ constante, o bien, $x_2 = -\frac{3x}{2} + \frac{\text{constante}}{2}$ y todas las rectas de iso-utilidades tienen una pendiente de $-\frac{3}{2}$. En la figura 1 se observa que si al cambiar c_1 las rectas de iso-utilidades son más planas que la restricción de carpintería, entonces la solución óptima pasará desde la solución óptima actual (punto B) a una nueva solución óptima (punto A). Si la utilidad por parte de cada soldado es c_1, entonces la pendiente de cada recta de iso-utilidades será $-\frac{c_1}{2}$. Puesto que la pendiente de la restricción de la carpintería es -1, las rectas de iso-utilidades serán más planas que dicha restricción si $-\frac{c_1}{2} > -1$, es decir, $c_1 < 2$, y la base actual ya no es óptima. La nueva solución óptima será (0, 80), el punto A de la figura 1.

Si las rectas de iso-utilidades tienen mayor pendiente que la restricción del acabado, entonces la solución óptima se desplazará del punto B al punto C. La pendiente de la restricción del acabado es -2. Si $-\frac{c_1}{2} < -2$, es decir, $c_1 > 4$, entonces la base actual ya no es óptima, y el punto C (40, 20) será óptimo. En resumen, se ha demostrado que (si todos los otros parámetros se mantienen sin cambio), la base actual sigue siendo óptima para $2 \leq c_1 \leq 4$ y Giapetto todavía debe fabricar 20 soldados y 60 trenes. Naturalmente, incluso si $2 \leq c_1 \leq 4$, la utilidad de Giapetto cambiará. Por ejemplo, si $c_1 = 4$, la utilidad de Giapetto será entonces $4(20) + 2(60) = 200$ dólares en lugar de 180 dólares.

Análisis gráfico del efecto de un cambio en un lado derecho de la solución óptima del PL

Un análisis gráfico también se puede utilizar para determinar si un cambio en el lado derecho de una restricción causa que la base actual ya no sea óptima. Sea b_1 las horas disponibles de acabado. En la actualidad, $b_1 = 100$. ¿Para qué valores de b_1 la base continúa siendo óptima? En la figura 2 se observa que un cambio en b_1 desplaza en forma paralela a su posición actual a la restricción de acabado. La solución óptima actual (punto B en la figura 2) es donde las restricciones de la carpintería y el acabado son activas. Si modificamos el valor de b_1, entonces, *siempre que el punto donde las restricciones* *de acabado y carpintería son activas siga siendo factible, la solución óptima se encontrará donde estas restricciones se cruzan.* En la figura 2 se observa que si $b_1 > 120$, entonces el punto donde las restricciones de acabado y carpintería son activas quedará en la parte de la restricción de la carpintería abajo del punto D. Note que se usan en el punto D, $2(40) + 40 = 120$ horas de acabado. En esta región, $x_1 > 40$, y no se cumple la restricción de la demanda para los soldados. Por lo tanto, para $b_1 > 120$, la base ya no será óptima. De igual manera, si $b_1 < 80$, las restricciones de la carpintería y el acabado serán activas en un punto no factible donde $x_1 < 0$, y la base actual ya no es óptima. Obsérvese que se utilizan en el punto A, $0 + 80 = 80$ horas de acabado. Por lo tanto (si todos los otros parámetros se mantienen sin cambio), la base actual sigue siendo óptima si $80 \leq b_1 \leq 120$.

Además, observe que aunque en el caso de $80 \leq b_1 \leq 120$, la base actual sigue siendo óptima, *sí cambian los valores de las variables de decisión y el valor de la función objetivo.* Por ejemplo, si $80 \leq b_1 \leq 100$, la solución óptima se desplazará desde el punto B hasta algún otro punto en el segmento de recta AB. En forma similar, si $100 \leq b_1 \leq 120$, entonces la solución óptima se desplazará desde el punto B a algún otro punto sobre el segmento de recta BD.

Siempre que la base actual se mantenga óptima, determinar cómo un cambio en el lado derecho de una restricción modifica los valores de las variables de decisión, es cosa de rutina. Para ilustrar la idea, sea b_1 = cantidad de horas de acabado disponibles. Si se modifica b_1 a $100 + \Delta$ se sabe que la base actual sigue siendo óptima para $-20 \leq \Delta \leq 20$. Tome nota que cuando b_1 cambia (siempre que $-20 \leq \Delta \leq 20$), la solución óptima para el PL es todavía el punto donde son activas las restricciones de horas de acabado y horas de carpintería. Por lo tanto, si $b_1 = 100 + \Delta$, es posible encontrar los valores nuevos de las variables de decisión al resolver

$$2x_1 + x_2 = 100 + \Delta \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 80$$

Esto da $x_1 = 20 + \Delta$ y $x_2 = 60 - \Delta$. Por lo tanto, al incrementar la cantidad de horas disponibles de acabado se origina un aumento en la cantidad de soldados fabricados y una disminución en la cantidad de trenes.

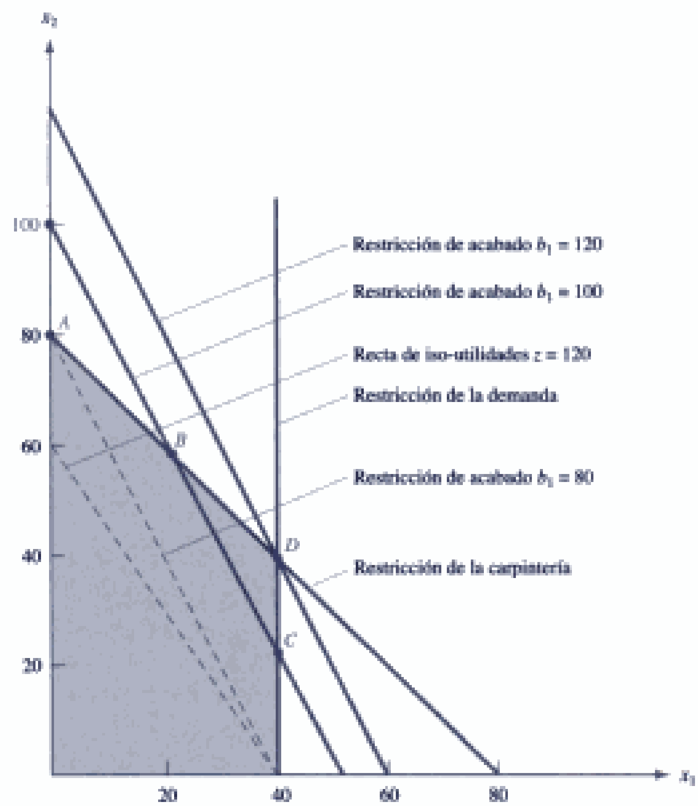


FIGURA 2
Intervalo de valores de las horas de acabado para el cual la base actual sigue siendo óptima en el problema de Giapetto

Si b_2 (la cantidad de horas de carpintería disponibles) es igual a $80 + \Delta$, se puede demostrar que (véase problema 2) la base actual sigue siendo óptima para $-20 \leq \Delta \leq 20$. Si se modifica el valor de b_2 (pero se conserva $-20 \leq \Delta \leq 20$), entonces, la solución óptima para el PL todavía es el punto donde las restricciones del acabado y la carpintería son activas. Por lo tanto, si $b_2 = 80 + \Delta$, la solución óptima para el PL es la solución de

$$2x_1 + x_2 = 100 \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 80 + \Delta$$

De aquí se obtiene $x_1 = 20 - \Delta$ y $x_2 = 60 + 2\Delta$, lo cual muestra que un aumento en la cantidad de horas de carpintería disponibles disminuye la cantidad de soldados fabricados e incrementan el número de trenes producidos.

Suponga que b_3, la demanda de soldados, cambia a $40 + \Delta$. Entonces se puede demostrar que (véase el problema 3) la base actual sigue siendo óptima para $\Delta \geq -20$. Para Δ en este intervalo, la solución óptima para el PL todavía se encontrará donde las restricciones de acabado y carpintería son activas. Por lo tanto, la solución óptima será la solución de

$$2x_1 + x_2 = 100 \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_2 = 80$$

Naturalmente, se obtiene $x_1 = 20$ y $x_2 = 60$, lo cual ilustra un punto importante. En una restricción con holgura positiva (o excedente positivo) en la solución óptima de un PL, si se modifica el lado derecho de una restricción a un valor en el intervalo donde la base actual es aún óptima, no cambia la solución óptima del PL.

Precios sombra

Como se trata en la sección 6.8, a menudo es importante para los administradores determinar qué tanto modifica el valor óptimo de z de un PL cuando cambia el lado derecho de una restricción. Tomando esto en cuenta, definimos el **precio sombra** para la i-ésima restricción de un PL como la cantidad que el valor óptimo de z mejora (esta mejoría quiere decir aumento en un problema de maximización y disminución en un problema de minimización) si el lado derecho de la i-ésima restricción aumenta una unidad. Esta definición se aplica sólo si el cambio en el lado derecho de la restricción i deja óptima la base actual.

Para cualquier PL de dos variables, es sencillo determinar el precio sombra de cada restricción. Por ejemplo, sabemos que si $100 + \Delta$ horas de acabado están disponibles (suponiendo que la base actual se conserva óptima), entonces la solución óptima del PL es $x_1 = 20 + \Delta$ y $x_2 = 60 - \Delta$. Entonces, el valor óptimo de z es igual a $3x_1 + 2x_2 = 3(20 + \Delta) + 2(60 - \Delta) = 180 + \Delta$. Por lo tanto, siempre y cuando la base actual siga siendo óptima, un incremento de una unidad en la cantidad disponible de horas de acabado incrementará el valor óptimo de z por 1 dólar. Por eso el precio sombra de la primera restricción (hora de acabado) es 1 dólar.

Por lo que se refiere a la segunda restricción (hora de carpintería), sabemos que si $80 + \Delta$ horas de carpintería están disponibles (y la base actual sigue siendo óptima), entonces, la solución óptima para el PL es $x_1 = 20 - \Delta$ y $x_2 = 60 + 2\Delta$. Luego, el nuevo valor óptimo de z es $3x_1 + 2x_2 = 3(20 - \Delta) + 2(60 + 2\Delta) = 180 + \Delta$. Por lo tanto, un incremento de una unidad en la cantidad de horas de carpintería aumentará el valor óptimo de z 1 dólar (siempre que la base actual se conserve óptima). Por eso el precio sombra de la segunda restricción (hora de carpintería) es 1 dólar.

Enseguida hallaremos el precio sombra de la tercera restricción (demanda). Si el lado derecho es $40 + \Delta$, entonces los valores óptimos de las variables de decisión se mantienen sin cambio siempre que la base actual se mantenga óptima. Entonces el valor óptimo de z se mantendrá también sin cambio, lo cual demuestra que el precio sombra de la tercer restricción (demanda) es 0 dólares. Esto significa que siempre que la variable de holgura o la variable de excedente (superflua) para una restricción es positiva en la solución óptima de un PL, la restricción tiene un precio sombra igual a cero.

Suponga que se incrementa en Δb_i el lado derecho de la i-ésima restricción de un PL ($\Delta b_i < 0$ quiere decir que disminuye el lado derecho), y que la base actual sigue siendo óptima. Entonces, por cada unidad que aumente el lado derecho de la restricción i aumentará el valor óptimo de z (en un problema de maximización) un equivalente al precio sombra. Por lo tanto, el nuevo valor óptimo de z está dado por

(Nuevo valor óptimo de z) = (antiguo valor óptimo de z) + (Precio sombra de la restricción i) Δb_i

Para un problema de minimización,

(Nuevo valor óptimo de z) = (antiguo valor óptimo de z) − (Precio sombra de la restricción i) Δb_i

Por ejemplo, si se dispone de 95 horas de carpintería, entonces $\Delta b_2 = 15$, y el nuevo valor z está dado por

$$\text{Nuevo valor óptimo de } z = 180 + 15(1) = 195 \text{ dólares}$$

El análisis sobre los precios sombra continúa en la sección 6.8.

Importancia del análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad es importante por varias razones. Los valores de los parámetros de un PL podrían cambiar en varias aplicaciones. Por ejemplo, los precios a los cuales se venden los soldados y los trenes podrían cambiar, así como la disponibilidad de las horas de carpintería y de acabado. Si cambia un parámetro, mediante el análisis de sensibilidad es innecesario resolver el problema de nuevo. Por ejemplo, si la contribución a la utilidad por parte de un soldado se incrementó a 3.50 dólares, ya no tendríamos que resolver de nuevo el problema de Giapetto porque la solución actual sigue siendo óptima. Naturalmente, resolver otra vez el problema de Giapetto ya no representaría mucho trabajo, pero resolver un PL con miles de variables y restricciones es otra cosa. Conocer el análisis de sensibilidad posibilita a menudo al analista a determinar, a partir de la solución original, cuál es el cambio que sufre la solución óptima cuando se modifican los parámetros de un PL.

Recuerde que podría haber incertidumbre en los valores de los parámetros de un PL, por ejemplo, la demanda semanal de soldados. Mediante el método gráfico se puede mostrar que si la demanda semanal de soldados es por lo menos de 20, entonces la solución óptima para el problema de Giapetto es aún (20, 60) (véase problema 3 al final de esta sección). Por lo tanto, incluso si Giapetto tiene incertidumbre en la demanda de soldados, la compañía puede tener confianza en que es óptimo fabricar 20 soldados y 60 trenes.

Claro, el método gráfico no es útil para el análisis de sensibilidad de un PL con más de dos variables. Antes de aprender cómo efectuar el análisis de sensibilidad en un PL arbitrario, es necesario aplicar el conocimiento que tenemos acerca de las matrices para expresar los tableaus de simplex en la forma matricial. Éste es el objetivo de la sección 6.2.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que si la contribución a la utilidad por parte de los trenes se encuentra entre 1.50 y 3 dólares, la base actual se conserva óptima. Si la contribución a la utilidad por parte de los trenes es 2.50 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

2 Demuestre que si las horas disponibles de carpintería se mantienen entre 60 y 100 la base actual sigue siendo óptima. Si se dispone de entre 60 y 100 horas de carpintería, entonces, ¿Giapetto todavía produciría 20 soldados y 60 trenes?

3 Demuestre que si la demanda semanal de soldados es por lo menos de 20, la base actual continúa siendo óptima y Giapetto debería producir 20 soldados y 60 trenes.

4 En el problema de Dorian Auto (ejemplo 2 del cap. 3)

a Encuentre el intervalo de valores del costo de un anuncio en un programa de comedia para el cual la base actual continúa siendo óptima.

b Determine el intervalo de valores del costo de un anuncio en el futbol americano para el cual la base actual sigue siendo óptima.

c Encuentre el intervalo de valores de las exposiciones MAI requeridas para el cual la base actual continúa siendo óptima. Determine la nueva solución óptima si se requieren 28 + Δ millones de exposiciones MAI.

d Halle el intervalo de los valores de las exposiciones VAI necesarias para el cual la base actual se mantiene óptima. Determine la nueva solución óptima si se requieren 24 + Δ millones de exposiciones VAI.

e Encuentre el precio sombra de cada restricción.

f Si son necesarias 26 millones de exposiciones MAI, determine el nuevo valor óptimo de z.

5 Radioco fabrica dos tipos de radios. El único recurso escaso necesario para producir los radios es la mano de obra. La compañía tiene por lo pronto dos trabajadores. El trabajador 1 está dispuesto a trabajar 40 horas por semana y se le paga 5 dólares por hora. El trabajador 2 está dispuesto a trabajar hasta 50 horas a la semana y se le paga 6 dólares por hora. El precio así como los recursos necesarios para fabricar cada tipo de radio se dan en la tabla 1:

Si x_i = la cantidad de radios tipo i manufacturados cada semana, demuestre que Radioco debe resolver el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \le 40 \\
& 2x_1 + x_2 \le 50 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

TABLA 1

Radio 1		Radio 2	
Precio (\$)	Recursos necesarios	Precio (\$)	Recursos necesarios
25	Trabajador 1: 1 hora Trabajador 2: 2 horas Costo de la materia prima: 5 dólares	22	Trabajador 1 2 horas Trabajador 2: 2 horas Costo de la materia prima: 4 dólares

a ¿Para qué valores del precio de un radio tipo 1 la base actual seguiría siendo óptima?

b ¿Para qué valores del precio de un radio tipo 2 la base actual seguiría siendo óptima?

c Si el trabajador 1 estuviera dispuesto a trabajar sólo 30 horas a la semana. ¿seguiría siendo óptima la base actual? Encuentre la nueva solución óptima para el PL.

d Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar hasta 60 horas a la semana, ¿seguiría siendo óptima la base actual? Encuentre la nueva solución óptima para el PL.

e Determine el precio sombra para cada restricción.

6.2 Algunas fórmulas importantes

En esta sección se aplican los conocimientos acerca de las matrices para demostrar cómo un tableau óptimo para un PL puede ser expresado en términos de los parámetros del mismo PL. Las fórmulas que se deducen en esta sección se aplican en el estudio del análisis de sensibilidad, dualidad y temas avanzados del PL.

Suponga que estamos resolviendo un problema de maximización que se preparó para solucionarlo mediante el Método de la gran M, y que, en este punto, el PL tiene m restricciones y n variables. Aunque algunas de estas variables podrían ser de holgura, de excedente o artificiales, decidimos llamarlas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces, el PL se podría expresar como

$$
\begin{aligned}
\max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A lo largo de todo el capítulo se utiliza el problema de los muebles Dakota de la sección 4.5 (sin la restricción $x_2 \le 5$) como ejemplo. Por lo que se refiere al problema de Dakota, el análogo del PL (1) es

$$
\begin{aligned}
\max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\
\text{s.a} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0
\end{aligned}
\tag{1'}
$$

Suponga que hemos encontrado la solución óptima para (1). Sea BV la variable básica para el renglón i del tableau óptimo. También definamos $\text{BV} = \{\text{BV}_1, \text{BV}_2, \ldots, \text{BV}_m\}$ como el conjunto de variables básicas en el tableau óptimo, y el vector $m \times 1$.

$$\mathbf{x}_{BV} = \begin{bmatrix} x_{\text{BV}_1} \\ x_{\text{BV}_2} \\ \vdots \\ x_{\text{BV}_m} \end{bmatrix}$$

También definamos

NBV = conjunto de variables no básicas en el tableau óptimo

$\mathbf{x}_{\text{NBV}}$ = vector $(n - m) \times 1$ que lista las variables no básicas (en cualquier orden deseado)

Con el fin de ilustrar estas definiciones, recuérdese que el tableau para el problema de Dakota es

$$\begin{aligned} z \quad + \quad 5x_2 + \quad\quad\quad + \ 10s_2 + \ 10s_3 &= 280 \\ - \quad 2x_2 + \quad + s_1 + \quad 2s_2 - \quad 8s_3 &= 24 \\ - \quad 2x_2 + x_3 \quad\quad + \quad 2s_2 - \quad 4s_3 &= 8 \\ x_1 + 1.25x_2 \quad\quad\quad - 0.5s_2 + 1.5s_3 &= 2 \end{aligned} \tag{2}$$

Por lo que toca a este tableau óptimo, $\text{BV}_1 = s_1$, $\text{BV}_2 = x_3$ y $\text{BV}_3 = x_1$. Entonces

$$\mathbf{x}_{\text{BV}} = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Elegimos $\text{NBV} = \{x_2, s_2, s_3\}$. Entonces

$$\mathbf{x}_{\text{NBV}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

Si aplicamos lo que sabemos acerca del álgebra de matrices, podremos expresar el tableau óptimo en términos de BV y el PL (1) original. Recuerde que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los coeficientes de la función objetivo para las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (algunas de éstas podrían ser variables de holgura, de excedente o artificiales).

DEFINICIÓN ■ $\mathbf{c}_{\text{BV}}$ es el vector renglón $1 \times m$ $[c_{\text{BV}_1} \quad c_{\text{BV}_2} \quad \cdots \quad c_{\text{BV}_m}]$. ■

Por lo tanto, los elementos de $\mathbf{c}_{\text{BV}}$ son los coeficientes de la función objetivo para las variables básicas de tableau óptimo. En cuanto al problema de Dakota $\text{BV} = \{s_1, x_3, x_1\}$. Entonces, a partir de (1′) se obtiene $\mathbf{c}_{\text{BV}} = [0 \quad 20 \quad 60]$.

DEFINICIÓN ■ $\mathbf{c}_{\text{NBV}}$ es el vector renglón $1 \times (n - m)$ cuyos elementos son los coeficientes de las variables no básicas (en el orden de NBV). ■

Si elegimos listar las variables no básicas para el problema de Dakota en el orden $\text{NBV} = \{x_2, s_2, s_3\}$, entonces $\mathbf{c}_{\text{NBV}} = [30 \ \ 0 \ \ 0]$.

DEFINICIÓN ■ La matriz B $m \times m$ es aquella cuya j-ésima columna es la columna para BV_j en (1). ■

En el problema de Dakota, la primera columna de B es la columna s_1 en (1′); la segunda, la columna x_3, y la tercera, la columna x_1. Por lo tanto,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN ■ $\mathbf{a}_j$ es la columna (en las restricciones) para la variable x_j en (1). ■

Por ejemplo, en el problema de Dakota,

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} \text{ (para } s_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN ■ N es la matriz $m \times (n - m)$ cuyas columnas son las columnas para las variables no básicas (en el orden NBV) en (1). ■

Si hacemos NBV $= \{x_2, s_2, s_3\}$.para el problema de Dakota, entonces,

$$N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN ■ El vector columna $\mathbf{b}$ $m \times 1$ es el lado derecho de las restricciones en (1). ■

Para el problema de Dakota,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Escribimos b_i para el lado derecho de la i-ésima restricción en el problema original de Dakota: $b_2 = 20$.

Ahora se puede aplicar el álgebra de matrices para determinar cómo un tableau óptimo para un PL (con conjunto de variables básicas BV) se relaciona con el PL original en la forma (1).

Expresión de las restricciones en cualquier tableau en términos de B^{-1} y el PL original

Primero observe que (1) se podría escribir como

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_{\text{BV}}\mathbf{x}_{\text{BV}} + \mathbf{c}_{\text{NBV}}\mathbf{x}_{\text{NBV}} \\ \text{s.a} \quad & B\mathbf{x}_{\text{BV}} + N\mathbf{x}_{\text{NBV}} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_{\text{BV}}, \mathbf{x}_{\text{NBV}} \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Si se usa el formato de (3), el problema de Dakota se puede escribir como

$$\max z = [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + [30 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar las restricciones en (3) por B^{-1}, se obtiene

$$B^{-1}B\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + B^{-1}N\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = B^{-1}\mathbf{b} \quad \text{o bien,} \quad \mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + B^{-1}N\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = B^{-1}\mathbf{b} \tag{4}$$

En (4), BV_i se presenta con un coeficiente de 1 en la i-ésima restricción y un coeficiente de cero en cada una de las otras restricciones. Por lo tanto, BV es el conjunto de las variables básicas para (4), y (4) genera las restricciones para el tableau óptimo.

En cuanto al problema de Dakota, el método de Gauss-Jordan se puede aplicar para demostrar que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Luego, a partir de (4) se obtiene

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1.25 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4'}$$

Naturalmente, éstas son las restricciones para el tableau óptimo de Dakota, (2).

A partir de (4) se observa que la columna de una variable no básica x_j en las restricciones del tableau óptimo está dada por B^{-1} [columna para x_j en (1)] $= B^{-1}\mathbf{a}_j$. Por ejemplo, la columna x_2 es B^{-1} (primera columna de N) $= B^{-1}\mathbf{a}_2$. A partir de (4) se encuentra también que el lado derecho de las restricciones es el vector $B^{-1}\mathbf{b}$. Mediante las dos ecuaciones siguientes se resume el análisis anterior:

$$\text{Columna para } x_j \text{ en las restricciones del tableau óptimo} = B^{-1}\mathbf{a}_j \tag{5}$$

$$\text{Lado derecho de las restricciones del tableau óptimo} = B^{-1}\mathbf{b} \tag{6}$$

Para ilustrar (5) se determina:

$$\begin{aligned} &\text{Columna para } x_2 \\ &\text{en el tableau óptimo de Dakota.} \end{aligned} = B^{-1}\mathbf{a}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1.25 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar (6) se calcula:

$$\begin{aligned} &\text{Lado derecho de las restricciones} \\ &\text{en el tableau óptimo de Dakota.} \end{aligned} = B^{-1}\mathbf{b}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinación del renglón 0 del tableau óptimo en términos del PL inicial

Enseguida se ilustra cómo expresar el renglón 0 del tableau óptimo en términos de BV y el PL (1) original. Primero se multiplican las restricciones (expresadas en la forma $B\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + N\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{b}$) por el vector $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$:

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}N\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{b} \tag{7}$$

y se vuelve a escribir la función objetivo original, $z = c_{\mathrm{BV}}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} + \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}}$, como

$$z - \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}\mathbf{x}_{\mathrm{BV}} - \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = 0 \tag{8}$$

Al sumar (7) y (8) es posible eliminar las variables básicas del tableau óptimo, y obtener su renglón 0:

$$z + (\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}N - \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}})\mathbf{x}_{\mathrm{NBV}} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{b} \tag{9}$$

A partir de (9), el coeficiente de x_j en el renglón 0 es

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\text{ (columna de } N \text{ para } x_j) - (\text{coeficiente para } x_j \text{ en } \mathbf{c}_{\mathrm{NBV}}) = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$$

y el lado derecho del renglón 0 es $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{b}$.

Para ayudar a resumir el análisis anterior, sea $\bar{c}_j$ el coeficiente de x_j en el renglón 0 del tableau óptimo. Entonces ya se demostró que

$$\bar{c}_j = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j \tag{10}$$

y

$$\text{Lado derecho del renglón 0 del tableau óptimo} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{b} \tag{11}$$

Con el fin de ilustrar el uso de (10) y (11) ahora se determina el renglón 0 del tableau óptimo del problema de Dakota. Recuerde que

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}} = [0 \quad 20 \quad 60] \qquad \text{y} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Luego, $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10]$, y con (10) se encuentra que los coeficientes de las variables no básicas en el renglón 0 de tableau óptimo son

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2 = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 20 + 15 - 30 = 5$$

y

$$\text{Coeficiente de } s_2 \text{ en el renglón 0 óptimo} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

$$\text{Coeficiente de } s_3 \text{ en el renglón 0 óptimo} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

Naturalmente, las variables básicas del tableau óptimo (x_1, x_3 y s_1) tendrán coeficientes cero en el renglón 0.

A partir de (11), el lado derecho del renglón 0 es

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix}48\\20\\8\end{bmatrix} = 280$$

Simplificando se determina que el renglón 0 es

$$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$$

Claro, este resultado está de acuerdo con (2).

Simplificación de la fórmula (10) por las variables de holgura, de excedente y artificiales

Es posible simplificar en gran medida (10) si x_j es una variable de holgura, de excedente o artificial. Por ejemplo, si x_j es la variable de holgura s_i, el coeficiente de s_i en la función objetivo es 0 y la columna para s_i tiene 1 en el renglón i y 0 en todos los otros renglones en el tableau original. Entonces, de (10) se obtiene

$$\begin{aligned}\text{Coeficiente de } s_i \text{ en el renglón 0 óptimo} &= i\text{-ésimo elemento de } \mathbf{c}_{BV}B^{-1} - 0 \\ &= i\text{–ésimo elemento of } \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\end{aligned} \qquad (10')$$

De igual manera, si x_j es la variable de excedente e_i, entonces el coeficiente de e_i en la función objetivo es 0 y la columna para e_i en el tableau original posee un -1 en el renglón i y 0 en los otros renglones. Entonces, (10) se reduce a

$$\begin{aligned}\text{Coeficiente de } e_i \text{ en el renglón 0 óptimo} &= -(i\text{-ésimo elemento de } \mathbf{c}_{BV}B^{-1}) - 0 \\ &= -(i\text{-ésimo elemento de } \mathbf{c}_{BV}B^{-1})\end{aligned} \qquad (10'')$$

Por último, si x_j es una variable artificial a_i, entonces el coeficiente de la función objetivo de a_i (en un problema de maximización) es $-M$ y la columna original para a_i tiene 1 en el renglón i y 0 en todos los otros renglones. Entonces (10) se reduce a

$$\begin{aligned}\text{Coeficiente de } a_i \text{ en el renglón 0 óptimo} &= (i\text{-ésimo elemento de } \mathbf{c}_{BV}B^{-1}) - (-M) \\ &= (i\text{-ésimo elemento de } \mathbf{c}_{BV}B^{-1}) + (M)\end{aligned} \qquad (10''')$$

Las deducciones de esta sección no son fáciles. Por fortuna, el uso de (5), (6), (10) y (11) no requiere entender del todo las deducciones. A continuación se encuentra un resumen de las fórmulas deducidas en esta sección para calcular un tableau óptimo a partir del PL inicial.

Resumen de las fórmulas para calcular el tableau óptimo a partir del PL inicial

Columna x_j en las restricciones del tableau óptimo $= B^{-1}\mathbf{a}_j$ (5)

Lado derecho de las restricciones del tableau óptimo $= B^{-1}\mathbf{b}$ (6)

$\bar{c}_j = \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ (10)

Coeficiente de la variable de holgura s_i en el renglón 0 óptimo
$= i$-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ (10′)

Coeficiente de la variable de excedente e_i en el renglón 0 óptimo
$= -(i$-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{BV}B^{-1})$ (10″)

Coeficiente de la variable artificial a_i en el renglón 0 óptimo
$= (i$-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}) + M$ (problema maximización) (10‴)

Lado derecho del renglón 0 óptimo $= \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$ (11)

Primero se tiene que encontrar B^{-1} porque este valor es necesario para poder calcular todas las partes del tableau óptimo. Se tiene que determinar asimismo $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ para calcular el renglón 0 del tableau óptimo.

El ejemplo siguiente es otra ilustración del uso de las fórmulas anteriores.

EJEMPLO 1 Cálculo del tableau óptimo

Para el PL siguiente, la base óptima es BV = $\{x_2, s_2\}$. Calcule el tableau óptimo.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución Después de sumar las variables de holgura s_1 y s_2, se obtiene el análogo de (1):

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \end{aligned}$$

Primero se calcula B^{-1}. Como

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

se determina B^{-1} aplicando el método de Gauss-Jordan a la matriz siguiente

$$B|I_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El lector debe comprobar que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Utilice (5) y (6) para determinar las restricciones del tableau óptimo. Como

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

la columna para x_1 en el tableau óptimo es

$$B^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

La otra variable no básica es s_1. La columna para s_1 en el problema original es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por eso (5) da

$$\text{Columna para } s_1 \text{ en un tableau óptimo} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Como

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

con (6) se obtiene

$$\text{Lado derecho del tableau óptimo} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Como BV se lista como $\{x_2, s_2\}$, x_2 es la variable básica para el renglón 1, y s_2 es la variable básica para el renglón 2. Por lo tanto, las restricciones del tableau óptimo son

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}s_1 &= 3 \\ \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}s_1 + s_2 &= 5 \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{c}_{\text{BV}} = [4 \quad 0]$,

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1} = [4 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = [2 \quad 0]$$

Entonces con (10) se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de } x_1 \text{ en el renglón 0 del tableau óptimo} &= \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_1 - c_1 \\ &= [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = 1 \end{aligned}$$

A partir de (10′)

$$\text{Coeficiente de } s_1 \text{ en el tableau óptimo} = \text{Primer elemento de } \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1} = 2$$

Como

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

la ecuación (11) ilustra que el lado derecho del renglón 0 del tableau óptimo es

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{b} = [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 12$$

Naturalmente, las variables básicas x_2 y s_2 tendrán coeficientes cero en el renglón 0. Por lo tanto, el renglón 0 del tableau óptimo es $z + x_1 + 2s_1 = 12$, y el tableau óptimo completo es

$$\begin{aligned} z + x_1 + 2s_1 &= 12 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}s_1 &= 3 \\ \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}s_1 + s_2 &= 5 \end{aligned}$$

Ya aplicamos las fórmulas de esta sección para crear un tableau óptimo de una PL, pero también se pueden utilizar para formar el tableau de *cualquier* conjunto de variables básicas. Esta observación será muy importante al estudiar el método simplex revisado en la sección 10.1.

PROBLEMAS

Grupo A

1 En el siguiente PL, x_1 y x_2 son variables básicas del tableau óptimo. Utilice las fórmulas de esta sección para determinar el tableau óptimo.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 - x_2 &\le 2 \\ -x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2 En el PL siguiente, x_2 y s_1 son variables básicas del tableau óptimo. Utilice las fórmulas de esta sección para determinar el tableau óptimo.

$$
\begin{aligned}
\max z &= -x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 4 \\
x_1 + x_2 &\le 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

6.3 Análisis de sensibilidad

Ahora nos dedicaremos a explorar cómo afectan la solución óptima las modificaciones en los parámetros de un PL (coeficientes de la función objetivo, lados derechos y coeficientes tecnológicos). Como ya se explicó en la sección 6.1, el estudio de la manera en que la solución óptima de un PL depende de sus parámetros se llama *análisis de sensibilidad*. El estudio se centra en los problemas de maximización y se apoya de manera importante en las fórmulas de la sección 6.2. (Las modificaciones, en lo que toca a los problemas de minimización, son directas. Véase el problema 8 al final de esta sección.)

Al igual que en la sección 6.2, sea BV el conjunto de variables básicas en el tableau óptimo. Dado un cambio (o cambios) en un PL, queremos determinar si BV sigue siendo óptima. La mecánica del análisis de sensibilidad depende de la siguiente observación importante. *A partir del capítulo 4, sabemos que un tableau simplex (en el caso de un problema de maximización) para un conjunto de variables básicas BV es óptimo si y sólo si el lado derecho de cada restricción es no negativo y cada variable tiene un coeficiente no negativo en el renglón 0.* Esto se infiere porque si cada restricción tiene un lado derecho no negativo, entonces la solución básica de la BV es factible, y si cada variable en el renglón 0 tiene un coeficiente no negativo, entonces no puede haber solución factible básica con un valor z superior a BV. La observación indica que si un tableau es factible y óptimo depende sólo de sus lados derechos de las restricciones y de los coeficientes de cada variable en el renglón 0. Por ejemplo, si un PL tiene como variables a $x_1, x_2, \ldots, x_6$, el tableau parcial siguiente sería óptimo.

$$
\begin{aligned}
z + 2x_2 + x_4 + x_6 &= 6 \\
&= 1 \\
&= 2 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Las partes del tableau que se omiten no afectan la optimalidad de este tableau.

Suponga que ya se resolvió un PL y se encontró que BV es una base óptima. Se puede aplicar el siguiente procedimiento para determinar si al haber algún cambio en el PL, la BV ya no será óptima.

Paso 1 Determine mediante las fórmulas de la sección 6.2 los cambios que sufren el lado derecho y el renglón 0 del tableau óptimo (el tableau cuyo conjunto de variables básicas es BV) al ser modificados los parámetros de la PL.

Paso 2 Si todas las variables del renglón 0 tienen coeficiente no negativo y cada restricción tiene un lado derecho no negativo, entonces la BV sigue siendo óptima. Si sucede lo contrario, la BV ya no es óptima.

Si la BV ya no es óptima, entonces usted puede encontrar la nueva solución óptima mediante las fórmulas de la sección 6.2 para generar el tableau completo para la BV, y luego continuar el algoritmo simplex con el tableau de BV como el tableau inicial.

Puede haber dos razones de por qué un cambio en los parámetros del PL ocasiona que la BV ya no sea óptima. Primero, una variable (o variables) en el renglón 0 podría tener un coeficiente negativo. En este caso es posible obtener una sfb mejor (mayor valor z) mediante el pivoteo de una variable no básica con coeficiente negativo en el renglón 0. Si así sucede, se dice que la BV es ahora una **base subóptima.** Segundo, una restricción (o restricciones) podría tener ahora un lado derecho negativo. En este caso, por lo menos un miembro de la BV será negativo y BV ya no generará una sfb. Si esto ocurre, se dice que esa BV es ahora una **base no factible.**

La mecánica del análisis de sensibilidad se ilustra con el ejemplo de los muebles Dakota. Recuerde que

x_1 = cantidad de escritorios fabricados
x_2 = cantidad de mesas fabricadas
x_3 = cantidad de sillas fabricadas

La función objetivo para el problema de Dakota era

$$\max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$

y el tableau inicial era

$$\begin{array}{llr}
z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 & = 0 & \\
8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 & = 48 & \text{(Restricción de la madera)} \\
4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 & = 20 & \text{(Restricción del acabado)} \\
2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 & = 8 & \text{(Restricción de la carpintería)}
\end{array} \tag{12}$$

El tableau óptimo era

$$\begin{array}{l}
z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280 \\
-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24 \\
-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8 \\
x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2
\end{array} \tag{13}$$

Observe que BV = $\{s_1, x_3, x_1\}$ y NBV = $\{x_2, s_2, s_3\}$. La sfb óptima es $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$.

Ahora se analiza cómo afectan la solución óptima seis tipos de cambios en los parámetros de un PL:

Cambio 1 Modificación del coeficiente de una variable no básica de la función objetivo.

Cambio 2 Modificación del coeficiente de una variable básica de la función objetivo.

Cambio 3 Modificación del lado derecho de una restricción.

Cambio 4 Modificación de la columna de una variable no básica.

Cambio 5 Suma de una nueva variable o actividad.

Cambio 6 Adición de una nueva restricción (véase sección 6.11).

Modificación del coeficiente de una variable no básica de la función objetivo

En el problema de Dakota, la única variable de decisión no básica es x_2 (mesas). En la actualidad, el coeficiente de x_2 de la función objetivo es $c_2 = 30$. ¿Qué tanto afectaría un cambio en c_2 a la solución óptima para el problema de Dakota? Más específicamente, ¿para qué valores de c_2 seguiría siendo óptima BV = $\{s_1, x_3, x_1\}$?

Suponga que modificamos el coeficiente de x_2 de la función objetivo de 30 a $30 + \Delta$. Entonces, Δ representa la cantidad que c_2 cambió con respecto a su valor actual. ¿Para cuáles valores de Δ el conjunto actual de variables básicas (la base actual) sigue siendo óptimo? Lo primero es determinar cómo cambiará el tableau de BV al modificar c_2 de 30 a $30 + \Delta$. Observe que B^{-1} y $\mathbf{b}$ no cambian y, por tanto, de (6), el lado derecho del tableau de BV ($B^{-1}\mathbf{b}$) no varía, así que BV todavía es factible. Como x_2 es una variable no básica, $\mathbf{c}_{BV}$ no ha cambiado. De (10) se puede ver que la única variable cuyo coeficiente del renglón 0 se modificará al cambiar c_2 es x_2. Por lo tanto, BV continuará siendo óptima si $\bar{c}_2 \geq 0$, y BV será subóptima si $\bar{c}_2 < 0$. En este caso, z podría mejorar al entrar x_2 a la base.

Se tiene

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

y $c_2 = 30 + \Delta$. Además, de la sección 6.2 ya sabemos que $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [0 \quad 10 \quad 10]$. Ahora con (10) se tiene que

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 35 - 30 - \Delta = 5 - \Delta$$

Por lo tanto , $\bar{c}_2 \geq 0$ se cumple, y BV sigue siendo óptima, si $5 - \Delta \geq 0$, o bien $\Delta \leq 5$. De igual manera, $\bar{c}_2 < 0$ se sotiene si $\Delta > 5$, pero entonces BV ya no es óptima. Esto quiere decir que si el precio de las mesas se reduce o se incrementa en 5 dólares o menos, BV continúa siendo óptima. Por lo tanto, para $c_2 \leq 30 + 5 = 35$, BV aún es óptima.

Si BV aún es óptima después de un cambio en el coeficiente de la función objetivo de la variable no básica, los valores de las variables de decisión y el valor óptimo de z se mantienen sin modificación. Esto se debe a que un cambio en el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica deja el lado derecho del renglón 0 y las restricciones no cambian. Por ejemplo, si el precio de las mesas aumentara a 33 dólares ($c_2 = 33$), no se modificaría la solución óptima para el problema de Dakota (Dakota todavía fabricaría 2 escritorios y 8 sillas, y $z = 280$). Por otro lado, si $c_2 > 35$, BV ya no será óptima porque $\bar{c}_2 < 0$. En este caso se determina la nueva solución óptima al generar el tableau de BV y luego usar el algoritmo simplex. Por ejemplo, si $c_2 = 40$, ya sabemos que la única parte del tableau de la BV que cambiará es el coeficiente de x_2 en el renglón 0. Si $x_2 = 40$, entonces

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 40 = -5$$

Ahora el tableau "final" de BV es como el que se ilustra en la tabla 2. No es un tableau óptimo (es subóptimo), y es posible incrementar z si hacemos a x_2 una variable básica en el renglón 3. El tableau resultante se presenta en la tabla 3. Éste sí es un tableau óptimo. Por lo tanto, si $c_2 = 40$, la solución óptima para el problema de Dakota es ahora $z = 288$, $s_1 = 27.2$, $x_3 = 11.2$, $x_2 = 1.6$, $x_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. En este caso, el incremento en el precio de las mesas las ha hecho más atractivas como para inducir a Dakota a fabricarlas. Obsérvese que después de cambiar el coeficiente de la función objetivo de la variable no básica, quizá se requiriera, en general, más de un pivoteo para encontrar la nueva solución óptima.

Hay un modo más agudo de mostrar que, en el problema de Dakota, la base actual sigue siendo óptima siempre que el precio de las mesas disminuya o aumente en 5 dólares o menos. A partir del renglón 0 óptimo en (13), vemos que si $c_2 = 30$, entonces

$$z = 280 - 10s_2 - 10s_3 - 5x_2$$

Esto nos dice que cada mesa que fabrica Dakota reducirá el ingreso en 5 dólares (en otras palabras, el costo reducido para las mesas es 5). Si aumenta el precio de la mesas más de 5 dólares, cada mesa incrementaría el ingreso de Dakota. Por ejemplo, si $c_2 = 36$, cada mesa incrementaría los ingresos en $6 - 5 = 1$ dólar, por lo que Dakota debe fabricar mesas. Por lo tanto, como antes, vemos que para $\Delta > 5$, la base actual ya no es óptima. Este análisis favorece otra interpretación del costo reducido de una variable no básica: *el costo reducido para una variable no básica (en un problema de maximización) es la cantidad máxima que puede aumentar el coeficiente de la variable de la función objetivo*

TABLA 2
Tableau "final" (subóptimo) para Dakota (40 dólares/mesa)

	Variable básica	Cociente
$z - 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$	
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$	Ninguno
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$	Ninguno
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$	1.6*

TABLA 3
Tableau óptimo para Dakota (40 dólares/mesa)

	Variable básica
$z + 4x_1 + 8s_2 + 16s_3 = 288$	$z = 288$
$1.6x_1 + s_1 + 1.2s_2 - 5.6s_3 = 27.2$	$s_1 = 27.2$
$1.6x_1 + x_3 + 1.2s_2 - 1.6s_3 = 11.2$	$x_3 = 11.2$
$0.8x_1 + x_2 - 0.4s_2 + 1.2s_3 = 1.6$	$x_2 = 1.6$

antes de que la base actual se vuelva subóptima, y se vuelva óptimo para la variable no básica que entra a la base.

En resumen, si el coeficiente de la función objetivo para una variable no básica x_j cambia, la base actual continúa siendo óptima si $\bar{c}_j \geq 0$. Si $\bar{c}_j < 0$, entonces la base actual ya no es óptima y x_j será una variable básica en la nueva solución óptima.

Modificación del coeficiente de una variable básica de la función objetivo

En el problema de Dakota, las variables de decisión x_1 (escritorios) y x_3 (sillas) son variables básicas. Ahora se explicará cómo al ser modificado el coeficiente de una variable básica de la función objetivo se afecta la solución óptima de un PL. Primero se analiza cómo afecta este cambio el tableau de la BV. Puesto que no estamos modificando B (o, por lo tanto, B^{-1}) ni $\mathbf{b}$, la ecuación (6) muestra que el lado derecho de cada restricción se mantendrá sin cambio, y BV seguirá siendo factible. Como lo que se modifica es $\mathbf{c}_{\text{BV}}$, entonces cambiará $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$. En (10) se observa que un cambio en $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ podría cambiar más de un coeficiente en el renglón 0. Para determinar si BV sigue siendo óptima se tiene que usar (10) para recalcular el renglón 0 para el tableau de BV. Si todas las variables en el renglón 0 tienen todavía un coeficiente no negativo, entonces BV sigue siendo óptima. Si sucede lo contrario, BV deja de ser óptima. Para ilustrar las ideas anteriores analizamos cómo se afecta la solución óptima del problema de Dakota al modificarse el coeficiente de x_1 (escritorios) de la función objetivo con respecto a su valor actual de $c_1 = 60$.

Suponga que c_1 cambia a $60 + \Delta$ cuando $\mathbf{c}_{\text{BV}}$ cambia a $\mathbf{c}_{\text{BV}} = [0 \quad 20 \quad 60 \quad + \quad \Delta]$. Para calcular el nuevo renglón 0, es necesario conocer B^{-1}. Se podría usar (como en la sección 6.2) el método de Gauss-Jordan para calcular B^{-1}. Recuerde que este método se inicia escribiendo la matriz 3×6 $B|I_3$:

$$B|I_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Luego se efectúan OER para transformar las primeras tres columnas de $B|I_3$ en I_3. En este momento, las últimas tres columnas de la matriz resultante será B^{-1}.

Resulta que cuando resolvimos el problema de Dakota mediante al algoritmo simplex, sin darnos cuenta, encontramos B^{-1}. Para ver por qué es así, observe que al ir desde el tableau inicial de Dakota (12) al tableau óptimo (13) efectuamos una serie de OER con las restricciones. Estas OER transformaron las columnas correspondientes de las restricciones en la base inicial (s_1, s_2, s_3)

$$\text{desde}\quad \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{hasta} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Estas mismas OER transformaron las columnas correspondientes en $\text{BV} = \{s_1, x_3, x_1\}$

$$\text{desde}\quad B = \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & x_3 & x_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1.5 & 4 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{hasta} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} s_1 & x_3 & x_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lo anterior quiere decir que al resolver el problema de Dakota mediante el algoritmo simplex usamos OER para transformar B en I_3. Estas mismas OER transformaron I_3 en

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = B^{-1}$$

Se ha descubierto un hecho en extremo importante: *para cualquier tableau simplex, B^{-1} es la matriz $m \times m$ que consiste en las columnas del tableau actual que corresponden al conjunto de variables básicas del tableau inicial (tomadas en el mismo orden).* Esto significa que si la base iniciadora de un PL consiste por completo en variables de holgura, entonces B^{-1} para el tableau óptimo es simplemente las columnas para las variables de holgura en las restricciones del tableau óptimo. En general, si la variable básica iniciadora de la i-ésima restricción es la variable artificial a_i, entonces la columna i-ésima de B^{-1} será la columna para a_i en las restricciones del tableau óptimo. Por lo tanto, no es necesario aplicar el método de Gauss-Jordan para determinar la B^{-1} del tableau óptimo. Ya encontramos B^{-1} al efectuar el algoritmo simplex.

Ahora ya es posible calcular $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ si $c_1 = 60 + \Delta$:

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1} = [0 \quad 20 \quad 60 + \Delta] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$= [0 \quad 10 - 0.5\Delta \quad 10 + 1.5\Delta]$$

Observe que para $\Delta = 0$, se obtiene la $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ original con (14). Entonces ya se puede calcular el nuevo renglón 0 que corresponde a $c_1 = 60 + \Delta$. Después de notar que

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, c_1 = 60 + \Delta, c_2 = 30, c_3 = 20$$

se puede usar (10) para calcular el nuevo renglón 0. Puesto que s_1, x_3 y x_1 son variables básicas su coeficiente en el renglón 0 tiene que ser 0. El coeficiente de cada variable no básica en el nuevo renglón 0 es como sigue:

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2 = [0 \quad 10 - 0.5\Delta \quad 10 + 1.5\Delta] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5 + 1.25\Delta$$

Coeficiente de s_2 en el renglón 0 = segundo elemento de $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1} = 10 - 0.5\Delta$

Coeficiente de s_3 en el renglón 0 = tercer elemento de $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1} = 10 + 1.5\Delta$

Por lo tanto, el renglón 0 del tableau óptimo ahora es

$$z + (5 + 1.25\Delta)x_2 + (10 - 0.5\Delta)s_2 + (10 + 1.5\Delta)s_3 = ?$$

A partir del nuevo renglón 0 se ve que BV seguirá siendo óptima si y sólo si se sostiene lo que sigue:

$$5 + 1.25\Delta \geq 0 \quad (\text{cierto si y sólo si}^\dagger\ \Delta \geq -4)$$
$$10 - 0.5\Delta \geq 0 \quad (\text{cierto si y sólo si}\ \ \Delta \geq 20)$$
$$10 + 1.5\Delta \geq 0 \quad (\text{cierto si y sólo si}\ \ \Delta \geq -(20/3))$$

Esto significa que la base actual continúa siendo óptima siempre que $\Delta \geq -4$, $\Delta \leq 20$ y $\Delta \geq -\frac{20}{3}$. En la figura 3 se observa que la base actual sigue siendo óptima si y sólo si $-4 \leq \Delta \leq 20$: si c_1 disminuye 4 dólares o menos, o bien, aumenta hasta por 20 dólares, la base actual sigue siendo óptima. Por lo tanto, siempre que $56 = 60 - 4 \leq c_1 \leq 60 + 20 = 80$, la base actual sigue siendo óptima. Si $c_1 < 56$, o bien, $c_1 > 80$, la base actual ya no es óptima.

Si la base actual se conserva óptima, entonces los valores de las variables de decisión no cambian porque $B^{-1}\mathbf{b}$ se mantiene sin cambio. Pero sí cambia el valor óptimo de z. Para aclarar lo anterior, suponga que $c_1 = 70$. Como $56 \leq 70 \leq 80$, ya sabemos que la base actual sigue siendo óptima. Por lo tanto, Dakota debe fabricar todavía 2 escritorios ($x_1 = 2$) y 8 sillas ($x_3 = 8$). No obstante, al cambiar c_1 a 70 se modifica z a $z = 70x_1 + 30x_2 + 20x_3$. Con esto z es ahora igual a $70(2) + 20(8) = 300$ dólares. Otro modo de darse cuenta de que z es ahora igual a 300 dólares es observar que ha aumentado el ingreso a partir de cada escritorio en $70 - 60 = 10$ dólares. Dakota está fabricando 2 escritorios, asi que el ingreso debe aumentar a $2(10) = 20$ dólares, y el nuevo ingreso será $= 280 + 20 = 300$ dólares.

Cuando la base actual ya no es óptima

Recuerde que si $c_1 < 56$, o bien, $c_1 > 80$, entonces la base actual ya no es óptima. Usted se da cuenta de manera intuitiva que si el precio de los escritorios disminuye en forma suficiente (y todos los otros precios se mantienen constantes), ya no vale la pena fabricar escritorios. Nuestro análisis muestra que esto ocurre si el precio de los escritorios disminuye más de 4 dólares. El lector debe comprobar (véase problema 2 al final de esta sección) que si $c_1 < 56$, x_1 ya no es una variable básica en la nueva solución óptima. Por lo contrario, si $c_1 > 80$, los escritorios originan ganancias suficientes como para hacer subóptima la base actual; los escritorios son ya tan atractivos que queremos hacer más. Para hacerlo, tenemos que forzar a otra variable a salir de la base. Suponga que $c_1 = 100$. Como $100 > 80$, entonces la base actual ya no es óptima. ¿Cómo se puede determinar la nueva solución óptima? Simplemente se crea el tableau óptimo para $c_1 = 100$ y se procede con el simplex. Si $c_1 = 100$, entonces $\Delta = 100 - 60 = 40$, y el nuevo renglón 0 tendrá

$$\bar{c}_1 = 0, \qquad \bar{c}_2 = 5 + 1.25\Delta = 55, \qquad \bar{c}_3 = 0,$$

s_1 coeficiente en el renglón 0 = 0

s_2 coeficiente en el renglón 0 $= 10 - 0.5\Delta = -10$

s_3 coeficiente en el renglón 0 $= 10 + 1.5\Delta = 70$

$$\text{Lado derecho del renglón } 0 = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{b} = [0 \quad -10 \quad 70]\begin{bmatrix}48\\20\\8\end{bmatrix} = 360$$

A partir de la ecuación (6), si se modifica c_1 no cambia las restricciones en el tableau de BV. Esto significa que si $c_1 = 100$, entonces el tableau BV es como el que se ilustra en

FIGURA 3
Determinación del intervalo de valores relacionado con c_1 para el cual la base actual sigue siendo óptima

TABLA 4
Tableau "final" (subóptimo) si $c_1 = 100$

	Variable básica	Cociente
$z + 55x_2 - 10s_2 + 70s_3 = 360$	$z = 360$	
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$	12
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$	4*
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$	Ninguno

TABLA 5
Tableau óptimo para Dakota si $c_1 = 100$

	Variable básica
$z + 45x_2 + 5x_3 + 50s_3 = 400$	$z = 400$
$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
$-x_2 + 0.5x_3 + s_2 - 2s_3 = 4$	$s_2 = 4$
$x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.5s_3 = 4$	$x_1 = 4$

la tabla 4. BV $= \{s_1, x_3, x_1\}$ es ahora subóptima. Para hallar la nueva solución óptima de Dakota, se introduce a s_2 a la base en el renglón 2 (tabla 5). Éste es un tableau óptimo. Si $c_1 = 100$, entonces la nueva solución óptima para el problema de Dakota es $z = 400$, $s_1 = 16$, $s_2 = 4$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Observe que al aumentar la utilidad de los escritorios Dakota ha dejado de hacer sillas. Los recursos que se usaban antes para producir las sillas, se utilizan ahora para hacer $4 - 2 = 2$ escritorios adicionales.

En resumen, si cambia el coeficiente de una variable básica x_j de la función objetivo, entonces la base actual sigue siendo óptima si se mantiene no negativo el coeficiente de todas las variables del renglón 0 del tableau de BV. Si alguna variable del renglón 0 tiene coeficiente negativo, entonces la base actual ya no es óptima.

Interpretación del bloque de los intervalos para el coeficiente objetivo de los resultados de LINDO

Para obtener un informe sobre la sensibilidad en LINDO, elija *Yes* cuando se le pregunte (después de resolver la PL) si usted desea un *Range analysis* (Análisis de intervalo). Para obtenerlo en LINGO, vaya a *Options* y elija *Range* (después de resolver la PL). Si esto no funciona, vaya a *Options*, elija *General Solver*, luego a *Dual computations* y elija la opción *Ranges and Values*.

En el bloque *OBJ COEFFICIENT RANGES* de los resultados que proporciona LINDO (o LINGO) se ve la cantidad con que se modifica el coeficiente de cada variable de la función objetivo antes de que la base actual se vuelva subóptima (suponiendo que todos los otros parámetros se conservan constantes). Examine los resultados de LINDO para el problema de Dakota (figura 4). Para cada variable, la columna *CURRENT COEF* proporciona el valor actual del coeficiente de la función objetivo de la variable. Por ejemplo, el coeficiente de la función objetivo para *DESKS* es 60. En la columna *ALLOWABLE INCREASE* se encuentra la cantidad máxima que puede aumentar el coeficiente de una variable de la función objetivo mientras la base actual sigue siendo óptima (suponiendo

```
MAX         60 DESKS + 30 TABLES + 20 CHAIRS
SUBJECT TO
       2)   8 DESKS + 6 TABLES + CHAIRS <=    48
       3)   4 DESKS + 2 TABLES + 1.5 CHAIRS <=   20
       4)   2 DESKS + 1.5 TABLES + 0.5 CHAIRS <=    8
END

    LP OPTIMUM FOUND  AT STEP        2

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

 1)         280.000000

VARIABLE        VALUE    REDUCED COST
    DESKS        2.000000     0.000000
   TABLES        0.000000     5.000000
   CHAIRS        8.000000     0.000000

   ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)       24.000000           0.000000
       3)        0.000000          10.000000
       4)        0.000000          10.000000

NO. ITERATIONS=     2

   RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE        CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                 COEF          INCREASE          DECREASE
   DESKS        60.000000        20.000000          4.000000
  TABLES        30.000000         5.000000         INFINITY
  CHAIRS        20.000000         2.500000          5.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                  RHS          INCREASE          DECREASE
       2        48.000000        INFINITY          24.000000
       3        20.000000         4.000000          4.000000
       4         8.000000         2.000000          1.333333
```

FIGURA 4
Resultados de LINDO para los muebles Dakota

que todos los otros parámetros de la PL se conserven sin cambio). Por ejemplo, si el coeficiente para *DESKS* de la función objetivo aumenta por arriba de 60 + 20 = 80, entonces la base actual ya no es óptima. De igual manera, la columna *ALLOWABLE DECREASE* proporciona la cantidad máxima que puede disminuir el coeficiente de una variable de la función objetivo mientras la base actual se conserva óptima (suponiendo que todos los otros parámetros se mantienen constantes). Si el coeficiente para *DESKS* de la función objetivo cae por abajo de 60 − 4 = 56, la base actual ya no es óptima. En resumen, a partir de los resultados que genera LINDO vemos que si cambia el coeficiente para *DESKS* de la función objetivo, la base actual se conserva óptima si

$$56 = 60 - 4 \leq \text{coeficiente objetivo para DESKS} \leq 60 + 20 = 80$$

Desde luego, esto está de acuerdo con los cálculos anteriores.

Modificación del lado derecho de una restricción

Efecto en la base actual

Esta sección trata acerca de cómo la solución óptima para un PL cambia si se modifica el lado derecho de una restricción. Como **b** no aparece en (10), al cambiar el lado derecho de una restricción, el renglón 0 del tableau óptimo de conserva sin cambio alguno; al modificar un lado derecho, no es posible hacer que la base actual se vuelva subóptima. Pero a partir de (5) y (6), observamos que un cambio en el lado derecho de una restricción afectará el lado derecho de las restricciones del tableau óptimo. *Siempre que el lado derecho de cada restricción en el tableau óptimo se conserve no negativo, la base actual se man-*

tiene factible y óptima. Si por lo menos un lado derecho en el tableau óptimo se vuelve negativo, entonces la base actual ya no es factible y, por lo tanto, ya no es óptima.

Suponga que se desea determinar qué tanto afecta a la solución óptima el cambio de la cantidad de las horas de acabado (b_2) del problema de Dakota. En la actualidad, $b_2 = 20$. Si cambiamos b_2 a $20 + \Delta$, entonces de (6), el lado derecho de las restricciones en el tableau óptimo se transformará en

$$B^{-1}\begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 + 2\Delta \\ 8 + 2\Delta \\ 2 - 0.5\Delta \end{bmatrix}$$

Naturalmente, para $\Delta = 0$, el lado derecho se reduce al lado derecho del tableau óptimo original. Si esto no sucede, entonces hay un error.

Se puede demostrar que (véase problema 9) que si el lado derecho de la i-ésima restricción tiene un incremento de Δ, entonces el lado derecho del tableau óptimo está dado por (lado derecho original del tableau óptimo) + Δ(columna i de B^{-1}). Puesto que la segunda columna de B^{-1} es

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{y el lado derecho original es} \quad \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

de nuevo se observa que el lado derecho de las restricciones en el tableau óptimo es

$$\begin{bmatrix} 24 + 2\Delta \\ 8 + 2\Delta \\ 2 - 0.5\Delta \end{bmatrix}$$

Para que la base actual se conserve óptima se requiere que el lado derecho de cada restricción en el tableau óptimo se mantenga no negativa. Esto quiere decir que la base actual seguirá siendo óptima si y sólo si se cumple lo que sigue:

$$\begin{aligned} 24 + 2\Delta &\geq 0 \qquad \text{(si y sólo si } \Delta \geq -12) \\ 8 + 2\Delta &\geq 0 \qquad \text{(si y sólo si } \Delta \geq -4) \\ 2 - 0.5\Delta &\geq 0 \qquad \text{(si y sólo si } \Delta \leq 4) \end{aligned}$$

Siempre que $\Delta \geq -12$, $\Delta \geq -4$, y $\Delta \leq 4$, la base actual es factible y, por lo tanto, óptima. En la figura 5 se observa que para $-4 \leq \Delta \leq 4$, la base actual es factible y, por lo tanto, óptima. Lo anterior significa que para $20 - 4 \leq b_2 \leq 20 + 4$, es decir, $16 \leq b_2 \leq 24$, la base actual es óptima: si se dispone de entre 16 y 24 horas de acabado, BV = $\{s_1, x_3, x_1\}$ es óptima, y Dakota debe fabricar todavía escritorios y sillas. Si $b_2 > 24$ o si $b_2 < 16$, la base actual se vuelve no factible y deja de ser óptima.

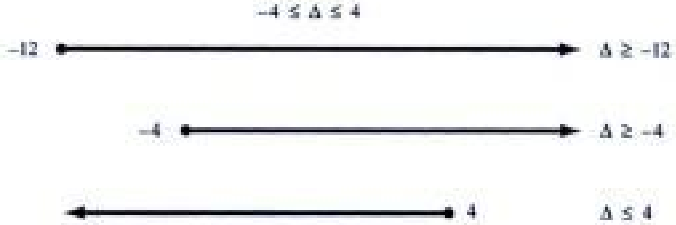


FIGURA 5
Determinación del intervalo de valores para b_2 para el cual la base actual es óptima

Efecto en las variables de decisión y z

Aun cuando la base actual es óptima ($16 \le b_2 \le 24$), *se modifican los valores de las variables de decisión y z*. Esto ya se ilustró en el estudio gráfico del análisis de sensibilidad en la sección 6.1. Para ver cómo cambian los valores de la función objetivo y de las variables de decisión, recuerde que los valores de las variables básicas en la solución óptima están dados por $B^{-1}\mathbf{b}$ y que el valor óptimo de z está dado por $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{b}$. Al modificar $\mathbf{b}$ cambiarán los valores de las variables básicas y el valor óptimo de z. Con el fin de ilustrar lo anterior, suponga que están disponibles 22 horas de acabado. Como $16 \le 22 \le 24$, la base actual sigue siendo óptima y, de (6), los nuevos valores de las variables básicas son como sigue (la misma base sigue siendo óptima, así que las variables no básicas siguen siendo iguales a 0):

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si estuvieran disponibles 22 horas de acabado, entonces Dakota debería fabricar 12 sillas y sólo 1 escritorio.

Para determinar qué tanto afecta al valor óptimo de z un cambio en un lado derecho apliquemos la fórmula (11). Si hay 22 horas disponibles, entonces

$$\text{Nuevo valor } z = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}(\text{nuevo } \mathbf{b}) = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix} 48 \\ 22 \\ 8 \end{bmatrix} = 300$$

En la sección 6.8 se explica cómo se puede utilizar el concepto importante del precio sombra para determinar cómo los cambios en un lado derecho modifican el valor óptimo de z.

Cuando la base actual ya no es óptima

Si la modificación de un lado derecho es tal que la base actual ya no es óptima, ¿cómo se puede determinar la nueva base óptima? Suponga que modificamos b_2 a 30. Como $b_2 > 24$, entonces sabemos que la base actual ya no es óptima. Si construyeramos el tableau óptimo, veríamos, a partir de las fórmulas de la sección 6.2, que la única parte del tableau óptimo que cambia es el lado derecho del renglón 0 y las restricciones. De (6), el lado derecho de las restricciones en el tableau para $\mathrm{BV} = \{s_1, x_3, x_1\}$ es

$$B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 \\ 28 \\ -3 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con (11), el lado derecho del renglón 0 es ahora

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{b} = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix} = 380$$

El tableau para la base óptima, $\mathrm{BV} = \{s_1, x_3, x_1\}$, es ahora como se indica en la tabla 6. Como $x_1 = -3$, BV ya no es factible u opcional. Infortunadamente, este tableau no genera una solución factible básica evidente. Si se le usa como el tableau inicial, no es posible aplicar el algoritmo simplex para hallar la nueva solución óptima para el problema de Dakota. En la sección 6.11 se trata un método distinto para resolver los PLs, el algoritmo simplex dual, el cual se usa para resolver PLs cuando el tableau inicial tiene uno o más lados derechos negativos y el coeficiente de cada variable del renglón 0 es no negativo.

TABLA 6
Tableau final (no factible) para Dakota si $b_2 = 30$

	Variable básica
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 380$	$z = 480$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 44$	$s_1 = 44$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 28$	$x_3 = 28$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = -3$	$x_1 = -3$

En resumen, si el segundo miembro o lado derecho de una restricción se modifica, entonces la base actual es óptima si el lado derecho de cada restricción en el tableau se conserva no negativo. Si el lado derecho de cualquier restricción es negativo, entonces la base actual es no factible, y se tiene que buscar una nueva solución óptima.

Interpretación del bloque de intervalos del lado derecho de los resultados de LINDO

El bloque de los resultados de LINDO (o LINGO) con el encabezado *RIGHTHAND SIDE RANGES* (véase figura 4) proporciona información que se relaciona con lo que un lado derecho puede variar antes de que la base actual se vuelva no factible (mientras todos los otros parámetros se mantienen constantes). La columna *CURRENT RHS* da el lado derecho de cada restricción. Por lo tanto, para el renglón 3 (la segunda restricción), el lado derecho actual es 20. La columna *ALLOWABLE INCREASE* es la cantidad máxima que puede aumentar el lado derecho de la restricción sin que la base actual deje de ser óptima (todos los otros parámetros se conservan constantes). Por ejemplo, si las horas de acabado disponibles (segunda restricción) aumenta hasta en 4 horas, entonces la base actual sigue siendo óptima. De igual manera, la columna *ALLOWABLE DECREASE* informa acerca de la cantidad máxima que el lado derecho de una restricción puede disminuir sin que la base actual deje de ser óptima (todos los otros parámetros son constantes). Si el tiempo de acabado disponible disminuye en más de 4 horas, entonces la base actual ya no es óptima. En resumen, si las horas de acabado cambian (mientras todos los otros parámetros de la PL se mantienen constantes), la base actual sigue siendo óptima si

$$16 = 20 - 4 \leq \text{horas de acabado disponibles} \leq 20 + 4 = 24$$

Modificación de la columna de una variable no básica

Se requieren en la actualidad 6 pies tablón de madera, 2 horas de acabado y 1.5 horas de carpintería, para producir una mesa que se vende en 30 dólares. Asimismo, x_2 (la variable para las mesas) es no básica en la solución óptima. Esto significa que Dakota no debe fabricar ahora ninguna mesa. No obstante, suponga que el precio de las mesas aumenta a 43 dólares y, debido a los cambios en los métodos de producción, una mesa requiere 5 pies tablón de madera, 2 horas de acabado y 2 horas de carpintería. ¿Con esto cambiaría la solución óptima para el problema de Dakota? Aquí estamos cambiando elementos de la columna para x_2 en el problema original (incluso la función objetivo). Al cambiar la columna para una variable no básica tal como las mesas no varían B (y B^{-1}) y $\mathbf{b}$. Por lo tanto, el lado derecho del tableau óptimo se conserva sin cambios. Al examinar a (10) se encuentra que la única parte del renglón 0 que varía es $\bar{c}_2$; la base actual seguirá siendo óptima si y sólo si se cumple $\bar{c}_2 \geq 0$. Enseguida usamos (10) para calcular el nuevo coeficiente de x_2 en el renglón 0. Este proceso se denomina **valorar** x_2. De (10),

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}} B^{-1} \mathbf{a}_2 - c_2$$

Observe que $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ todavía es igual a [0 10 10], pero $\mathbf{a}_2$ y c_2 cambiaron a

$$c_2 = 43 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ahora,

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 43 = -3 < 0$$

Como $\bar{c}_2 < 0$, la base actual ya no es óptima. El hecho de que $\bar{c}_2 = -3$ significa que cada mesa que Dakota fabrica ahora incrementa los ingresos en 3 dólares. Una ventaja evidente para Dakota es introducir x_2 a la base. Con el fin de determinar la nueva solución óptima para el problema de Dakota se genera el tableau para BV = $\{s_1, x_3, x_1\}$ y luego se aplica el algoritmo simplex. De (5), la columna para x_2 en la parte de las restricciones del tableau de BV es entonces

$$B^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El tableau para BV = $\{s_1, x_3, x_1\}$ es ahora como el que se ilustra en la tabla 7. Para encontrar la nueva solución óptima se introduce x_2 en la base en el renglón 3. Esto genera el tableau óptimo de la tabla 8. Por lo tanto, la nueva solución óptima para el problema de Dakota es $z = 283$, $s_1 = 31$, $x_3 = 12$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Después de que se modificó la columna para la variable no básica x_2 (mesas), Dakota debe fabricar 12 sillas y 1 mesa. En resumen, si la columna de una variable no básica x_j cambia, entonces la base actual es óptima si $\bar{c}_j \geq 0$. Si $\bar{c}_j < 0$, entonces la base actual ya no es óptima y x_j será una variable básica en la nueva solución óptima.

Si la columna de una variable básica se modifica, entonces esto dificulta, por lo regular, la determinación de si la base actual aún es óptima. Esto se debe a que el cambio podría afectar tanto a B (y, por lo tanto, a B^{-1}) y $\mathbf{c}_{BV}$ y, por consiguiente, todo el renglón 0 y el lado derecho completo del tableau óptimo. Como siempre, la base actual es óptima

TABLA 7

Tableau "final" (subóptimo) para Dakota con el nuevo método de fabricar mesas

	Variable básica
$z \quad - 3x_2 \quad + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$- 7x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$- 4x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 2x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$*

TABLA 8

Tableau óptimo para Dakota con el nuevo método de fabricar mesas

	Variable básica
$z + 1.5x_1 + 9.25s_2 + 12.25s_3 = 283$	$z = 283$
$3.5x_1 + s_1 + 0.25s_2 - 2.75s_3 = 31$	$s_1 = 31$
$2x_1 + x_3 + s_2 - s_3 = 12$	$x_3 = 12$
$0.5x_1 + x_2 - 0.25s_2 + 0.75s_3 = 1$	$x_1 = 1$

si y sólo si el coeficiente de todas las variables es no negativo en el renglón 0 y el lado derecho de todas las restricciones es no negativo.

Suma de una nueva actividad

En muchas situaciones, las oportunidades surgen para emprender nuevas actividades. Por ejemplo, en el problema de Dakota, la compañía se podría encontrar con la oportunidad de elaborar otros tipos de muebles, como taburetes. Si surge una nueva actividad, es posible evaluarla aplicando el método utilizado para determinar si la base actual aún es óptima después de cambiar la columna de una variable no básica. Mediante el ejemplo siguiente, se ilustra el procedimiento.

Suponga que Dakota planea fabricar taburetes. Un taburete se vende en 15 dólares y requiere 1 pie tablón de madera, 1 hora de acabado y 1 hora de carpintería. ¿Debería la compañía fabricar taburetes?

Para contestar esta pregunta, defina x_4 como el número de taburetes fabricados por Dakota. El tableau inicial cambia entonces por la introducción de la columna de x_4. El nuevo tableau inicial es

$$\begin{aligned} z - 60x_1 - 30x_2 - 20x_3 - 15x_4 & &= 0 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + s_1 & &= 48 \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + s_2 & &= 20 \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + x_4 + s_3 & &= 8 \end{aligned} \tag{15}$$

A la suma de la columna de x_4 al problema se le llama **suma de una nueva actividad.** ¿Qué tanto cambiará el tableau óptimo BV $= \{s_1, x_3, x_1\}$ con la adición de la nueva actividad? De (6) se ve que el lado derecho de todas las restricciones en el tableau óptimo se conserva sin cambio. De (10) se ve que el coeficiente de cada una de las variables antiguas en el renglón 0 permanece sin cambio. Se tiene que calcular naturalmente $\bar{c}_4$, el coeficiente de la nueva actividad en el renglón 0 del tableau óptimo. El lado derecho de cada restricción en el tableau óptimo no cambia y la única variable en el renglón 0 que puede tener coeficiente negativo es x_4, así que la base actual es aún óptima si $\bar{c}_4 \geq 0$ o se vuelve no óptima si $\bar{c}_4 < 0$.

Para determinar si una actividad nueva ocasiona que la base actual deje de ser óptima, se valora la nueva actividad. Como

$$c_4 = 15 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

se podría aplicar (10) para valorar x_4. El resultado es

$$\bar{c}_4 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 5$$

Puesto que $\bar{c}_4 \geq 0$, la base actual aún es óptima. De manera equivalente, el costo reducido de los taburetes es 5 dólares. Esto quiere decir que cada taburete producido reducirá el ingreso en 5 dólares. Por esta razón, la compañía elige no fabricar taburete alguno.

En resumen, si una nueva columna (que corresponde a una variable x_j) se añade a un PL, entonces, la base actual sigue siendo óptima si $\bar{c}_j \geq 0$. Si $\bar{c}_j < 0$, entonces, la base actual deja de ser óptima y x_j será una variable básica en la nueva solución óptima. En la tabla 9 se presenta un resumen de los análisis de sensibilidad para un problema de maximización. Al aplicar las técnicas de esta sección a un problema de minimización, sólo recuerde que un tableau es óptimo si y sólo si cada variable tiene coeficiente no positivo en el renglón 0 y el lado derecho de cada restricción es no negativo.

TABLA 9

Resumen del análisis de sensibilidad (problema de maximización)

Cambio en el problema inicial	Efecto en el tableau óptimo	La base actual es aún óptima si:
Modificación del coeficiente c_j no básico de la función objetivo	Varía el coeficiente de x_j o en el renglón 0 óptimo	El coeficiente de x_j en el renglón 0 para la base actual es todavía no negativo
Modificación del coeficiente c_j básico de la función objetivo	Podría cambiar todo el renglón 0	Cada variable tiene aún un coeficiente no negativo en el renglón 0
Modificación del lado derecho de una restricción	Cambian el lado derecho de las restricciones y el renglón 0	El lado derecho de cada restricción todavía es no negativo
Modificación de la columna de una variable x_j no básica o adición de una nueva variable x_j	Cambia el coeficiente de x_j en el renglón 0 y la columna de la restricción x_j en el tableau óptimo	El coeficiente de x_j en el renglón 0 es aún no negativo

PROBLEMAS

Grupo A

1 En el problema de Dakota demuestre que la base actual es óptima si c_3, el precio de las sillas, satisface $15 \le c_3 \le 22.5$. Encuentre la nueva solución óptima si $c_3 = 21$. Determine asimismo la nueva solución óptima si $c_3 = 25$.

2 Si $c_1 = 55$ en el problema de Dakota, demuestre que con la nueva solución óptima no se produce ningún escritorio.

3 Demuestre en el problema de Dakota que si la cantidad de madera (pies tablón) disponible (b_1) cumple $b_1 \ge 24$, la base actual sigue siendo óptima. Determine la nueva solución óptima si $b_1 = 30$.

4 Demuestre que si las mesas se venden en 50 dólares y se usa un pie tablón de madera, 3 horas de acabado y 1.5 horas de carpintería, la base actual para el problema de Dakota ya no será óptima. Determine la nueva solución óptima.

5 Muebles Dakota planea producir mesas para computadoras domésticas. Una mesa para la computadora del hogar se vende en 36 dólares y requiere 6 pies tablón de madera, 2 horas de acabado y 2 horas de carpintería. ¿La compañía debe fabricar mesas para computadoras domésticas?

6 Sugarco tiene la capacidad de producir tres tipos de barras de caramelo. Cada barra de caramelo está elaborada por completo de azúcar y chocolate. La composición de cada tipo y la utilidad ganada por cada barra de caramelo se proporcionan en la tabla 10. Se dispone de 50 onzas de azúcar y 100 onzas de chocolate. Después de definir x_i como la cantidad de barras de caramelo tipo i elaboradas por Sugarco ésta debe resolver el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 50 \quad \text{(Restricción del azúcar)} \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 100 \quad \text{(Restricción del chocolate)} \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Luego de sumar las variables de holgura s_1 y s_2, el tableau óptimo es como el que se ilustra en la tabla 11. Conteste las preguntas siguientes utilizando este tableau óptimo:

a ¿Para qué valores de utilidad de la barra de caramelo tipo 1 la base actual aún es óptima? Si la utilidad para una barra de caramelo tipo 1 fuera de 7 centavos, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema de Sugarco?

b ¿Para qué valores de utilidad de la barra de caramelo tipo 2 la base actual sigue siendo óptima? Si la utilidad para una barra de caramelo tipo 2 fuera de 13 centavos, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema de Sugarco?

c ¿Para qué cantidades de azúcar disponible la base actual se mantiene óptima?

d Si hubiera 60 onzas de azúcar, ¿cuál sería la utilidad de Sugarco? ¿Cuántas barras de cada tipo se deben elaborar? ¿Se podría dar respuesta a estas preguntas si sólo hubiera disponible 30 onzas de azúcar?

e Suponga que una barra de caramelo tipo 1 usa sólo 0.5 onzas de azúcar y 0.5 onzas de chocolate. ¿Debe entonces Sugarco producir barras de caramelo tipo 1?

TABLA 10

Barra	Cantidad de azúcar (onzas)	Cantidad de chocolate (onzas)	Utilidad (centavos)
1	1	2	3
2	1	3	7
3	1	1	5

TABLA 11

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	rhs	Variable básica
1	3	0	0	4	1	300	$z = 300$
0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	25	$x_3 = 25$
0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	25	$x_2 = 25$

f Sugarco proyecta producir barras de caramelo tipo 4. Con una barra de este tipo gana 17 centavos y requiere 3 onzas de azúcar y 4 onzas de chocolate. ¿Debe Sugarco elaborar barras de caramelo tipo 4?

7 Las preguntas siguientes se refieren al problema de Giapetto (sección 3.1). El PL de Giapetto era

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 100 \quad \text{(Restricción del acabado)} \\ x_1 + x_2 &\le 80 \quad \text{(Restricción de la carpintería)} \\ x_1 &\le 40 \quad \text{(Demanda limitada de soldados)} \end{aligned}$$

(x_1 = soldados y x_2 = trenes). Después de sumar las variables de holgura s_1, s_2 y s_3, el tableau óptimo es como el que se ilustra en la tabla 12. Utilice este tableau óptimo para contestar las preguntas siguientes:

a Demuestre que siempre que la contribución de los soldados (x_1) a la utilidad esté entre 2 y 4 dólares, la base actual se conserva óptima. Si los soldados contribuyen con 3.5 dólares a la utilidad, determine la nueva solución óptima para el problema de Giapetto.

b Demuestre que siempre que la contribución a la utilidad por parte de los trenes (x_2) esté entre 1.50 y 3 dólares la base actual sigue siendo óptima.

c Demuestre que si se dispone de entre 80 y 120 horas de acabado, la base actual es óptima. Determine la nueva solución óptima para Giapetto si se tuvieran disponibles 90 horas de acabado.

d Demuestre que siempre que la demanda de soldados sea de por lo menos 20 la base actual seguirá siendo óptima.

e Giapetto planea manufacturar barcos de juguete. La producción de un barco de juguete requiere 2 horas de carpintería y 1 hora de acabado. La demanda de barcos de juguete es ilimitada. Si un barco contribuye con 3.5 dólares a la utilidad, ¿deberá Giapetto fabricar barcos de juguete?

TABLA 12

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ld	Variable básica
1	0	0	1	1	0	180	$z = 180$
0	1	0	1	−1	0	20	$x_1 = 20$
0	0	1	−1	2	0	60	$x_2 = 60$
0	0	0	−1	1	1	20	$s_3 = 20$

Grupo B

8 Considere el problema de Dorian Auto (ejemplo 2 del capítulo 3):

$$\begin{aligned} \min z &= 50x_1 + 100x_2 \\ \text{s.a} \quad 7x_1 + 2x_2 &\ge 28 \quad \text{(MAI)} \\ 2x_1 + 12x_2 &\ge 24 \quad \text{(VAI)} \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(x_1 = anuncios en los programas de comedia y x_2 = anuncios en el futbol). El tableau óptimo se da en la tabla 13. Recuerde que en el caso de un problema de minimización, un tableau es óptimo si y sólo si el coeficiente de cada variable es no positivo en el renglón 0 y el lado derecho de cada restricción es no negativo.

a Determine el intervalo de valores para el costo de un anuncio en programas de comedia (en la actualidad 50 000 dólares) para el cual la base actual se conserva óptima.

b Encuentre el intervalo de valores para la cantidad de exposiciones MAI necesarias (en la actualidad 28 millones) para la cual la base actual sigue siendo óptima. Si se requirieran 40 millones de exposiciones MAI, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

c Suponga que un anuncio en un noticiario cuesta 10 000 dólares y llega a 12 millones de MAI y 7 millones de VAI. ¿Debería Dorian anunciarse en el noticiario?

9 Demuestre que si el lado derecho de la i-ésima restricción aumenta Δ, entonces el lado derecho del tableau óptimo está dado por (lado derecho original del tableau óptimo) + Δ (columna i de B^{-1}).

TABLA 13

z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	ld
1	0	0	−5	−7.5	$5 - M$	$7.5 - M$	320
0	1	0	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{40}$	3.6
0	0	1	$\frac{1}{40}$	$-\frac{7}{80}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{7}{80}$	1.4

6.4 Análisis de sensibilidad cuando cambia más de un parámetro: regla del 100%[†]

En esta sección se ilustra el uso de LINDO para determinar si la base actual aún es óptima cuando cambia más de un coeficiente de la función objetivo o el lado derecho.

Regla del 100% para cambiar coeficientes de la función objetivo

Hay dos casos por considerar que dependen de si cambia, en el tableau óptimo, el coeficiente de cualquier variable de la función objetivo con costo reducido cero.

[†]Esta sección comprende temas que se pueden omitir sin pérdida de continuidad.

Caso 1 Todas las variables cuyos coeficientes de la función objetivo se modificaron tienen costos reducidos no cero en el renglón 0 óptimo.

Caso 2 Por lo menos una variable cuyo coeficiente de la función objetivo cambió tiene un costo reducido de cero.

En el caso 1, la base actual es óptima si y sólo si el coeficiente de cada variable de la función objetivo se conserva dentro del intervalo permisible† dado en los resultados que proporciona LINDO (véase problema 10 al final de esta sección). Si la base actual es óptima, entonces tanto los valores de las variables de decisión como la función objetivo se mantienen sin cambio. Si el coeficiente para cualquier variable de la función objetivo está fuera del intervalo admisible, entonces la base actual ya no es óptima.

Los dos ejemplos siguientes del caso 1 se refieren al problema de dieta de la sección 3.4. Los resultados de LINDO para este problema se presentan en la figura 6.

EJEMPLO 2 Regla 100% para coeficientes de la función objetivo 1

Suponga que el precio de las barras de chocolate se incrementa a 60 centavos y una rebanada de pastel de queso con piña disminuye a 50 centavos. ¿La base actual sigue siendo óptima? ¿Cuál sería la nueva solución óptima?

Solución Tanto las barras de chocolate como el pastel de queso con piña tienen costos reducidos no cero, por eso es el caso 1. A partir de la figura 6 y el análisis del caso 1 se ve que la base actual es óptima si y sólo si

$$22.5 = 50 - 27.5 \leq \text{costo de una barra de chocolate} \leq 50 + \infty = \infty$$

$$30 = 80 - 50 \leq \text{costo de una rebanada de pastel de queso con piña} \leq 80 + \infty = \infty$$

Puesto que los nuevos precios satisfacen ambas condiciones, la base actual sigue siendo óptima. El valor óptimo de z y el valor óptimo de las variables de decisión se conservan también sin cambio.

EJEMPLO 3 Regla del 100% para coeficientes de la función objetivo 2

Si los precios caen a 40 centavos en el caso de la barra de chocolate y a 25 centavos en el de la rebanada de pastel de queso con piña, ¿la base actual sigue siendo óptima?

Solución Al examinar la figura 6 se ve que se aplica de nuevo el caso 1. El costo de la barra de chocolate se mantiene en su intervalo admisible, lo cual no sucede con el precio del pastel de queso con piña. Por lo tanto, la base actual ya no es óptima y se tiene que volver a resolver el problema.

En el caso 2, es posible demostrar a menudo que la base actual es aún óptima al aplicar la **Regla del 100%.** Sea

c_j = coeficiente original de la función objetivo para x_j

Δc_j = cambio en c_j

I_j = incremento permisible máximo en c_j para el cual la base actual sigue siendo óptima (a partir de los resultados de LINDO)

D_j = decremento permisible máximo en c_j para el cual la base actual aún es óptima (a partir de los resultados de (LINDO)

†El intervalo admisible para c_j es el intervalo de valores para el cual la base actual sigue siendo óptima (suponiendo que sólo c_j cambie).

```
MIN      50 BR + 20 IC + 30 COLA + 80 PC
SUBJECT TO
       2)    400 BR + 200 IC + 150 COLA + 500 PC >=   500
       3)    3 BR + 2 IC >=     6
       4)    2 BR + 2 IC + 4 COLA + 4 PC >=    10
       5)    2 BR + 4 IC +  COLA + 5 PC >=     8
END

   LP OPTIMUM FOUND   AT STEP      5

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

 1)          90.000000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      BR        0.000000          27.500000
      IC        3.000000           0.000000
    COLA        1.000000           0.000000
      PC        0.000000          50.000000

  ROW      SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)      250.000000           0.000000
      3)        0.000000          -2.500000
      4)        0.000000          -7.500000
      5)        5.000000           0.000000

NO. ITERATIONS=      5

   RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   COEF            INCREASE            DECREASE
      BR         50.000000         INFINITY           27.500000
      IC         20.000000          18.333334          5.000000
    COLA         30.000000          10.000000         30.000000
      PC         80.000000         INFINITY           50.000000

                              RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW          CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
                    RHS            INCREASE            DECREASE
       2        500.000000         250.000000          INFINITY
       3          6.000000           4.000000          2.857143
       4         10.000000         INFINITY            4.000000
       5          8.000000           5.000000          INFINITY
```

FIGURA 6
Resultados de LINDO para el problema de la dieta

Para toda variable x_j se define la razón r_j:

$$\text{Si} \quad \Delta c_j \geq 0, \qquad r_j = \frac{\Delta c_j}{I_j}$$

$$\text{Si} \quad \Delta c_j \leq 0, \qquad r_j = \frac{-\Delta c_j}{D_j}$$

Si c_j se mantiene sin cambio, entonces $r_j = 0$. Por lo tanto, r_j mide la razón del cambio real en c_j con respecto al cambio admisible máximo en c_j que podría mantener óptima la base actual. Si sólo un coeficiente de la función objetivo cambiara, entonces la base actual seguiría siendo óptima si $r_j \leq 1$ (en forma equivalente, si r_j, expresada como porcentaje, fuera menor o igual a 100%). La regla del 100% para los coeficientes de la función objetivo es una generalización de esta idea. Ésta establece que si $\Sigma r_j \leq 1$, entonces, se puede estar seguro de que la base actual continúa siendo óptima. Si $\Sigma r_j > 1$, entonces la base actual podría ser óptima o podría no serlo; no podemos estar seguros. Si la base actual sigue siendo óptima, entonces los valores de las variables de decisión se conservan sin cambio, pero el valor óptimo de z podría variar. Si desea una demostración de la regla del 100% refiérase a Bradley, Hax, y Magnanti (1977). La demostración se esboza en el problema 11 al final de esta sección.

Los dos ejemplos siguientes del caso se refieren al problema de los muebles Dakota, y con ellos se ilustra el uso de la regla del 100%.

EJEMPLO 4 La base ya no es óptima

Suponga que el precio del escritorio aumenta a 70 dólares y que el de las sillas disminuye a 18 dólares. ¿La base actual sigue siendo óptima? ¿Cuál es el nuevo valor óptimo de z?

Solución Puesto que los costos reducidos de escritorios y sillas son cero (son variables básicas), se tiene que aplicar la regla del 100% para determinar si la base actual aún es óptima. Se pueden escribir las ecuaciones siguientes tomando en cuenta que x_1 = escritorios, x_2 = mesas y x_3 = sillas:

$$\Delta c_1 = 70 - 60 = 10, \quad I_1 = 20, \quad \text{entonces} \quad r_1 = \tfrac{10}{20} = 0.5$$
$$\Delta c_3 = 18 - 20 = -2, \quad D_3 = 5, \quad \text{entonces} \quad r_3 = \tfrac{2}{5} = 0.4$$
$$\Delta c_2 = 0, \quad \text{entonces} \quad r_2 = 0$$

Como $r_1 + r_2 + r_3 = 0.9 \leq 1$, la base actual aún es óptima. Otra manera de analizarlo es la siguiente: c_1 cambió 50% de la cantidad que estaba "permitido" cambiar y c_3 cambió 40% de la cantidad que estaba "permitido" cambiar. Como 50% + 40% = 90% ≤ 100%, la base actual sigue siendo óptima.

La base actual se mantiene óptima, por eso los valores de las variables de decisión no varían. Obsérvese que el ingreso de cada escritorio se incrementó 10 dólares y el ingreso de cada silla se redujo 2 dólares. Dakota todavía fabrica 2 escritorios y 8 sillas, así que el ingreso aumenta en $2(10) - 8(2) = 4$ dólares y es entonces $280 + 4 = 284$ dólares.

EJEMPLO 5 Regla del 100% y base óptima 1

Demuestre que si el precio de las mesas aumenta a 33 dólares y el de los escritorios disminuye a 58 dólares, la regla del 100% no indica si la base actual continúa siendo óptima.

Solución En este caso,

$$\Delta c_1 = 58 - 60 = -2, \quad D_1 = 4, \quad \text{entonces} \quad r_1 = \tfrac{2}{4} = 0.5$$
$$\Delta c_2 = 33 - 30 = 3, \quad I_2 = 5, \quad \text{entonces} \quad r_2 = \tfrac{3}{5} = 0.6$$
$$\Delta c_3 = 0, \quad \text{entonces} \quad r_3 = 0$$

Como $r_1 + r_2 + r_3 = 0.5 + 0.6 + 0 = 1.1 > 1$, la regla del 100% no da información acerca de si la base actual es óptima.

La regla del 100% cuando se modifican los lados derechos

Hay dos casos por considerar, que dependen de si alguna de las restricciones cuyo lado derecho se modifica es activa:

Caso 1 Todas las restricciones cuyo lado derecho se modifica son restricciones inactivas.

Caso 2 Por lo menos una de las restricciones cuyo lado derecho cambia es una restricción activa (es decir, tiene holgura cero o cero excedente).

En el caso 1, la base actual sigue siendo óptima si y sólo si cada lado derecho se mantiene dentro de su intervalo admisible.† Entonces los valores de las variables de decisión y la función objetivo óptima se conservan sin cambios. Si el lado derecho de alguna restricción queda afuera de su intervalo admisible, entonces la base actual ya no es óptima (véase problema 12 al final de esta sección). Los ejemplos siguientes referentes al problema de la dieta ilustran la aplicación del caso 1.

†El intervalo admisible para un lado derecho b_i es el intervalo de valores para el cual la base actual es óptima (si se supone que no cambian los otros parámetros del PL).

EJEMPLO 6 Nueva solución óptima

Suponga que las calorías necesarias disminuyen a 400 calorías y que la grasa necesaria aumenta a 10 onzas. ¿Sigue siendo óptima la base actual? ¿Cuál es la nueva solución óptima?

Solución Tanto la restricción de las calorías como la restricción de la grasa son inactivas, por eso se aplica el caso 1. En la figura 6 se ve que los intervalos admisibles para las restricciones de las calorías y la grasa son

$$-\infty = 500 - \infty \leq \text{calorías necesarias} \leq 500 + 250 = 750$$

$$-\infty = 8 - \infty \leq \text{grasa necesaria} \leq 8 + 5 = 13$$

Las nuevas cantidades necesarias de calorías y de grasa se conservan dentro de sus intervalos admisibles, así que la base actual es aún óptima. El valor óptimo de z y los valores de las variables de decisión no cambian.

EJEMPLO 7 La base ya no es óptima

Suponga que la cantidad de calorías necesaria disminuye a 400 calorías y que la grasa necesaria aumenta a 15 onzas. ¿Todavía es óptima la base actual?

Solución La cantidad de grasa necesaria ya no está dentro de su intervalo admisible, por eso la base actual ya no es óptima.

En el caso 2 se puede demostrar que la base actual sigue siendo óptima por medio de otra versión de la regla del 100%. Sea

b_j = lado derecho actual de la j-ésima restricción (del renglón $j + 1$ en los resultados que proporciona LINDO)

Δb_j = cambio en b_j

I_j = incremento permisible máximo en b_j para el cual la base actual sigue siendo óptima (a partir de los resultados de LINDO)

D_j = decremento admisible máximo en b_j para el cual la base actual aún es óptima (a partir de los resultados de (LINDO)

Para cada restricción, calcule la razón r_j:

$$\text{Si} \quad \Delta b_j \geq 0, \qquad r_j = \frac{\Delta b_j}{I_j}$$

$$\text{Si} \quad \Delta b_j \leq 0, \qquad r_j = \frac{-\Delta b_j}{I_j}$$

Si sólo se modificara el lado derecho j-ésimo, entonces la base actual seguiría siendo óptima si $r_j \leq 1$. Obsérvese asimismo que r_j es la fracción del cambio admisible máximo (en el sentido de que la base actual se conserva óptima) que ha ocurrido en b_j. La regla del 100% establece que si $\Sigma r_j \leq 1$, entonces la base actual es óptima. Si $\Sigma r_j > 1$, entonces la base actual podría o no ser óptima; no es posible estar seguro (véase una demostración preliminar de este resultado en el problema 13 al final de esta sección). Los ejemplos siguientes ilustran el uso de la regla del 100% para los lados derechos.

EJEMPLO 8 La base se conserva óptima

Suponga que están disponibles 22 horas de acabado y 9 de carpintería en el problema de Dakota. ¿Aún es óptima la base actual?

Solución Las restricciones de acabado y carpintería son activas, por eso estamos en el caso 2 y necesitamos usar la regla del 100%.

$$\Delta b_1 = 0, \quad \text{entonces} \quad r_1 = 0$$
$$\Delta b_2 = 22 - 20 = 2, \quad I_2 = 4, \quad \text{entonces} \quad r_2 = \tfrac{2}{4} = 0.5$$
$$\Delta b_3 = 9 - 8 = 1, \quad I_3 = 2, \quad \text{entonces} \quad r_3 = \tfrac{1}{2} = 0.5$$

Puesto que $r_1 + r_2 + r_3 = 1$, la base actual sigue siendo óptima.

EJEMPLO 9 Regla del 100% y base óptima 2

Para el problema de la dieta, suponga que la cantidad necesaria de chocolate aumenta a 8 onzas, y la de azúcar disminuye a 7 onzas. ¿Aún es óptima la base actual?

Solución Las restricciones de chocolate y azúcar son activas, así que estamos en el caso 2 y necesitamos usar la regla del 100%.

$$\Delta b_2 = 8 - 6 = 2, \quad I_2 = 4, \quad \text{entonces} \quad r_2 = \tfrac{2}{4} = 0.5$$
$$\Delta b_3 = 7 - 10 = -3, \quad D_3 = 4, \quad \text{entonces} \quad r_3 = \tfrac{3}{4} = 0.75$$
$$\Delta b_1 = \Delta b_4 = 0, \quad \text{entonces} \quad r_1 = r_4 = 0$$

Puesto que $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1.25 > 1$, la regla del 100% no proporciona información alguna acerca de si la base actual sigue siendo óptima.

PROBLEMAS

Grupo A

Las preguntas siguientes se refieren al problema de la dieta:

1 Si el costo de una barra de chocolate es 70 centavos, y una rebanada de pastel de queso cuesta 60 centavos, ¿la base actual sigue siendo óptima?

2 Si el costo de una barra de chocolate es 20 centavos y una rebanada de pastel de queso es de 1 dólar, ¿la base actual sigue siendo óptima?

3 Si la cantidad necesaria de grasa disminuye a 3 onzas y la cantidad de calorías aumenta a 800 calorías, ¿la base actual se mantiene óptima?

4 Si la cantidad necesaria de grasa es de 6 onzas y la cantidad de calorías es de 600, ¿la base actual se mantiene óptima?

5 Demuestre que la base actual sigue siendo óptima si el precio de una botella de bebida de cola es 15 centavos y el de una rebanada de pastel de queso es de 60 centavos. ¿Cuál será la nueva solución óptima del problema de la dieta?

6 Demuestre que la base actual sigue siendo óptima si se requieren 8 onzas de chocolate y 60 calorías.

Las preguntas siguientes se refieren al problema de Dakota.

7 Suponga que el precio de un escritorio es de 65 dólares, el de una mesa es de 25 dólares y el de una silla es de 18 dólares. Demuestre que la base actual sigue siendo óptima. ¿Cuál es el nuevo valor óptimo de z?

8 Suponga que se dispone de 60 pies tablón de madera y 23 horas de acabado. Demuestre que la base actual sigue siendo óptima.

9 Suponga que se dispone de 40 pies tablón de madera, 21 horas de acabado y 8.5 horas de carpintería. Demuestre que la base actual sigue siendo óptima.

Grupo B

10 Demuestre el resultado del caso 1 para los coeficientes de la función objetivo.

11 Con el fin de ilustrar la validez de la regla del 100% para los coeficientes de la función objetivo, considere un PL con cuatro variables de decisión (x_1, x_2, x_3 y x_4) y dos restricciones en las cuales x_1 y x_2 son variables básicas en la base óptima. Suponga que (si sólo cambiara un solo coeficiente de la función objetivo) se sabe que la base actual es óptima para $L_1 \leq c_1 \leq U_1$ y $L_2 \leq c_2 \leq U_2$. Suponga que cambiamos c_1 a $c_1' = c_1 + \Delta c_1$ y c_2 a $c_2' = c_2 + \Delta c_2$, donde $\Delta c_1 > 0$ y $\Delta c_2 < 0$. Sea

$$\frac{\Delta c_1}{U_1 - c_1} = r_1 \quad \text{y} \quad \frac{-\Delta c_2}{c_2 - L_2} = r_2$$

Demuestre que si $r_1 + r_2 \leq 1$, la base actual se mantiene óptima. *Sugerencia*: cualquier variable x_j es valuada en $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$. Para demostrar que para los nuevos valores de c_1 y c_2, todas las variables aun valuadas no negativas aplican el hecho de que

$$[c_1', c_2'] = r_1[U_1, c_2] + r_2[c_1, L_2] + (1 - r_1 - r_2)[c_1, c_2]$$

12 Demuestre el resultado del caso 1 para los lados derechos. Aplique el hecho de que si una restricción es inactiva en la solución óptima, entonces su variable de holgura o de excedente está en la base actual óptima, y la columna correspondiente de B^{-1} tendrá un solo 1 y los demás elementos serán iguales a 0.

13 En este problema se proporciona una demostración sin detalles de la regla del 100% para los lados derechos. Considere una PL con dos restricciones y lados derechos b_1 y b_2. Suponga que si sólo uno de los lados derechos cambiara, la base sigue siendo óptima para $L_1 \leq b_1 \leq U_1$ y $L_2 \leq$

$b_2 \le U_2$. Suponga que el lado derecho cambia a $b_1' = b_1 + \Delta b_1$ y $b_2' = b_2 + \Delta b_2$, donde $\Delta b_1 > 0$ y $\Delta b_2 < 0$. Sea

$$r_1 = \frac{\Delta b_1}{U_1 - b_1} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-\Delta b_2}{b_2 - L_2}$$

Demuestre que si $r_1 + r_2 \le 1$, la base actual sigue siendo óptima. (*Sugerencia*: usted debe demostrar que

$$B^{-1}\begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplique el hecho de que

$[b_1', b_2'] = r_1[U_1, b_2] + r_2[b_1, L_2] + (1 - r_1 - r_2)[b_1, b_2]$

para demostrarlo.)

6.5 Determinación del dual de un PL

Asociado a un PL hay otro PL llamado **dual.** Es esencial conocer la relación entre un PL y su dual para entender los temas avanzados de programación lineal y no lineal. Esta relación es importante, porque nos brinda reflexiones económicas interesantes. El conocimiento de la dualidad también proporciona mayor capacidad de penetración en el análisis de sensibilidad.

En esta sección se explica cómo determinar el dual de cualquier PL; en la sección 6.6 se trata la interpretación económica del dual, y la relación que existe entre un PL y su dual se trata en las secciones 6.7 a 6.10.

Cuando se toma el dual de un PL dado, nos referimos a él como el **primal**. Si el primal es un problema de maximización, entonces el dual será un problema de minimización, y viceversa. Por cuestiones de conveniencia, las variables para un problema de maximización se definen como $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ y las variables para el problema de minimización, como $w, y_1, y_2, \ldots, y_m$. Primero se explica cómo determinar el dual de un problema de maximización en el cual se requiere que todas las variables sean no negativas y todas las restricciones sean restricciones $\le$ (llamado **problema de maximización normal**). Un problema de este tipo se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \\
x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{16}$$

El dual de un problema de maximización normal como (16) se define como

$$\begin{aligned}
\min w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_mx_m \\
\text{s.a} \quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m &\ge c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m &\ge c_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m &\ge c_n \\
y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{17}$$

Un problema de minimización tal como (17) que tiene todas sus restricciones $\ge$ y todas las variables no negativas, se denomina **problema de minimización normal**. Si el primal es un problema de minimización normal tal como (17), entonces definimos que el dual de (17) es (16).

Determinación del dual de un problema de maximización o de minimización normal

Un método tabular facilita encontrar el dual de un PL. Si el primal es un problema de maximización normal, entonces se puede leer de lado a lado (tabla 14); el dual se encuentra

TABLA 14
Determinación del dual de un problema de maximización o de minimización normal

min w		max z ($x_1 \geq 0$)	($x_2 \geq 0$)	$\cdots$	($x_n \geq 0$)	
		x_1	x_2		x_n	
($y_1 \geq 0$)	y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$\leq b_1$
($y_2 \geq 0$)	y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$\leq b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
($y_m \geq 0$)	y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	$\leq b_m$
		$\geq c_1$	$\geq c_2$		$\geq c_n$	

al leer hacia abajo. De igual manera, si el primal es un problema de minimización normal, se le encuentra al leer hacia abajo; el dual se determina al leer de lado a lado de la tabla. El uso de la tabla se ilustra mediante la determinación del dual del problema de Dakota y el dual del problema de la dieta. El problema de Dakota es

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{s.a} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \quad \text{(Restricción de la madera)} \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \quad \text{(Restricción del acabado)} \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \quad \text{(Restricción de la carpintería)} \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

donde

x_1 = cantidad de escritorios fabricados

x_2 = cantidad de mesas fabricadas

x_3 = cantidad de sillas fabricadas

Si aplicamos el formato de la tabla 14, leemos el problema de Dakota en la tabla 15. Entonces, si leemos hacia abajo encontramos que el dual de Dakota es

$$
\begin{aligned}
\min w = {} & 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\
\text{s.a.} \quad & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60 \\
& 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 \\
& y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

El método tabular para la determinación del dual hace evidente que la *restricción* dual i-ésima corresponde a la *variable* primal i-ésima x_i. Por ejemplo, la primera restricción dual corresponde a x_i (escritorios), porque cada número proviene de la columna de x_1 (es-

TABLA 15
Determinación del dual del problema de Dakota

min w		max z ($x_1 \geq 0$)	($x_2 \geq 0$)	($x_3 \geq 0$)	
		x_1	x_2	x_3	
($y_1 \geq 0$)	y_1	8	6.	1	≤ 48
($y_2 \geq 0$)	y_2	4	2.	1.5	≤ 20
($y_3 \geq 0$)	y_3	2	1.5	0.5	≤ 8
		≥ 60	≥ 30	≥ 20	

critorios) del primal. De igual manera, la segunda restricción dual corresponde a x_2 (mesas), y la tercera restricción dual corresponde a x_3 (sillas). De la misma manera, la *variable* dual y_i se asocia con la i-ésima restricción primal. Por ejemplo, y_1 se asocia con la primera restricción primal (restricción de la madera) porque cada coeficiente de y_1 en el dual proviene de la restricción de la madera o de la disponibilidad de madera. La importancia de estas correspondencias entre el primal y el dual se aclara en la sección 6.6.

Enseguida se encuentra el dual del problema de la dieta. Puesto que este problema es un problema de minimización, se sigue la convención de usar w para denotar la función objetivo y y_1, y_2, y_3 y y_4 para las variables. Entonces el problema de la dieta se podría escribir como sigue

$$\begin{array}{llr}
\min w = 50y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 80y_4 & & \\
\text{s.a} \quad 400y_1 + 200y_2 + 150y_3 + 500y_4 \geq 500 & & \text{(Restricción de las calorías)} \\
\quad 3y_1 + 2y_2 \geq 6 & & \text{(Restricción del chocolate)} \\
\quad 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 \geq 10 & & \text{(Restricción del azúcar)} \\
\quad 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 5y_4 \geq 8 & & \text{(Restricción de la grasa)} \\
\quad y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 & &
\end{array}$$

donde

y_1 = barras de chocolate ingeridas diariamente

y_2 = bolas de helado de crema de chocolate ingeridas por día

y_3 = botellas de bebida consumidas al día

y_4 = rebanadas de pastel de queso y piña consumidas al día

El primal es un problema de minimización normal. Por eso lo podemos leer hacia abajo, y su dual se lee de lado a lado, en la tabla 16. Encontramos que el dual del problema de la dieta es

$$\begin{aligned}
\max z = {} & 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4 \\
\text{s.a} \quad & 400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 50 \\
& 200x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 20 \\
& 150x_1 + 4x_3 + x_4 \leq 30 \\
& 500x_1 + 4x_3 + 5x_4 \leq 80 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Como en el problema de Dakota, se observa que la restricción i-ésima dual corresponde a la variable i-ésima primal. Por ejemplo, se podría pensar que la tercera restricción dual es la restricción de la bebida. Asimismo, la variable i-ésima dual corresponde a la restricción i-ésima primal. Por ejemplo, se podría pensar que x_3 (la tercera variable dual) es la variable del azúcar dual.

TABLA 16
Determinación del dual del problema de la dieta

		max z				
min w		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$(x_3 \geq 0)$	$(x_4 \geq 0)$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
$(y_1 \geq 0)$	y_1	400	3	2	2	≤ 50
$(y_2 \geq 0)$	y_2	200	2	2	4	≤ 20
$(y_3 \geq 0)$	y_3	150	0	4	1	≤ 30
$(y_4 \geq 0)$	y_4	500	0	4	5	≤ 80
		≥ 500	≥ 6	≥ 10	≥ 8	

Determinación del dual de un PL no normal

Infortunadamente, muchos PLs son problemas de maximización o de minimización no normales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ & x_2 \text{ nrs} \end{aligned} \tag{18}$$

no es un problema de maximización normal porque hay una restricción $\geq$, una restricción de igualdad y tiene una variable sin restricción de signo. Considere el siguiente como otro ejemplo de PL no normal

$$\begin{aligned} \min w &= 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ \text{s.a} \quad y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2 \\ y_1 \qquad - y_3 &\geq 1 \\ y_2 + y_3 &= 1 \\ 2y_1 + y_2 \qquad &\leq 3 \\ y_1 \text{ nrs},\ y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Este PL es un problema de minimización no normal, porque contiene una restricción de igualdad, una restricción $\leq$ y una variable que no tiene restricción de signo.

Por fortuna, se puede transformar el PL en una forma normal ((16) o (17)). Para pasar un problema de maximización en la forma normal se procede como sigue:

Paso 1 Multiplique cada restricción $\geq$ por -1 para convertirla en una restricción $\leq$ Por ejemplo, en (18), $2x_1 - x_2 \geq 3$ se transformaría en $-2x_1 + x_2 \leq -3$.

Paso 2 Reemplace cada restricción de igualdad por dos restricciones de desigualdad (una restricción $\leq$ y una restricción $\geq$). Luego convierta la restricción $\geq$ en una restricción $\leq$. Por ejemplo, en (18), reemplazaríamos $x_1 + x_2 = 2$ por las dos desigualdades $x_1 + x_2 \geq 2$ y $x_1 + x_2 \leq 2$. Entonces convertiríamos $x_1 + x_2 \geq 2$ en $-x_1 - x_2 \leq -2$. El resultado neto es que $x_1 + x_2 = 2$ es reemplazado por las dos desigualdades $x_1 + x_2 \leq 2$ y $-x_1 - x_2 \leq -2$.

Paso 3 Como en la sección 4.14, reemplace cada variable nrs x_i por $x_i = x' - x_i''$ donde $x_i' \geq 0$ y $x_i'' \geq 0$. En (18) reemplazaríamos x_2 por $x_2' - x_2''$.

Después de terminar estas transformaciones, las ecuaciones (18) se convirtieron en el PL (equivalente) siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2' - x_2'' \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2' - x_2'' &\leq 2 \\ -x_1 - x_2' + x_2'' &\leq -2 \\ -2x_1 + x_2' - x_2'' &\leq -3 \\ x_1 - x_2' + x_2'' &\leq 1 \\ x_1, x_2', x_2'' &\geq 0 \end{aligned} \tag{18'}$$

Puesto que (18′) es un problema de maximización normal, se podrían usar (16) y (17) para encontrar el dual de (18′).

Si el primal no es un problema de minimización normal, entonces es posible transformarlo en un problema de minimización normal como se indica a continuación:

Paso 1 Convierta cada restricción $\leq$ en una restricción $\geq$ mediante la multiplicación por -1. Por ejemplo, en (19), $2y_1 + y_2 \leq 3$ se transforma en $-2y_1 - y_2 \geq -3$.

Paso 2 Reemplace cada restricción de igualdad por una restricción $\leq$ y una restricción $\geq$. Luego transforme la restricción $\leq$ en una restricción $\geq$. Por ejemplo, en (19), la restricción $y_2 + y_3 = 1$ es equivalente a $y_2 + y_3 \leq 1$ y $y_2 + y_3 \geq 1$. Al transformar $y_2 + y_3 \leq 1$ en $-y_2 - y_3 \geq -1$, se observa que es posible reemplazar la restricción $y_2 + y_3 = 1$ por las dos restricciones $y_2 + y_3 \geq 1$ y $-y_2 - y_3 \geq -1$.

Paso 3 Reemplace cualquier variable nrs y_i por $y_i = y_i' - y_i''$, donde $y_i' \geq 0$ y $y_i'' \geq 0$. Si se aplican estos pasos a (19), se obtiene el problema de minimización estándar siguiente:

$$
\begin{aligned}
\min w &= 2y_1' - 2y_1'' + 4y_2 + 6y_3 \\
\text{s.a} \quad & y_1' - y_1'' + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
& y_1' - y_1'' \qquad\quad - y_3 \geq 1 \\
& \qquad\qquad\quad y_2 + y_3 \geq 1 \\
& \qquad\qquad - y_2 - 6y_3 \geq -1 \\
& -2y_1' + 2y_1'' - y_2 \qquad \geq -3 \\
& y_1', y_1'', y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
\tag{19'}
$$

Como (19′) es un problema de minimización normal en la forma estándar se podría usar (16) y (17) para encontrar su dual.

Es posible hallar el dual de un PL no normal sin efectuar todas las transformaciones que se han descrito usando las reglas siguientes.[†]

Determinación del dual de un problema de maximización no normal

Paso 1 Llene la tabla 14 de tal manera que el primal se pueda leer de lado a lado.

Paso 2 Luego de efectuar los cambios siguientes, el dual se puede leer hacia abajo de la manera usual: (a) si la restricción i-ésima del primal es una restricción $\geq$, entonces la variable y_i correspondiente tiene que cumplir $y_i \leq 0$. (b) Si la i-ésima restricción primal es una restricción de igualdad, entonces la variable dual y_i ahora no tiene restricción de signo. (c) Si la variable i-ésima primal no tiene restricción de signo, entonces la restricción i-ésima dual será una restricción de igualdad.

Cuando este método se aplica a (18), el formato de la tabla 14 genera la tabla 17. Se han marcado mediante un asterisco (*) los lugares donde se tienen que usar las reglas para determinar parte del dual. Por ejemplo, x_2 nrs ocasiona que la segunda restricción del dual sea una restricción de igualdad. Asimismo, la primera restricción del primal, por ser una restricción de igualdad, hace a y_i nrs, y la segunda restricción del primal, por ser una restricción $\geq$, hace a $y_2 \leq 0$. Al agregar la información faltante al otro lado de los lugares con asterisco se obtiene la tabla 18. Al leer el dual hacia abajo se tiene

$$
\begin{aligned}
\min w &= 2y_1 + 3y_2 + y_3 \\
\text{s.a} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
& y_1 - y_2 - y_3 = 1 \\
& y_1 \text{ nrs}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

En la sección 6.8 se ofrece una explicación intuitiva de por qué una restricción de igualdad genera una variable dual sin restricción de signo, y por qué una restricción $\geq$ da una variable dual negativa.

Se pueden utilizar las reglas siguientes para encontrar el dual de un problema de minimización no normal.

[†]En los problemas 5 y 6, al final de esta sección, se demuestra que estas reglas son consistentes con tomar el dual del PL transformado por medio de (16) y (17).

TABLA 17
Determinación del dual del PL (18)

min w		max z ($x_1 \geq 0$)	(x_2 nrs)*	
		x_1	x_2	
	y_1	1	1	$=2$*
	y_2	2	-1	≥ 3*
($y_3 \geq 0$)	y_3	1	-1	≤ 1
		≥ 2	$=1$	

TABLA 18
Determinación del dual del PL (18) (continuación)

min w		max z ($x_1 \geq 0$)	(x_2 nrs)	
		x_1	x_2	
(y_1 nrs)	y_1	1	1	$=2$
($y_2 \leq 0$)	y_2	2	-1	≥ 3
($y_3 \geq 0$)	y_3	1	-1	≤ 1
		≥ 2	$=1$	

Determinación del dual de un problema de minimización no normal

Paso 1 Escriba el primal de manera que se pueda leer hacia abajo en la tabla 14.

Paso 2 Excepto por los cambios siguientes, el dual se puede leer de un lado al otro de la tabla: (a) si la i-ésima restricción del primal es una restricción $\leq$, entonces la variable x_i dual correspondiente debe satisfacer $x_i \leq 0$. (b) Si la i-ésima restricción del primal es una restricción de igualdad, entonces la variable x_i dual correspondiente no debe tener restricciones de signo. (c) Si la i-ésima variable primal y_i no tiene restricción de signo, entonces la i-ésima restricción del dual es una restricción de igualdad.

Cuando este método se aplica a (19), se obtiene la tabla 19. Los asteriscos (*) indican dónde se deben usar las nuevas reglas para determinar partes del dual. Como y_1 no tiene restricción de signo, la primera restricción del dual es una igualdad. La tercera restricción del primal es una igualdad, por eso la variable x_3 es nrs. Por último, como la cuarta restricción primal es una restricción $\leq$, la cuarta variable x_4 del dual debe satisfacer $x_4 \leq 0$. Ahora ya se puede completar la tabla (véase tabla 20). Al leer el dual de un lado al otro se tiene

TABLA 19
Determinación del dual del PL (19)

min w		max z ($x_1 \geq 0$)	($x_2 \geq 0$)			
		x_1	x_2	x_3	x_4	
(y_1 nrs)*	y_1	1	1	0	2	2
($y_2 \geq 0$)	y_2	2	0	1	1	≤ 4
($y_3 \geq 0$)	y_3	1	-1	1	0	≤ 6
		≥ 2	≥ 1	$=1$*	≤ 3*	

TABLA 20

Determinación del dual del PL (19) (continuación)

min w		max z				
		($x_1 \geq 0$)	($x_2 \geq 0$)	($x_3 \geq$ nrs)	($x_4 \leq 0$)	
		x_1	x_2	x_3	x_4	
(y_1 nrs)	y_1	1	1	0	2	$=2$
($y_2 \geq 0$)	y_2	2	0	1	1	≤ 4
($y_3 \geq 0$)	y_3	1	-1	1	0	≤ 6
		≥ 2	≥ 1	$=1$	≤ 3	

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + 2x_4 = 2 \\
& 2x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 \leq 4 \\
& x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ nrs}, x_4 \leq 0
\end{aligned}
$$

El lector podría comprobar que con estas reglas, el dual del dual es siempre el primal. Se ve fácilmente en el formato de la tabla 14 porque cuando usted obtiene el dual está cambiando de nuevo el PL a su posición original.

PROBLEMAS

Grupo A

Encuentre el dual de los PLs siguientes:

1
$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 - 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

2
$$
\begin{aligned}
\min w = {} & y_1 - y_2 \\
\text{s.a} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 4 \\
& y_1 + y_2 \geq 1 \\
& y_1 + 2y_2 \geq 3 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

3
$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 7 \\
& 2x_2 + x_3 \geq 6 \\
& x_1 + x_3 = 4 \\
& x_1 \geq 0, x_2, x_3 \text{ nrs}
\end{aligned}
$$

4
$$
\begin{aligned}
\min w = {} & 4y_1 + 2y_2 - y_3 \\
\text{s.a} \quad & y_1 + 2y_2 \leq 6 \\
& y_1 - y_2 + 2y_3 = 8 \\
& y_1, y_2 \geq 0, y_3 \text{ nrs}
\end{aligned}
$$

Grupo B

5 Este problema demuestra por qué la variable del dual para una restricción de igualdad no debe tener restricción de signo.

a Aplique las reglas dadas en el texto para hallar el dual de

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\
& 2x_1 + x_2 = 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

b Ahora transforme el PL del inciso (a) en la forma normal. Obtenga el dual del PL transformado mediante (16) y (17). Utilice y_2' y y_2'' como las variables del dual para las dos restricciones del primal derivadas de $2x_1 + x_2 = 5$.

c Sustituya $y_2 = y_2' - y_2''$ en la respuesta del inciso (b). Ahora demuestre que los dos duales obtenidos en los incisos (a) y (b) son equivalentes.

6 Este problema demuestra por qué una variable y_i del dual que corresponde a una restricción $\geq$ en un problema de maximización debe satisfacer $y_i \leq 0$.

a Mediante las reglas dadas en el texto encuentre el dual de

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 3x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1 \\
& -x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

b Transforme el PL del inciso (a) en un problema de maximización normal. Luego use (16) y (17) para hallar el dual del PL transformado. Sea $\bar{y}_2$ la variable del dual correspondiente a la segunda restricción del primal.

c Demuestre que, al definir $\bar{y}_2 = -y_2$, el dual en el inciso (a) es equivalente al dual del inciso (b).

6.6 Interpretación económica del problema dual

Interpretación del dual de un problema de maximización

El dual del problema de Dakota es

$$\begin{array}{llr} \min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 & & \\ \text{s.a} \quad 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60 & \text{(Restricción de los escritorios)} & \\ \quad\quad 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 & \text{(Restricción de las mesas)} & (20) \\ \quad\quad y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 & \text{(Restricción de las sillas)} & \\ \quad\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 & & \end{array}$$

La primera restricción del dual se relaciona con los escritorios, la segunda con las mesas y la tercera con las sillas. Asimismo, y_1 se relaciona con la madera, y_2 con las horas de acabado y y_3 con las horas de carpintería. La información pertinente acerca del problema de Dakota se proporciona en la tabla 21.

Ahora ya estamos listos para interpretar el dual (20) de Dakota. Suponga que un empresario desea comprar todos los recursos de Dakota. Luego el empresario debe determinar el precio que está dispuesto a pagar por una unidad de cada recurso de Dakota. Con esto en mente, definimos

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{precio pagado por 1 pie tablón de madera} \\ y_2 &= \text{precio pagado por 1 h de acabado} \\ y_3 &= \text{precio pagado por 1 h de carpintería} \end{aligned}$$

Los precios y_1, y_2 y y_3 de los recursos se deben determinar ahora resolviendo el dual (20) de Dakota. El precio total que se tiene que pagar por estos recursos es $48y_1 + 20y_2 + 8y_3$. Como el costo de comprar los recursos se debe minimizar,

$$\min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

es la función objetivo del dual de Dakota.

Al fijar los precios de los recursos, ¿qué restricciones enfrenta el empresario? Los precios de los recursos deben ser lo suficientemente altos para inducir a Dakota a venderlos. Por ejemplo, el empresario debe ofrecer a Dakota por lo menos 60 dólares por una combinación de recursos que comprenda 8 pies tablón de madera, 4 horas de acabado y 2 horas de carpintería, porque Dakota podría, si lo desea, usar los recursos para producir un escritorio que se puede vender a 60 dólares. El empresario ofrece $8y_1 + 4y_2 + 2y_3$ por los recursos utilizados para elaborar un escritorio, por eso tiene que escoger y_1, y_2 y y_3 para satisfacer.

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \geq 60$$

Pero ésta es justamente la primera restricción (o de los escritorios) del dual de Dakota. Un razonamiento similar muestra que por lo menos se deben pagar 30 dólares por los recursos utilizados para fabricar una mesa (6 pies tablón de madera, 2 horas de acabado y 1.5 horas de carpintería). Esto quiere decir que y_1, y_2 y y_3 tienen que satisfacer

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$$

TABLA 21
Información pertinente del problema de Dakota

Recurso	Recurso/ Producto: Escritorio	Mesa	Silla	Cantidad de Recursos disponibles
Madera (pie tablón)	8	6	1	48
Acabado (horas)	4	2	1.5	20
Carpintería (horas)	2	1.5	0.5	8
Precio de venta (dólares)	60	30	20	

Ésta es la segunda restricción (de las sillas) del dual de Dakota.

De manera similar, la tercera restricción (de las sillas) del dual,

$$y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$$

establece que por lo menos 20 dólares (el precio de una silla) se tiene que pagar por los recursos necesarios para fabricar una silla (1 pie tablón de madera, 1.5 h de acabado y 0.5 h de carpintería). También se deben mantener las restricciones de signo $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, y $y_3 \geq 0$. Al reunir todo se observa que la solución del dual del problema de Dakota sí da los precios de la madera, horas de acabado y horas de carpintería. El análisis anterior señala también que la variable i-ésima del dual de hecho corresponde de manera natural a la restricción i-ésima del primal.

En resumen, cuando el primal es un problema de maximización normal, las variables del dual se relacionan con el valor de los recursos que tiene disponibles el tomador de decisiones. Por esta razón, las variables del dual a menudo reciben el nombre de **precios sombra de los recursos.** Un análisis más completo se presenta en la sección 6.8.

Interpretación del dual de un problema de minimización

Para interpretar el dual de un problema de minimización, se considera el del problema de la dieta de la sección 3.4. En la sección 6.5 encontramos que el dual del problema de la dieta era

$$\begin{array}{lll}
\max z = 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4 & & \\
\text{s.a } 400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 50 & \text{(Restricción de la barra de chocolate)} & \\
\quad 200x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 20 & \text{(Restricción del helado)} & \textbf{(21)} \\
\quad 150x_1 \qquad\quad + 4x_3 + x_4 \leq 30 & \text{(Restricción de la bebida)} & \\
\quad 500x_1 \qquad\quad + 4x_3 + 5x_4 \leq 80 & \text{(Restricción del pastel de queso)} & \\
\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & &
\end{array}$$

La información para el problema de la dieta se presenta en la tabla 22. Para interpretar (21) suponga que Candice es una vendedora de "nutrientes", que vende calorías, chocolate, azúcar y grasa. Ella desea asegurar que la persona a dieta, el consumidor, satisfará todas las cantidades necesarias diarias mediante la compra de calorías, azúcar, grasa y chocolate. Entonces Candice debe determinar

x_1 = precio por caloría que se carga al consumidor

x_2 = precio por onza de chocolate que se carga al consumidor

x_3 = precio por onza de azúcar que se carga al consumidor

x_4 = precio por onza de grasa que se carga al consumidor

Candice desea maximizar su ingreso vendiendo al consumidor las raciones de nutrientes que se requieren al día. Como ella recibirá $500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4$ centavos en ingresos provenientes del consumidor, su objetivo es

$$\max z = 500x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4$$

TABLA 22
Información pertinente para el problema de la dieta

	Calorías	Chocolate (onzas)	Azúcar (onzas)	Grasa (onzas)	Precio (centavos)
Barra de chocolate	400	3	2	2	50
Helado	200	2	2	4	20
Bebida	150	0	4	1	30
Pastel de queso	500	0	4	5	80
Cantidades necesarias	500	6	10	8	

Ésta es la función objetivo para el dual del problema de la dieta. Pero al fijar los precios de los nutrientes, Candice debe establecer precios suficientemente bajos como para que el interés económico del consumidor sea comprar todos los nutrientes con ella. Por ejemplo, al comprar una barra de chocolate en 50 centavos, el consumidor puede obtener 400 calorías, 3 onzas de chocolate, 2 onzas de azúcar y 2 onzas de grasa. Así que Candice no puede cargar más de 50 centavos por esta combinación de nutrientes. Esto lleva a la siguiente restricción (de la barra de chocolate):

$$400x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 50$$

la primera restricción en el dual del problema de la dieta. Un razonamiento similar genera la segunda restricción del dual (helado), la tercera (restricción de la bebida) y la cuarta (restricción del pastel de queso). Se deben cumplir una vez más las restricciones de signo $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, y $x_4 \geq 0$.

Este análisis muestra que el valor óptimo de x_i se podría interpretar como un precio por una unidad del nutriente asociado con la i-ésima restricción del dual. Por consiguiente, x_1 sería el precio de una caloría, x_2 sería el precio de una onza de chocolate, y así sucesivamente. Nuevamente se observa que es razonable relacionar la variable i-ésima del dual (x_i) con la i-ésima restricción del primal.

En resumen, hemos demostrado que cuando el primal es un problema de maximización normal o un problema de minimización normal, el problema dual tiene una interpretación económica intuitiva. En la sección 6.8 se explica más acerca de la interpretación adecuada de las variables del dual.

PROBLEMA

Grupo A

1 Determine el dual del ejemplo 3 del capítulo 3 (una compañía de autos), y dé una interpretación económica del problema dual.

2 Encuentre el dual del ejemplo 2 del capítulo 3 (Dorian Auto) y dé una interpretación económica del problema dual.

6.7 Teorema del dual y sus consecuencias

En esta sección se trata uno de los resultados más importantes en la programación lineal: el teorema del dual. En esencia, el teorema del dual establece que el primal y el dual tienen valores iguales de la función objetivo óptima (si los problemas tienen soluciones óptimas). Este resultado ya es de por sí interesante, pero se verá que al demostrar el teorema del dual se consigue reflexionar mucho sobre la programación lineal.

Para simplificar la exposición, se supone que el primal es un problema de maximización normal con m restricciones y n variables. Entonces, el problema dual será un problema de minimización normal con m variables y n restricciones. En este caso, el primal y el dual se escriben como se indica a continuación:

Problema primal

$$\begin{array}{ll} \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & \\ \text{s.a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 & \\ \quad\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 & \\ \quad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots & \\ \quad\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i & (22) \\ \quad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots & \\ \quad\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m & \\ \quad\quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) & \end{array}$$

Problema dual (23)

$$
\begin{aligned}
\min w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
\text{s.a} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
& \vdots \\
& a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j \\
& \vdots \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\
& y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

Dualidad débil

Si elegimos cualquier solución factible para el primal y cualquier solución factible para el dual, el valor w para la solución factible del dual será por lo menos tan grande como el valor z para la solución factible del primal. Este resultado se establece formalmente en el lema 1.

LEMA 1

(Dualidad débil). Sea

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

cualquier solución factible para el primal y $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$ cualquier solución factible para el dual. Entonces, (valor z para $\mathbf{x}$) $\leq$ (valor w para $\mathbf{y}$).

Demostración Como $y_i \geq 0$, al multiplicar la restricción i-ésima del primal en (22) por y_i se obtendrá la desigualdad válida siguiente

$$
y_ia_{i1}x_1 + y_ia_{i2}x_2 + \cdots + y_ia_{in}x_n \leq b_iy_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{24}
$$

Al sumar las m desigualdades en (24), se tiene

$$
\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} y_ia_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{i=m} b_iy_i \tag{25}
$$

Como $x_j \geq 0$, al multiplicar la j-ésima restricción del dual en (23) por x_j se obtiene la desigualdad válida siguiente:

$$
x_ja_{1j}y_1 + x_ja_{2j}y_2 + \cdots + x_ja_{mj}y_m \geq c_jx_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}
$$

Al sumar las n desigualdades en (26) se tiene

$$
\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} y_ia_{ij}x_j \geq \sum_{j=1}^{j=n} c_jx_j \tag{27}
$$

Si se combinan (25) y (27) se llega a

$$
\sum_{j=1}^{j=n} c_jx_j \leq \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} y_ia_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{i=m} b_iy_i
$$

que es el resultado deseado.

Si se llega con facilidad a una solución factible para el dual o el primal, la dualidad débil se puede aplicar para encontrar un límite en el valor de la función objetivo óptima para el otro problema. Por ejemplo, al examinar el problema de Dakota, es fácil ver que $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ factible para el primal. Esta solución tiene un valor z de $60 + 30 + 20 = 110$. La dualidad débil ahora significa que cualquier solución factible del dual (y_1, y_2, y_3) debe satisfacer

$$48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \geq 110$$

Como el dual es un problema de minimización, y cualquier solución factible del dual debe tener $w \geq 110$, esto quiere decir que el valor w óptimo para el dual ≥ 110 (véase figura 7). Esto demuestra que la dualidad débil posibilita usar cualquier solución factible del primal para limitar el valor óptimo de la función objetivo del dual.

Es posible usar, de modo análogo, cualquier solución factible del dual para generar un límite en el valor óptimo de la función objetivo del primal. Por ejemplo, al examinar el dual del problema de Dakota es fácil verificar que $y_1 = 10$, $y_2 = 10$, $y_3 = 0$ es factible para el dual. Esta solución del dual tiene un valor de la función objetivo del dual de $48(10) + 20(10) + 8(0) = 680$. A partir de la dualidad débil se ve que cualquier solución factible del primal

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

debe satisfacer

$$60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \leq 680$$

Puesto que el primal es un problema de maximización y cada solución factible del primal tiene $z \leq 680$, se podría concluir que el valor de la función objetivo óptima del primal ≤ 680 (véase figura 8).

Si definimos

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

entonces para un punto

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

el valor de la función objetivo del primal se podría escribir como $\mathbf{cx}$ y para un punto $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$ el valor de la función objetivo se podría escribir como $\mathbf{yb}$. Ahora se aplica la dualidad débil para demostrar el siguiente resultado importante.

FIGURA 7
Ilustración de dualidad débil

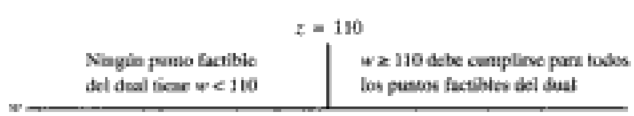
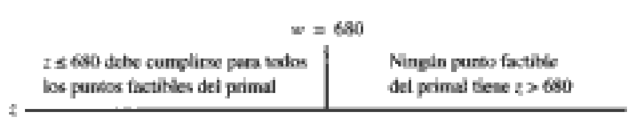


FIGURA 8
Ilustración de dualidad débil



LEMA 2

Sea

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

una solución factible para el primal y sea $\bar{\mathbf{y}} = [\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \cdots \quad \bar{y}_m]$ una solución factible del dual. Si $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es óptima para el primal y $\bar{\mathbf{y}}$ es óptima para el dual.

Demostración De la dualidad débil sabemos que para cualquier punto $\mathbf{x}$ factible del primal,

$$\mathbf{cx} \le \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$$

Por lo tanto, cualquier punto factible del primal tiene que generar un valor z que no sobrepase $\bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$. Puesto que $\bar{\mathbf{x}}$ es factible para el primal y tiene un valor de la función objetivo del primal de $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b}$, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ debe ser óptimo para el primal. De igual manera, como $\bar{\mathbf{x}}$ es factible para el primal, la dualidad débil implica que para cualquier punto $\mathbf{y}$ factible del dual,

$$\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} \le \mathbf{yb}$$

Por consiguiente, cualquier punto factible del dual genera un valor de la función objetivo que excede $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$. Puesto que $\bar{\mathbf{y}}\mathbf{b} = \mathbf{c}\bar{\mathbf{x}}$, es factible para el dual y tiene un valor de la función objetivo del dual $\bar{\mathbf{y}}$ debe ser una solución óptima para el dual.

El uso del lema 2 se ilustra mediante el problema de Dakota. El lector podría comprobar que

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

es factible para el primal y que $\bar{\mathbf{y}} = [0 \quad 10 \quad 10]$ es factible del dual. Como $\mathbf{c}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{y}}\mathbf{b} = 280$, del lema 2 se infiere que $\bar{\mathbf{x}}$ es óptimo para el primal de Dakota, y $\bar{\mathbf{y}}$ es óptimo para el dual de Dakota. El lema 2 cumple una función importante en la demostración del teorema del dual.

Teorema del dual

Antes de proceder con la demostración del teorema del dual, observemos que la dualidad débil se puede usar para verificar los resultados siguientes.

LEMA 3

Si el primal es no acotado, entonces el problema dual es no factible.

Demostración Véase problema 7 al final de esta sección.

LEMA 4

Si el dual es no acotado, entonces el primal es no factible.

Demostración Véase problema 8 al final de esta sección.

Los lemas 3 y 4 describen la relación entre el primal y el dual en dos casos relativamente poco importantes.[†]

Estos casos tienen interés limitado. El interés principal es la relación entre el primal y el dual cuando el primal tiene una solución óptima. En lo que sigue, $\bar{z}$ = valor óptimo de la función objetivo del primal y $\bar{w}$ = valor óptimo de la función objetivo del dual. Si el primal tiene una solución óptima, entonces el siguiente resultado importante (el teorema del dual) describe la relación entre el primal y el dual.

TEOREMA 1

Teorema del dual

Suponga que BV es una base óptima para el primal. Entonces $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ es una solución óptima del dual. Asimismo, $\bar{z} = \bar{w}$.

Demostración El razonamiento usado para demostrar el teorema del dual comprende los pasos siguientes:

1 Aplique el hecho de que BV es una base óptima para el primal para mostrar que $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ es factible para el dual.

2 Muestre que el valor de la función objetivo del primal óptimo = la función objetivo del dual para $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$.

3 Hemos encontrado una solución factible del primal (a partir de BV) y una solución factible del dual ($\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$) que tienen valores de la función objetivo iguales. Del lema 2, se puede concluir ahora que $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ es óptima para el dual y $\bar{z} = \bar{w}$.

Enseguida se comprueba el paso 1 para el caso en que el primal es un problema de maximización normal con n variables y m restricciones.[‡] Después de sumar las variables de holgura $s_1, s_2, \ldots, s_m$ al primal, se escriben los problemas primal y dual como sigue

Problema Primal (28)

$$
\begin{aligned}
\max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.a}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + s_2 = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + s_m = b_m \\
& x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n); \qquad s_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

Problema Dual (29)

$$
\begin{aligned}
\min w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
\text{s.a}\quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
& \vdots \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\
& y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

Sea BV una base óptima para el primal, y definamos $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]$. Por lo tanto, para la base óptima BV, y_i es el i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$. BV es

[†]Puede suceder que tanto el primal como el dual sean no factibles, como en el ejemplo siguiente:

Primal

$$
\begin{aligned}
\max z &= x_2 \\
\text{s.a}\quad & x_1 \leq -1 \\
& -x_2 \leq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
\min w &= -y_1 + y_2 \\
\text{s.a}\quad & y_1 \geq 0 \\
& -y_2 \geq 1 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

[‡]La demostración se puede modificar con facilidad para manejar la situación donde el primal no es un problema de maximización normal.

óptima para el primal, por eso el coeficiente de cada variable en el renglón 0 del tableau del primal + de BV tiene que ser no negativo. De (10), el coeficiente de x_j en el renglón 0 del tableau de BV ($\bar{c}_j$) está dado por

$$\begin{aligned}\bar{c}_j &= \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j\\ &= [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]\begin{bmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix} - c_j\\ &= y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj} - c_j\end{aligned}$$

Pero sabemos que $\bar{c}_j \geq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj} - c_j \geq 0$$

Por lo tanto, $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ satisface todas las n restricciones del dual.

Puesto que BV es una base óptima para el primal, también sabemos que cada variable de holgura tiene un coeficiente no negativo en el tableau de la BV del primal. A partir de (10′) encontramos que el coeficiente de s_i en el renglón 0 de BV es y_i, el i–ésimo elemento de $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$. Por lo tanto, para $i = 1, 2, \ldots, m$, $y_i \geq 0$. Ya demostramos que $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ satisface las n restricciones en (29) y que todos los elementos de $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ son no negativos. Por lo tanto, $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ es de hecho factible para el dual.

El paso 2 de la demostración del teorema del dual requiere que se demuestre que

$$\begin{aligned}&\text{Valor de la función objetivo del dual para } \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\\ &\qquad = \text{valor de la función objetivo del primal para BV} \qquad \textbf{(30)}\end{aligned}$$

Por (11) sabemos que el valor de la función objetivo del primal para BV es $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{b}$. Pero el valor de la función objetivo del dual para la solución factible del dual $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ es

$$b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix} = \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{b}$$

Por lo tanto, (30) es válida.

Ya se demostró que son válidos los pasos 1 y 2 de la demostración del teorema del dual. Con el paso 3 se completa la demostración del teorema del dual.

OBSERVACIONES 1 En el paso 1 de la demostración del teorema del dual se demostró que una base BV que es factible para el primal es óptima si y sólo si $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ es factible para el dual. En la sección 6.9 se utiliza este resultado para reflexionar sobre el análisis de sensibilidad.

2 Cuando encontramos la solución óptima para el primal mediante la aplicación del algoritmo simplex, también encontramos la solución óptima del dual.

Suponga que el primal es un problema de maximización normal con m restricciones para aclarar por qué la observación 2 es cierta. Para poder usar el simplex para resolver este problema se debe sumar una variable de holgura s_i a la i-ésima restricción del primal. Suponga que BV es una base óptima para el primal. Entonces, el teorema del dual establece que $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$ es la solución óptima para el dual. Pero recuerde que, de acuerdo con (10′), y_i es el coeficiente de s_i en el renglón 0 del tableau del primal (BV) óptimo. Por lo tanto, se demostró que *si el primal es un problema de maximización normal, entonces el valor óptimo de la variable i-ésima del dual es el coeficiente de s_i en el renglón 0 del tableau del primal óptimo.*

TABLA 23
Solución óptima para el problema de Dakota

	Variable básica
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z_1 = 280$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$

Mediante el problema de Dakota se ilustra la observación 2. El tableau óptimo para el problema de Dakota se presenta en la tabla 23. La solución del primal óptima es $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. A partir del análisis anterior, la solución del dual óptima es $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$, $w = 48(0) + 20(10) + 8(10) = 280$. Observe que los valores de la función objetivo del primal y del dual óptimos son iguales, según lo requerido por el teorema del dual.

Naturalmente, podríamos calcular siempre la solución óptima del dual en forma directa al resolver

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1} = [0 \quad 20 \quad 60]\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix} = [0 \quad 10 \quad 10]$$

Los dos métodos para obtener la solución del dual son, por supuesto, compatibles.

Si el primal tiene restricciones $\geq$ o de igualdad, entonces aún se puede encontrar la solución del dual óptima a partir del tableau del primal óptimo. Para ver cómo se hace, recuerde que el teorema del dual establece que el valor óptimo de la variable i-ésima del dual (y_i) es el i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$. De acuerdo con (10″) se ve que si la i-ésima restricción del primal es una restricción $\geq$ entonces

$$\text{Valor óptimo de la } i\text{-ésima variable dual} = y_i = -(\text{coeficiente de } e_i \text{ en el renglón 0 óptimo})$$

El coeficiente de e_i en el renglón cero óptimo tiene que ser no negativo, así que esto demuestra que si la i-ésima restricción en el primal es una restricción $\geq$, entonces $y_i \leq 0$. Lo anterior concuerda con la convención previa (véase sección 6.5) en que una restricción $\geq$ debe tener una variable no positiva del dual. En (10‴) se puede ver que si la i-ésima restricción del primal es una restricción de igualdad, entonces,

$$y_i = (\text{coeficiente de } a_i \text{ en el renglón 0 óptimo}) - M$$

Aunque el coeficiente de a_i en el renglón 0 óptimo tiene que ser no negativo, el hecho de que M es un número grande positivo significa que es posible que $y_i \geq 0$, o bien, $y_i \leq 0$ Esto concuerda con la convención anterior, la cual establece que la variable del dual para una restricción de igualdad no tiene restricción de signo.

Cómo leer la solución óptima del dual a partir del renglón 0 del tableau óptimo si el primal es un problema de maximización

Valor óptimo de la variable y_i del dual si la restricción i es una restricción $\leq$ $=$ coeficiente de s_i en el renglón 0 óptimo **(31)**

Valor óptimo de la variable dual y_i si la restricción i es una restricción $\geq$ $= -$(coeficiente de e_i en el renglón 0 óptimo) **(31′)**

Valór óptimo de la variable dual y_i si la restricción i es una restricción de igualdad $=$ (coeficiente de a_i en el renglón 0 óptimo) $- M$ **(31″)**

Mediante el ejemplo siguiente se ilustra cómo determinar la solución óptima del dual de un problema con restricciones $\leq$, $\geq$ e igualdad.

EJEMPLO 10 Determinación de la solución del dual en un problema de maximización no normal

Para poder resolver el PL siguiente

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a} \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 15 \\
2x_2 - x_3 &\ge 5 \\
2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 10 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned} \tag{32}
$$

se suma una variable de holgura s_2, se resta una variable de excedente e_2 y se suman dos variables artificiales a_2 y a_3. El tableau óptimo para (32) se da en la tabla 24. A partir de este tableau la solución óptima es $z = \frac{565}{23}$, $x_3 = \frac{15}{23}$, $x_2 = \frac{65}{23}$, $x_1 = \frac{120}{23}$, $s_1 = e_2 = a_2 = a_3 = 0$. Utilice esta información para determinar la solución óptima del dual de (32).

Solución Al seguir los pasos de la sección 6.5 se encuentra el dual de (32) a partir del tableau en la tabla 25:

$$
\begin{aligned}
\min w &= 15y_1 + 5y_2 + 10y_3 \\
\text{s.a} \quad y_1 \qquad + 2y_3 &\ge 3 \\
3y_1 + 2y_2 + y_3 &\ge 2 \\
2y_1 - y_2 - 5y_3 &\ge 5 \\
y_1 \ge 0, y_2 \le 0, y_3 &\text{ nrs}
\end{aligned} \tag{33}
$$

A partir de (31) y el tableau del primal óptimo es posible encontrar la solución óptima de (33) como sigue:

Como la primera restricción del primal es una restricción $\le$, según (31), $y_1 =$ coeficiente de s_1 en el renglón 0 óptimo $= \frac{51}{23}$. La segunda restricción del primal es una restricción $\ge$, por eso vemos de (31′) que $y_2 = -$(coeficiente de e_2 en el renglón 0 óptimo) $= -\frac{58}{23}$. Como la tercera restricción es una restricción de igualdad, de (31″), $y_3 =$ (coeficiente de a_3 en el renglón 0 óptimo) $- M = \frac{9}{23}$.

TABLA 24
Tableau óptimo para PL (32)

z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	ld	Variable básica
1	0	0	0	$\frac{51}{23}$	$\frac{58}{23}$	$M - \frac{58}{23}$	$M + \frac{9}{23}$	$\frac{565}{23}$	$z = \frac{565}{23}$
0	0	0	1	$\frac{4}{23}$	$\frac{5}{23}$	$-\frac{5}{23}$	$-\frac{2}{23}$	$\frac{15}{23}$	$x_3 = \frac{15}{23}$
0	0	1	0	$\frac{2}{23}$	$-\frac{9}{23}$	$\frac{9}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{65}{23}$	$x_2 = \frac{65}{23}$
0	1	0	0	$\frac{9}{23}$	$\frac{17}{23}$	$-\frac{17}{23}$	$\frac{7}{23}$	$\frac{120}{23}$	$x_1 = \frac{120}{23}$

TABLA 25
Determinación del dual del LP (32)

min w		max z $(x_1 \ge 0)$	$(x_2 \ge 0)$	$(x_3 \ge 0)$	
		x_1	x_2	x_3	
$(y_1 \ge 0)$	y_1	1	3	2	≤ 15
$(y_2 \le 0)$	y_2	0	2	-1	≥ 5*
(y_3 nrs)	y_3	2	1	-5	$=10$*
		≥ 3	≥ 2	≥ 5	

Por el teorema del dual, el valor w de la función objetivo óptima del dual debe ser igual a $\frac{565}{23}$. En resumen, la solución dual óptima es

$$\bar{w} = \frac{565}{23}, y_1 = \frac{51}{23}, y_2 = -\frac{58}{23}, y_3 = \frac{9}{23}$$

El lector debe comprobar que esta solución es en realidad factible (todas las restricciones del dual se cumplen con igualdad) y que

$$\bar{w} = 15(\tfrac{51}{23}) + 5(-\tfrac{58}{23}) + 10(\tfrac{9}{23}) = \frac{565}{23}$$

Incluso si el primal es un problema de minimización sería posible leer la solución óptima del dual a partir del tableau óptimo del primal.

Cómo leer la solución óptima del dual a partir del renglón 0 del tableau óptimo si el primal es un problema de minimización

Valor óptimo de la variable x_i del dual si la restricción i es una restricción $\leq$	= coeficiente de s_i en el renglón 0 óptimo
Valor óptimo de la variable x_i del dual si la restricción i es una restricción $\geq$	= −(coeficiente de e_i en el renglón 0 óptimo)
Valor óptimo de la variable x_i del dual si la restricción i es una restricción de igualdad	= (coeficiente de a_i en el renglón 0 óptimo) + M

Con el fin de ilustrar cómo se puede leer la solución óptima del dual en un problema de minimización a partir del tableau óptimo del primal considere

$$\begin{aligned}
\min w = 3y_1 + 2y_2 + y_3 & \\
\text{s.a} \quad y_1 + y_2 + y_3 &\geq 4 \\
y_2 - y_3 &\leq 2 \\
y_1 + y_2 + 2y_3 &= 6 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

El tableau óptimo para este problema se presenta en la tabla 26. Por lo tanto, la solución óptima del primal es $w = 6$, $y_2 = y_3 = 2$, $y_1 = 0$. El dual del PL anterior es

$$\begin{aligned}
\max z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 & \\
\text{s.a} \quad x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 &\leq 3 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\
x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 1 \\
x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ nrs} &
\end{aligned}$$

Según el tableau óptimo del primal, la solución óptima del dual es $z = 6$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

TABLA 26

Determinación de la solución óptima del dual cuando el primal es un problema de minimización

w	y_1	y_2	y_3	e_1	s_2	a_1	a_3	ld
1	−1	0	0	−3	0	3 − M	−1 − M	6
0	1	1	0	−2	0	2	−1	2
0	−1	0	0	3	1	−3	2	2
0	0	0	1	1	0	−1	1	2

PROBLEMAS

Grupo A

1 Las preguntas siguientes se refieren al problema de Giapetto (véase problema 7 de la sección 6.3).

a Determine el dual del problema de Giapetto.

b Utilice el tableau óptimo del problema de Giapetto para determinar la solución óptima del dual.

c Verifique que el teorema del dual se cumple en este ejemplo.

2 Considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_2 + x_3 &\ge 2 \\ x_1 \quad + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

a Halle el dual de este PL.

b Después de sumar una variable de holgura s_1, restar una variable de excedente e_2 y sumar variables artificiales a_2 y a_3, el renglón 0 del tableau óptimo del PL es

$$z + 4x_1 + e_2 + (M - 1)a_2 + (M + 2)a_3 = 0$$

Determine la solución óptima del dual de este PL.

3 Para el PL siguiente,

$$\begin{aligned} \max z &= -x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\le 0.5 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 0.5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

¿el renglón 0 del tableau óptimo es $z + 0.4s_1 + 1.4s_2 = ?$ Determine el valor óptimo de z para el PL dado.

4 Las preguntas siguientes se refieren al problema Bevco de la sección 4.10

a Encuentre el dual del problema de Bevco.

b Utilice al tableau óptimo para el problema de Bevco que se presenta en la sección 4.10 para calcular la solución óptima del dual. Compruebe que se cumple el teorema del dual en este ejemplo.

5 Considere el problema siguiente de programación lineal:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 6x_1 + 3x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Suponga que al resolver este problema, encuentra que el renglón 0 del tableau óptimo es $z + 2x_2 + s_2 = \frac{20}{3}$. Mediante el teorema del dual demuestre que los cálculos deben ser incorrectos.

6 Demuestre que (para un problema de maximización) si la restricción i-ésima del primal es una restricción $\ge$, entonces el valor óptimo de la variable i-ésima del dual se podría escribir como (coeficiente de a_i en el renglón 0 óptimo) $- M$.

Grupo B

7 En este problema se aplica la dualidad débil para demostrar el lema 3.

a Demuestre que el lema 3 equivale a lo siguiente: si el dual es factible, entonces el primal es acotado. (*Sugerencia*: ¿Recuerde qué es el contrapositivo en la geometría plana?)

b Utilice la dualidad débil para demostrar la validez de la forma del lema 1 dada en el inciso (a). (*Sugerencia*: si el dual es factible, entonces debe haber un punto factible del dual que tiene un valor w de, por ejemplo, w_o. Ahora aplique la dualidad débil para mostrar que el primal es acotado.)

8 Siga la línea del problema 7 y use la dualidad débil para demostrar el lema 4.

9 Determine el dual del problema de Dorian Auto y su solución óptima con ayuda de la información que se proporciona en el problema 8 de la sección 6.3.

6.8 Precios sombra

Regresamos al concepto de precio sombra que se trató en la sección 6.1. A continuación se presenta una definición más formal.

DEFINICIÓN ■ El **precio sombra** de la i-ésima restricción es la cantidad que mejora el valor óptimo de z (un incremento en un problema de maximización o un decremento en un problema de minimización) si b_i aumenta una unidad (pasa de b_i a $b_i + 1$).†

Mediante el teorema del dual se puede determinar con toda facilidad el precio sombra de la i-ésima restricción. Con el fin de ilustrarlo se determinará el precio sombra de la

†Se supone que después que se modificó el lado derecho de la restricción i a $b_i + 1$, la base actual sigue siendo óptima.

segunda restricción (horas de acabado) del problema de Dakota. Sea $\mathbf{c}_{BV}B^{-1} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] = [0 \quad 10 \quad 10]$ la solución óptima del dual del problema de maximización. Según el teorema del dual, sabemos que

Valor z óptimo cuando los lados derechos de la restricciones son

$$(b_1 = 48, b_2 = 20, b_3 = 8) = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \quad \textbf{(34)}$$

¿Qué sucede con el valor óptimo de z para el problema de Dakota si b_2 (por ahora 20 horas de acabado) aumenta una unidad (a 21 horas)? Sabemos que al cambiar un lado derecho la base actual podría dejar de ser óptima (véase sección 6.3). Por el momento, supongamos que la base actual sigue siendo óptima cuando aumenta b_2 una unidad. Entonces, $\mathbf{c}_{BV}$ y B^{-1} se mantienen sin cambios, por eso la solución óptima para el dual del problema de Dakota no se modifica.

Luego encontramos lo siguiente:

Valor z óptimo cuando el lado derecho de la restricción de acabado es

$$21 = 48y_1 + 21y_2 + 8y_3 \quad \textbf{(35)}$$

Si se resta (34) de (35) se obtiene

Cambio en el valor óptimo de z si las horas de acabado aumentan una hora

= Precio sombra de la restricción (2) de acabado **(36)**

$= y_2 = 10$

Mediante este ejemplo se ilustra que *el precio sombra de la i-ésima restricción de un problema de maximización es el valor óptimo de la variable i-ésima del dual*. Los precios sombra son las variables del dual, por eso sabemos que el precio sombra para una restricción $\leq$ será no negativo; en el caso de una restricción $\geq$, será no positivo, y para una restricción de igualdad, no tendrá restricción de signo. Los ejemplos que se efectúan más adelante en esta sección ofrecen justificaciones intuitivas para estas convenciones de signo.

Se puede hacer un razonamiento similar para demostrar que si (en un problema de maximización) el lado derecho de la i-ésima restricción aumenta una cantidad Δb_i, entonces (suponiendo que la base actual sigue siendo óptima) el nuevo valor óptimo de z se podría determinar a partir de

Nuevo valor óptimo de z = antiguo valor óptimo de $z + \Delta b_i$

(precio sombra de la restricción i) **(37)**

Por lo que se refiere a un problema de minimización, el precio sombra de la i-ésima restricción es la cantidad que aumenta, o bien disminuye, el valor óptimo de z cuando el lado derecho se incrementa una unidad (siempre que la base actual se mantenga óptima). Se puede demostrar que el precio sombra de la i-ésima restricción de un problema de minimización = −(valor óptimo de la variable i-ésima del dual). Si el lado derecho aumenta una cantidad Δb_i, entonces (suponiendo que la base actual es óptima) el nuevo valor óptimo de z se podría determinar a partir de

Nuevo valor óptimo de z = antiguo valor óptimo de $z - \Delta b_i$

(precio sombra de la restricción i) **(37′)**

Con los siguientes tres ejemplos se debe aclarar el concepto de precio sombra.

EJEMPLO 11 Precios sombra para un problema de maximización normal

En el problema de Dakota:

1 Determine e interprete los precios sombra.

2 Si hubiera disponibles 18 h de acabado, ¿cuál sería el ingreso de Dakota? (Se puede demostrar mediante los métodos de la sección 6.3 que si 16 $\leq$ horas de acabado $\leq$ 24, la base actual es óptima.)

3 Si se contara con 9 h de carpintería, ¿cuál sería el ingreso de Dakota? (Para $\frac{20}{3} \leq$ horas de carpintería $\leq$ 10, la base actual sigue siendo óptima.)

4 Si hubiera disponibles 30 pies tablón de madera, ¿cuál sería el ingreso de Dakota? (Para $24 \leq$ madera $\leq \infty$, la base actual se conserva óptima.)

5 Si se tuvieran 30 horas de carpintería, ¿por qué no se podría usar el precio sombra para la restricción de la carpintería, con el fin de determinar el nuevo valor z?

Solución **1** En la sección 6.7 se llegó a que la solución óptima del dual de Dakota es $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$. Por lo tanto, el precio sombra para la restricción de la madera es 0; el de la restricción de acabado es 10 y el de la restricción de la carpintería es 10. El hecho de que el precio sombra de la restricción de la madera es de 0 significa que al aumentar la cantidad de madera disponible en un pie tablón (o *cualquier* otra cantidad) no se incrementará el ingreso. Lo anterior es razonable porque estamos usando ahora sólo 24 de los 48 pies tablón de madera disponible, así que añadir algo más no le hará a Dakota ningún bien. El ingreso de Dakota aumentaría 10 dólares si se pudiera disponer de una hora más de acabado. De igual manera, el ingreso de Dakota se incrementaría 10 dólares si hubiera disponible una hora más de carpintería. En este problema se podría pensar que el precio sombra de la i-ésima restricción es la cantidad máxima que la compañía pagaría por una unidad adicional del recurso asociado con la i-ésima restricción. Por ejemplo, una hora de carpintería adicional produciría ingresos por $y_3 = 10$ dólares (véase ejemplo 12 para un problema de maximización en el cual esta interpretación es inválida). Por lo tanto, Dakota podría pagar hasta 10 dólares por una hora adicional de carpintería y continuar en condiciones prósperas. En forma similar, la compañía estaría dispuesta a pagar nada (0 dólares) por un pie tablón adicional de madera y hasta 10 dólares por una hora adicional de acabado. Para contestar las preguntas 2 a 4, se aplica (37) y el hecho de que el antiguo valor $z = 280$.

2 $y_2 = 10$, $\Delta b_2 = 18 - 20 = -2$. La base actual sigue siendo óptima porque $16 \leq 18 \leq 24$. Entonces (37) genera (nuevo ingreso) $= 280 + 10(-2) = 260$ dólares.

3 $y_3 = 10$, $\Delta b_3 = 9 - 8 = 1$. Como $\frac{20}{3} \leq 9 \leq 10$, la base actual sigue siendo óptima. Entonces (37) genera (nuevo ingreso) $= 280 + 10(1) = 290$ dólares.

4 $y_1 = 0$, $\Delta b_1 = 30 - 48 = -18$. La base actual sigue siendo óptima porque $24 \leq 30 \leq \infty$. Entonces (37) genera (nuevo ingreso) $= 280 + 0(-18) = 280$ dólares.

5 Si $b_3 = 30$, la base actual deja de ser óptima porque $30 > 10$. Esto significa que BV cambia (y, por lo tanto, $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$) y ya no se puede usar el conjunto actual de precios sombra para determinar el nuevo nivel de ingresos.

Explicación intuitiva del signo de los precios sombra

Enseguida se da una explicación intuitiva de por qué (en un problema de maximización) el precio sombra una restricción $\leq$ siempre será no negativo. Considere la situación siguiente: tenemos dos problemas de maximización (PL 1 y PL 2) cuyas funciones objetivo son iguales. Suponga que todos los puntos que son factibles para el PL 1 también lo son para el PL 2. Esto quiere decir que la región factible del PL 2 contiene todos los puntos de la región factible del PL 1 y posiblemente algunos otros puntos. Entonces el valor óptimo de z para el PL 2 debe ser, por lo menos, tan grande como el valor óptimo de z para el PL 1. Con el fin de aclarar, suponga que el punto x' (cuyo valor z es z') es óptimo para el PL 1. Como x' también es factible para el PL 2 (cuya función objetivo es la misma que para el PL 1), el PL 2 puede alcanzar un valor z de z' (usando el punto factible x'). También es posible que por usar uno de los puntos factibles sólo para el PL 2 (y no para el PL 1), PL 2 pudiera ser mejor que z'. En pocas palabras, *sumar puntos a la región factible de un problema de maximización no puede reducir el valor óptimo de z.*

Podemos usar esta observación para demostrar por qué una restricción $\leq$ debe tener un precio sombra no negativo. Por lo que se refiere al problema de Dakota, si el lado derecho de la restricción de la carpintería aumenta una unidad (de 8 pasa a 9), se observa que todos los puntos que originalmente eran factibles siguen siendo factibles, y que algunos puntos nuevos (los cuales requieren > 8 y ≤ 9 horas de carpintería) podrían ser factibles. Por consiguiente, el valor óptimo de z no puede disminuir, y el precio sombra para la restricción de carpintería debe ser no negativo.

El objetivo del ejemplo siguiente es mostrar que (contrario a lo que dicen muchos libros) el precio sombra de una restricción $\leq$ no es siempre el precio máximo que usted estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de recurso.

EJEMPLO 12 Precio sombra como un sobreprecio

Leatherco fabrica cinturones y zapatos. Un cinturón requiere 2 yardas cuadradas de cuero y una hora de mano de obra calificada. Un par de zapatos requieren 3 yardas cuadradas de piel y 2 horas de mano de obra calificada. Se pueden comprar no menos de 25 yardas cuadradas de piel y 15 horas de mano de obra calificada a un precio de 5 dólares la yarda cuadrada de piel y 10 dólares por cada hora de mano de obra calificada. Un cinturón se vende en 23 dólares y un par de zapatos en 40 dólares. Leatherco desea maximizar la utilidad (ingresos − costos). Plantee un PL mediante el cual Leatherco maximice la utilidad. Luego determine e interprete los precios sombra para el PL.

Solución Definamos

$$x_1 = \text{cantidad de cinturones fabricados}$$
$$x_2 = \text{pares de zapatos producidos}$$

Después de observar que

$$\text{Costo/cinturón} = 2(5) + 1(10) = 20 \text{ dólares}$$
$$\text{Costo/par de zapatos} = 3(5) + 2(10) = 35 \text{ dólares}$$

encontramos que la función objetivo de Leatherco es

$$\max z = (23 - 20)x_1 + (40 - 35)x_2 = 3x_1 + 5x_2$$

Leatherco se enfrenta a las dos restricciones siguientes:

Restricción 1 Leatherco puede usar a lo más 25 yardas cuadradas de piel.

Restricción 2 Leatherco puede usar cuando mucho 15 horas de mano de obra calificada.

La restricción 1 se expresa mediante

$$2x_1 + 3x_2 \leq 25 \qquad \text{(Restricción de la piel)}$$

en tanto que la restricción 2 se expresa con

$$x_1 + 2x_2 \leq 15 \qquad \text{(Restricción de la mano de obra calificada)}$$

Después de agregar las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, se llega al siguiente PL:

$$\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.a} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 25 \quad \text{(Restricción de la piel)} \\
x_1 + 2x_2 &\leq 15 \quad \text{(Restricción de la mano de obra calificada)} \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Después de agregar las variables de holgura s_1 y s_2 a las restricciones de la piel y de la mano de obra calificada, respectivamente, se obtiene el tableau óptimo mostrado en la tabla 27. Por lo tanto, la solución óptima para el problema de Leatherco es $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 5$. Los precios sombra son

y_1 = precio sombra de la piel = coeficiente de s_1 en el renglón 0 óptimo = 1

y_2 = precio sombra de la mano de obra calificada = coeficiente de s_2 en el renglón 0 óptimo = 1

TABLA 27
Tableau óptimo para Leatherco

	Variable básica
$z \quad + s_1 + s_2 = 40$	$z = 40$
$x_1 \quad + 2s_1 - 3s_2 = 5$	$x_1 = 5$
$x_2 - s_1 + 2s_2 = 5$	$x_2 = 5$

El significado del precio sombra de la piel es que si estuvieran disponibles una o más yardas cuadradas de piel, entonces la función objetivo de Leatherco (utilidad) se incrementaría 1 dólar. Veamos ahora lo que sucede si está disponible una yarda adicional de piel. Como s_1 es no básica, se comprará la yarda cuadrada adicional de piel. Además, como s_2 es no básica, todavía usaremos toda la mano de obra disponible. Esto quiere decir que el aumento de 1 dólar en la utilidad comprende el costo de comprar una yarda cuadrada de piel. Si la disponibilidad de una yarda cuadrada de piel adicional aumenta la utilidad 1 dólar, entonces, debe aumentar el ingreso en $1 + 5 = 6$ dólares. Por lo tanto, la cantidad máxima que Leatherco debe pagar por una yarda cuadrada de piel adicional es 6 dólares (no 1 dólar).

Otra manera de considerar lo anterior es como sigue: si se compra otra yarda cuadrada de piel al precio actual de 5 dólares, la utilidad aumenta en $y_1 = 1$ dólar. Si se compra otra yarda cuadrada de piel a un precio de 6 dólares = 5 dólares + 1 dólar, entonces la utilidad se incrementa en 1 dólar − 1 dólar = 0 dólares. Por lo tanto, lo más que Leatherco estaría dispuesta a pagar por yarda cuadrada de piel adicional es 6 dólares.

Del mismo modo, lo más que Leatherco estaría dispuesto a pagar por una hora adicional de mano de obra es y_2 + (costo de una hora adicional de mano de obra calificada) = $1 + 10 = 11$. En este problema se observa que el precio sombra de un recurso representa el sobreprecio además del costo del recurso que Leatherco debería estar dispuesto a pagar por una unidad adicional de este recurso.

Mediante los dos ejemplos anteriores se destaca que debemos ser cuidadosos al interpretar el precio sombra de una restricción $\leq$. Recuerde que el precio sombra de una restricción en un problema de maximización es la cantidad que aumenta la función objetivo si el lado derecho se incrementa una unidad.

Con el ejemplo siguiente se ilustra la interpretación de los precios sombra de las restricciones $\geq$ y de igualdad.

EJEMPLO 13 Precio sombra para las restricciones ≥ y de igualdad

A Steelco le hicieron un pedido de 100 toneladas de acero. El pedido debe contener por lo menos 3.5 toneladas de níquel, cuando mucho 3 toneladas de carbono y exactamente 4 toneladas de manganeso. Steelco recibe 20 dólares/tonelada por el pedido. Para surtir el pedido, Steelco puede combinar cuatro aleaciones, cuya composición química se proporciona en la tabla 28. Steelco desea maximizar la utilidad (ingresos − costos) obtenida por surtir el pedido. Formule el PL apropiado. Encuentre e interprete también los precios sombra de cada restricción.

Solución Después de definir a x_i = toneladas de la aleación i para surtir el pedido, el PL de Steelco es

$$
\begin{aligned}
\max z &= (20-12)x_1 + (20-10)x_2 + (20-8)x_3 + (20-6)x_4 \\
\text{s.a} \quad & 0.06x_1 + 0.03x_2 + 0.02x_3 + 0.01x_4 \geq 3.5 && \text{(Restricción del níquel)} \\
& 0.03x_1 + 0.02x_2 + 0.05x_3 + 0.06x_4 \leq 3 && \text{(Restricción del carbono)} \\
& 0.08x_1 + 0.03x_2 + 0.02x_3 + 0.01x_4 = 4 && \text{(Restricción del manganeso)} \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 && \text{(Tamaño del pedido = 100 tons.)} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

TABLA 28
Información sobre Steelco

Elemento	Aleación (%)			
	1	2	3	4
Níquel	6	3	2	1
Carbono	3	2	5	6
Manganeso	8	3	2	1
Costo/tonelada (dóls.)	12	10	8	6

Después de sumar una variable de holgura s_2, restar una variable de excedente e_1 y sumar variables artificiales a_1, a_3 y a_4, se obtiene la solución óptima siguiente: $z = 1\,000$, $s_2 = 0.25$, $x_1 = 25$, $x_2 = 62.5$, $x_4 = 12.5$, $e_1 = 0$, $x_3 = 0$. El renglón 0 óptimo es

$$z + 400e_1 + (M - 400)a_1 + (M + 200)a_3 + (M + 16)a_4 = 1\,000$$

Si se aplican (31), (31′) y (31″) se obtiene

Precio sombra de la restricción del níquel = −(coeficiente de e_1 en el renglón 0 óptimo) = −400

Precio sombra de la restricción del carbono = (coeficiente de s_2 en el renglón 0 óptimo) = 0

Precio sombra de la restricción del manganeso = (coeficiente de a_3 en el renglón 0 óptimo) − M = 200

Precio sombra de la restricción del tamaño del pedido = (coeficiente de a_4 en el renglón 0 óptimo) − M = 16

Mediante los procedimientos del análisis de sensibilidad de la sección 6.3, se puede demostrar que la base actual sigue siendo óptima si $3.46 \leq b_1 \leq 3.6$. Siempre que la cantidad necesaria de níquel esté dentro de este intervalo, al haber un incremento Δb_1 sobre dicha cantidad de níquel, aumentará la utilidad de Steelco $-400\ \Delta b_1$. Por ejemplo, al incrementar el níquel a 3.55 toneladas ($\Delta b_1 = 0.05$), la utilidad "aumentaría" (en realidad disminuiría) en $-400(0.05) = 20$ dólares. La restricción del níquel tiene precio sombra negativo porque al aumentar el lado derecho de la restricción del níquel se vuelve más difícil satisfacer la restricción del níquel. De hecho, un aumento en la cantidad necesaria de níquel obliga a Steelco a utilizar mayor cantidad de la aleación cara tipo 1. Esto aumenta los costos y baja la utilidad. Como ya lo vimos, el precio sombra de una restricción $\geq$ (en un problema de maximización) siempre será no positivo porque al aumentar el lado derecho de una restricción $\geq$ se eliminan puntos de la región factible. Por lo tanto, el valor óptimo de z tiene que disminuir o conservarse sin cambio.

Por medio de los procedimientos del análisis de sensibilidad de la sección 6.3 se sabe que la base actual sigue siendo óptima para $2.75 \leq b_2 \leq \infty$. Como ya se estableció antes, el precio sombra de la restricción del carbono es cero. Esto quiere decir que si aumentamos las cantidades necesarias de carbono, la utilidad de Steelco no cambia. Intuitivamente sabemos que esto se debe a que la solución actual óptima contiene sólo $2.75 < 3$ toneladas de carbono. Por lo tanto, relajar las cantidades necesarias de carbono no posibilitaría a Steelco a reducir los costos, por eso la utilidad de la empresa se mantiene sin cambios.

Los procedimientos del análisis de sensibilidad señalan que la base actual se mantiene óptima si $3.83 \leq b_3 \leq 4.07$. El precio sombra de la tercera restricción (manganeso) es 200, así que siempre que la cantidad necesaria de manganeso se conserve dentro del intervalo dado, al incrementarla un valor Δb_3 aumenta la utilidad $200\ \Delta b_3$. Por ejemplo, si la cantidad necesaria de manganeso fuera 4.05 toneladas ($\Delta b_3 = 0.05$), entonces la utilidad se incrementaría $(0.05)\,200 = 10$ dólares.

De acuerdo con los procedimientos del análisis de sensibilidad, la base actual se mantiene óptima si $91.67 \leq b_4 \leq 103.12$. Puesto que el precio sombra de la cuarta restricción (tamaño del pedido) es 16, al incrementar dicho tamaño en Δb_4 toneladas (con níquel, carbono y manganeso sin cambios) se incrementaría la utilidad en $16\ \Delta b_4$. Por ejemplo, la utilidad generada por un pedido de 103 toneladas que requiriera ≥ 3.5 toneladas de níquel, ≤ 3 toneladas de carbono y exactamente 4 toneladas de manganeso sería $1\,000 + 3(16) = 1\,048$ dólares.

En este problema, los precios sombra de ambas restricciones de igualdad fueron positivos. En general, sabemos que es posible que una variable del dual de la restricción de igualdad (y precio sombra) sea negativa. Si así fuera, entonces la restricción de igualdad tendrá un precio sombra negativo. Con el fin de ilustrar esta posibilidad, suponga que el cliente de Steelco necesitaba exactamente 4.5 toneladas de manganeso en su pedido. Como $4.5 > 4.07$, la base actual ya no es óptima. Si resolvemos de nuevo el PL de Steelco, se puede demostrar que el precio sombra de la restricción del manganeso cambia a -54.55. Esto quiere decir que un incremento en la cantidad necesaria de manganeso, reducirá la utilidad de Steelco.

Interpretación de la columna de los precios dual de los resultados de LINDO

En el caso de un problema de maximización, LINDO proporciona los valores de los precios sombra en la columna de *DUAL PRICES.* El precio dual para al renglón $i + 1$ en los resultados que proporciona LINDO es el precio sombra para la i-ésima restricción y el valor óptimo para la variable dual i-ésima. Por lo tanto, en la figura 4 se observa que para el problema de Dakota,

y_1 = precio sombra para la restricción de la madera = precio dual para el renglón 2 = 0

y_2 = precio sombra para la restricción del acabado = precio dual para el renglón 3 = 10

y_3 = precio sombra para la restricción de la carpintería = precio dual para el renglón 4 = 10

En cuanto a un problema de maximización, el vector $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ (necesario para valorar las nuevas actividades) es igual que el vector de los precios dual dado en los resultados de LINDO. Para el problema de Dakota, las nuevas actividades se valorarían mediante $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1} = [0\ \ 10\ \ 10]$.

Por lo que se refiere a un problema de minimización, la entrada en la columna *DUAL PRICE* para cualquier restricción es el precio sombra. Por lo tanto, según los resultados de LINDO de la figura 6, se tiene que los precios sombra para las restricciones en el problema de la dieta son como sigue: calorías = 0; chocolate = -2.5 centavos; azúcar = -7.5 centavos, y grasa = 0. De donde se infiere que

1 Al aumentar una unidad la cantidad necesaria de calorías se conserva sin cambio el costo de la dieta óptima.

2 Al aumentar una onza la cantidad requerida de chocolate, disminuirá el costo de la dieta óptima -2.5 centavos (es decir, se incrementa el costo de la dieta óptima 2.5 centavos).

3 Si se incrementa 1 onza la cantidad de azúcar, disminuirá el costo de la dieta óptima -7.5 centavos (es decir, aumenta el costo de la dieta óptima 7.5 centavos).

4 Cuando aumenta 1 onza la cantidad necesaria de grasa, el costo de la dieta óptima se conserva sin cambios.

La entrada en la columna *DUAL PRICE* para cualquier restricción es el negativo de la variable de la restricción del dual. Por lo tanto, en cuanto al problema de la dieta, se observa en la figura 6 que la solución óptima para el problema de la dieta está dado por $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1} = [0\quad 2.5\quad 7.5\quad 0]$. Cuando se valora una nueva actividad con respecto a un problema de minimización, se usa el negativo de cada precio dual como el elemento correspondiente de $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$.

Recuerde que para cualquier PL, los precios dual continúan siendo válidos siempre que la base actual siga siendo óptima. Como se estableció en la sección 6.3, el intervalo para los valores del lado derecho para el cual la base actual sigue siendo óptima, se podría obtener del bloque *RIGHTHAND SIDE RANGES* de los resultados de LINDO.

Análisis de degeneración y sensibilidad

Cuando la solución óptima de un PL es degenerada, se deben tomar ciertas precauciones al interpretar el resultado de LINDO. Recuerde que en la sección 4.11 se mencionó que una sfb es degenerada si por lo menos una variable básica en la solución óptima es igual a cero. En un PL con m restricciones, si el resultado de LINDO señala que menos de m variables son positivas, entonces la solución óptima es una sfb degenerada. Con el fin de ilustrar lo anterior considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z = 6X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2X_4 & \\
\text{s.a} \quad 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 &\leq 400 \\
X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 &\leq 150 \\
2X_1 + X_2 + X_3 + 5X_4 &\leq 200 \\
3X_1 + X_2 + X_4 &\leq 250 \\
X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Los resultados que LINDO proporciona para este PL se muestran en la figura 9. El PL tiene cuatro restricciones y sólo dos variables positivas en la solución óptima, por eso la sfb es degenerada. A propósito, los resultados de usar el comando **TABLEAU** (Tableau) indican que la base óptima es BV $= \{X_2, X_3, S_3, X_1\}$.

Ahora se tratan tres "particularidades" que se podrían presentar cuando es degenerada la solución óptima que encontró LINDO.

Particularidad 1 Para una restricción, por lo menos un *RANGE IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED* (intervalo en el cual la base se conserva sin cambios) tiene un *0 ALLOWABLE INCREASE*, o bien, un *ALLOWABLE DECREASE* (incremento permisible 0 o un decremento permisible 0). Esto significa que, por lo menos para una restricción, el *DUAL PRICE* nos señala algo acerca del nuevo valor z para un incremento o un decremento en el lado derecho de la restricción, pero no para ambos.

Para entender la particularidad 1, considere la primera restricción. Su *AI* es 0. Por lo tanto, su *DUAL PRICE* de .50 no se puede usar para determinar un nuevo valor z resultante de algún incremento en el lado derecho de la primera restricción.

Particularidad 2 Para que una variable básica se vuelva positiva, el coeficiente de la función objetivo tendría que ser mejorado por más que su *REDUCED COST* (costo reducido).

Para entender la particularidad 2, considere la variable no básica X_4; su REDUCED COST es 1.5. Si incrementamos en 2 el coeficiente de X_4 de la función objetivo, encontraremos que todavía la nueva solución óptima tiene $X_4 = 0$ porque el cambio afecta el conjunto de variables básicas, pero no la solución óptima del PL. Si aumentamos en 4.5 o en más el coeficiente de X_4 de la función objetivo, entonces observamos que X_4 es positiva.

Particularidad 3 Si usted incrementa un coeficiente de la variable de la función objetivo por una cantidad mayor que su AI, o lo disminuye en más de su AD, entonces la solución óptima para el PL podría seguir siendo la misma.

La particularidad 3 es similar a la particularidad 2. Para entender la particularidad 3, considérese la variable no básica X_4; su AI es 1.5. Si incrementamos en 2 el coeficiente de X_4 de la función objetivo, observaremos que todavía la nueva solución óptima no cambia. Esta particularidad se presenta porque el cambio afecta el conjunto de variables básicas, pero no la solución óptima de la PL.

```
MAX      6 X1 + 4 X2 + 3 X3 + 2 X4
SUBJECT TO
       2)   2 X1 + 3 X2 + X3 + 2 X4 <=      400
       3)   X1 + X2 + 2 X3 + X4 <=   150
       4)   2 X1 + X2 + X3 + 0.5 X4 <=    200
       5)   3 X1 + X2 + X4 <=   250
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP  3

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)     700.00000

 VARIABLE        VALUE           REDUCED COST
       X1        50.000000           .000000
       X2       100.000000           .000000
       X3          .000000           .000000
       X4          .000000          1.500000


      ROW   SLACK  OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)          .000000          .500000
       3)          .000000         1.250000
       4)          .000000          .000000
       5)          .000000         1.250000

NO. ITERATIONS=       3

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE          ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE           DECREASE
      X1        6.000000        3.000000           3.000000
      X2        4.000000        5.000000           1.000000
      X3        3.000000        3.000000           2.142857
      X4        2.000000        1.500000           INFINITY

                             RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE           DECREASE
       2       400.000000        .000000         200.000000
       3       150.000000        .000000            .000000
       4       200.000000       INFINITY            .000000
       5       250.000000        .000000         120.000000


THE TABLEAU
     ROW  (BASIS)        X1        X2        X3        X4    SLK    2
       1 ART            .000      .000      .000     1.500        .500
       2         X2     .000     1.000      .000      .500        .500
       3         X3     .000      .000     1.000      .167       -.167
       4 SLK      4     .000      .000      .000     -.500        .000
       5         X1    1.000      .000      .000      .167       -.167

     ROW    SLK     3  SLK     4  SLK     5
       1      1.250       .000      1.250  700.000
       2      -.250       .000      -.250  100.000
       3       .583       .000      -.083     .000
       4      -.500      1.000      -.500     .000
       5       .083       .000       .417   50.000
```

FIGURA 9

PROBLEMAS

Grupo A

1 Aplique el teorema del dual para demostrar (37).

2 Las preguntas siguientes se refieren al problema de Sugarco (problema 6 de la sección 6.3):

a Determine los precios sombra del problema de Sugarco.

b Si hubiera disponibles 60 onzas de azúcar, ¿cuál sería la utilidad de Sugarco?

c ¿Y si fueran 40 onzas de azúcar?

d ¿Y si fueran 30 onzas de azúcar?

TABLA 29

Recursos	Producto 1	2
Mano de obra calificada (h)	3	4
Mano de obra no calificada (h)	2	3
Materia prima (unidades)	1	2

3 Suponga que está trabajado con un problema de minimización, e incrementa el lado derecho de una restricción $\geq$ ¿Qué pasa con el valor óptimo de z?

4 Suponga que estamos resolviendo un problema de minimización e incrementamos el lado derecho de una restricción $\leq$. ¿Qué pasa con el valor óptimo de z?

5 Una empresa elabora dos productos (1 y 2). Cada unidad del producto 1 se vende a 15 dólares y cada unidad del producto 2, en 25 dólares. Todos los productos requieren materia prima y dos tipos de manos de obra (calificada y no calificada) (véase tabla 29). La compañía dispone por ahora de 100 horas de mano de obra calificada, 70 horas de mano de obra no calificada y 30 unidades de materia prima. Debido a consideraciones del mercado, se tienen que fabricar por lo menos 3 unidades del producto 2.

a Explique por qué la meta de la empresa es maximizar el ingreso.

b El PL pertinente es

$$\begin{aligned} \max z &= 15x_1 + 25x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 4x_2 &\leq 100 \quad \text{(Restricción de la mano de obra calificada)} \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 70 \quad \text{(Restricción de la mano de obra no calificada)} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \quad \text{(Restricción de la materia prima)} \\ x_2 &\geq 3 \quad \text{(Restricción del producto 2)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El tableau óptimo para este problema tiene el renglón 0 siguiente:

$$z + 15s_3 + 5e_4 + (M - 5)a_4 = 435$$

La solución óptima para el PL es $z = 435$, $x_1 = 24$, $x_2 = 3$. Encuentre e interprete el precio sombra de cada restricción. ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar la compañía por una unidad adicional de cada tipo de mano de obra? ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar por una unidad adicional de materia prima?

c Si la base actual continuara siendo óptima (que sí lo es), ¿cuál sería el ingreso de la compañía si tuviera a su disposición 35 unidades de materia prima?

d Si la base actual es óptima, ¿cuál sería el ingreso de la compañía si hubiera disponibles 80 horas de mano de obra calificada?

e Si la base actual es óptima, ¿cuál sería el nuevo ingreso de la empresa si por lo menos 5 unidades del producto 2 se tuvieran que fabricar? ¿Y si se tuvieran que elaborar por lo menos 2 unidades del producto 2?

6 Suponga que la compañía del problema 5 no posee mano de obra ni materia prima, pero puede comprarlas a los precios siguientes: no menos de 100 horas de mano de obra calificada a 3 dólares/hora, 70 horas de mano de obra no calificada a 2 dólares/hora y 30 unidades de materia prima a 1 dólar por unidad de materia prima. Si la compañía tiene por objetivo maximizar la utilidad, demuestre que el PL apropiado es

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 4x_2 &\leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 70 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

El renglón 0 óptimo del PL es

$$z + 1.5x_1 + 2.5s_3 + Ma_4 = 75$$

y la solución óptima es $z = 75$, $x_1 = 0$, $x_2 = 15$. Suponga que la base actual sigue siendo óptima para dar respuesta a los incisos (a) y (b).

a ¿Cuánto debe pagar la compañía por una unidad adicional de materia prima?

b ¿Cuánto debe pagar la compañía por una hora adicional de mano de obra calificada? ¿Y por mano de obra no calificada (¡Sea muy cuidadoso aquí!)

7 Conteste las preguntas siguientes para el problema de Dorian (véase el problema 8 de la sección 6.3)

a ¿Cuál sería el costo de Dorian si 40 millones de exposiciones MAI se requirieran?

b ¿Cuál sería el costo si se requirieran sólo 20 millones de exposiciones VAI?

8 Si es difícil creer que el precio sombra de una restricción de igualdad debe ser no restringido en signo, vea este problema. Considere los dos PLs siguientes:

$$\textbf{(LP 1)} \quad \begin{aligned} \max z &= x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\textbf{(LP 2)} \quad \begin{aligned} \max z &= x_2 \\ \text{s.a} \quad -x_1 - x_2 &= -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

¿En qué PL la restricción tendrá un precio sombra positivo? ¿Cuál tendrá un precio sombra negativo?

Grupo B

9 Suponga, en el problema de Dakota, que 22 horas de acabado y 9 horas de carpintería están a la disposición. ¿Cuál sería el nuevo valor óptimo de z? [*Sugerencia*: utilice la regla del 100% para demostrar que la base actual sigue siendo óptima y aplique (34) a (36).]

10 Para el problema de la dieta, suponga que se requieren por lo menos 8 onzas de chocolate y 9 onzas de azúcar (los otros ingredientes se mantienen igual). ¿Cuál es el nuevo valor óptimo de z?

11 Considere el PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 9x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} \quad x_1 \qquad\qquad + x_4 &\leq 200 \\ x_2 + x_3 \qquad &\leq 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad &\leq 350 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 550 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

a Resuelva este PL con LINDO y utilice los resultados para demostrar que la solución óptima es degenerada.

b Utilice los resultados de LINDO para determinar un ejemplo de las particularidades 1 a 3.

6.9 Dualidad y análisis de sensibilidad

En una demostración del teorema dual se llegó al resultado siguiente: *si se supone que un conjunto de variables básicas BV es factible, entonces BV es óptima (es decir, cada variable del renglón 0 tiene coeficiente no negativo) si y sólo si la solución del dual asociada ($\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$) es factible para el dual.*

Este resultado se puede usar para efectuar de otro modo los siguientes tipos de análisis de sensibilidad (véase lista de cambios al principio de la sección 6.3).

Cambio 1 Modificación del coeficiente de la función objetivo de una variable no básica.

Cambio 4 Modificación de la columna de una variable no básica

Cambio 5 Agregando una nueva actividad

En todos los casos, la modificación deja a BV factible. BV seguirá siendo óptima si el renglón 0 de la BV se conserva no negativo. La optimalidad del primal y la factibilidad del dual son equivalentes, por eso vemos que *los cambios mencionados antes conservarán óptima a la base actual si y sólo si la solución actual del dual $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ permanece factible para el dual.* Si la solución actual del dual ya no es factible para el dual, entonces BV será subóptima, y se tiene que encontrar una nueva solución óptima.

Se ilustra el enfoque basado en la dualidad para el análisis de sensibilidad, resolviendo de nueva cuenta algunos de los ejemplos de la sección 6.3. Recuerde que estos ejemplos se relacionan con el problema de Dakota:

$$\begin{aligned}
\max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{s.a} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 && \text{(Restricción de la madera)} \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 && \text{(Restricción del acabado)} \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 && \text{(Restricción de la carpintería)} \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

La solución óptima era $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. La única variable de decisión no básica en la solución óptima es x_2 (mesas). El dual del problema de Dakota es

$$\begin{aligned}
\min w &= 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\
\text{s.a} \quad & 8y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 60 && \text{(Restricción de los escritorios)} \\
& 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 && \text{(Restricción de las mesas)} \\
& y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 && \text{(Restricción de las sillas)} \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Recuerde que la solución óptima del dual, y por lo tanto, los precios sombra de las restricciones, son $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$. Ahora ya sabemos cómo la dualidad se puede aplicar al análisis de sensibilidad.

EJEMPLO 14 Modificación del coeficiente de una variable no básica de la función no objetivo

Deseamos cambiar el coeficiente de una variable no básica de la función objetivo. Sea c_2 el coeficiente de x_2 (mesas) en la función objetivo de Dakota. En otras palabras, c_2 es el precio al que se vende una mesa. ¿Para qué valores de c_2 la base actual se conserva óptima?

Solución Si $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ mantiene factible al dual, entonces no cambia la base actual, ni los valores de todas las variables. Observe que si cambia el coeficiente para x_2 de la función objetivo, entonces la primera y la tercera restricciones del dual se conservan sin cambios, pero la segunda restricción del dual (mesas) cambia a

$$6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq c_2$$

Si $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ cumple con esta desigualdad, entonces se conserva la factibilidad del dual (y, por lo tanto, la optimalidad del primal). Por consiguiente, la base actual se mantiene óptima si c_2 satisface $6(0) + 2(10) + 1.5(10) \geq c_2$, o bien, $c_2 \leq 35$. Esto muestra que para $c_2 \leq 35$, la base actual sigue siendo óptima. Al contrario, si $c_2 > 35$, la base actual deja de ser óptima. Esto va de acuerdo con el resultado obtenido en la sección 6.3.

Se podría proporcionar otra interpretación de este resultado usando los precios sombra. Éstos se pueden utilizar para calcular el valor implicado de los recursos necesarios para fabricar una mesa (véase tabla 30). Una mesa usa un valor de recursos de 35 dólares, por eso la única manera en que producir mesas puede aumentar los ingresos de Dakota es vender una mesa por más de 35 dólares. Por lo tanto, la base actual deja de ser óptima si $c_2 > 35$, y la base actual se conserva óptima si $c_2 \leq 35$.

TABLA 30

Por qué una mesa es lucrativa a > 35 dólares/mesa

Recurso en una mesa	Precio sombra del recurso (dólares)	Cantidad de recurso usado	Valor del recurso usado (dólares
Madera	0	6 pies tablón	0(6) = \$0
Acabado	10	2 horas	10(2) = \$20
Carpintería	10	1.5 horas	10(1.5) = \$15
			Total: = \$35

EJEMPLO 15 Modificación de una variable no básica

Queremos cambiar la columna por una actividad no básica. Suponga que una mesa se vende a 43 dólares y requiere 5 pies tablón de madera, 2 horas de acabado y 2 horas de carpintería. ¿La base actual sigue siendo óptima?

Solución Al modificar la columna por la variable "mesas" no básica, deja sin cambios a la primera y a la tercera restricciones del dual, pero si cambia la segunda a

$$5y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 43$$

Como $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$ no satisfacen la nueva segunda restricción del dual, la factibilidad del dual no se conserva y la base actual ya no es óptima. En términos de los precios sombra, este resultado es razonable (véase tabla 31). Cada mesa usa recursos con valor dede 40 dólares y se vende en 43 dólares, por eso Dakota puede aumentar su ingreso en $43 - 40 = 3$ dólares por cada mesa que se fabrica. Por lo tanto, la base actual deja de ser óptima, y x_2 (mesas) estará en la nueva solución óptima.

TABLA 31

Interpretación del precio sombra de la decisión para producir mesas (40 dólares/mesa)

Recurso en una mesa	Precio sombra del recurso (dólares)	Cantidad del recurso (dólares)	Valor del recurso usado (dólares)
Madera	0	5 pies tablón	0(5) = \$0
Acabado	10	2 horas	10(2) = \$20
Carpintería	10	2 horas	10(2) = \$20
			Total: = \$40

EJEMPLO 16 **Adición de una actividad nueva**

Queremos agregar una nueva actividad. Suponga que Dakota planea fabricar taburetes (x_4). Un taburete se vende en 15 dólares y requiere 1 pie tablón de madera, 1 hora de acabado y 1 hora de carpintería. ¿La base actual se conserva óptima?

Solución Las tres restricciones del dual se mantienen sin cambio al introducir una nueva actividad (taburetes), pero la nueva variable x_4 suma una nueva restricción del dual (que corresponde a los taburetes). La nueva restricción del dual será

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 15$$

La base actual se conserva óptima si $y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10$ satisface la nueva restricción del dual. Como $0 + 10 + 10 \geq 15$, la base actual sigue siendo óptima. En términos de los precios sombra, un taburete usa $1(0) = 0$ dólares de madera, $1(10) = 10$ dólares del valor de horas de acabado y $1(10) = 10$ dólares del valor del tiempo de carpintería. Un taburete usa $0 + 10 + 10 = 20$ dólares del valor de los recursos y se vende por sólo 15 dólares, por eso Dakota no debe fabricar taburetes, y la base actual se conserva óptima.

PROBLEMAS

Grupo A

1 En el problema de Dakota, suponga que las mesas para computadora se venden en 35 dólares y utilizan 6 pies tablón de madera, 2 horas de tiempo de acabado y 1 hora del tiempo de carpintería. ¿Aún es óptima la base actual? Interprete este resultado en términos de los precios sombra.

2 Las preguntas siguientes se refieren al problema de Sugarco (problema 6 de la sección 6.3):

a ¿Para qué valores de utilidad sobre una barra de caramelo tipo 1 la base actual se mantiene óptima?

b Si una barra de caramelo tipo 1 requiriera 0.5 onzas de azúcar y 0.75 onzas de chocolate, ¿seguiría siendo óptima la base actual?

c Una barra de caramelo tipo 4 está en planes. Una barra de caramelo tipo 4 genera una utilidad de 10 centavos y requiere 2 onzas de azúcar y una onza de chocolate. ¿Sigue siendo óptima la base actual?

3 En el problema de Dakota, suponga que un escritorio se vende en 60 dólares, pero ahora requiere 8 pies tablón de madera, 4 horas de acabado y 15 horas de carpintería. Determine si la base actual sigue siendo óptima. ¿Qué está mal en el siguiente razonamiento?

El cambio en la columna de los escritorios no modifica la segunda ni la tercera restricción, pero sí cambia la primera a

$$8y_1 + 4y_2 + 15y_3 \geq 60$$

Como $y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10$ satisface la nueva restricción del dual, la base actual sigue siendo óptima.

6.10 Holgura complementaria

El teorema de la holgura complementaria es un resultado importante que relaciona el primal óptimo y las soluciones del dual. Para plantear este teorema, suponemos que el primal es un problema de maximización normal con variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y m restricciones $\leq$. Sean $s_1, s_2, \ldots, s_m$ las variables de holgura del primal. Entonces el dual es un problema de minimización normal con variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$ y n restricciones $\geq$. Sean $e_1, e_2, \ldots, e_n$ las variables de excedente para el dual. A continuación sigue un enunciado del teorema de la holgura complementaria.

TEOREMA 2

Sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

una solución factible del primal y $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$ una solución factible del dual. Entonces $\mathbf{x}$ es óptima para el primal y $\mathbf{y}$ es óptima para el dual si y sólo si

$$s_i y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{38}$$

$$e_j x_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

En el problema 4, al final de esta sección, se delinea la demostración del teorema de holgura complementaria, pero primero se analiza el significado intuitivo de este teorema.

Se infiere de (38) que las soluciones óptimas del primal y del dual deben satisfacer

i-ésima holgura del primal > 0 implica que la i-ésima variable del dual $= 0$ **(40)**

i-ésima variable del dual > 0 implica que la i-ésima holgura del primal $= 0$ **(41)**

De acuerdo con (39), se infiere que las soluciones óptimas del primal y del dual tienen que cumplir

j-ésimo excedente del dual > 0 implica que la j-ésima variable del primal $= 0$ **(42)**

j-ésima variable del primal > 0 implica que el j-ésimo excedente del dual $= 0$ **(43)**

De (40) y (42) se ve que *si una restricción en el primal o el dual es inactiva* ($s_i > 0$, $e_j > 0$), *entonces la variable correspondiente en el otro problema (o complementario) debe ser igual a 0.* De aquí el nombre de **holgura complementaria.**

Con el fin de ilustrar la interpretación del teorema de la holgura complementaria, regresemos al problema de Dakota. Recuerde que el primal es

$$\begin{array}{lrl} \max z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & & \\ \text{s.a} \quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48 & & \text{(Restricción de la madera)} \\ \quad 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20 & & \text{(Restricción del acabado)} \\ \quad 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8 & & \text{(Restricción de la carpintería)} \\ \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 & & \end{array}$$

y el dual es

$$\begin{array}{lrl} \min w = 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 & & \\ \text{s.a} \quad 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 60 & & \text{(Restricción de los escritorios)} \\ \quad 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \ge 30 & & \text{(Restricción de las mesas)} \\ \quad y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \ge 20 & & \text{(Restricción de las sillas)} \\ \quad y_1, y_2, y_3 \ge 0 & & \end{array}$$

La solución óptima del primal es

$$z = 280, \qquad x_1 = 2, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 8$$

$$s_1 = 48 - (8(2) + 6(0) + 1(8)) = 24$$

$$s_2 = 20 - (4(2) + 2(0) + 1.5(8)) = 0$$

$$s_3 = 8 - (2(2) + 1.5(0) + 0.5(8)) = 0$$

La solución óptima del dual es

$$w = 280, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 10, \quad y_3 = 10$$
$$e_1 = (8(0) + 4(10) + 2(10)) - 60 = 0$$
$$e_2 = (6(0) + 2(10) + 1.5(10)) - 30 = 5$$
$$e_3 = (1(0) + 1.5(10) + 0.5(10)) - 20 = 0$$

Por lo que se refiere al problema de Dakota, (38) se reduce a

$$s_1y_1 = s_2y_2 = s_3y_3 = 0$$

a la que de verdad satisfacen las soluciones óptimas del primal y del dual. Asimismo, (39) se reduce a

$$e_1x_1 = e_2x_2 = e_3x_3 = 0$$

a la que también satisfacen las soluciones óptimas del primal y del dual.

Enseguida se ilustra la interpretación de (40) a (43). Obsérvese que (40) señala que como la solución óptima del primal tiene $s_1 > 0$, la solución óptima del dual debe tener $y_1 = 0$. En el contexto del problema de Dakota, esto quiere decir que la holgura positiva en la restricción de la madera implica que el precio sombra de la madera debe ser 0. La holgura en la restricción de la madera significa que no se debe usar la madera adicional, por eso un pie tablón adicional de madera debe ser en realidad inservible.

La ecuación (41) señala que puesto que $y_2 > 0$ en la solución óptima del dual, $s_2 = 0$ debe conservarse en la solución óptima del primal. Esto es razonable, porque $y_2 > 0$ significa que una hora adicional de acabado tiene cierto valor. Esto sólo puede ocurrir si por ahora estamos utilizando todas las horas disponibles de acabado (o, de manera equivalente, si $s_2 = 0$)

Observe que (42) nos manifiesta que como $e_2 > 0$ en la solución óptima del dual, $x_2 = 0$ debe conservarse en la solución óptima del primal. Esto es razonable porque $e_2 = 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 - 30$. Como y_1, y_2 y y_3 son precios sombra de los recursos, e_2 se podría escribir como

$$e_2 = (\text{valor del recurso usado para una mesa}) - (\text{ precio de venta de una mesa})$$

Por lo tanto, si $e_2 > 0$, las mesas se venden a un precio que es menor al valor de los recursos usados para elaborar una unidad de x_2 (mesas). Esto quiere decir que no se deben producir mesas (o bien, que $x_2 = 0$). Esto demuestra que $e_2 > 0$ en la solución óptima del dual implica que $x_2 = 0$ debe conservarse en la solución óptima del primal.

Observe que para el problema de Dakota, (43) nos señala que $x_1 > 0$ para la solución óptima del primal implica que $e_1 = 0$. Este resultado simplemente refleja el siguiente hecho importante. *Para cualquier variable x_j en la base óptima del primal, el ingreso marginal obtenido por la producción de una unidad de x_j debe ser igual al costo marginal de los recursos que se utilizan para producir una unidad de x_j.* Esto es una consecuencia del hecho de que toda variable básica debe tener coeficiente cero en el renglón 0 del tableau óptimo del primal. En resumen, (43) es simplemente la versión de PL de la máxima económica tan conocida: una estrategia de producción óptima debe tener ingreso marginal igual al costo marginal.

Para ser más específico, observe que $x_1 > 0$ significa que los escritorios están en la base óptima. Entonces,

$$\text{Ingreso marginal obtenido al fabricar un escritorio} = 60 \text{ dólares}$$

Para calcular el costo marginal de fabricar un escritorio (en términos de precios sombra), obsérvese que

Costo de la madera en el escritorio = 8(0) = 0 dólares.
Costo de las horas de acabado usadas para hacer un escritorio = 4(10) = 40 dólares.
Costo de las horas de carpintería usadas para producir un escritorio = 2(10) = 20 dólares.
Costo marginal por producir un escritorio = 0 + 40 + 20 = 60 dólares.

Por lo tanto, en cuanto a los escritorios, el ingreso marginal es igual al costo marginal.

Resolución de PL mediante holgura complementaria

Si se conoce la solución óptima del primal o del dual, entonces la holgura complementaria se puede usar algunas veces para determinar la solución óptima del problema complementario. Por ejemplo, suponga que se nos dijo que la solución óptima del problema de Dakota era $z = 280$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $s_1 = 24$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. ¿Podemos usar el teorema 2 para que nos ayude a encontrar la solución óptima para el dual de Dakota? Como $s_1 > 0$, (40) señala que la solución óptima del dual debe tener $y_1 = 0$. Puesto que $x_1 > 0$ y $x_3 > 0$, de (43) se infiere que la solución óptima del dual debe tener $e_1 = 0$ y $e_3 = 0$. Esto quiere decir que para la solución óptima del dual, la primera y la tercera restricciones deben ser activas. Sabemos ya que $y_1 = 0$, por eso también sabemos que los valores óptimos de y_2 y y_3 se podrían determinar resolviendo las restricciones primera y tercera del dual como igualdades (con $y_1 = 0$). Por lo tanto, los valores óptimos de y_2 y y_3 deben cumplir

$$4y_2 + 2y_3 = 60 \qquad \text{y} \qquad 1.5y_2 + 0.5y_3 = 20$$

La resolución de estas ecuaciones en forma simultánea muestra que la solución óptima del dual debe tener $y_2 = 10$ y $y_3 = 10$. Por lo tanto, la holgura complementaria ayudó a encontrar la solución óptima del dual de $y_1 = 0$, $y_2 = 10$, $y_3 = 10$. (Por el teorema del dual sabemos, naturalmente, que la solución óptima del dual debe tener $\bar{w} = 280$.)

PROBLEMAS

Grupo A

1 Glassco fabrica recipientes de vidrio: para vino, cerveza, champaña y whisky. Cada tipo de recipiente requiere tiempo en el taller de moldeado, tiempo en el taller de empaque y cierta cantidad de vidrio. Los recursos que se requieren para elaborar cada tipo de recipiente se proporcionan en la tabla 32. En la actualidad, están a la disposición 600 minutos de tiempo de moldeado, 400 minutos de tiempo de empacado y 500 onzas de vidrio. Si se supone que Glassco desea maximizar los ingresos, se tiene que resolver la PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z = 6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 20x_4 & \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 \le 600 & \quad \text{(Restricción del moldeado)} \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 \le 400 & \quad \text{(Restricción del empacado)} \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \le 500 & \quad \text{(Restricción del vidrio)} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & \end{aligned}$$

Se puede demostrar que la solución óptima para este PL es $z = \frac{2800}{3}$, $x_1 = \frac{400}{3}$, $x_4 = \frac{20}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = \frac{280}{3}$.

a Encuentre el dual para el problema de Glassco.

b Determine la solución óptima para el dual del problema de Glassco mediante la solución óptima del primal dada y el teorema de la holgura complementaria.

c Dé un ejemplo de cada una de las condiciones de holgura complementaria, (40) a (43). Como en el texto, interprete cada ejemplo en términos de precios sombra.

2 Aplique el teorema de la holgura complementaria para mostrar que, en los resultados de LINDO, las entradas SLACK o SURPLUS y DUAL PRICE para cualquier renglón no pueden ser ambas positivas.

3 Considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z = 5x_1 + 3x_2 + x_3 & \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6 & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7 & \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 & \end{aligned}$$

Resuelva en forma gráfica el dual de este PL. Luego use la holgura complementaria para resolver el problema de maximización

TABLA 32

	Recipientes			
	x_1 Vino	x_2 Cerveza	x_3 Champaña	x_4 Whisky
Tiempo de moldeado	4 minutos	9 minutos	7 minutos	10 minutos
Tiempo de empacado	1 minuto	1 minuto	3 minutos	40 minutos
Vidrio	3 oz	4 oz	2 oz	1 oz
Precio de venta	6 dólares	10 dólares	9 dólares	20 dólares

Grupo B

4 Sea $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3]$ un punto factible del primal para el problema de Dakota y $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3]$ un punto factible del dual.

a Multiplique la i-ésima restricción (en la forma estándar) del primal por y_i y sume las restricciones resultantes.

b Multiplique la j-ésima restricción del dual (en la forma estándar) por x_j y súmelas.

c Calcule: respuesta del inciso (a) menos respuesta del inciso (b).

d Utilice la respuesta del inciso (c) y el teorema del dual para demostrar que si $\mathbf{x}$ es óptima del primal y $\mathbf{y}$ es óptima del dual, entonces (38) y (39) se sostienen.

e Utilice la respuesta del inciso (c) para demostrar que si (38) y (39) se sostienen, entonces $\mathbf{x}$ es óptima del primal y $\mathbf{y}$ es óptima del dual. (*Sugerencia*: vea el lema 2.)

6.11 Método simplex para el dual

Cuando usamos el método simplex para resolver un problema de maximización (nos referiremos al problema de maximización como un primal), empezamos con una solución factible del primal (porque cada restricción en el tableau inicial tiene un lado derecho no negativo). Por lo menos una variable en el renglón 0 del tableau inicial tiene coeficiente negativo, por eso la solución inicial del primal no es factible para el dual. Mediante una sucesión de pivoteos simplex se mantiene la factibilidad del primal y se obtiene una solución óptima cuando se logra la factibilidad del dual (un renglón 0 no negativo). En muchas situaciones, es más fácil resolver un PL empezando por un tableau en el cual cada variable en el renglón 0 tiene un coeficiente no negativo (por eso el tableau no es factible para el dual) y por lo menos una restricción tiene un lado derecho negativo (por eso el tableau no es factible para el primal). El método simplex del dual conserva un renglón 0 no negativo, y, con el tiempo, se obtiene un tableau en el cual cada lado derecho es no negativo (factibilidad del primal). En este punto ya se obtuvo un tableau óptimo. Como esta técnica conserva la factibilidad del dual se denomina **método simplex para el dual.**

Método simplex para el dual en el caso de un problema de maximización

Paso 1 ¿El lado derecho de cada restricción es no negativo? Si es así, ya se encontró una solución óptima; si no, por lo menos una restricción tiene un lado derecho negativo, y continuamos con el paso 2.

Paso 2 Elija la variable básica más negativa como la variable que saldrá de la base. El renglón en el cual la variable es básica, será el renglón pivote. Para elegir la variable que entra a la base, calcule el cociente que sigue para cada variable x_j que tiene coeficiente *negativo* en el renglón pivote.

$$\frac{\text{Coeficiente de } x_j \text{ en el renglón 0}}{\text{Coeficiente de } x_j \text{ en el renglón pivote}}$$

Escoja la variable con el cociente más pequeño (valor absoluto) como la variable entrante. Esta forma de la prueba del cociente conserva un tableau factible del dual (el coeficiente de todas las variables en el renglón 0 es no negativo). Enseguida aplique OER para transformar a la variable entrante en una variable básica en el renglón pivote.

Paso 3 Si hay alguna restricción en la cual el lado derecho es negativo y cada variable tiene un coeficiente no negativo, entonces el PL no tiene solución factible. Si no se encuentra restricción alguna que indique infactibilidad, regrese al paso 1.

Para ilustrar el caso de un PL no factible, suponga que el método simplex para el dual genera una restricción tal como $x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$. Como $x_1 \geq 0$, $2x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$, $x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0$, y la restricción $x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$ no puede ser satisfecha. En este caso, el PL original debe ser no factible.

A continuación se proporcionan tres usos del dual simplex:

1 Encontrar nueva solución óptima después que se suma una restricción a un PL.

2 Encontrar nueva solución óptima después de cambiar un lado derecho de un PL.

3 Solución de un problema de minimización normal.

Nueva solución óptima después de que se suma una restricción a un PL

El método simplex para el dual se aplica a menudo para determinar la nueva solución óptima de un PL después que se agrega una restricción. Cuando se añade una restricción se presenta uno de los tres casos siguientes:

Caso 1 La solución óptima actual satisface la nueva restricción.

Caso 2 La solución óptima actual no cumple la nueva restricción, pero el PL todavía tiene una solución factible.

Caso 3 La restricción adicional ocasiona que el PL no tenga solución factible.

Si se presenta el caso 1, entonces la solución óptima actual satisface la nueva restricción, y la solución actual sigue siendo óptima. Para ver por qué esto es cierto, suponga que hemos agregado la restricción $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ al problema de Dakota. La solución óptima actual ($z = 280$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$) satisface esta restricción. Para entender por qué esta solución sigue siendo óptima después que se sumó la restricción $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ recuerde que sumar una restricción a un PL o bien deja la región factible sin cambio alguno o elimina puntos desde la región factible. En este caso, el análisis de la sección 6.8 nos indica que agregar una restricción (a un problema de maximización) reduce el valor óptimo de z o lo deja sin cambios. Esto quiere decir que si sumamos la restricción $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ al problema de Dakota, el nuevo valor óptimo de z puede ser cuando mucho 280. La solución actual todavía es factible y tiene $z = 280$, por eso todavía debe ser óptima.

Si se presenta el caso 2, la solución actual ya no es factible, por eso ya no es óptima. Se puede usar el método simplex para el dual con el objeto de determinar la nueva solución óptima. En el problema de Dakota, suponga que las consideraciones del mercado dictan que por lo menos se debe fabricar una mesa. Esto añade la restricción $x_2 \geq 1$. Como en la solución óptima actual $x_2 = 0$, ya no es factible y no puede ser óptima. Para encontrar la nueva solución se resta una variable de excedente e_4 de la restricción $x_2 \geq 1$. Así se obtiene la restricción $x_2 - e_4 = 1$. Si esta restricción se multiplica por -1, se obtiene $-x_2 + e_4 = -1$, y se puede usar e_4 como una variable básica en el caso de esta restricción. Al anexar esta restricción al tableau óptimo de Dakota se obtiene la tabla 33.

Como se está usando el renglón 0 de un tableau óptimo, el coeficiente de cada variable es no negativo en el renglón 0 y se podría proceder con el método simplex para el dual. La variable $e_4 = -1$ es la variable básica más negativa, por eso e_4 saldrá de la base, y el renglón 4 será el renglón pivote. Como x_2 es la única variable con coeficiente negativo en el renglón 4, x_2 debe entrar a la base (véase tabla 34).

Éste es un tableau óptimo. Por lo tanto, si la restricción $x_2 \geq 1$ se anexa al problema de Dakota, la solución óptima se convierte en $z = 275$, $s_1 = 26$, $x_3 = 10$, $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = 1$, que reduce la función objetivo de Dakota (ingresos) en 5 dólares (costo reducido para las mesas).

Si hubiéramos querido, simplemente podríamos haber añadido la restricción $x_2 \geq 1$ al tableau original inicial de Dakota, y aplicado el método simplex regular para resolver el problema. Esto habría causado la suma de una variable artificial a la restricción $x_2 \geq 1$ y quizá habría requerido muchos pivoteos. Cuando se usa el método simplex para el dual con el objeto de resolver de nuevo un problema después de haber sumado una restricción, se está aprovechando la ventaja del hecho de que ya obtuvimos un renglón 0 no negativo

TABLA 33

Tableau "antiguo" óptimo para Dakota si se requiere $x_2 \geq 1$

	Variable básica
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + \frac{5}{4}x_2 - \frac{1}{2}s_2 + \frac{3}{2}s_3 = 2$	$x_1 = 2$
$-x_2 + e_4 = -1$	$e_4 = -1$

TABLA 34

Tableau "nuevo" óptimo para Dakota si se requiere $x_2 \geq 1$

	Variable básica
$z + 10s_2 + 10s_3 + 5e_4 = 275$	$z = 275$
$s_1 + 2s_2 - 8s_3 - 2e_4 = 26$	$s_1 = 26$
$x_3 + 2s_2 - 4s_3 - 2e_4 = 10$	$x_3 = 10$
$x_1 - \frac{1}{2}s_2 + \frac{3}{4}s_3 + \frac{5}{4}e_4 = \frac{3}{4}$	$x_1 = \frac{3}{4}$
$x_2 - e_4 = 1$	$x_2 = 1$

y los coeficientes de la mayoría de los lados derechos son no negativos. Ésta es la razón de que el simplex para el dual requiere por lo regular relativamente pocos pivoteos para llegar a una nueva solución óptima cuando se suma una restricción a un PL.

Si se presenta el caso 3, el paso 3 del método simplex para el dual permite demostrar que el PL es ahora no factible. Con el objeto de ilustrar la idea, suponga que se suma la restricción $x_1 + x_2 \geq 12$ al problema de Dakota. Después de restar una variable de excedente e_4 de esta restricción, se obtiene

$$x_1 + x_2 - e_4 = 12 \qquad \text{o bien,} \qquad -x_1 - x_2 + e_4 = -12$$

Al sumar esta restricción al tableau óptimo de Dakota se obtiene la tabla 35.

Puesto que x_1 aparece en la nueva restricción, parece que x_1 ya no puede ser usada como variable básica en el renglón 3. Para remediar este problema, se elimina x_1 (y, en general, todas las variables básicas) de la nueva restricción mediante el reemplazo del renglón 4 por el renglón 3 + renglón 4 (véase tabla 36). Puesto que $e_4 = -10$ es la variable básica más negativa, e_4 dejará la base y el renglón 4 será el renglón pivote. La variable s_2 es la única con coeficiente negativo en el renglón 4, por eso s_2 entra a la base y se transforma en una variable básica en el renglón 4 (véase tabla 37). Ahora, x_3 debe salir de la base, y el renglón 2 será el renglón pivote. Como x_2 es la única variable en el renglón 2 con coeficiente negativo, x_2 entra a la base (véase tabla 38). Puesto que $x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $2s_3 \geq 0$ y $3e_4 \geq 0$, el primer miembro del renglón 3 debe ser no negativo y no puede ser igual a -20. De aquí que el problema de Dakota con las restricciones adicionales $x_1 + x_2 \geq 12$ no tiene solución factible.

TABLA 35

Tableau "antiguo" óptimo para Dakota si se requiere $x_1 + x_2 \geq 12$

	Variable básica
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$-5x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
$-x_1 - x_2 + e_4 = -12$	$e_4 = -12$

TABLA 36

e_4 es ahora una variable básica en el renglón 4

	Variable básica
$z + 5x_2 + 10s_2 + 10s_3 = 280$	$z = 280$
$-2x_2 + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 24$	$s_1 = 24$
$-2x_2 + x_3 + 2s_2 - 4s_3 = 8$	$x_3 = 8$
$x_1 + 1.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 = 2$	$x_1 = 2$
$0.25x_2 - 0.5s_2 + 1.5s_3 + e_4 = -10$	$e_4 = -10$

TABLA 37

s_2 entra a la base en el renglón 4

	Variable básica
$z + 10x_2 + 40s_3 + 20e_4 = 80$	$z = 80$
$-x_2 + s_1 - 2s_3 + 4e_4 = -16$	$s_1 = -16$
$-x_2 + x_3 + 2s_3 + 4e_4 = -32$	$x_3 = -32$
$x_1 + x_2 - e_4 = 12$	$x_2 = 12$
$-0.5x_2 + s_2 - 3s_3 - 2e_4 = 20$	$s_2 = 20$

TABLA 38

Tableau que indica la infactibilidad del ejemplo de Dakota cuando se requiere $x_1 + x_2 \geq 12$

	Variable básica
$z + 10x_3 + 60s_3 + 60e_4 = -240$	$z = -240$
$-x_3 + s_1 - 4s_3 = 16$	$s_1 = 16$
$x_2 - x_3 - 2s_3 - 4e_4 = 32$	$x_2 = 32$
$x_1 + x_3 + 2s_3 + 3e_4 = -20$	$x_1 = -20$
$-0.5x_3 + s_2 - 4s_3 - 4e_4 = 36$	$s_2 = 36$

Determinación de la nueva solución óptima después de modificar un lado derecho

Si se modifica el lado derecho de la restricción y la base actual se vuelve no factible, entonces se aplica el simplex para el dual con el fin de determinar la nueva solución óptima. Para ejemplificarlo, suponga que las 30 horas de acabado están ahora a la disposición. En la sección 6.3 se demuestra que lo anterior cambió el tableau actual óptimo al mostrado en la tabla 39.

Puesto que todas las variables en el renglón 0 tienen coeficiente no negativo, se podría aplicar el método simplex para el dual para poder determinar la nueva solución óptima. La variable x_1 es la más negativa, de modo que esta variable debe salir de la base, y el renglón 3 será el renglón pivote. Como s_2 tiene el único coeficiente negativo del renglón 3, s_2 entra a la base (tabla 40)

Éste es un tableau óptimo. En el supuesto de que se dispusiera de 30 horas de acabado, la nueva solución óptima para el problema de Dakota es fabricar 16 sillas, 0 mesas y 0 escritorios. Naturalmente, al cambiar el lado derecho de una restricción es posible que el PL sea no factible. El paso 3 del algoritmo simplex dual indica si ése es el caso.

TABLA 39

Tableau óptimo "antiguo" de Dakota con 30 horas disponibles de acabado

	Variable básica
$z \quad + \quad 5x_2 \qquad\qquad + 10s_2 + 10s_3 = 380$	$z = 380$
$- \quad 2x_2 \qquad + s_1 + 2s_2 - 8s_3 = 44$	$s_1 = 44$
$- \quad 2x_2 + x_3 \qquad + 2s_2 - 4s_3 = 28$	$x_3 = 28$
$x_1 + 1.25x_2 \qquad - 0.5s_2 + 1.5s_3 = -3$	$x_1 = -3$

TABLA 40

Tableau óptimo "nuevo" de Dakota con 30 horas disponibles de acabado

	Variable básica
$z + 20x_1 + 30x_2 \qquad\qquad + 40s_3 = 320$	$z = 320$
$4x_1 + 3x_2 \qquad + s_1 \qquad - 2s_3 = 32$	$s_1 = 32$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad + 2s_3 = 16$	$x_3 = 16$
$- 2x_1 - 2.5x_2 \qquad\qquad + s_2 - 3s_3 = 6$	$s_1 = 6$

Resolución de un problema de minimización normal

Con el objeto de mostrar la manera en que el simplex para el dual se puede aplicar para resolver un problema de minimización normal resolveremos el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para empezar, se multiplica z por -1 para convertir el PL en un problema de maximización con función objetivo $z' = -x_1 - 2x_2$. Después de restar las variables de excedente e_1 y e_2 de las dos restricciones se obtiene el tableau inicial de la tabla 41. Todas las variables tienen coeficiente no negativo en el renglón 0, de modo que se puede aplicar el método simplex dual. Antes de proseguir, se requiere encontrar las variables básicas para las restricciones. Si se multiplica cada restricción por -1, es posible usar e_1 y e_2 como variables básicas. Todo esto da lugar al tableau de la tabla 42. Como por lo menos una restricción tiene un lado derecho negativo, entonces no es un tableau óptimo, y se prosigue con el paso 2.

Se elige la variable básica más negativa (e_2) para que deje la base. Como e_2 es básica en el renglón 2, éste será el renglón pivote. Se determinan las razones siguientes con el objeto de determinar la variable entrante:

$$\begin{aligned} \text{cociente } x_1 &= 1/-2 = -\tfrac{1}{2} \\ \text{cociente } x_2 &= 2/-1 = -2 \end{aligned}$$

El cociente más pequeño (en valor absoluto) es el cociente x_1, así que se tiene que usar OER para introducir x_1 a la base en el renglón 2 (véase tabla 43).[†]

Como no hay restricción que indique infactibilidad (paso 3), entonces regresamos al paso 1. El lado derecho de la primera restricción es negativo, por lo que el tableau no es óptimo, y continuamos con el paso 2. Como $e_1 = -1$ es la variable básica más negativa,

[†]El lector interesado podría verificar que si se hubiera cometido un error al efectuar la prueba del cociente y al elegir x_2 para que entrara a la base, entonces habría resultado un coeficiente negativo en el renglón 0 y se habría eliminado la factibilidad del dual.

TABLA 41
Tableau inicial para resolver un problema de minimización normal

$z' + x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - e_1 = 4$
$2x_1 + x_2 - x_3 - e_2 = 6$

TABLA 42
Tableau inicial en la forma canónica

	Variable básica
$z' + x_1 + 2x_1 = 0$	$z' = 0$
$-x_1 + 2x_2 - x_3 + e_1 = -4$	$e_1 = -4$
$-2x_1 - x_2 + x_3 + e_2 = -6$	$e_2 = -6$

TABLA 43
Primer tableau del simplex del dual

	Variable básica
$z' + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}e_2 = -3$	$z' = -3$
$\frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + e_1 - \frac{1}{2}e_2 = -1$	$e_1 = -1$
$x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_2 = 3$	$x_1 = 3$

saldrá de la base, y el renglón 1 será el renglón pivote. Las variables entrantes posibles son x_3 y e_2. Los cocientes pertinentes son

$$\text{cociente } x_3 = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{cociente } e_2 = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

El cociente más pequeño (en valor absoluto) es $-\frac{1}{3}$, por eso x_3 entrará a la base en el renglón 1. Después de pivotear en x_3 el nuevo tableau se muestra en la tabla 44.† Todos los lados derechos son no negativos, por eso éste es un tableau óptimo. El problema original era un problema de minimización, por lo que la solución óptima del problema original de minimización es $z = \frac{10}{3}$, $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$ y $x_2 = 0$.

Observe que el valor z' de cada tableau simplex dual (excepto el tableau simplex dual óptimo) sobrepasa el valor z' óptimo. Por esta razón, se dice que los tableaus dual simplex son superóptimos. A medida que se aplica el simplex dual, cada pivoteo nos acerca más a la solución factible del primal. Cada pivoteo (exceptuando la degeneración) reduce z', con lo que nos alejamos de la "superoptimalidad". Una vez que se logra la factibilidad del primal, la solución es óptima.

TABLA 44
Tableau óptimo para el ejemplo del simplex para el dual

	Variable básica
$z' + \frac{7}{3}x_2 + \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 = -\frac{10}{3}$	$z' = -\frac{10}{3}$
$-\frac{5}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 = \frac{2}{3}$	$x_3 = \frac{2}{3}$
$x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 = \frac{10}{3}$	$x_1 = \frac{10}{3}$

†Si hubiéramos decidido introducir a la base cualquier variable con coeficiente positivo en el renglón de pivoteo, entonces habríamos terminado con algunas entradas negativas en el renglón 0. Ésta es la razón de que cualquier variable que entra a la base debe tener coeficiente negativo en el renglón de pivoteo.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva el PL siguiente por medio del método simplex para el dual:

$$\begin{aligned} \max z &= -2x_1 - x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2 Luego de resolver el PL siguiente se obtiene el tableau óptimo mostrado en la tabla 45.

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a ¿Cuál es la solución óptima para este PL si se suma la restricción $3x_1 + x_2 \leq 10$?

b Determine la solución óptima si se suma la restricción $x_1 - x_2 \geq 6$.

TABLA 45

	Variable básica
$z + 2x_2 + 3s_2 = 18$	$z_1 = 18$
$0.5x_2 + s_1 - 0.5s_2 = 2$	$s_1 = 2$
$x_1 + 0.5x_2 + 0.5s_2 = 3$	$x_1 = 3$

c Diga cuál es la solución óptima si suma la restricción $8x_1 + x_2 \leq 12$.

3 Encuentre la nueva solución óptima para el problema de Dakota si sólo se dispone de 20 pies de tablón de madera.

4 Determine la nueva solución óptima para el problema de Dakota si están disponibles 15 horas de carpintería.

6.12 Análisis de ponderación de datos[†]

Una pregunta frecuente es si las universidades, hospitales, restaurantes u otros negocios operan con eficiencia. El **Data Envelopment Analysis, DEA** (Método del análisis de ponderación de datos) se puede aplicar para contestar esta pregunta. La presentación se basa en Callen (1991). Para ilustrar la manera en que funciona este método, consideremos un grupo de tres hospitales. Con el fin de simplificar la cuestión, supongamos que cada hospital "convierte" dos insumos en tres productos distintos. Los dos insumos que usa cada hospital son:

Insumo 1 = capital (medido por la cantidad de camas de hospital)

Insumo 2 = mano de obra (medida en miles de horas de mano de obra usadas en un mes)

Los productos que entrega cada hospital son:

Producto 1 = cientos de días-paciente durante un mes para pacientes menores de 14 años.

Producto 2 = cientos de días-paciente durante un mes para pacientes entre 14 y 65 años.

Producto 3 = cientos de días-paciente durante un mes para pacientes mayores de 65 años.

Suponga que los insumos y los productos para los tres hospitales son los que se proporcionan en la tabla 46.

Para determinar si un hospital es eficiente, definamos t_r = precio o valor de una unidad del producto r y w_s = costo de una unidad del insumo s. La *eficiencia* del hospital i se define como

$$\frac{\text{valor de los productos del hospital } i}{\text{costo de los insumos del hospital } i}$$

Según los datos de la tabla 46 se observa que la eficiencia de cada hospital es como sigue:

$$\text{Eficiencia del hospital 1} = \frac{9t_1 + 4t_2 + 16t_3}{5w_1 + 14w_2}$$

$$\text{Eficiencia del hospital 2} = \frac{5t_1 + 7t_2 + 10t_3}{8w_1 + 15w_2}$$

$$\text{Eficiencia del hospital 3} = \frac{4t_1 + 9t_2 + 13t_3}{7w_1 + 12w_2}$$

[†]Esta sección se podría omitir sin que se pierda la continuidad de los temas.

TABLA 46
Insumos y productos para los hospitales

Hospital	Insumos 1	Insumos 2	Productos 1	Productos 2	Productos 3
1	5	14	9	4	16
2	8	15	5	7	10
3	7	12	4	9	13

En el método DEA se aplican las cuatro ideas siguientes para determinar si un hospital es eficiente.

1 Ningún hospital puede ser más de 100% eficiente. Por lo tanto, la eficiencia de cada hospital tiene que ser menor que o igual a 1. Por lo que se refiere al hospital 1, se tiene que $(9t_1 + 4t_2 + 16t_3)/(5w_1 + 14w_2) \leq 1$. Si se multiplican ambos miembros de esta desigualdad por $(5w_1 + 14w_2)$ (¡ésta es la táctica que se usa para simplificar las restricciones de mezcla en la sección 3.8!) se obtiene la restricción del PL $5w_1 + 14w_2 - 9t_1 - 4t_2 - 16t_3 \geq 0$.

2 Suponga que hay interés en evaluar la eficiencia del hospital i. Se hacen esfuerzos por elegir precios de los productos (t_1, t_2 y t_3) y costos de los insumos (w_1 y w_2) que maximizan la eficiencia. Si la eficiencia del hospital i es igual a 1, entonces es eficiente; si la eficiencia es menor que 1, entonces es ineficiente.

3 Para simplificar los cálculos, podríamos escalar los precios de los productos de tal manera que el costo de los insumos del hospital i es igual a 1. Por lo tanto, para el hospital 2 se añade la restricción $8w_1 + 15w_2 = 1$.

4 Debemos tener la certeza de que cada costo del insumo y precio del producto es rigurosamente positivo. Por ejemplo, si $t_i = 0$, entonces DEA no podría detectar un producto i que implicara ineficiencia; si $w_j = 0$, entonces DEA no podría identificar un insumo j que implique ineficiencia.

Los puntos (1) a (4) generan los PL siguientes para probar la eficiencia de cada hospital.

PL del hospital 1

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 9t_1 + 4t_2 + 16t_3 && (1)\\
\text{s.a} \quad & -9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0 && (2)\\
& -5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0 && (3)\\
& -4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0 && (4)\\
& 5w_1 + 14w_2 = 1 && (5)\\
& t_1 \geq .0001 && (6)\\
& t_2 \geq .0001 && (7)\\
& t_3 \geq .0001 && (8)\\
& w_1 \geq .0001 && (9)\\
& w_2 \geq .0001 && (10)
\end{aligned}
$$

PL del hospital 2

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 5t_1 + 7t_2 + 10t_3 && (1)\\
\text{s.a} \quad & -9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 \geq 0 && (2)\\
& -5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 \geq 0 && (3)\\
& -4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 \geq 0 && (4)\\
& 8w_1 + 15w_2 = 1 && (5)\\
& t_1 \geq .0001 && (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t_2 \qquad\qquad\qquad & \geq .0001 \quad (7)\\
t_3 \qquad\qquad & \geq .0001 \quad (8)\\
w_1 \qquad & \geq .0001 \quad (9)\\
w_2 & \geq .0001 \quad (10)
\end{aligned}
$$

PL del hospital 3 $\max z = 4t_1 + 9t_2 + 13t_3$ (1)

$$
\begin{aligned}
\text{s.a} \quad -9t_1 - 4t_2 - 16t_3 + 5w_1 + 14w_2 &\geq 0 && (2)\\
-5t_1 - 7t_2 - 10t_3 + 8w_1 + 15w_2 &\geq 0 && (3)\\
-4t_1 - 9t_2 - 13t_3 + 7w_1 + 12w_2 &\geq 0 && (4)\\
7w_1 + 12w_2 &= 1 && (5)\\
t_1 &\geq .0001 && (6)\\
t_2 &\geq .0001 && (7)\\
t_3 &\geq .0001 && (8)\\
w_1 &\geq .0001 && (9)\\
w_2 &\geq .0001 && (10)
\end{aligned}
$$

Veamos la manera como el PL del hospital 1 incorpora los puntos (1) a (4). El punto (1) maximiza la eficiencia del hospital 1. Esto es a causa de que se infiere de la restricción (5) que el costo total de los insumos del hospital 1 es igual a 1. Con las restricciones (2) a (4) se tiene la certeza de que ningún hospital tiene una eficiencia mayor al 100%. Las restricciones (6) a (10) dan certidumbre de que cada costo del insumo y cada precio del producto son rigurosamente positivos (el .0001 del lado derecho es arbitrario; se podría usar cualquier otra cantidad positiva pequeña).

```
MAX 9 T1 + 4 T2 + 16 T3
SUBJECT TO
       2)  - 9 T1 - 4 T2 - 16 T3 + 5 W1 + 14 W2 >=   0
       3)  - 5 T1 - 7 T2 - 10 T3 + 8 W1 + 15 W2 >=   0
       4)  - 4 T1 - 9 T2 - 13 T3 + 7 W1 + 12 W2 >=   0
       5)    W1 >=    0.0001
       6)    W2 >=    0.0001
       7)    T1 >=    0.0001
       8)    T2 >=    0.0001
       9)    T3 >=    0.0001
      10)    5 W1 + 14 W2 =    1
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP       6

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)     1.00000000

VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
      T1          .110889           .000000
      T2          .000100           .000000
      T3          .000100           .000000
      W1          .000100           .000000
      W2          .071393           .000000


     ROW     SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)          .000000         -1.000000
      3)          .515548           .000000
      4)          .411659           .000000
      5)          .000000           .000000
      6)          .071293           .000000
      7)          .110789           .000000
      8)          .000000           .000000
      9)          .000000           .000000
     10)          .000000          1.000000

NO. ITERATIONS=         6
```

FIGURA 10(a)
PL del hospital 1

```
MAX     5 T1 + 7 T2 + 10 T3
SUBJECT TO
        2)   - 9 T1 - 4 T2 - 16 T3 + 5 W1 + 14 W2 >=     0
        3)   - 5 T1 - 7 T2 - 10 T3 + 8 W1 + 15 W2 >=     0
        4)   - 4 T1 - 9 T2 - 13 T3 + 7 W1 + 12 W2 >=     0
        5)     8 W1 + 15 W2 =     1
        6)     W1   >=  0.0001
        7)     W2   >=  0.0001
        8)     T1   >=  0.0001
        9)     T2   >=  0.0001
       10)     T3   >=  0.0001
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP        0

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)     .773030000

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
      T1            .079821           .000000
      T2            .053275           .000000
      T3            .000100           .000000
      W1            .000100           .000000
      W2            .066613           .000000


     ROW     SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      2)            .000000          -.261538
      3)            .226970           .000000
      4)            .000000          -.661538
      5)            .000000           .773333
      6)            .000000          -.248204
      7)            .066513           .000000
      8)            .079721           .000000
      9)            .053175           .000000
     10)            .000000         -2.784615

NO. ITERATIONS=        0
```

FIGURA 10(b)
PL del hospital 2

Los resultados que proporciona LINDO para estos PL se presentan en las figuras 10(a) a (c). De acuerdo con el valor de la función objetivo óptima de cada PL se tiene que

Eficiencia del hospital 1 = 1

Eficiencia del hospital 2 = .773

Eficiencia del hospital 3= 1

Por lo tanto, el hospital 2 es ineficiente y los hospitales 1 y 3 sí son eficientes.

OBSERVACIÓN 1 Un modo sencillo de crear el PL del hospital 2 es utilizar LINDO para modificar la función objetivo del PL del hospital 1 y la restricción $5w_1 + 14w_2 = 1$. Luego ya es fácil modificar el PL del hospital 2 para crear el PL del hospital 3.

Uso de LINGO para aplicar el DEA

DEA.lng

El programa siguiente de LINGO (véase archivo DEA.lng) resuelva el problema DEA de los hospitales. Cuando se enfrenta con otro problema DEA, se empieza por cambiar las cantidades de insumos, productos y unidades. Luego se cambia el uso de los recursos y los productos por cada unidad. Por último, al cambiar la cantidad (por ejemplo) a 1, es posible evaluar la eficiencia de la unidad 1. Si el valor óptimo de la función objetivo para la unidad 1 es menor que 1, entonces la unidad 1 es ineficiente. Si ocurre lo contrario, es eficiente.

```
SETS:
INPUTS/1..2/:COSTS;
OUTPUTS/1..3/:PRICES;
```

```
MAX 4 TI + 9 + T2 + 13 T3
SUBJECT TO
       2)  - 9 T1 - 4 T2 - 16 T3 + 5 W1 + 14 W2 >= 0
       3)  - 5 T1 - 7 T2 - 10 T3 + 8 W1 + 15 W2 >= 0
       4)  - 4 T1 - 9 T2 - 13 T3 + 7 W1 + 12 W2 >= 0
       5)    W1 >=    0.0001
       6)    W2 >=    0.0001
       7)    T1 >=    0.0001
       8)    T2 >=    0.0001
       9)    T3 >=    0.0001
      10)    7 W1 + 12 W2 = 1
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 7

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)     1.00000000

 VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
       T1            .099815          .000000
       T2            .066605          .000000
       T3            .000100          .000000
       W1            .000100          .000000
       W2            .083275          .000000

      ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)            .000000          .000000
       3)            .283620          .000000
       4)            .000000        -1.000000
       5)            .000000          .000000
       6)            .083175          .000000
       7)            .099715          .000000
       8)            .066505          .000000
       9)            .000000          .000000
      10)            .000000         1.000000

 NO. ITERATIONS=       7
```

FIGURA 10(c)
PL del hospital 3

```
UNITS/1..3/;
UNIN(UNITS,INPUTS):USED;
UNOUT(UNITS,OUTPUTS):PRODUCED;
ENDSETS
NUMBER=2;
@FOR(UNITS(J)|j#EQ#NUMBER:MAX=@SUM(OUTPUTS(I):PRICES(I)*PRODUCED(J,I)));
@FOR(UNITS(J)|J#EQ#NUMBER:@SUM(INPUTS(I):COSTS(I)*USED(J,I))=1);
@FOR(INPUTS(I):COSTS(I)>=.0001);
@FOR(OUTPUTS(I):PRICES(I)>=.0001);
@FOR(UNITS(I):@SUM(INPUTS(J):COSTS(J)*USED(I,J))>=@SUM(OUTPUTS(J):PRICES(J)*PRODUCED(I,J
))
);
DATA:
USED=5,14,
     8,15,
     7,12;
PRODUCED=9,4,16,
         5,7,10,
         4,9,13;
ENDDATA
END
```

Precios dual y DEA

La sección de *DUAL PRICES* de los resultados de LINDO señala la ineficiencia del hospital 2 (o la de cualquier otra empresa que DEA haya encontrado ineficiente). Piense en todos los hospitales cuyas restricciones de eficiencia tienen precios dual no cero en el PL del hospital 2 (figura 10b). (En este ejemplo, los hospitales 1 y 3 tienen precios dual no cero.) Si se promedian los vectores de los productos y los vectores de los insumos para estos hospitales (usando el valor absoluto del precio dual para cada hospital como el peso) se obtiene lo siguiente:

Vector de los productos promediado

$$0.261538\begin{bmatrix}9\\4\\16\end{bmatrix} + .661538\begin{bmatrix}4\\9\\13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\7\\12.785\end{bmatrix}$$

Vector de los insumos promediado

$$0.261538\begin{bmatrix}5\\14\end{bmatrix} + .661538\begin{bmatrix}7\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5.938\\11.6\end{bmatrix}$$

Suponga que creamos un hospital mezclado mediante la combinación de 0.261538 del hospital 1 y 0.661538 del hospital 3. El vector de los productos promediado señala que el hospital mezclado genera la misma cantidad de productos 1 y 2 que el hospital 2, pero el hospital mezclado crea $12.785 - 10 = 2.785$ más del producto 3 (días-paciente para más de 65 pacientes). Mediante el vector de insumos promediado para el hospital mezclado, encontramos que éste utiliza menos de cada insumo que el hospital 2. ¡Ahora ya se ve exactamente dónde el hospital 2 es ineficiente!

A propósito, del valor de la función objetivo de 0.7730 para el PL del hospital 2 se infiere que el hospital mezclado, más eficiente, genera sus productos superiores usando cuando mucho 77.30% de cada insumo. Obsérvese que

Insumo 1 que usa el hospital mezclado <0.7730 * (Insumo 1 que usa el hospital 2) = 6.2186

y

Insumo 2 que usa el hospital mezclado = 0.7730 * (Insumo 2 que usa el hospital 2) = 11.6

Una explicación de la razón de que los precios dual se necesitan para encontrar un hospital mezclado que es superior a un hospital ineficiente se proporciona en los problemas 5 a 7.

PROBLEMAS

Grupo A

1 La dirección de educación de Salem desea evaluar la eficiencia de las cuatro escuelas primarias de la ciudad. Los tres productos de las escuelas son:

Producto 1 = calificación promedio en lectura.

Producto 2 = calificación promedio de matemáticas.

Producto 3 = calificación promedio de autoestima.

Los tres insumos de las escuelas son:

Insumo 1 = nivel promedio educacional de las madres (definido por el grado más alto terminado: 12 = bachillerato completo; 16 = carrera universitaria terminada y así sucesivamente).

Insumo 2 = número de visitas de los padres a la escuela (por niño).

Insumo 3 = razón de maestros a estudiantes.

La información pertinente relacionada con las cuatro escuelas se proporciona en la tabla 47. Determine qué escuelas (si las hay) son ineficientes. Para cualquier escuela ineficiente determine la naturaleza de la ineficiencia.

TABLA 47

	Insumos			Productos		
Escuela	1	2	3	1	2	3
1	13	4	.05	9	7	6
2	14	5	.05	10	8	7
3	11	6	.06	11	7	8
4	15	8	.08	9	9	9

2 El banco de Pine Valley tiene tres sucursales. Usted es el encargado de evaluar la eficiencia de cada una de ellas. Los insumos y productos siguientes se utilizan en el estudio.

Insumo 1 = horas de mano de obra utilizadas (cientos por mes).

Insumo 2 = espacio utilizado (en cientos de pies cuadrados).

Insumo 3 = suministros utilizados por mes (en dólares).

Producto 1 = solicitudes de préstamo por mes (en dólares).

Producto 2 = depósitos procesados por mes (en miles).

Producto 3 = cheques procesados por mes (en miles).

La información pertinente se proporciona en la tabla 48. Mediante esta información determine si las sucursales del

TABLA 48

Banco	Insumos 1	2	3	Productos 1	2	3
1	15	20	50	200	15	35
2	14	23	51	220	18	45
3	16	19	51	210	17	20

TABLA 49

Demarcación	Insumos 1	2	Productos 1	2
1	200	60	6	8
2	300	90	8	9.5
3	400	120	10	11

banco son ineficientes. Si alguna de las sucursales es ineficiente señale dónde radica la falla.

3 Usted tiene que evaluar la eficiencia del Departamento de Policía de Port Charles. Tres demarcaciones son las que se deben evaluar. Los insumos y los productos para cada demarcación son los siguientes:

Insumo 1 = cantidad de oficiales de policía.

Insumo 2 = cantidad de vehículos usados.

Producto 1 = número de patrullas que acuden a los servicios requeridos (miles por año).

Producto 2 = número de condenas conseguidas al año (en cientos).

Usted cuenta con la información que se proporciona en la tabla 49. Utilícela para determinar qué demarcación, si acaso la hay, es ineficiente. Para cualquier demarcación ineficiente, determine la naturaleza de la falla.

4 Usted fue asignado a la Universidad de Indiana para evaluar la eficiencia relativa de cuatro escuelas que ofrecen grados académicos: Negocios, Educación, Ciencias y Artes, y Salud, Educación Física y Recreación (SEFR). Usted cuenta con la información de la tabla 50. Utilice el DEA para determinar las escuelas deficientes. Comente la naturaleza de las ineficiencias encontradas.

Grupo B

5 Explique por qué la cantidad de cada producto que genera el hospital mezclado obtenida al promediar los hospitales 1 y 3 (donde el valor absoluto de los precios dual es el peso) es por lo menos igual a la cantidad del producto correspondiente generado por el hospital 2. (*Sugerencia*: valore las variables t_1, t_2 y t_3, y apóyese en el hecho de que el coeficiente de estas variables en el renglón 0 del tableau óptimo debe ser igual a 0.)

6 Explique la razón de que el precio dual de la restricción $8w_1 + 15w_2 = 1$ debe ser igual al valor óptimo de z para el PL del hospital 2.

7 **a** Dé la razón de que la cantidad de cada insumo usado en el hospital compuesto es a lo más (eficiencia del hospital 2) * (la cantidad del insumo correspondiente usado que utiliza el hospital 2). (*Sugerencia*: valore w_1 y w_2 y use el problema 6.)

b Explique por qué la cantidad de cada insumo que usa el hospital mezclado no es tan grande como la cantidad del insumo correspondiente que usa el hospital 2.

TABLA 50

	Facultad	Personal de apoyo	Presupuesto para suministro (en millones)	Horas de créditos (en miles)	Artículos de investigaciones
Negocios	150	70	5	15	225
Educación	60	20	3	5.4	70
Ciencias y artes	800	140	20	56	1 300
SEFR	30	15	1	2.1	40

RESUMEN Análisis de sensibilidad gráfico

Para determinar si la base actual aún es óptima después de modificar un coeficiente, observe que el cambio afecta la pendiente de la recta de iso-utilidades. La base actual sigue siendo óptima siempre que la solución óptima actual sea el último punto de la región factible que tenga contacto con las rectas de iso-utilidades a medida que nos desplazamos en la dirección en que se incrementa z (en el caso de un problema de maximización). En el supuesto de que la base actual se conserve óptima, los valores de las variables de decisión se mantienen sin cambio, pero el valor óptimo de z sí podría variar.

Si lo que desea es determinar si la base actual sigue siendo óptima después de modificar el lado derecho de una restricción, encuentre las restricciones (quizá incluso las restricciones de signo) que son activas para la solución óptima actual. Cuando se modifica el lado derecho de una restricción, la base actual continúa siendo óptima siempre que sea factible el punto donde las restricciones son activas. Incluso si la base actual es óptima, los valores de las variables de decisión y el valor óptimo de z sí podrían cambiar.

Precios sombra

El precio sombra de la i-ésima restricción de un problema de programación lineal es la cantidad que el valor óptimo de z mejora si el lado derecho se incrementa una unidad. El precio sombra de la i-ésima restricción es el *DUAL PRICE* para el renglón $i + 1$ en los resultados que proporciona LINDO.

Notación

BV_i = variable básica para la i-ésima restricción en el tableau óptimo

$\mathbf{c}_{\text{BV}}$ = vector renglón cuyo i-ésimo elemento es el coeficiente de la función objetivo para BV_i en el PL

$\mathbf{a}_j$ = columna para la variable x_j en restricciones del PL original

$\mathbf{b}$ = vector de lados derechos para el PL original

$\bar{c}_j$ = coeficiente de x_j en el renglón 0 del tableau óptimo

Cómo calcular el tableau óptimo a partir del PL inicial

Columna para x_j en las restricciones del tableau óptimo $= B^{-1}\mathbf{a}_j$ **(5)**

Lado derecho de las restricciones del tableau óptimo $= B^{-1}\mathbf{b}$ **(6)**

$\bar{c}_j = \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ **(10)**

Coeficiente de la variable de holgura s_i en el renglón 0 óptimo = i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$ **(10′)**

Coeficiente de la variable de excedente e_i en el renglón 0 óptimo = $-$(i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$) **(10″)**

Coeficiente de la variable artificial a_i en el renglón 0 óptimo = (i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$) + M **(10‴)**

Lado derecho del renglón óptimo 0 $= \mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{b}$ **(11)**

Análisis de sensibilidad

Por lo que se refiere a un problema de maximización, un tableau es óptimo si y sólo si el coeficiente de todas las variables es no negativo en el renglón 0 y todas las restricciones tienen lado derecho no negativo. En cuanto a un problema de minimización, un tableau es óptimo si y sólo si el coeficiente de todas las variables es no positivo en el renglón 0 y cada una de las restricciones tiene un lado derecho no negativo.

Si la base actual sigue siendo óptima después de modificar el coeficiente de una variable no básica de la función objetivo, se mantienen sin cambios los valores de las variables de decisión y el valor óptimo de z. En el caso de una variable básica, los valores de las variables de decisión no cambian, pero sí podría cambiar el valor óptimo de z. Tanto los valores de las variables de decisión como el valor óptimo de z podrían variar después de modificar un lado derecho. Los nuevos valores de las variables de decisión se podrían determinar calculando B^{-1} (nuevo vector de lado derecho). El nuevo valor óptimo de z se podría determinar usando los precios sombra de la ecuación (11).

Intervalo de los coeficientes de la función objetivo

La sección *OBJ COEFFICIENT RANGES* de los resultados de LINDO proporciona el intervalo de los valores para un coeficiente de la función objetivo en el cual la base actual sigue siendo óptima. Dentro de este intervalo, los valores de las variables de decisión se mantienen sin cambios, pero el valor óptimo de z podría cambiar o no.

Costo reducido

Con respecto a cualquier variable no básica, el costo reducido de la variable es la cantidad que tiene que mejorar el coeficiente de la función objetivo antes de que esa variable se convierta en una variable básica en alguna solución óptima del PL.

Intervalo del lado derecho

Si el lado derecho de una restricción se mantiene dentro del *RIGHTHAND SIDE RANGE* de los resultados de LINDO, la base actual sigue siendo óptima por lo que se podría usar el listado de LINDO para el precio dual de la restricción a fin de determinar de qué manera el cambio afectaría el valor óptimo de z. Aun cuando el lado derecho de una restricción se mantenga dentro del intervalo, probablemente cambiarán los valores de las variables de decisión.

Determinación del dual de un PL

Por lo que se refiere a un problema de maximización normal (todas las restricciones $\leq$ y todas las variables no negativas) o un problema de minimización normal (todas las restricciones $\geq$ y todas las variables no negativas), el dual se determina como sigue:

Si leemos el primal de lado a lado en la tabla 14, leemos el dual hacia abajo. Si leemos el primal hacia abajo en la tabla 14, leemos el dual de lado a lado. Usamos las x_i y z como variables en el caso de un problema de maximización y las y_j y w como variables para un problema de minimización.

Para encontrar el dual de un problema de maximización no normal:

Paso 1 Complete la tabla 14 de modo que se pueda leer de lado a lado el primal.

Paso 2 Luego de efectuar los cambios siguientes, el dual se puede leer hacia abajo del modo usual: (a) si la i-ésima restricción del primal es una restricción $\geq$, la variable y_i correspondiente del dual tiene que satisfacer $y_i \leq 0$. (b) Si la restricción i-ésima del primal es una igualdad, entonces la variable y_i del dual no tiene ahora restricción de signo. (c) Si la variable i-ésima del primal no tiene restricción de signo, entonces la i-ésima restricción del dual será una igualdad.

Para encontrar el dual de un problema de minimización no normal:

Paso 1 Escriba el primal de tal modo que se pueda leer hacia abajo en la tabla 14.

Paso 2 Con excepción de los cambios siguientes, el dual se puede leer de lado a lado de la tabla: (a) si la i-ésima restricción del primal es una restricción $\leq$, entonces la variable x_i correspondiente del dual debe satisfacer $x_i \leq 0$. (b) Si la i-ésima restricción del primal es una igualdad, entonces la variable x_i correspondiente del dual no tiene restricción de signo. (c) Si la variable y_i del primal no tiene restricción de signo, entonces la i-ésima restricción del dual será una igualdad.

Teorema del dual

Suponga que BV es una base óptima para el primal. Entonces $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$ es una solución óptima del dual. Asimismo, $\bar{z} = \bar{w}$.

Solución óptima del dual de un PL

Si el primal es un problema de maximización, entonces, la solución óptima del dual se podría leer a partir del renglón 0 del tableau óptimo de acuerdo con las reglas siguientes:

Valor óptimo de la variable y_i del dual si la restricción i es una restricción $\leq$ = coeficiente de s_i en el renglón 0 óptimo **(31)**

Valor óptimo de la variable y_i del dual si la restricción i es una restricción $\geq$ = $-$(coeficiente de e_i en el renglón 0 óptimo) **(31′)**

Valor óptimo de la variable y_i del dual si la restricción i es una restricción de igualdad = (coeficiente de a_i en el renglón 0 óptimo) $- M$ **(31″)**

Si el primal es un problema de minimización, entonces, la solución óptima del dual se podría leer a partir del renglón 0 del tableau óptimo aplicando las reglas siguientes:

Valor óptimo de la variable x_i del dual si la restricción i es una restricción $\leq$ = coeficiente de s_i en el renglón 0 óptimo

Valor óptimo de la variable x_i del dual si la restricción i es una restricción $\geq$ = $-$(coeficiente de e_i en el renglón 0 óptimo)

Valor óptimo de la variable x_i del dual si la restricción i es una restricción de igualdad = (coeficiente de a_i en el renglón 0 óptimo) $+ M$

Precios sombra (una vez más)

En el caso de un PL de maximización, el precio sombra de la i-ésima restricción es el valor de la variable i-ésima del dual en la solución óptima del dual. Por lo que se refiere a un PL de minimización, el precio sombra de la i-ésima restricción = (variable i-ésima del dual en la solución óptima del dual). El precio sombra de la i-ésima restricción se encuentra en el renglón $i + 1$ de la parte de *DUAL PRICES* de los resultados de LINDO.

Nuevo valor óptimo de z = (antiguo valor óptimo de z) + (precio sombra de la restricción i-ésima) Δb_i (problema de maximización) **(37)**

Nuevo valor óptimo de z = (antiguo valor óptimo de z) $-$ (precio sombra de la restricción i) Δb_i (problema de minimización) **(37′)**

Una restricción $\geq$ tendrá un precio sombra no positivo; y el precio sombra de una restricción $\leq$ será no negativo, y el de una restricción de igualdad será positivo, negativo o cero.

Dualidad y análisis de sensibilidad

Mediante la demostración del teorema del dual se observó que si un conjunto de variables básicas BV es factible, entonces, BV es óptimo (es decir, el coeficiente de todas las variables en el renglón 0 es no negativo) si y sólo si la solución del dual asociada, $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$, es factible para el dual.

Es posible usar este resultado para encontrar otro modo de efectuar los tipos siguientes de análisis de sensibilidad.

Cambio 1 Cambio del coeficiente de una variable no básica de la función objetivo.

Cambio 4 Modificación de la columna de una variable no básica.

Cambio 5 Agregando una nueva actividad.

En cada uno de los casos, determine simplemente si al modificar el PL original se mantiene la factibilidad del dual. Si se conserva, entonces la base actual sigue siendo óptima. Si la factibilidad del dual no se conserva, entonces la base actual ya no es óptima.

Holgura complementaria

TEOREMA 3

Sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

una solución factible del primal y sea $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m]$ una solución factible del dual. Entonces $\mathbf{x}$ es óptima para el primal y $\mathbf{y}$ es óptima para el dual si y sólo si

$$s_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{38}$$

$$e_j x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

Método simplex dual

Este método simplex dual es aplicable (en un problema de maximización) en cualquier momento que haya una solución básica en la cual todas las variables tienen coeficiente no negativo en el renglón 0. Si se ha llegado a tal solución básica, entonces el método simplex dual prosigue como se señala enseguida:

Paso 1 Si el lado derecho de todas las restricciones es no negativo, entonces se ha encontrado una solución óptima; si no, entonces por lo menos una restricción tiene un lado derecho negativo, y se continúa con el paso 2.

Paso 2 Elija la variable básica más negativa como la variable que saldrá de la base. El renglón en el cual esta variable es básica será el renglón pivote. Para seleccionar la variable que entra a la base calcule el siguiente cociente para cada variable x_j con coeficiente *negativo* en el renglón pivote:

$$\frac{\text{Coeficiente de } x_j \text{ en el renglón 0}}{\text{Coeficiente de } x_j \text{ en el renglón pivote}}$$

Seleccionar la variable que tenga el cociente más pequeño (valor absoluto) como la variable que entra a la base. Usar operaciones elementales por renglón con el renglón pivote para introducir una variación básica de la variable de entrada.

Paso 3 Si hay alguna restricción en la cual el lado derecho es negativo y el coeficiente de todas las variables es no negativo, entonces el PL no tiene solución factible. La presencia (posiblemente después de varios pivoteos) de una restricción como $x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$ sería indicio de infactibilidad. Si no se encuentra restricción alguna que indique infactibilidad, regrese al paso 1.

El método simplex dual se utiliza con frecuencia en las situaciones siguientes:

1 Determinar la nueva solución óptima después de agregar una restricción al PL.

2 Determinar la nueva solución óptima después de cambiar un lado derecho del PL.

3 Resolver un problema de minimización normal.

PROBLEMAS DE REPASO

Todos los problemas de la sección 5.2 y 5.3 están relacionados junto con los problemas de repaso 1, 2, 6 y 7 del capítulo 5.

Grupo A

1 Considere el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 51):

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &= 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Calcule el intervalo de valores para b_3 para el que la base actual sigue siendo óptima. Si $b_3 = 11$, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

2 Para el modelo del problema 1 determine gráficamente el intervalo de valores de c_1 para el cual la base actual se mantiene óptima. (*Sugerencia*: la región factible es un segmento de recta.)

3 Considere el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 52):

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ 6x_1 + x_3 &\leq 8 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Calcule el intervalo de valores para c_1 para el que la base actual continúa siendo óptima.

c Encuentre el intervalo de valores de c_2 para el cual la base actual aún es óptima.

4 Carco fabrica automóviles y camiones. Cada automóvil contribuye con 300 dólares a la utilidad y cada camión, con 400 dólares. Los recursos necesarios para fabricar un automóvil y un camión se muestran en la tabla 53. Carco puede rentar todos los días hasta 98 máquinas tipo 1 a un costo de 50 dólares por máquina. La compañía dispone por ahora de 73 máquinas tipo 2 y 260 toneladas de acero. Las consideraciones del mercado señalan que por lo menos se deben producir 88 automóviles y por lo menos 26 camiones. Sea

X1 = cantidad de automóviles producidos por día.

X2 = cantidad de camiones fabricados por día.

M1 = máquinas tipo 1 rentadas diariamente.

Con el fin de maximizar la utilidad, Carco debe resolver el PL que se proporciona en la figura 11. Utilice los resultados que da LINDO para contestar las preguntas siguientes:

a Si los automóviles contribuyeran con 310 dólares a la utilidad, ¿cuál sería la nueva solución óptima del problema?

b ¿Cuánto es lo más que Carco debería estar dispuesto a pagar por la renta de una máquina tipo 1 adicional por un día?

c ¿Cuánto es lo más que Carco debería estar dispuesto a pagar por una tonelada extra de acero?

d Si se le pidiera a Carco que produjera por lo menos 86 automóviles, ¿cuál sería la utilidad de Carco?

e Carco planea fabricar jeeps. Un jeep contribuye con 600 dólares a la utilidad, y requiere 1.2 días en la máquina 1, 2 días en la máquina 2 y 4 toneladas de acero. ¿Debería Carco fabricar jeeps?

5 El PL siguiente tiene el tableau óptimo de la tabla 54.

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Calcule el intervalo de valores del coeficiente de x_2 de la función objetivo para el cual la base actual sigue siendo óptima.

c Determine el intervalo de valores del coeficiente de x_1 de la función objetivo para el cual la base actual se mantiene óptima.

6 Considere el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 55):

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

TABLA 51

z	x_1	x_2	e_2	s_3	a_1	a_2	ld
1	0	0	0	$\frac{7}{3}$	$M - \frac{2}{3}$	M	$\frac{58}{3}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
0	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{14}{3}$
0	0	0	1	1	-1	-1	1

TABLA 52

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	ld
1	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	9
0	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	3
0	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
0	0	1	1	0	0	1	2

TABLA 53

Vehículo	Días en la máquina tipo 1	Días en la máquina tipo 2	Toneladas de acero
Automovil	0.8	0.6	2
Camión	1	0.7	3

FIGURA 11
Resultados de LINDO para Carco (problema 4)

```
MAX          300 X1 + 400 X2 - 50 M1
SUBJECT TO
        2)   0.8 X1 + X2 - M1 <=        0
        3)    M1 <=  98
        4)   0.6 X1 + 0.7 X2 <=    73
        5)   2 X1 + 3 X2 <=   260
        6)    X1 >=   88
        7)    X2 >=   26
END

    LP OPTIMUM FOUND  AT STEP     1

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

   1)         32540.0000

VARIABLE             VALUE          REDUCED COST
      X1          88.000000            0.000000
      X2          27.599998            0.000000
      M1          98.000000            0.000000

   ROW      SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           0.000000       400.000000
      3)           0.000000       350.000000
      4)           0.879999         0.000000
      5)           1.200003         0.000000
      6)           0.000000       -20.000000
      7)           1.599999         0.000000

NO. ITERATIONS=           1

   RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT         ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   COEF           INCREASE           DECREASE
      X1        300.000000        20.000000          INFINITY
      X2        400.000000        INFINITY          25.000000
      M1        -50.000000        INFINITY         350.000000

                              RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW          CURRENT         ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   RHS            INCREASE           DECREASE
       2          0.000000         0.400001           1.599999
       3         98.000000         0.400001           1.599999
       4         73.000000        INFINITY            0.879999
       5        260.000000        INFINITY            1.200003
       6         88.000000         1.999999           3.000008
       7         26.000000         1.599999          INFINITY
```

TABLA 54

z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	a_3	ld
1	0	3	0	0	M	M	$M + 4$	12
0	1	1	0	0	0	0	1	3
0	0	2	1	0	−1	0	3	3
0	0	1	0	1	0	−1	2	2

TABLA 55

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	ld
1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9
0	0	1	3	2	−1	6
0	1	0	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Calcule el intervalo de valores de b_2 para el cual la base actual es óptima. Si $b_2 = 12$, ¿cuál es la nueva solución óptima?

7 Considere el PL siguiente:

$$\max z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$4x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima para este PL es $z = 32$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $s_1 = 0$, $s_2 = 2$. Determine en forma gráfica el intervalo de valores de c_1 para el cual la base actual es óptima.

8 Wivco elabora el producto 1 y el producto 2 al procesar materia prima. Al menos 90 libras de materia prima se podrían comprar a un costo de 10 dólares/libra. Se puede utilizar una libra de materia prima para elaborar 1 libra del producto 1, o bien, 0.33 libras del producto 2. Para fabricar una libra del producto 1 se requieren 2 h de mano de obra o

3 h para producir 0.33 libras de producto 2 a partir de una libra de materia prima. Se dispone de un total de 200 horas de mano de obra, y se pueden vender a lo más 40 libras del producto 2. El producto 1 se vende en 13 dólares/libra y el producto 2 se vende en 40 dólares/libra. Sean

RM = libras de materia prima procesada

P1 = libras de materia prima usadas para elaborar el producto 1

P2 = libras de materia prima usadas para elaborar el producto 2

Wivco debe resolver el PL siguiente para maximizar su utilidad:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 13P1 + 40(0.33)P2 - 10RM \\
\text{s.a} \quad RM &\geq P1 + P2 \\
2P1 + 3P2 &\leq 200 \\
RM &\leq 90 \\
0.33P2 &\leq 40 \\
P1, P2, RM &\geq 0
\end{aligned}
$$

Utilice los resultados que proporciona LINDO en la figura 12 para contestar las preguntas siguientes:

a Si se pudieran comprar sólo 87 lb de materia prima, ¿cuál sería la utilidad de Wivco?

b En el supuesto de que el producto 2 se vendiera en 39.50 dólares/libra, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

c ¿Cuánto es lo más que Wivco debería pagar por otra libra de materia prima?

d ¿Cuánto es lo más que Wivco debería pagar por otra hora de mano de obra?

e Suponga que 1 libra de materia prima se pudiera utilizar también para obtener 0.8 libras de producto 3, el cual se vende a 24 dólares/libra. Procesar 1 libra de materia prima en 0.8 libras de producto 3 requiere 7 horas de mano de obra. ¿Debería Wivco fabricar cualquier cantidad del producto 3?

9 Considere el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 56):

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 50 \\
2x_1 - x_2 + x_3 &\geq 15 \\
x_1 + x_2 &= 10 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Encuentre el intervalo de los valores del coeficiente de x_1 de la función objetivo para el que la base actual es óptima.

c Calcule el intervalo de los valores del coeficiente de x_2 de la función objetivo para el que la base actual es óptima.

FIGURA 12
Resultados de LINDO para Wivco (problema 8)

```
MAX     13 P1 + 13.2 P2 - 10 RM
SUBJECT TO
       2) - P1 - P2 + RM >= 0
       3)  2 P1 + 3 P2 <=   200
       4)   RM <=   90
       5)  0.33 P2 <=  40
END

    LP OPTIMUM FOUND  AT STEP     3

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

 1)          274.000000

VARIABLE          VALUE           REDUCED COST
       P1         70.000000           0.000000
       P2         20.000000           0.000000
       RM         90.000000           0.000000

    ROW     SLACK OR SURPLUS       DUAL PRICES
       2)         0.000000         -12.600000
       3)         0.000000           0.200000
       4)         0.000000           2.600000
       5)        33.400002           0.000000

NO. ITERATIONS=      3

   RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                             OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT        ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE           DECREASE
      P1         13.000000        0.200000           0.866667
      P2         13.200000        1.300000           0.200000
      RM        -10.000000        INFINITY           2.600000

                             RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW           CURRENT        ALLOWABLE          ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE           DECREASE
       2           0.000000       23.333334          10.000000
       3         200.000000       70.000000          20.000000
       4          90.000000       10.000000          23.333334
       5          40.000000       INFINITY           33.400002
```

TABLA 56

z	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	ld
1	1	0	0	1	0	M	$M+3$	80
0	-3	0	0	1	1	-1	-2	15
0	0	0	1	1	0	0	-2	40
0	1	1	0	0	0	0	-1	10

TABLA 57

z	x_1	x_2	s_1	s_2	ld
1	0	0	0	1	10
0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	1	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

10 Considere el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 57):

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + 5x_2 &\le 8 \\ 3x_1 + 7x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Calcule el intervalo de valores de b_2 para el cual la base actual es óptima. Además encuentre la nueva solución óptima si $b_2 = 5$.

11 Examine el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ 4x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $z = 9$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Encuentre en forma gráfica el intervalo de valores de b_2 para el cual la base actual sigue siendo óptima.

12 El granjero Leary cultiva trigo y maíz en sus 45 acres de tierra. Puede vender cuando mucho 140 bushels de trigo y 120 bushels de maíz. Cada acre sembrado produce 5 bushels de trigo o 4 bushels de maíz. El trigo se vende en 30 dólares/bushel, y el maíz se vende a 50 dólares/bushel. Se requieren 6 horas de mano de obra para cosechar un acre de trigo y 10 horas para un acre de maíz. Se pueden comprar al menos 350 horas de mano de obra a 10 dólares/hora. Sea

A1 = acres sembrados con trigo
A2 = acres sembrados con maíz
L = horas de mano de obra compradas

Para maximizar la utilidad, el granjero Leary debe resolver el PL siguiente

$$\begin{aligned} \max z &= 150\text{A1} + 200\text{A2} - 10\text{L} \\ \text{s.a} \quad \text{A1} + \text{A2} &\le 45 \\ 6\text{A1} + 10\text{A2} - \text{L} &\le 0 \\ \text{L} &\le 350 \\ 5\text{A1} &\le 140 \\ 4\text{A2} &\le 120 \\ \text{A1}, \text{A2}, \text{L} &\ge 0 \end{aligned}$$

Utilice los resultados de LINDO de la figura 13 para contestar las preguntas siguientes:

a ¿Cuánto es lo más que Leary debería pagar por una hora adicional de mano de obra?

b ¿Cuánto es lo más que el granjero debería pagar por un acre adicional de tierra?

c Si sólo tuviera 40 acres de tierra, ¿cuál sería la utilidad de Leary?

d Si el precio del trigo cayera a 26 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

e El granjero Leary quisiera sembrar cebada. La demanda de cebada es ilimitada. Un acre produce 4 bushels de cebada y requiere 3 horas de mano de obra. Si este cereal se vende a 30 dólares por bushel, ¿debería este granjero sembrar alguna cantidad?

13 Considere el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 58):

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s.a} \quad 8x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 2 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Encuentre el intervalo de valores del coeficiente de x_3 de la función objetivo para el cual la base actual es óptima.

c Encuentre el intervalo de valores del coeficiente de x_1 de la función objetivo para el cual la base actual es óptima.

14 Examine el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 59):

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a Determine el dual de este PL y su solución óptima.

b Encuentre el intervalo de valores del lado derecho de la tercera restricción para el cual la base actual es óptima. Además, proporcione la nueva solución óptima si el lado derecho de la tercera restricción fuera $\frac{15}{2}$.

15 Considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + x_2 &\le 7 \\ 5x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $z = \frac{17}{3}$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$. Utilice el método gráfico para estimar el intervalo de valores del lado derecho de la segunda restricción para el cual la base actual es óptima.

16 Los joyeros Zales usan rubíes y zafiros para fabricar dos tipos de anillos. Un anillo tipo 1 requiere 2 rubíes, 3 zafiros y una hora de mano de obra de un joyero. Un anillo tipo 2 requiere 3 rubíes, 2 zafiros y 2 horas de mano de obra de un joyero. Cada anillo tipo 1 se vende en 400 dólares, y cada anillo tipo 2 se vende en 500 dólares. Todos los anillos que fabrica Zales se pueden vender. Zales cuenta por ahora con 100 rubíes, 120 zafiros y 70 horas de mano de obra. Se pueden comprar rubíes adicionales a un costo de 100 dóla-

FIGURA 13

Resultados de LINDO para el trigo/maíz (problema 12)

```
MAX 150A1+200A2-10L
ST
A1+A2<45
6A1+10A2-L<0
L<350
5A1<140
4A2<120
END


LP OPTIMUM FOUND AT STEP     4

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)     4250.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      A1        25.000000          0.000000
      A2        20.000000          0.000000
      L        350.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)        0.000000         75.000000
       3)        0.000000         12.500000
       4)        0.000000          2.500000
       5)       15.000000          0.000000
       6)       40.000000          0.000000

  NO. ITERATIONS=      4


  RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                         OBJ COEFFICIENT RANGES
  VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                    COEF          INCREASE         DECREASE
      A1        150.000000       10.000000        30.000000
      A2        200.000000       50.000000        10.000000
      L         -10.000000       INFINITY          2.500000

                         RIGHTHAND SIDE RANGES
      ROW          CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                     RHS          INCREASE         DECREASE
       2         45.000000        1.200000         6.666667
       3          0.000000       40.000000        12.000000
       4        350.000000       40.000000        12.000000
       5        140.000000        INFINITY        15.000000
       6        120.000000        INFINITY        40.000000
```

TABLA 58

z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	ld
1	8	1	0	0	2	16
0	2	2	0	1	−1	4
0	6	1	1	0	1	8

TABLA 59

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ld
1	0	0	0	1	$M-1$	$M+\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
0	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	-2	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	1	0	0	1	-1	1	1

res cada uno. La demanda del mercado requiere que la compañía produzca por lo menos 20 anillos tipo 1 y por lo menos 25 anillos tipo 2. Con el fin de poder maximizar la utilidad, Zales debería resolver el PL siguiente:

X1 = anillos tipo 1 producidos
X2 = anillos tipo 2 producidos
R = rubíes comprados

$$
\begin{aligned}
\max z &= 400X1 + 500X2 - 100R \\
\text{s.a} \quad & 2X1 + 3X2 - R \le 100 \\
& 3X1 + 2X2 \le 120 \\
& X1 + 2X2 \le 70 \\
& X1 \ge 20 \\
& X2 \ge 25 \\
& X1, X2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Utilice los resultados de LINDO de la figura 14 para contestar las preguntas siguientes:

a Suponga que cada rubí cuesta 190 dólares en lugar de 100 dólares. ¿Aún así podría Zales comprar rubíes? ¿Cuál sería la nueva solución óptima de este problema?

FIGURA 14
Resultados de LINDO para la joyería (problema 16)

```
MAX     400 X1 + 500 X2 - 100 R
SUBJECT TO
       2)    2 X1 + 3 X2 - R <= 100
       3)    3 X1 + 2 X2 <=  120
       4)     X1 + 2 X2 <=  70
       5)     X1 >=   20
       6)     X2 >=   25
END

    LP OPTIMUM FOUND   AT STEP  2

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)           19000.0000

VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       X1        20.000000          0.000000
       X2        25.000000          0.000000
        R        15.000000          0.000000

   ROW     SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)        0.000000        100.000000
       3)       10.000000          0.000000
       4)        0.000000        200.000000
       5)        0.000000          0.000000
       6)        0.000000       -200.000000

NO. ITERATIONS=      2

  RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT         ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   COEF           INCREASE          DECREASE
      X1        400.000000        INFINITY          100.000000
      X2        500.000000        200.000000         INFINITY
       R       -100.000000        100.000000        100.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW           CURRENT         ALLOWABLE         ALLOWABLE
                    RHS           INCREASE          DECREASE
       2        100.000000         15.000000         INFINITY
       3        120.000000         INFINITY          10.000000
       4         70.000000          3.333333          0.000000
       5         20.000000          0.000000         INFINITY
       6         25.000000          0.000000          2.500000
```

b Suponga que a Zales sólo se le exigiera producir por lo menos 23 anillos tipo 2. ¿Cuál sería ahora la utilidad de Zales?

c ¿Cuánto es lo más que la compañía Zales estaría dispuesta a pagar por otra hora de mano de obra de un joyero?

d ¿Cuánto es lo más que Zales estaría dispuesta a pagar por otro zafiro?

e Zales planea fabricar anillos tipo 3. Cada anillo tipo 3 se podría vender en 550 dólares y requiere 4 rubíes, 2 zafiros y 1 h de mano de obra de un joyero. ¿Debería Zales fabricar algunos anillos tipo 3?

17 Utilice el método simplex dual para resolver el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= -2x_1 - x_2 \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\geq 5 \\
x_1 - 2x_2 &\geq 8 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

18 Examine el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= -4x_1 - x_2 \\
\text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\
3x_1 + x_2 &= 3 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Después de restar una variable de excedente e_1 de la primera restricción, sumar una variable de holgura s_2 a la segunda restricción y sumar variables artificiales a_1 y a_3 a la primera y tercera restricciones, el tableau óptimo para este PL se muestra en la tabla 60.

a Determine el dual para este PL y su solución óptima.

b Si se modificara el PL anterior a

$$
\begin{aligned}
\max z &= -4x_1 - x_2 - x_3 \\
\text{s.a} \quad 4x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 6 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3 \\
3x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

¿seguiría siendo óptima la solución actual óptima?

TABLA 60

z	x_1	x_2	e_1	s_2	a_1	a_2	ld
1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	M	$M - \frac{7}{5}$	$-\frac{18}{5}$
0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	0	0	1	1	-1	1	0

19 Considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= -2x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este PL es no acotado. Apóyese en este hecho para demostrar que el PL siguiente no tiene solución factible:

$$\begin{aligned} \min 2y_1 &+ y_2 \\ \text{s.a} \quad y_1 - y_2 &\geq -2 \\ y_1 + y_2 &\geq 6 \\ y_1 \leq 0, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

20 Mediante el teorema de la holgura complementaria para hallar la solución óptima del PL siguiente y su dual:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

21 La solución óptima del PL siguiente es $z = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilice el método gráfico para contestar las preguntas siguientes:

a Determine el intervalo de valores de c_1 para el cual la base actual es óptima.

b Determine el intervalo de valores de c_2 para el cual la base actual es óptima.

c Determine el intervalo de valores de b_1 para el cual la base actual es óptima.

d Determine el intervalo de valores de b_2 para el cual la base actual es óptima.

22 Radioco fabrica dos tipos de radios. El único recurso escaso pero necesario para fabricar los radios es la mano de obra. Por ahora, la compañía tiene dos trabajadores. El trabajador 1 está dispuesto a laborar hasta 40 horas por semana, y recibe un pago de 5 dólares por hora. El trabajador 2 está dispuesto a laborar hasta 50 horas por un pago de 6 dólares por hora. El precio y los recursos que se requieren para producir cada tipo de radio se dan en la tabla 61.

a Si x_i es la cantidad de radios tipo i producidos cada semana, demuestre que Radioco debe resolver el PL siguiente (su tableau óptimo se proporciona en la tabla 62):

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

TABLA 61

Radio 1		Radio 2	
Precio (dólares)	Recursos necesarios	Precio (dólares)	Recursos necesarios
25	Trabajador 1: 1 hora Trabajador 2: 2 horas Costo de la materia prima: 5 dólares	22	Trabajador 1: 2 horas Trabajador 2: 2 horas Costo de la materia prima: 4 dólares

TABLA 62

z	x_1	x_2	s_1	s_2	ld
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	80
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	20
0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	10

b ¿Para qué precios del radio tipo 1 la base actual sigue siendo óptima?

c ¿Para qué precios del radio tipo 2 la base actual sigue siendo óptima?

d Si el trabajador 1 estuviera dispuesto a trabajar sólo 30 horas por semana, ¿la base actual seguiría siendo óptima?

e Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar al menos 60 horas por semana, ¿la base actual seguiría siendo óptima?

f Si el trabajador 1 estuviera dispuesto a trabajar una hora adicional, ¿cuánto es lo más que Radioco debería pagar?

g Si el trabajador 2 estuviera dispuesto a trabajar sólo 48 horas, ¿cuál sería la utilidad de Radioco. Compruebe su respuesta determinando la cantidad de radios de cada tipo que se producirían.

h Los planes de producción son fabricar un radio tipo 3. Las especificaciones de un radio tipo 3 son las siguientes: precio, 30 dólares; 2 horas del trabajador 1; 2 horas del trabajador 2; costo de la materia prima, 3 dólares. ¿Radioco debería fabricar algunos radios tipo 3?

23 Beerco produce cerveza tipo *ale* y cerveza a partir de maíz, lúpulo y malta. Dispone en la actualidad de 40 libras de maíz, 30 libras de lúpulo y 40 libras de malta. Un barril de cerveza tipo *ale* se vende en 40 dólares y requiere 1 libra de maíz, 1 libra de lúpulo y 2 libras de malta. Un barril de cerveza se vende en 50 dólares y requiere 2 libras de maíz, 1 libras de lúpulo y 1 libra de malta. Beerco puede vender toda la cerveza tipo *ale* y la cerveza que produce. Con el fin de maximizar el ingreso total de las ventas Beerco debería resolver el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 40\text{ALE} + 50\text{BEER} \\ \text{s.a} \quad \text{ALE} + 2\text{BEER} &\leq 40 \quad \text{(Restricción del maíz)} \\ \text{ALE} + \text{BEER} &\leq 30 \quad \text{(Restricción del lúpulo)} \\ 2\text{ALE} + \text{BEER} &\leq 40 \quad \text{(Restricción de la malta)} \\ \text{ALE, BEER} &\geq 0 \end{aligned}$$

TABLA 63

z	Cerveza tipo *ale*	Cerveza	s_1	s_2	s_3	ld
1	0	0	20	0	10	1200
0	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{40}{3}$
0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{40}{3}$

ALE = barriles de cerveza tipo *ale* producidos y BEER = barriles de cerveza producidos. Un tableau para este PL se muestra en la tabla 63.

a Escriba el dual del PL de Beerco y determine su solución óptima.

b Calcule el intervalo de valores del precio de cerveza tipo *ale* para el cual la base actual sigue siendo óptima.

c Encuentre el intervalo de valores del precio de cerveza para el cual la base actual sigue siendo óptima.

d Determine el intervalo de valores de la cantidad de maíz disponible para el cual la base actual sigue siendo óptima.

e Determine el intervalo de valores de la cantidad de lúpulo disponible para el cual la base actual es óptima.

f Determine el intervalo de valores de la cantidad de malta disponible para el cual la base actual es óptima.

g Suponga que Beerco planea elaborar un licor de malta. Para elaborar un barril de licor de malta se requiere 0.5 libras de maíz, 3 libras de lúpulo y 3 libras de malta y se vende en 50 dólares. ¿Beerco deberá fabricar licor de malta?

h Suponga que se expresan las restricciones de Beerco en onzas. Escriba el nuevo PL y su dual.

i ¿Cuál es la solución óptima del dual del nuevo PL? (*Sugerencia*: reflexione en qué le sucede a $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$. Utilice la idea de los precios sombra para explicar por qué el dual del PL original (libras) y el dual del nuevo PL (onzas) deberían tener soluciones óptimas distintas.)

Grupo B

24 Considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 & \\ \text{s.a} \quad x_2 + 2x_3 &\le 3 \\ -x_1 + 3x_3 &\le -1 \\ -2x_1 - 3x_2 &\le -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

a Determine el dual de este PL y demuestre que su región factible es la misma que el del PL original.

b Aplique la dualidad débil para demostrar que el valor óptimo de la función objetivo para el PL (y su dual) debe ser 0.

25 Examine el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + x_2 + x_3 & \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_3 &\le 1 \\ x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a Demuestre que la solución básica con las variables básicas x_1, x_2 y x_3 es óptima. Encuentre la solución óptima.

b Escriba el dual para este PL y determine su solución óptima.

c Demuestre que si multiplica el lado derecho de cada restricción por una constante k no negativa, entonces la nueva solución óptima se obtiene simplemente al multiplicar por k el valor de cada variable en la solución óptima original.

TABLA 64

	Producto 1	Producto 2
Precio de venta	\$15	\$8
Mano de obra necesaria	0.75 horas	0.50 horas
Tiempo máquina requerido	1.5 horas	0.80 horas
Materia prima requerida	2 unidades	1 unidad

26 Wivco elabora dos productos: 1 y 2. Los datos pertinentes se muestran en la tabla 64. Al menos 400 unidades de materia prima se pueden comprar todas las semanas a un costo de 1.50 dólares por unidad. La compañía emplea cuatro trabajadores, quienes laboran 40 horas por semana (sus salarios se consideran como un costo fijo). A los trabajadores se les puede pedir que trabajen tiempo extra y se les paga 6 dólares por hora de tiempo extra. Se dispone todas las semanas de 320 horas de tiempo máquina.

Por falta de publicidad, la demanda semanal es de 50 unidades del producto 1 y 60 unidades del producto 2. La publicidad se puede usar para estimular la demanda de cada producto. Cada dólar gastado en publicidad del producto 1 aumenta la demanda en 10 unidades; cada dólar gastado para el producto 2 incrementa la demanda en 15 unidades. Se pueden gastar a lo más 100 dólares en publicidad. Definamos:

P1 = unidades del producto 1 fabricadas cada semana
P2 = unidades del producto 2 fabricadas cada semana
OT = horas de mano de obra en tiempo extra utilizadas cada semana
RM = unidades de materia prima compradas cada semana
A1 = dólares gastados cada semana para anunciar el producto 1
A2 = dólares gastados cada semana para anunciar el producto 2

Entonces Wivco debería resolver el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \max z = 15\text{P1} + 8\text{P2} - 6(\text{OT}) - 1.5\text{RM} & \\ - \text{A1} - \text{A2} & \\ \text{s.a} \quad \text{P1} - 10\text{A1} &\le 50 && (1) \\ \text{P2} - 15\text{A2} &\le 60 && (2) \\ 0.75\text{P1} + 0.5\text{P2} &\le 160 + (\text{OT}) && (3) \\ 2\text{P1} + \text{P2} &\le \text{RM} && (4) \\ \text{RM} &\le 400 && (5) \\ \text{A1} + \text{A2} &\le 100 && (6) \\ 1.5\text{P1} + 0.8\text{P2} &\le 320 && (7) \end{aligned}$$

Todas las variables son no negativas.

Utilice LINDO para resolver este PL. Luego responda las preguntas siguientes con ayuda de los resultados que da la computadora:

a Si el tiempo extra fuera de sólo 4 dólares/hora, ¿Wivco recurriría a él?

b Si cada unidad del producto 1 se vendiera en 15.50 dólares, ¿la base actual seguiría siendo óptima? ¿Cuál sería la nueva solución óptima?

c ¿Cuánto es lo más que Wivco debería estar dispuesta a pagar por otra unidad de materia prima?

d ¿Cuánto debería estar dispuesta a pagar Wivco por otra hora de tiempo máquina?

e Si a cada trabajador se le exigiera (como parte de la semana de trabajo regular) trabajar 45 horas por semana, ¿cuál sería la utilidad de la compañía?

f Explique por qué el precio sombra del renglón (1) es 0.10. (*Sugerencia*: si el lado derecho de (1) se incrementara de 50 a 51, entonces por no haber publicidad para el producto 1, ahora se venderían 51 unidades a la semana.)

g Wivco planea elaborar un nuevo producto (producto 3). Cada unidad se vende en 17 dólares y requiere 2 horas de mano de obra, 1 unidad de materia prima y 2 horas de tiempo máquina. ¿Debería Wivco fabricar el producto 3?

h Si cada unidad del producto 2 se vendiera en 10 dólares, ¿la base actual seguiría siendo óptima?

27 Las preguntas siguientes se relacionan con el ejemplo de Rylon que se trató en la sección 3.9. Después de definir

RB = onzas de Brute Regular fabricadas al año
LB = onzas de Luxury Brute fabricadas al año
RC = onzas de Chanelle Regular elaboradas al año
LC = onzas de Luxury Chanelle producidas al año
RM = libras de materia prima compradas al año

se obtuvo el resultado de LINDO que se proporciona en la figura 15 para este problema. Utilice estos resultados para contestar las preguntas siguientes:

a Interprete el precio sombra de cada restricción.

b Si el precio de BR se incrementara 50 centavos, ¿cuál sería la nueva solución óptima para el problema de Rylon?

FIGURA 15
Resultados de LINDO para Brute/Chanelle (problema 27)

```
MAX      7 RB + 14 LB + 6 RC + 10 LC - 3 RM
SUBJECT TO
       2)    RM <=   4000
       3)   3 LB + 2 LC +  RM <=   6000
       4)    RM + LB - 3 RM =      0
       5)    RC + LC - 4 RM =      0
END

   LP OPTIMUM FOUND   AT STEP     6

        OBJECTIVE FUNCTIONS VALUE

1)         172666.672

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       RB    11333.333008          0.000000
       LB      666.666687          0.000000
       RC    16000.000000          0.000000
       LC        0.000000          0.666667
       RM     4000.000000          0.000000

    ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)        0.000000         39.666668
       3)        0.000000          2.333333
       4)        0.000000          7.000000
       5)        0.000000          6.000000

NO.  ITERATIONS=    6

   RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE         DECREASE
      RB         7.000000        1.000000        11.900001
      LB        14.000000      119.000000         1.000000
      RC         6.000000       INFINITY          0.666667
      LC        10.000000        0.666667        INFINITY
      RM        -3.000000       INFINITY         39.666668

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
   ROW            CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE         DECREASE
       2       4000.000000     2000.000000      3400.000000
       3       6000.000000    33999.996094      2000.000000
       4          0.000000       INFINITY      11333.333008
       5          0.000000       INFINITY      16000.000000
```

c Si se contara con 8 000 horas de laboratorio cada año, pero sólo hubiera disponibles 2 000 libras de materia prima cada año, ¿se incrementaría o disminuiría la utilidad de Rylon? (*Sugerencia*: aplique la regla del 100% para demostrar que la base actual se conserva óptima. Luego utilice un razonamiento similar a (34)-(37) para determinar el nuevo valor de la función objetivo.]

d Rylon está planeando expandir su capacidad de laboratorio. Tiene en consideración dos opciones:

Opción 1 Por un costo de 10 000 dólares (que contrajo ahora), la capacidad de laboratorio anual puede aumentar en 1 000 horas.

Opción 2 Por un costo de 200 000 dólares (contraído ahora), la capacidad de laboratorio anual puede aumentar en 10 000 horas.

Suponga que todos los otros aspectos del problema se conservan sin cambio y que la utilidad futura se descontó con una tasa de interés de $11\frac{1}{9}$% anual. ¿Cuál opción, si la hay, debería elegir Rylon?

e Rylon planea comprar un nuevo tipo de materia prima. Se pueden conseguir cantidades ilimitadas a 8 dólares/ libra. Se requieren 3 horas de laboratorio para procesar una libra de la nueva materia prima. Cada libra procesada genera 2 onzas de BR y 1 onza de CR. ¿Debería Rylon comprar la nueva materia prima?

28 Considere los dos PL siguientes

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(PL 1)}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 100c_1x_1 + 100c_2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 100a_{11}x_1 + 100a_{12}x_2 \le b_1 \\ & 100a_{21}x_1 + 100a_{22}x_2 \le b_2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(PL 2)}$$

Suponga que BV $= \{x_1, x_2\}$ es una base óptima para ambos PL, y que la solución óptima para el PL 1 es $x_1 = 50$, $x_2 = 500$, $z = 550$. También suponga que para el PL 1, el precio sombra de las restricciones 1 y 2 es igual a $\frac{100}{3}$. Encuentre la solución óptima del PL 2 y la solución óptima del dual del PL 2. (*Sugerencia*: si multiplica cada número de una matriz por 100, ¿qué sucede con B^{-1}?)

29 La pregunta siguiente se relaciona con el ejemplo del presupuesto de capital de Star Oil de la sección 3.6. Los resultados de LINDO para este problema se muestran en la figura 16.

a Encuentre e interprete el precio sombra de cada restricción.

b Si el VPN de la inversión 1 fuera 5 millones de dólares, ¿cambiaría la solución óptima del problema?

c Si el VPN de la inversión 2 y el de la inversión 4 disminuyera 25%, ¿cambiaría la solución óptima del problema? (Para este inciso se requiere conocer la regla del 100%.)

d Suponga que el presupuesto del capital de Star Oil se modificara a 50 millones de dólares en el tiempo 0 y 15 millones de dólares en el tiempo 1. ¿Sería Star más rica? (Para este inciso se requiere conocer la regla del 100%.)

e Suponga que está disponible una nueva inversión (inversión 6). Dicha inversión tiene un VPN de 10 millones de dólares y requiere una salida de efectivo de 5 millones de dólares en el tiempo 0 y 10 millones de dólares en el tiempo 1. ¿Debería Star Oil invertir en la inversión 6?

30 Las preguntas siguientes se relacionan con el ejemplo de inversiones de Finco de la sección 3.11. Los resultados de LINDO para este problema se muestran en la figura 17.

a Si Finco tuviera 2 000 dólares más a disposición en el tiempo 0, ¿en cuanto se incrementaría el efectivo en el tiempo 3?

b Observe que si Finco recibiera un dólar en el tiempo 1, el activo disponible para la inversión en el tiempo 1 sería ahora $0.5A + 1.2C + 1.08S_0 + 1$. Aproveche este hecho y el precio sombra de la restricción 2 para determinar en cuánto se incrementaría el estado de la caja en el tiempo 3 si estuviera disponible un dólar adicional en el tiempo 1.

c ¿En cuánto cambiaría el activo disponible en el tiempo 3 si Finco recibiera un dólar extra en el tiempo 2?

d Si la inversión D generara 1.80 dólares en el tiempo 3, ¿seguiría siendo óptima la base actual?

e Suponga que un superfondo del mercado de valores generó 25% para el periodo entre el tiempo 0 y el tiempo 1. ¿Debería Finco invertir en este fondo en el tiempo 0?

f Demuestre que si se eliminaran todas las limitaciones de inversión de 75 000 dólares en las inversiones A, B, C y D, la base actual se mantendría óptima. (Se requiere conocer la regla del 100% para este inciso.) ¿Cuál sería el nuevo valor óptimo de z?

g Está en consideración una nueva inversión (inversión F). Un dólar puesto en la inversión F genera los efectivos siguientes: tiempo 0, -1 dólar; tiempo 1, $+1.10$ dólares; tiempo 2, $+\ 0.20$ de dólar; tiempo 3, $+\ 0.10$ de dólar. ¿Debería Finco invertir en F?

31 En este problema se estudia cómo interpretar los precios sombra en los problemas de mezclas (véase sección 3.8). Para ilustrar las ideas, se analiza el problema 2 de la sección 3.8. Si se definen

x_{6J} = libras de naranjas grado 6 en el jugo
x_{9J} = libras de naranjas grado 9 en el jugo
x_{6B} = libras de naranjas grado 6 en bolsas
x_{9B} = libras de naranjas grado 9 en bolsas

entonces, el planteamiento apropiado es

$$\max z = 0.45(x_{6J} + x_{9J}) + 0.30(x_{6B} + x_{9B})$$

$$\begin{array}{llll} \text{s.a} & x_{6J} + x_{6B} & \le 120\,000 & \text{(Restricción del grado 6)} \\ & x_{9J} + x_{9B} & \le 100\,000 & \text{(Restricción del grado 9)} \\ (1) & \dfrac{6x_{6J} + 9x_{9J}}{x_{6J} + x_{9J}} & \ge 8 & \text{(Restricción del jugo de naranja)} \\ (2) & \dfrac{6x_{6B} + 9x_{9B}}{x_{6B} + x_{9B}} & \ge 7 & \text{(Restricción de las bolsas)} \\ & x_{6J}, x_{9J}, x_{6B}, x_{9B} \ge 0 & & \end{array}$$

Las restricciones (1) y (2) son ejemplos de restricciones de mezclas porque especifican la proporción de naranjas grado 6 y de grado 9 que se debe mezclar para elaborar jugo de naranja y llenar las bolsas con esta fruta. Sería útil determinar cómo un ligero cambio en las normas para el jugo de naranja y las bolsas con la fruta afectarían la utilidad. Al final del

FIGURA 16
Resultados de LINDo para Star Oil (problema 29)

```
MAX     13 X1 + 16 X2 + 16 X3 + 14 X4 + 39 X5
SUBJECT TO
       2)   11 X1 + 53 X2 + 5 X3 + 5 X4 + 29 X5 <= 40
       3)   3 X1 + 6 X2 + 5 X3 + X4 + 34 X5 <= 20
       4)    X1 <=   1
       5)    X2 <=   1
       6)    X3 <=   1
       7)    X4 <=   1
       8)    X5 <=   1
END

     LP OPTIMUM FOUND   AT STEP  5

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)          57.4490166

VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       X1         1.000000         0.000000
       X2         0.200860         0.000000
       X3         1.000000         0.000000
       X4         1.000000         0.000000
       X5         0.288084         0.000000

   ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)        0.000000         0.190418
       3)        0.000000         0.984644
       4)        0.000000         7.951474
       5)        0.799140         0.000000
       6)        0.000000        10.124693
       7)        0.000000        12.063268
       8)        0.711916         0.000000

NO. ITERATIONS=     5

   RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                  COEF          INCREASE          DECREASE
      X1         13.000000       INFINITY           7.951474
      X2         16.000000        45.104530         9.117648
      X3         16.000000       INFINITY          10.124693
      X4         14.000000       INFINITY          12.063268
      X5         39.000000        51.666668        30.245283

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW          CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE          DECREASE
        2        40.000000        38.264709         9.617647
        3        20.000000        11.275863         8.849057
        4         1.000000         1.139373         1.000000
        5         1.000000       INFINITY           0.799140
        6         1.000000         1.995745         1.000000
        7         1.000000         2.319149         1.000000
        8         1.000000       INFINITY           0.711916
```

problema se explica el modo de utilizar los precios sombra de las restricciones (1) y (2) para contestar las preguntas siguientes:

a Suponga que el grado promedio para el jugo de naranja se incrementa a 8.1. En el supuesto de que la base actual sigue siendo óptima, ¿qué tanto cambiaría la utilidad?

b Suponga que el requisito del grado promedio para las bolsas de naranjas disminuye a 6.9. Si se supone también que la base actual se mantiene óptima, ¿cuánto cambiaría la utilidad?

El precio sombra para (1) y (2) es -0.15. La solución óptima es $x_{6J} = 26\,666.67$, $x_{9J} = 53\,333.33$, $x_{6B} = 93\,333.33$, $x_{9B} = 46\,666.67$. Para interpretar los precios sombra de mezclar la restricción (1) y (2) *se supone que un cambio leve en la norma de calidad de un producto no modifica de modo importante la cantidad del producto que se elabora.*

Ahora observe que (1) se podría escribir como

$$6x_{6J} + 9x_{9J} \geq 8(x_{6J} + x_{9J}), \text{ o bien, } \quad -2x_{6J} + x_{9J} \geq 0$$

Si la norma de calidad para el jugo de naranja se modifica a $8 + \Delta$, entonces (1) se escribe como

$$6x_{6J} + 9x_{9J} \geq (8 + \Delta)(x_{6J} + x_{9J})$$

o bien,

$$-2x_{6J} + x_{9J} \geq \Delta(x_{6J} + x_{9J})$$

FIGURA 17
Resultados de LINDO para Finco (problema 30)

```
MAX      B + 1.9 D + 1.5 E + 1.08  S2
SUBJECT TO
       2)   D + A + C  +  S0 =        100000
       3)  - B + 0.5 A + 1.2 C + 1.08 S0 -  S1 =   0
       4)   0.5 B - E- S2 +  A + 1.08 S1 =   0
       5)   A <=  75000
       6)   B <=  75000
       7)   C <=  75000
       8)   D <=  75000
       9)   E <=  75000
END

   LP OPTIMUM FOUND  AT STEP    8

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)         218500.000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       B    30000.000000          0.000000
       D    40000.000000          0.000000
       E    75000.000000          0.000000
      S2        0.000000          0.040000
       A    60000.000000          0.000000
       C        0.000000          0.028000
      S0        0.000000          0.215200
      S1        0.000000          0.350400

    ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)        0.000000          1.900000
      3)        0.000000         -1.560000
      4)        0.000000         -1.120000
      5)    15000.000000          0.000000
      6)    45000.000000          0.000000
      7)    75000.000000          0.000000
      8)    35000.000000          0.000000
      9)        0.000000          0.380000

NO. ITERATIONS=       8

   RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                              OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
                   COEF            INCREASE           DECREASE
       B         1.000000          0.029167           0.284416
       D         1.900000          0.475000           0.050000
       E         1.500000          INFINITY           0.380000
      S2         1.080000          0.040000           INFINITY
       A         0.000000          0.050000           0.058333
       C         0.000000          0.028000           INFINITY
      S0         0.000000          0.215200           INFINITY
      S1         0.000000          0.350400           INFINITY

                              RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW           CURRENT          ALLOWABLE          ALLOWABLE
                    RHS            INCREASE           DECREASE
       2     100000.000000      35000.000000       40000.000000
       3          0.000000      37500.000000       56250.000000
       4          0.000000      18750.000000       43750.000000
       5      75000.000000        INFINITY         15000.000000
       6      75000.000000        INFINITY         45000.000000
       7      75000.000000        INFINITY         75000.000000
       8      75000.000000        INFINITY         35000.000000
       9      75000.000000      18750.000000       43750.000000
```

Puesto que se está suponiendo que al cambiar la calidad del jugo de naranja de 8 a 8 + Δ no se modifica la cantidad producida, $x_{6J} + x_{9J}$ se conserva igual a 80 000 y (1) se transforma en

$$-2x_{6J} + x_{9J} \geq 80\,000\Delta$$

Use la definición de precio sombra y dé respuesta a los incisos (a) y (b).

32 Ballco fabrica bolas para softball grandes, regulares y duras. Cada tipo de bola requiere un tiempo en tres departamentos: cortado, cosido y empacado, como se indica en la

TABLA 65

Bolas	Tiempo de cortado	Tiempo de cosido	Tiempo de empacado
Regulares	15	15	3
Grandes	10	15	4
Duras	8	4	2

tabla 65 (en minutos). A causa de las consideraciones del mercado, se tienen que fabricar por lo menos 1 000 bolas regulares. Cada una de las bolas regulares se puede vender en 3 dólares; cada bola grande se vende en 5 dólares, y cada bola dura, en 4 dólares. Se dispone de un total de 18 000 minutos de tiempo de cortado, 18 000 minutos de tiempo de cosido y 9 000 minutos de empacado. Ballco desea maximizar los ingresos por ventas. Si se definen

RS = cantidad de bolas regulares fabricadas
LS = cantidad de bolas grandes fabricadas
HB = cantidad de bolas duras fabricadas

entonces, la PL apropiada es

$$\max z = 3\text{RS} + 5\text{LS} + 4\text{HB}$$

$$\begin{array}{llr}
\text{s.a} & 15\text{RS} + 10\text{LS} + 8\text{HB} \le 18\,000 & \text{(Restricción coartado)} \\
& 15\text{RS} + 15\text{LS} + 4\text{HB} \le 18\,000 & \text{(Restricción de cosido)} \\
& 3\text{RS} + 4\text{LS} + 2\text{HB} \le 9\,000 & \text{(Restricción de empacado)} \\
& \text{RS} \ge 1\,000 & \text{(Restricción de la demanda)} \\
& \text{RS, LS, HB} \ge 0 &
\end{array}$$

El tableau óptimo para este PL es el de la tabla 66.

a Encuentre el dual del problema de Ballco y su solución óptima.

b Demuestre que el problema de Ballco tiene una solución óptima alterna. Encuéntrela. ¿Cuántos minutos de tiempo de cosido se usan con la solución óptima alterna?

c ¿En cuánto se incrementarían los ingresos de Ballco si aumentara 1 minuto la cantidad de tiempo disponible de cosido? ¿De qué modo se puede relacionar esta respuesta con el hecho de que la restricción del cosido es activa? [*Sugerencia:* vea la respuesta del inciso (b).]

d En el supuesto de que la base actual sea óptima, ¿de qué manera afectaría los ingresos de Ballco un incremento de 100 en el requisito de bolas regulares?

33 Considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\
\text{s.a.}\quad 3x_1 + 4x_2 &\le 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\le 4 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

El tableau óptimo para este PL es

$$\begin{aligned}
z \quad + s_1 + 2s_2 &= 14 \\
x_1 \quad + 3s_1 - 4s_2 &= 2 \\
x_2 - 2s_1 + 3s_2 &= 0
\end{aligned}$$

Sin efectuar pivoteo alguno determine c_1 y c_2.

34 Considere el PL siguiente y su tableau óptimo parcial (tabla 67):

$$\begin{aligned}
\max z &= 20x_1 + 10x_2 \\
\text{s.a.}\quad x_1 + x_2 &= 150 \\
x_1 &\le 40 \\
x_2 &\ge 20 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

a Complete el tableau óptimo.

b Determine el dual de este PL y su solución óptima.

35 Examine el PL siguiente y su tableau óptimo (tabla 68):

$$\begin{aligned}
\max z &= c_1x_1 + c_2x_2 \\
\text{s.a.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Encuentre c_1, c_2, b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}.

36 Imagine un PL con tres restricciones ≤. Los lados derechos son 10, 15 y 20, respectivamente. En el tableau óptimo, s_2 es una variable básica en la segunda restricción cuyo lado derecho es 12. Estime el intervalo de valores de b_2 para el cual la base actual es óptima. (*Sugerencia:* si el ld de la restricción 2 es 15 + Δ, esto debería ayudar a encontrar el ld del tableau óptimo.)

37 Utilice LINDO para resolver el problema de Sailco de la sección 3.10. Luego use los resultados para contestar las preguntas siguientes:

a Si la demanda del mes 1 disminuye a 35 botes de vela, ¿cuál sería el costo total de satisfacer las demandas durante los siguientes cuatro meses?

b Si el costo de la producción de un bote de vela con mano de obra en horario regular durante el mes 1 fuera 420 dólares, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

c Suponga que un cliente nuevo está dispuesto a pagar 425 dólares por un bote de vela. Si su demanda se tiene que surtir durante el mes 1, ¿Sailco debería surtir el pedido? ¿Qué sucede si este pedido se tiene que cumplir durante el mes 4?

TABLA 66

z	RS	LS	HB	s_1	s_2	s_3	e_4	a_4	ld
1	0	0	0	0.5	0	0	4.5	$M - 4.5$	4 500
0	0	0	1	0.19	−0.125	0	0.94	−0.94	187.5
0	0	1	0	−0.05	0.10	0	0.75	−0.75	150
0	0	0	0	−0.17	−0.15	1	−1.88	1.88	5 025
0	1	0	0	0	0	0	−1	1	1 000

TABLA 67

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	ld
1	0	0		0			1 900
0	0	0	−1	1	1	−1	90
0	1	0	1	0	0	0	40
0	0	1	−1	0	1	0	110

TABLA 68

z	x_1	x_2	s_1	s_2	ld
1	0	0	2	3	$\frac{5}{2}$
0	1	0	3	2	$\frac{5}{2}$
0	1	1	1	1	1

BIBLIOGRAFÍA

Amplios estudios acerca del análisis de sensibilidad y dualidad se encuentran en las obras siguientes:

Bazaraa, M. y J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows.* Nueva York: Wiley, 1990.

Bersitmas, D. y Tsitsiklis, J. *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, Mass.: Athena, 1997.

Bradley, S., A. Hax, y T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Dantzig, G., Thapa, N. *Linear Programming.* Nueva York: Springer-Verlag, 1997.

Gass, S. *Linear Programming: Methods and Applications,* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1985.

Luenberger, D. *Linear and Nonlinear Programming,* 2a. ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.

Murty, K. *Linear Programming.* Nueva York: Wiley, 1983.

Nash, S. y Sofer, A. *Linear and Nonlinear Programming.* Nueva York: McGraw-Hill, 1995.

Nering, E. y Tucker, A. *Linear Programs and Related Problems.* Nueva York: Academic Press, 1993.

Simmons, D. *Linear Programming for Operations Research.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1972.

Simonnard, M. *Linear Programming.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1966.

Wu, N. y R. Coppins. *Linear Programming and Extensions.* Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

En la siguiente obra se encuentra un análisis claro de DEA:

Callen, J. "Data Envelopment Analysis: Practical Survey and Managerial Accounting Applications", *Journal of Management Accountin Research* 3(1991):35-57.

7

Problemas de transporte, asignación y transbordo

En este capítulo, se analizan tres tipos especiales de problemas de programación lineal: transporte, asignación y transbordo. Cada uno de éstos se puede resolver mediante el algoritmo simplex, pero hay algoritmos especializados mucho más eficientes para cada tipo de problema.

7.1 Cómo formular problemas de transporte

Para comenzar el análisis de los problemas de transporte, se formula un modelo de programación lineal de la situación siguiente.

EJEMPLO 1 Formulación de Powerco

Powerco tiene tres centrales eléctricas que cubren las necesidades de cuatro ciudades.[†] Cada central suministra los números siguientes de kilowatts-hora (kwh) de electricidad: planta 1 —35 millones; planta 2 —50 millones; planta 3 —40 millones (véase la tabla 1). Las demandas de potencia pico en estas ciudades, que ocurren al mismo tiempo (2 p.m.), son como sigue (en kwh): ciudad 1 —45 millones; ciudad 2 —20 millones; ciudad 3 —30 millones; ciudad 4 —30 millones. Los costos por enviar un millón de kwh de electricidad de la planta a la ciudad dependen de la distancia que debe viajar la electricidad. Formule un PL para minimizar el costo de satisfacer la demanda de potencia pico de cada ciudad.

Solución Para formular el problema de Powerco como un PL, se comienza por definir una variable para cada decisión que debe tomar Powerco. Debido a que Powerco debe determinar cuánta potencia se envía desde cada planta a cada ciudad, se define (para i = 1, 2, 3 y j = 1, 2, 3, 4)

$$x_{ij} = \text{número de (millones) de kwh producidos en la planta } i \text{ y enviados a la ciudad } j$$

En términos de estas variables, el costo total de suministrar las demandas de potencia pico a las ciudades 1 a 4 podrían escribirse como

$$\begin{aligned}
&8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} && \text{(Costo de enviar potencia desde la planta 1)}\\
&+ 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} && \text{(Costo de enviar potencia desde la planta 2)}\\
&+ 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} && \text{(Costo de enviar potencia desde la planta 3)}
\end{aligned}$$

Powerco enfrenta dos tipos de restricciones. Primera, la potencia total suministrada por cada planta no puede exceder la capacidad de la planta. Por ejemplo, la cantidad total de potencia enviada desde la planta 1 a las cuatro ciudades no puede pasar de 35 millones

[†]Este ejemplo se basa en Aarvik y Randolph (1975).

TABLA 1
Costos de envío, suministro y demanda para Powerco

De	A				Suministros (millones de kwh)
	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	
Planta 1	$8	$6	$10	$9	35
Planta 2	$9	$12	$13	$7	50
Planta 3	$14	$9	$16	$5	40
Demanda (millones de kwh)	45	20	30	30	

de kwh. Cada variable con subíndice 1 representa un envío de potencia desde la planta 1, de modo que se podría expresar esta restricción por la restricción de PL

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$

De manera similar, se encuentran restricciones que reflejan las capacidades de las plantas 2 y 3. Debido a que ambas centrales suministran potencia, cada una es un **punto de suministro.** De manera análoga, una restricción que asegura que la cantidad total enviada desde una planta no excede su capacidad es una **restricción de suministro.** La formulación de PL del problema de Powerco contiene las tres restricciones de suministro siguientes:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 35 \qquad \text{(Restricción de suministro de la planta 1)} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 50 \qquad \text{(Restricción de suministro de la planta 2)} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 40 \qquad \text{(Restricción de suministro de la planta 3)} \end{aligned}$$

Segunda, son necesarias restricciones que aseguren que cada ciudad recibirá potencia suficiente para satisfacer su demanda pico. Cada ciudad demanda potencia, así que cada una es un **punto de demanda.** Por ejemplo, la ciudad 1 debe recibir por lo menos 45 millones de kwh. Cada variable con segundo subíndice 1 representa un envío de potencia a la ciudad 1, así que se obtiene la restricción siguiente:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$$

Del mismo modo, se obtiene una restricción para cada una de las ciudades 2, 3 y 4. Una restricción que asegura que una ubicación recibe su demanda es una **restricción de demanda.** Powerco debe satisfacer las siguientes cuatro restricciones de demanda:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 45 \qquad \text{(Restricción de demanda de la ciudad 1)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 20 \qquad \text{(Restricción de demanda de la ciudad 2)} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 30 \qquad \text{(Restricción de demanda de la ciudad 3)} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 30 \qquad \text{(Restricción de demanda de la ciudad 4)} \end{aligned}$$

Debido a que las x_{ij} deben ser no negativas, se suman las restricciones de signo $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$).

Al combinar la función objetivo, las restricciones de suministro, demanda y signo se obtiene la formulación del PL siguiente para el problema de Powerco:

$$\begin{aligned} \min z = {} & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} \\ & + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} \\ \text{s.a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35 \qquad \text{(Restricciones de suministro)} \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40 \end{aligned}$$

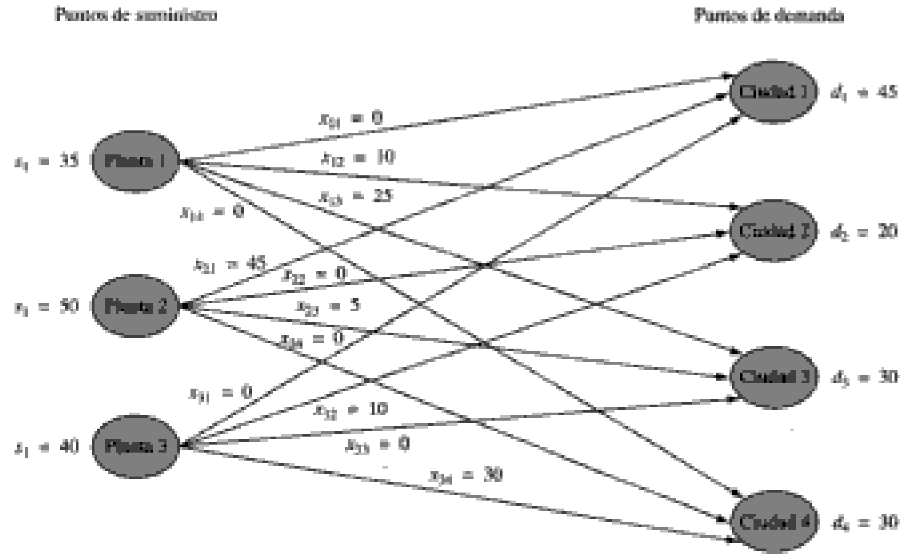


FIGURA 1
Representación gráfica del problema de Powerco y su solución óptima

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} \quad & \geq 45 \qquad \text{(Restricciones de demanda)} \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} \quad & \geq 20 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} \quad & \geq 30 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} \quad & \geq 30 \\
x_{ij} & \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

En la sección 7.3, se encontró que la solución óptima para este PL es $z = 1020$, $x_{12} = 10$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 10$, $x_{34} = 30$. La figura 1 es una representación gráfica del problema de Powerco y su solución óptima. La variable x_{ij} se representa por una línea, o arco, que une el i-ésimo punto de suministro (planta i) y el j-ésimo punto de demanda (ciudad j).

Descripción general de un problema de transporte

En general, un problema de transporte se especifica por la información siguiente:

1 Un conjunto de *m puntos de suministro* a partir de los cuales se envía un bien. El punto de suministro i abastece a lo sumo a s_i unidades. En el ejemplo de Powerco, $m = 3$, $s_1 = 35$, $s_2 = 50$ y $s_3 = 40$.

2 Un conjunto de *n puntos de demanda* a los que se envía el bien. El punto de demanda j debe recibir por lo menos d_j unidades del bien enviado. En el ejemplo de Powerco, $n = 4$, $d_1 = 45$, $d_2 = 20$, $d_3 = 30$ y $d_4 = 30$.

3 Cada unidad producida en el punto de suministro i y enviada al punto de demanda j incurre en un *costo variable* de c_{ij}. En el ejemplo de Powerco, $c_{12} = 6$.

Sea

x_{ij} = número de unidades enviadas desde el punto de suministro i al punto de demanda j

entonces la formulación general de un problema de transporte es

$$\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} \le s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{(Restricciones de suministro)}$$
$$\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} \ge d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{(Restricciones de demanda)} \qquad (1)$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

Si un problema tiene las restricciones dadas en (1) y es un problema de *maximización*, entonces aún es un problema de transporte (véase el problema 7 al final de esta sección). Si

$$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$$

entonces el suministro total es igual a la demanda, y se dice que el problema es uno de **transporte equilibrado.**

Para el problema de Powerco, tanto el suministro total como la demanda total son iguales a 125, así que se trata de un problema de transporte equilibrado. En un problema de este tipo, las restricciones deben ser activas. Por ejemplo, si alguna restricción de suministro no fuera inactiva, entonces la potencia disponible sería insuficiente para satisfacer las necesidades de las cuatro ciudades. Para un problema de transporte equilibrado (1), se podría escribir como

$$\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$
$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{(Restricciones de suministro)}$$
$$\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{(Restricciones de demanda)} \qquad (2)$$
$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

Más adelante en este capítulo, se verá que es relativamente simple encontrar una solución factible básica para un problema de transporte equilibrado. También, en los pivotes simplex para estos problemas no se requiere la multiplicación y reducir a sumas y restas. Por estas razones, es deseable formular un problema de transporte como un problema de transporte equilibrado.

Cómo equilibrar un problema de transporte si el suministro total excede a la demanda total

Si el suministro total excede a la demanda total, un problema de transporte se equilibra creando un **punto de demanda ficticio** que tiene una demanda igual a la cantidad de suministro en exceso. Debido a que los envíos al punto de demanda ficticio no son envíos reales, se les asigna un costo cero. Los envíos al punto de demanda ficticio indican capacidad de suministro sin uso. Para entender el uso de un punto de demanda ficticio, suponga que en el problema de Powerco, la demanda para la ciudad 1 se redujo a 40 millones de kwh. A fin de equilibrar el problema de Powerco, se agregaría un punto de demanda ficticio (punto 5) con una demanda de $125 - 120 = 5$ millones de kwh. De cada planta, el costo de enviar 1 millón de kwh al punto ficticio es 0. La solución óptima para este problema de transporte equilibrado es $z = 975$, $x_{13} = 20$, $x_{12} = 15$, $x_{21} = 40$, $x_{23} = 10$, $x_{32} = 5$, $x_{34} = 30$ y $x_{35} = 5$. Debido a que $x_{35} = 5$, no se utilizarán 5 millones de kwh de la capacidad de la planta 3 (véase la figura 2).

Un problema de transporte se especifica por el suministro, la demanda y los costos de envío, así que los datos pertinentes se resumen en un **tableau de transporte** (véase la tabla 2). El cuadro, o **celda,** en el renglón i y la columna j de un cuadro de transporte corresponde a la variable x_{ij}. Si x_{ij} es una variable básica, su valor se coloca en la esquina infe-

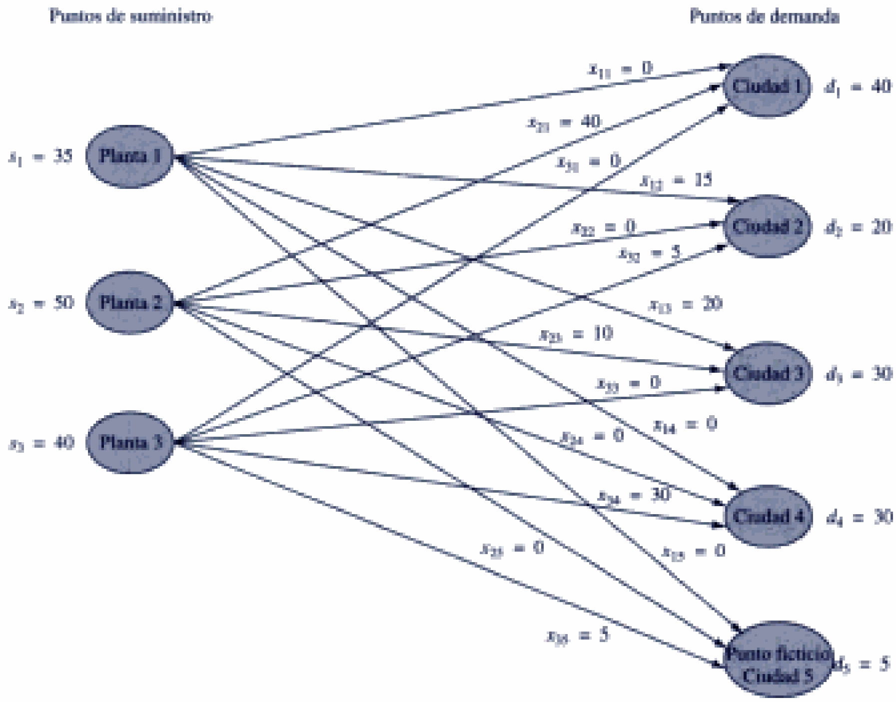


FIGURA 2
Representación gráfica del problema no equilibrado de Powerco y su solución óptima (con punto de demanda ficticio)

TABLA 2
Un tableau de transporte

				Suministro
c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

Demanda

TABLA 3
Tableau de transporte para Powerco

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Suministro
Planta 1	8	6 10	10 25	9	35
Planta 2	9 45	12	13 5	7	50
Planta 3	14	9 10	16	5 30	40
Demanda	45	20	30	30	

rior izquierda de la ij-ésima celda del tableau. Por ejemplo, el problema de Powerco y su solución óptima podrían mostrarse como se ilustra en la tabla 3. El formato de tableau expresa de manera implícita las restricciones de suministro y demanda por medio del hecho de que la suma de las variables en el renglón i debe ser igual a s_i y la suma de las variables en la columna j debe ser igual d_j.

Cómo equilibrar un problema de transporte si el suministro total es menor que la demanda total

Si un problema de transporte tiene un suministro total que es estrictamente menor que la demanda total, entonces el problema no tiene solución factible. Por ejemplo, si la planta 1 tiene capacidad de sólo 30 millones de kwh, entonces estarían disponibles sólo 120 millones de kwh. Esta cantidad de potencia sería insuficiente para satisfacer la demanda total de 125 millones de kwh, y el problema de Powerco ya no tendría una solución factible.

Cuando el suministro total es menor que la demanda total, a veces es deseable permitir la posibilidad de dejar sin satisfacer parte de la demanda. En este tipo de situación, se asocia una penalización con la demanda no cumplida. En el ejemplo 2, se ilustra cómo esta situación produce un problema de transporte equilibrado.

EJEMPLO 2 Manejo de escasez

Se cuenta con dos depósitos para suministrar agua a tres ciudades. Cada depósito puede suministrar hasta 50 millones de galones de agua por día. A cada ciudad le gustaría recibir 40 millones de galones por día. Por cada millón de galones por día de demanda sin satisfacer, hay una penalización. En la ciudad 1, la penalización es de \$20; en la ciudad 2, la penalización son \$22, y en la ciudad 3, la penalización son \$23. El costo de transportar un millón de galones de agua desde cada depósito a cada ciudad se ilustra en la tabla 4. Formule un problema de transporte equilibrado que pueda utilizarse para minimizar la suma de escasez y los costos de transporte.

Solución En este problema,

$$\text{Suministro diario} = 50 + 50 = 100 \text{ millones de galones por día}$$

$$\text{Demanda diaria} = 40 + 40 + 40 = 120 \text{ millones de galones por día}$$

Para equilibrar el problema, se suma un *punto de suministro* ficticio (o escasez) que tiene un suministro de $120 - 100 = 20$ millones de galones por día. El costo de enviar 1 millón de galones desde el punto de suministro ficticio a una ciudad, es justo el costo de escasez por millón de galones para esa ciudad. En la tabla 5 se muestra el problema de transporte equilibrado y su solución óptima. El depósito 1 debe enviar 20 millones de galones por día a la ciudad 1 y 30 millones de galones por día a la ciudad 2, en tanto que el depósito 2 debe enviar 10 millones de galones por día a la ciudad 2 y 40 millones de galones por día a la ciudad 3. La demanda de la ciudad 1 tendrá un déficit de 20 millones de galones por día.

TABLA 4
Costo de envío por depósito

	A		
De	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Depósito 1	\$7	\$8	\$10
Depósito 2	\$9	\$7	\$8

TABLA 5
Tableau de transporte por depósito

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Suministro
Depósito 1	7 / 20	8 / 30	10	50
Depósito 2	9	7 / 10	8 / 40	50
Punto ficticio (escasez)	20 / 20	22	23	20
Demanda	40	40	40	

Modelado de problemas de inventario como problemas de transporte

Muchos problemas de planificación de inventario se modelan como problemas de transporte equilibrado. Para ilustrar, se formula un modelo de transporte equilibrado del problema de Sailco de la sección 3.10.

EJEMPLO 3 **Establecimiento de un problema de inventario como un problema de transporte**

Sailco Corporation debe determinar cuántos veleros debe producir durante cada uno de los siguientes cuatro trimestres. La demanda es como sigue: primer trimestre, 40 veleros; segundo trimestre, 60 veleros; tercer trimestre, 75 veleros; cuarto trimestre, 25 veleros. Sailco debe satisfacer la demanda a tiempo. Al comienzo del primer trimestre, Sailco tiene un inventario de 10 veleros. Al inicio de cada trimestre, Sailco debe decidir cuántos veleros debe producir durante el trimestre actual. Para simplificar, se supone que los veleros fabricados durante un trimestre, pueden utilizarse para satisfacer la demanda del semestre actual. Durante cada trimestre, Sailco produce hasta 40 veleros a un costo de $400 por velero. Si los empleados trabajan tiempo extra durante un trimestre, Sailco produce más veleros a un costo de $450 por velero. Al final de cada trimestre (después que ocurrió la producción y se satisfizo la demanda del trimestre actual), se incurre en un costo de mantenimiento o retención de $20 por velero. Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar la suma de los costos de producción e inventario durante los siguientes cuatro trimestres.

Solución Se definen los puntos de suministro y demanda como sigue:

Puntos de suministro

Punto 1 = inventario inicial ($s_1 = 10$)
Punto 2 = producción en tiempo regular (TR) del trimestre 1 ($s_2 = 40$)
Punto 3 = producción en tiempo extra (TE) del trimestre 1 ($s_3 = 150$)
Punto 4 = producción en TR del trimestre 2 ($s_4 = 40$)
Punto 5 = producción en TE del trimestre 2 ($s_5 = 150$)
Punto 6 = producción en TR del trimestre 3 ($s_6 = 40$)
Punto 7 = producción en TE del trimestre 3 ($s_7 = 150$)
Punto 8 = producción en TR del trimestre 4 ($s_8 = 40$)
Punto 9 = producción en TE del trimestre 4 ($s_9 = 150$)

Existe un punto de suministro correspondiente a cada fuente para el que la demanda de veleros pueda cumplirse.

	Punto 1 = demanda del trimestre 1 $(d_1 = 40)$
	Punto 2 = demanda del trimestre 2 $(d_2 = 60)$
Puntos de demanda	Punto 3 = demanda del trimestre 3 $(d_3 = 75)$
	Punto 4 = demanda del trimestre 4 $(d_4 = 25)$
	Punto 5 = punto de demanda ficticia $(d_5 = 770 - 200 = 570)$

Un envío, digamos, en TR del trimestre 1 a la demanda del trimestre 3 significa producir 1 unidad en tiempo regular durante el trimestre 1 que se utiliza para satisfacer 1 unidad de demanda del trimestre 3. Para determinar, por ejemplo, c_{13}, observe que si se produce 1 unidad durante el TR del trimestre 1 y se utiliza para satisfacer la demanda del trimestre 3 se incurre en un costo igual al de producir 1 unidad en el TR del trimestre 1 más el costo de retener una unidad en el inventario durante $3 - 1 = 2$ trimestres. Por consiguiente, $c_{13} = 400 + 2(20) = 440$.

Debido a que no hay límite en la producción de tiempo extra durante ningún semestre, no está claro qué valor debe elegirse para el suministro en cada punto de producción de tiempo extra. La demanda total es igual a 200, así que a lo sumo $200 - 10 = 190$ (−10 es para el inventario inicial) unidades serán producidas durante cualquier trimestre. Debido a que deben producirse 40 unidades en tiempo regular antes que alguna unidad se produzca en tiempo extra, la sobreproducción en tiempo extra durante cualquier trimestre nunca será mayor de $190 - 40 = 150$ unidades. Cualquier capacidad de tiempo extra sin uso será "enviada" al punto de demanda ficticio. Para asegurar que ninguno de los veleros se utiliza para satisfacer la demanda durante un trimestre anterior a su producción, se asigna un costo de M (M es un número grande positivo) a cualquier celda que corresponde a usar la producción para satisfacer la demanda para un trimestre anterior.

TABLA 6
Tableau de transporte para Sailco

	1	2	3	4	Ficticio	Suministro
Inicial	0 10	20	40	60	0	10
TR del trimestre 1	400 30	420 10	440	460	0	40
TE del trimestre 1	450	470	490	510	0 150	150
TR del trimestre 2	M	400 40	420	440	0	40
TE del trimestre 2	M	450 10	470	490	0 140	150
TR del trimestre 3	M	M	400 40	420	0	40
TE del trimestre 3	M	M	450 35	470	0 115	150
TR del trimestre 4	M	M	M	400 25	0 15	40
TE del trimestre 4	M	M	M	450	0 150	150
Demanda	40	60	75	25	570	

Suministro total = 770 y demanda total = 200, así que debemos agregar un punto de demanda ficticio con una demanda de 770 − 200 = 570 para equilibrar el problema. El costo de enviar una unidad desde cualquier punto de suministro al punto de demanda ficticio es 0.

Con la combinación de estas observaciones, se obtiene el problema de transporte equilibrado y su solución óptima mostrada en la tabla 6. Por consiguiente Sailco debe satisfacer la demanda de un trimestre con 10 unidades de inventario inicial y 30 unidades de producción en TR del trimestre 1; la demanda del trimestre 2 con 10 unidades de TR del trimestre 1, 40 unidades de TR del trimestre 2 y 10 unidades de producción en TE del trimestre 2; la demanda del trimestre 3 con 40 unidades de TR del trimestre 3 y 35 unidades de producción en TE del trimestre 3 y, por último, la demanda del trimestre 4 con 25 unidades de producción en TR del trimestre 4.

En el problema 12 al final de esta sección, se muestra cómo se puede modificar esta formulación para incorporar otros aspectos de problemas de inventario (demanda de pedidos pendientes, inventario de perecederos, etcétera).

Cómo resolver problemas de transporte en la computadora

Para resolver el problema de transporte con LINDO, teclee la función objetivo, restricciones de suministro y restricciones de demanda. Existen otros programas por menús que aceptan costos de envío, valores de suministro y valores de demanda. A partir de estos valores, el programa genera la función objetivo y las restricciones.

Trans.lng

LINGO se puede utilizar para resolver con facilidad cualquier problema de transporte. El siguiente modelo de LINGO puede utilizarse para resolver el ejemplo de Powerco (archivo Trans.lng).

```
MODEL:
   1]SETS:
   2]PLANTS/P1,P2,P3/:CAP;
   3]CITIES/C1,C2,C3,C4/:DEM;
   4]LINKS(PLANTS,CITIES):COST,SHIP;
   5]ENDSETS
   6]MIN=@SUM(LINKS:COST*SHIP);
   7]@FOR(CITIES(J):
   8]@SUM(PLANTS(I):SHIP(I,J))>DEM(J));
   9]@FOR(PLANTS(I):
  10]@SUM(CITIES(J):SHIP(I,J))<CAP(I));
  11]DATA:
  12]CAP=35,50,40;
  13]DEM=45,20,30,30;
  14]COST=8,6,10,9,
  15]9,12,13,7,
  16]14,9,16,5;
  17]ENDDATA
END
```

Las líneas 1 a 5 definen los **SETS** necesarios para generar la función objetivo y las restricciones. En la línea 2, se crean tres centrales eléctricas (los puntos de suministro) y se especifica que cada una tiene una capacidad (dada en la sección **DATA**). En la línea 3, se crean las cuatro ciudades (los puntos de demanda) y se especifica que cada una tiene una demanda (dada en la sección **DATA**). El comando **LINK** en la línea 4 crea un LINK(I,J) cuando I funciona en PLANTS y J funciona en CITIES. Así, los objetos LINK(1,1), LINK(1,2), LINK(1,3), LINK(1,4), LINK(2,1), LINK(2,2), LINK(2,3), LINK(2,4), LINK(3,1), LINK(3,2), LINK(3,3), LINK(3,4) se crean y almacenan en este orden. Los atributos con varios subíndices se almacenan para que los subíndices de la derecha avancen con más rapidez. Cada LINK tiene dos atributos: un costo de envío por unidad [(COST), dado en la sección **DATA**] y la cantidad enviada (SHIP), la cual se determina mediante LINGO.

La línea 6 crea la función objetivo. Se suman los vínculos del costo unitario de envío del producto y la cantidad enviada. Por medio de los operadores **@FOR** y **@SUM**, las líneas 7 y 8 generan las restricciones de demanda. Con ellas se asegura que para cada ciudad, la suma de la cantidad enviada a la ciudad será por lo menos tan grande como la demanda de la ciudad. Observe que el paréntesis extra después de SHIP(I,J) en la línea 8 está cerca del operador **@SUM**, y el paréntesis extra después de DEM(J) está cerca del operador **@FOR.** Usando los operadores **@FOR** y **@SUM**, las líneas 9 y 10 generarán las restricciones de suministro. Con ellas se asegura que para cada planta, el total enviado desde la planta no excederá la capacidad de ésta.

Las líneas 11 a 17 contienen los datos necesarios para el problema. La línea 12 define la capacidad de cada planta, y la línea 13 define la demanda de cada ciudad. Las líneas 14 a 16 contienen el costo unitario de envío de cada planta a cada ciudad. Estos costos corresponden al ordenamiento de los enlaces descritos antes. **ENDDATA** termina la sección de datos y **END** termina el programa. Al teclear **GO** se resuelve el problema.

Este programa puede usarse para resolver cualquier problema de transporte. Si, por ejemplo, se quiere resolver un problema con 15 puntos de suministro y 10 puntos de demanda, se cambiaría la línea 2 para crear 15 puntos de suministro y la línea 3 para crear 10 puntos de demanda. Moviéndose a la línea 12, se teclearían las 15 capacidades de planta. En la línea 13, teclearían las demandas para los 10 puntos de demanda. Luego en la línea 14, se escribirían los 150 costos de envío. ¡Observe que no cambia la parte del programa (líneas 6 a 10) que genera la función objetivo y las restricciones! Observe también que la formulación de LINGO no requiere esté equilibrado el problema de transporte.

Obtención de datos de LINGO a partir de una hoja de cálculo de Excel

Powerco.xls

A menudo es más fácil obtener datos para un modelo de LINGO a partir de una hoja de cálculo. Por ejemplo, los costos de envío para un problema de transporte podrían ser el resultado final de muchos cálculos. Como ejemplo, suponga que se crearon las capacidades, demandas y costos de envío para el modelo de Powerco en el archivo Powerco.xls (véase la figura 3). Se crearon las capacidades en el intervalo de celdas F9:F11 y se nombró Cap al intervalo. Como es sabido, en Excel se nombra un intervalo de celdas al seleccionar el intervalo y dar clic en la caja de nombre en la esquina superior izquierda de la hoja de cálculo. Luego, se teclea el nombre del intervalo y se golpea la tecla Enter. De manera similar, nombrar las demandas de ciudad (en las celdas B12:E12) con el nombre Demand y los costos unitarios de envío (en las celdas B4:E6) con el nombre Costs.

FIGURA 3

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		OPTIMAL SOLUTION	FOR	POWERCO		COSTS		
2	COSTS		CITY			1020		
3	PLANT	1	2	3	4			
4	1	8	6	10	9			
5	2	9	12	13	7			
6	3	14	9	16	5			
7	SHIPMENTS		CITY			SHIPPED		SUPPLIES
8	PLANT	1	2	3	4			
9	1	0	10	25	0	35	<=	35
10	2	45	0	5	0	50	<=	50
11	3	0	10	0	30	40	<=	40
12	RECEIVED	45	20	30	30			
13		>=	>=	>=	>=			
14	DEMANDS	45	20	30	30			

Con una expresión **@OLE**, LINGO lee de una hoja de cálculo los valores de datos que se definen en la porción Sets de un programa. A continuación se ilustra el programa LINGO (véase el archivo Transpspread.lng) necesario para leer los datos de entrada del archivo Powerco.xls.

Transpspread.lng

```
MODEL:
SETS:
PLANTS/P1,P2,P3/:CAP;
CITIES/C1,C2,C3,C4/:DEM;
LINKS(PLANTS,CITIES):COST,SHIP;
ENDSETS
MIN=@SUM(LINKS:COST*SHIP);
@FOR(CITIES(J):
@SUM(PLANTS(I):SHIP(I,J))>DEM(J));
@FOR(PLANTS(I):
@SUM(CITIES(J):SHIP(I,J))<CAP(I));
DATA:
CAP, DEM, COST=@OLE('C:\MPROG\POWERCO.XLS','Cap','Demand','Costs');
ENDDATA
  END

La expresión clave es

CAP, DEM, COST=@OLE('C:\MPROG\POWERCO.XLS','Cap','Demand','Costs');
```

Esta expresión lee los conjuntos de datos definidos CAP, DEM y COSTS de la hoja de cálculo de Powerco.xls. Observe que primero debe especificarse la asignación de trayectoria completa del archivo de Excel (encerrado entre comillas simples) seguida por los nombres de intervalo de la hoja de datos que contienen los datos necesarios. Los nombres de intervalo forman parejas con los conjuntos de datos en el orden listado. Por consiguiente, los valores CAP se encuentran en el intervalo Cap, y así sucesivamente. La expresión **@OLE** es muy poderosa, debido a que una hoja de datos normalmente simplificará mucho la creación de datos para un programa de LINGO.

Solución de hoja de cálculo de problemas de transporte

Powerco.xls

En el archivo Powerco.xls, se muestra cuán fácil es usar el Excel Solver para hallar la solución óptima a un problema de transporte. Después de escribir las capacidades de las plantas, las demandas por cada ciudad y los costos unitarios de envío como se muestra, se escriben los valores de prueba de las unidades enviadas de cada planta a cada ciudad en el intervalo B9:E11. Luego, se procede como sigue:

Paso 1 Calcule la cantidad total enviada de cada ciudad copiando desde F9 a F10:F11 la fórmula

=SUM(B9:E9)

Paso 2 Calcule el total recibido por cada ciudad copiando desde B12 hasta C12:E12 la fórmula

=SUM(B9:B11)

Paso 3 Calcule el costo total de envío en la celda F2 con la fórmula

=SUMPRODUCT(B9:E11,Costs)

Observe que la función =SUMPRODUCT actúa en rectángulos así como renglones y columnas de números. También, se nombró el intervalo de costos de envío de unidades (B4:E6) como COSTS.

Paso 4 Ahora se llena la ventana Solver mostrada en la figura 4. Se minimizan los costos totales de envío (F2) cambiando las unidades enviadas de cada planta a cada ciudad (B9:E11). Se restringe la cantidad recibida por cada ciudad (B12:E12) como por lo menos la demanda de cada ciudad (el nombre del intervalo es Demand). Se restringe la cantidad enviada de cada planta (F9:F11) como a lo sumo la capacidad de cada planta (el nombre del intervalo es Cap). Después de comprobar la opción Assume Nonnegative y la opción Assume Linear Model, se obtiene la solución óptima mostrada en la figura 3. Observe que

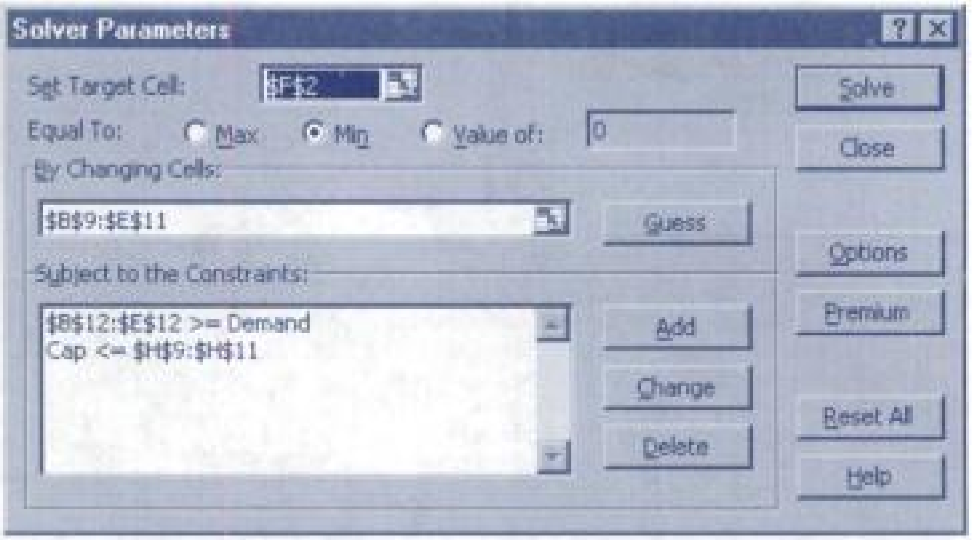


FIGURA 4

la función objetivo de la solución óptima determinada mediante Excel es igual al valor de la función objetivo que se calcula con LINGO y la solución manual. Si el problema tiene varias soluciones óptimas, entonces es posible que sean diferentes los valores de los envíos determinados mediante LINGO, Excel y la solución manual.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Una compañía suministra bienes a tres clientes, y cada uno requiere 30 unidades. La compañía tiene dos almacenes. El almacén 1 tiene 40 unidades disponibles y el almacén dos tiene 30 unidades disponibles. Los costos de enviar una unidad desde el almacén al cliente se muestran en la tabla 7. Hay una penalización por cada unidad de demanda no suministrada al cliente: con el cliente 1, se incurre en un costo de penalización de $90; con el cliente 2, $80, y con el cliente 3, $110. Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar la suma de escasez y costos de envío.

2 Con respecto al problema 1, suponga que podrían comprarse unidades extra y enviarse a cualquier almacén para un costo total de $100 por unidad, y que se debe satisfacer la demanda de los clientes. Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar la suma de costos de compra y envío.

3 Una compañía de zapatos predice las demandas siguientes durante los siguientes seis meses: mes 1, 200; mes 2, 260; mes 3, 240; mes 4, 340; mes 5, 190; mes 6, 150. El costo de producir un par de zapatos es $7 con trabajo en tiempo regular (TR) y $11 con trabajo de tiempo extra (TE). Durante cada mes, la producción regular se limita a 200 pares de zapatos y el tiempo de producción de tiempo extra se limita a 100 pares. Cuesta $1 por mes mantener en inventario un par de zapatos. Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar el costo total de satisfacer a tiempo los siguientes seis meses de demanda.

4 Steelco fabrica tres tipos de acero en diferentes plantas. El tiempo requerido para fabricar una tonelada de acero (sin importar el tipo) y los costos en cada planta se ilustran en la tabla 8. Cada semana deben producirse 100 toneladas de cada tipo de acero (1, 2 y 3). Cada planta está abierta 40 horas por semana.

a Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar el costo de satisfacer los requerimientos semanales de Steelco.

b Suponga que el tiempo requerido para producir una tonelada de acero depende del tipo de acero así como de la planta en la que se produce (véase la tabla 9, página 372). ¿Se podría formular aún un problema de transporte?

5 Un hospital necesita comprar 3 galones de una medicina perecedera que utilizará durante el mes actual y cuatro galones para uso durante el mes siguiente. Debido a que la

TABLA 7

	A		
De	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Almacén 1	$15	$35	$25
Almacén 2	$10	$50	$40

TABLA 8

	Costo ($)			
Planta	Acero 1	Acero 2	Acero 3	Tiempo (minutos)
1	60	40	28	20
2	50	30	30	16
3	43	20	20	15

TABLA 9

Planta	Tiempo (minutos) Acero 1	Acero 2	Acero 3
1	15	12	15
2	15	15	20
3	10	10	15

medicina es perecedera, sólo puede utilizarse durante el mes de compra. Dos compañías (Daisy y Laroach) venden la medicina. La medicina está escasa. Por consiguiente, durante los siguientes dos meses, el hospital está limitado a comprar a los sumo 5 galones de cada compañía. Las compañías cargan los precios mostrados en la tabla 10. Formule un modelo de transporte equilibrado para minimizar el costo de comprar la medicina necesaria.

6 Un banco tiene dos sitios en los que se procesan los cheques. El sitio uno procesa 10 000 cheques por día y el sitio 2 procesa 6 000 cheques por día. El banco procesa tres tipos de cheques: vendedor, salario y personal. El costo de procesamiento por cheque depende del sitio (véase la tabla 11). Por día deben procesarse 5 000 cheques de cada tipo. Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar el costo diario de procesar los cheques.

7[†] El gobierno de Estados Unidos está subastando contratos de arrendamiento de petróleo en dos sitios: 1 y 2. En cada sitio, se subastan 100 000 acres de tierra. Cliff Ewing, Blake Barnes y Alexis Pickens llevan a cabo licitaciones para el petróleo. Las reglas del gobierno establecen que ningún licitador puede recibir más de 40% de la tierra que está siendo subastada. Cliff ofertó $1 000/acre para el suelo del sitio 1 y $2 000/acre para el suelo del sitio 2. Blake ofreció $900/acre para el suelo del sitio 1 y $2 200/acre para el suelo del sitio 2. Alexis ofertó $1 100/acre para el sitio 1 y $1 900/acre para el sitio 2. Formule un modelo de transporte equilibrado para maximizar el ingreso del gobierno.

TABLA 10

Compañía	Precio del mes actual por galón ($)	Precio del mes siguiente por galón ($)
Daisy	800	720
Laroach	710	750

TABLA 11

Cheques	Sitio (c) 1	2
Vendedor	5	3
Salario	4	4
Personal	2	5

[†]Este problema se basa en Jackson (1980).

TABLA 12

De ($)	A ($) Inglaterra	Japón
Campo 1	1	2
Campo 2	2	1

TABLA 13

Auditor	Proyecto ($) 1	2	3
1	120	150	190
2	140	130	120
3	160	140	150

8 La Ayatola Oil Company controla dos campos petroleros. El campo 1 puede producir hasta 40 millones de barriles de petróleo por día y el campo 2 puede producir hasta 50 millones de barriles por día. En el campo 1, cuesta $3 extraer y refinar un barril de petróleo; en el campo 2, el costo es de $2. Ayatola vende petróleo a dos países: Inglaterra y Japón. El costo de envío por barril se presenta en la tabla 12. Cada día, Inglaterra está dispuesta a comprar hasta 40 millones de barriles (a $6 por barril) y Japón está dispuesto a comprar hasta 30 millones de barriles (a $6.50 por barril). Formule un problema de transporte equilibrado para maximizar las ganancias de Ayatola.

9 Para los ejemplos y problemas de esta sección, analice si es razonable suponer que la suposición de proporcionalidad se cumple para la función objetivo.

10 Touche Young tiene tres auditores. Cada uno puede trabajar tanto como 160 horas durante el mes siguiente, tiempo durante el que deben completarse tres proyectos. El proyecto 1 tomará 130 horas; el proyecto 2, 140 horas, y el proyecto 3, 160 horas. La cantidad por hora que puede facturarse para asignar cada auditor a cada proyecto se da en la tabla 13. Formule un problema de transporte equilibrado para maximizar las facturaciones durante el mes siguiente.

Grupo B

11[‡] Paperco recicla periódico, papel sin revestimiento y con revestimiento en papel periódico reciclado y papeles reciclados sin y con revestimiento. El papel periódico reciclado puede producirse al procesar periódico o papel sin revestimiento. El papel con revestimiento reciclado se produce al reciclar cualquier tipo de papel. El papel reciclado sin revestimiento se produce al procesar papel sin revestimiento o con revestimiento. El proceso utilizado para producir papel periódico reciclado elimina 20% de la pulpa de entrada, dejando 80% de la pulpa de entrada para el papel reciclado. El proceso utilizado para producir papel reciclado con revestimiento elimina 10% de la pulpa de entrada. El proceso utilizado para producir papel reciclado sin revestimiento elimina 15% de la pulpa de entrada. Los costos de compra, costos de proceso y disponibilidad de cada tipo de papel se ilustran en la tabla 14. A fin de satisfacer la demanda, Paperco debe producir por lo menos 250 toneladas de pulpa de papel

[‡]Este problema se basa en Glassey y Gupta (1974).

TABLA 14

	Costo de compra por tonelada de pulpa ($)	Costo de proceso por tonelada de entrada ($)	Disponibilidad
Papel periódico	10		500
Papel con revestimiento	9		300
Papel sin revestimiento	8		200
PP utilizado para PPR		3	
PP utilizado para PRCR		4	
PSR utilizado para PPR		4	
PSR utilizado para PRSR		1	
PSR utilizado para PRCR		6	
PCR utilizado para PRSR		5	
PCR utilizado para PRCR		3	

periódico reciclado, al menos 300 toneladas de pulpa de papel reciclado sin revestimiento, y por lo menos 150 toneladas de pulpa de papel reciclado con revestimiento. Formule un problema de transporte equilibrado que pueda utilizarse para minimizar el costo de satisfacer las demandas de Powerco.

12 Explique cómo cada una de las siguientes situaciones modificaría la formulación del problema de Sailco como un problema de transporte equilibrado:

a Suponga que la demanda pudiera acumularse a un costo de \$30/velero/mes. (*Sugerencia:* ahora es permisible enviar de, digamos, la producción del mes 2 a la demanda del mes 1.)

b Si la demanda para un velero no se cumple a tiempo, se pierde la venta y se incurre en un costo de oportunidad de \$450.

c Los veleros se mantienen en inventario durante un máximo de dos meses.

d A un costo de \$440/velero, Sailco compra hasta 10 veleros/mes de un subcontratista.

7.2 Cómo hallar las soluciones básicas factibles para problemas de transporte

Considere un problema de transporte equilibrado con m puntos de suministro y n puntos de demanda. De (2), se observa que tal problema contiene $m + n$ restricciones de igualdad. De la experiencia obtenida con el método de la gran M y el método simplex de dos fases, se sabe que es difícil encontrar una sfb si todas las restricciones de la PL son igualdades. Por fortuna, la estructura especial de un problema de transporte equilibrado facilita poder encontrar una sfb.

Antes de describir tres métodos comúnmente utilizados para determinar una sfb para un problema de transporte, es necesario hacer la siguiente observación importante. *Si un conjunto de valores para las x_{ij} satisface todas excepto una de las restricciones de un problema de transporte equilibrado, entonces los valores para las x_{ij} satisfarán de manera automática la otra restricción.* Por ejemplo, en el problema de Powerco, suponga que se sabe que un conjunto de valores para las x_{ij} satisfacen las restricciones con excepción de la primera restricción de suministro. Entonces este conjunto de x_{ij} debe suministrar $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 125$ millones de kwh a las ciudades 1 a 4 y suministrar $s_2 + s_3 = 125 - s_1 = 90$ millones de kwh de las plantas 2 y 3. Así, la planta 1 debe suministrar $125 - (125 - s_1) = 35$ millones de kwh, así que las x_{ij} deben satisfacer la primera restricción de suministro.

En el análisis anterior se observa que cuando se resuelve un problema de transporte equilibrado, se podría evitar tomar en consideración cualquiera de las restricciones del problema y resolver una PL con $m + n - 1$ restricciones. Se supone (de manera arbitraria) que se omite considerar la primera restricción de suministro.

Al tratar de encontrar una sfb para las restantes $m + n - 1$ restricciones, se podría pensar que cualquier colección de $m + n - 1$ variables podría dar una solución básica. Por desgracia, éste no es el caso. Por ejemplo, considere (3) un problema de transporte equilibrado. (Se omiten los costos debido a que no son necesarios para hallar una sfb.)

			4
			5
3	2	4	

(3)

En forma de matriz, las restricciones para este problema de transporte equilibrado podría escribirse como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{3'}$$

Después de eliminar la primera constante de suministro, se obtiene el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{3''}$$

Una solución básica para (3″) debe tener cuatro variables básicas. Suponga que se prueba con BV $= \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que $\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ produzca una solución básica, debe ser posible usar OER para transformar B a I_4. Debido a que el rango $B = 3$ y las OER no cambian el rango de una matriz, no hay forma de poder utilizar las OER para transformar B en I_4. Así, BV $= \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ no pueden producir una solución básica para (3″). Por fortuna, se podría utilizar el concepto simple de bucle para determinar si un conjunto arbitrario de $m + n - 1$ variables produce una solución básica para un problema de transporte equilibrado.

DEFINICIÓN ■ Una secuencia ordenada de por lo menos cuatro celdas diferentes se llama **bucle** si:

1 Dos celdas consecutivas cualesquiera yacen en el mismo renglón o la misma columna.

2 En el mismo renglón o columna no están tres celdas consecutivas.

3 La última celda en la secuencia tiene un renglón o columna en común con la primer celda de la secuencia. ■

En la definición de un bucle, se considera que la primera celda sigue a la última, así que se podría considerar al bucle como una trayectoria cerrada. A continuación se dan unos ejemplos de la definición anterior: La figura 5 representa el bucle (2, 1)–(2, 4)–(4, 4)–(4, 1). La figura 6 representa el bucle (1, 1)–(1, 2)–(2, 2)–(2, 3)–(4, 3)–(4, 5)–(3, 5)–(3, 1). En la figura 7, la trayectoria (1, 1)–(1, 2)–(2, 3)–(2, 1) no representa un bucle, porque (1, 2) y (2, 3) no se encuentran en el mismo renglón o columna. En la figura 8, la trayectoria (1, 2)–(1, 3)–(1, 4)–(2, 4)–(2, 2) no representa un bucle, porque (1, 2), (1, 3) y (1, 4) están en el mismo renglón.

El teorema 1 (que se enuncia sin demostración) muestra por qué es importante el concepto de bucle.

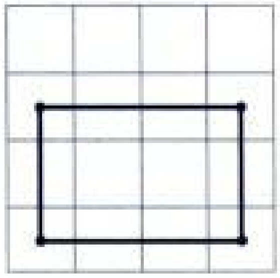


FIGURA 5

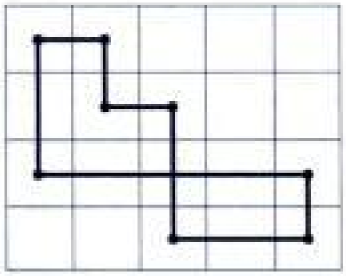


FIGURA 6

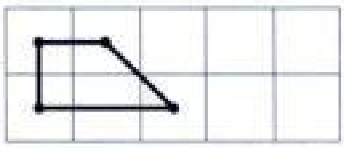


FIGURA 7

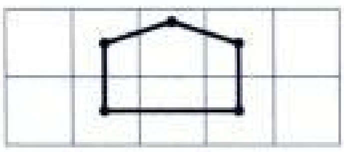


FIGURA 8

TEOREMA 1

En el problema de transporte equilibrado con m puntos de suministro y n puntos de demanda, las celdas que corresponden a un conjunto de $m + n - 1$ variables no contienen ningún bucle si y sólo si las $m + n - 1$ producen una solución básica.

El teorema 1 se deduce del hecho de que un conjunto de $m + n - 1$ celdas no contienen ningún bucle si y sólo si las $m + n - 1$ columnas que corresponden a estas celdas son linealmente independientes. Debido a que (1, 1)–(1, 2)–(2, 2)–(2, 1) es un bucle, el teorema 1 establece que $\{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{21}\}$ no produce una solución básica para (3"). Por otro lado, no puede formarse ningún bucle con las celdas (1, 1)–(1, 2)–(1, 3)–(2, 1), así que $\{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}\}$ producirá una solución básica para (3").

Ahora se está listo para analizar los tres métodos que pueden utilizarse para determinar una solución factible básica para un problema de transporte equilibrado:

1 Método de la esquina noroeste.

2 Método del costo mínimo.

3 Método de Vogel.

Método de esquina noroeste para hallar una solución factible básica

Para hallar una sfb por el método de la esquina noroeste, se comienza en la esquina superior izquierda (o noroeste) del tableau de transporte y se fija x_{11} en el valor más grande posible. Resulta claro que x_{11} no puede ser más grande que el valor más pequeño de s_1 y d_1. Si $x_{11} = s_1$, anule el primer renglón del tableau de transporte; esto indica que no más variables básicas resultarán del renglón 1. Asimismo, cambie d_1 a $d_1 - s_1$. Si $x_{11} = d_1$, anule la primera columna del tableau de transporte; esto indica que no resultarán más variables de la columna 1. Asimismo, cambie s_1 a $s_1 - d_1$. Si $x_{11} = s_1 = d_1$, anule el renglón 1 o columna 1 (pero no los dos). Si elimina el renglón 1, cambie d_1 a 0; si anula la columna 1, cambie s_1 a 0.

Continúe con este procedimiento hasta la celda del noroeste en el tableau que no se encuentre en un renglón o columna que se haya anulado. Por último, se llega a un punto donde sólo hay una celda a la que se le puede asignar un valor. Asigne a esta celda un valor igual a su demanda de renglón o columna y anule tanto el renglón como la columna de la celda. Ahora ya se tiene una solución factible básica.

El uso del método de esquina noroeste se ilustra mediante la determinación de una sfb para el problema de transporte equilibrado de la tabla 15. (No se listan los costos debido a que no es necesario aplicar el algoritmo.) La cancelación de un renglón o columna se indica con una × en el suministro del renglón o demanda de la columna.

Para empezar, se hace que $x_{11} = \min\{5, 2\} = 2$. Luego se anula la columna 1 y se cambia s_1 a $5 - 2 = 3$. Con esto se obtiene la tabla 16. La variable que queda más al noroeste es x_{12}. Sea $x_{12} = \min\{3, 4\} = 3$. A continuación se anula el renglón 1 y se cambia d_2 a $4 - 3 = 1$. Esto produce la tabla 17. Ahora la variable más al noroeste es x_{22}. Sea $x_{22} = \min\{1, 1\} = 1$. Debido a que tanto el suministro como la demanda correspondientes a la celda son iguales, se podría cancelar el renglón 2 o la columna 2 (pero no ambos). Por ninguna razón en particular, se elige eliminar el renglón 2. Luego d_2 debe cambiarse a $1 - 1 = 0$. El tableau resultante es la tabla 18. En el paso siguiente, esto dará lugar a una sfb *degenerada*.

TABLA 15

				5
				1
				3
2	4	2	1	

TABLA 16

2				3
				1
				3
×	4	2	1	

TABLA 22

$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	5
$\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	2
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
12	×	4	6	

TABLA 23

$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	5
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	×
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
10	×	4	6	

TABLA 24

5 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	×
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	×
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	15
5	×	4	6	

TABLA 25

5 $\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	×
2 $\boxed{2}$	8 $\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	×
5 $\boxed{3}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	10
×	×	4	6	

TABLA 32

6 0	7 5	8 5	10
15 15	80 	78 	15
15	5	5	

Observe que el método de Vogel evita los envíos costosos asociados con x_{22} y x_{23}. Esto es porque los altos costos de envío produjeron penalizaciones grandes que causaron que el método de Vogel eligiera otras variables para satisfacer las restricciones de demanda segunda y tercera.

De los tres métodos analizados hasta el momento para hallar una sfb, el método de la esquina noroeste requiere el mínimo esfuerzo, y el método de Vogel el mayor esfuerzo. No obstante, la investigación extensa deja ver [Glover *et al.* (1974)] que cuando se utiliza el método de Vogel para hallar una sfb, por lo común toma mucho menos pivotes que si se hubieran utilizado los otros dos métodos. Por esta razón, rara vez se emplean los métodos de la esquina noroeste y de costo mínimo para hallar una solución factible básica para un problema de transporte grande.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Utilice el método de la esquina noroeste para hallar una sfb para los problemas 1, 2 y 3 de la sección 7.1.

2 Utilice el método del costo mínimo para determinar una sfb para los problemas 4, 7 y 8 de la sección 7.1. (*Sugerencia*: para un problema de maximización, llame al método de costo mínimo el método de ganancia máxima o método de ingreso máximo.)

3 Utilice el método de Vogel para hallar una sfb para los problemas 5 y 6 de la sección 7.1.

4 ¿Cómo debe modificarse el método de Vogel para resolver un problema de maximización?

7.3 Método de simplex de transporte

En esta sección, se muestra cómo se simplifica el algoritmo simplex cuando se resuelve un problema de transporte.

Recuerde que cuando el renglón pivote se utiliza para eliminar la variable básica de entrada de las otras restricciones y el renglón 0, se requirieron por lo general muchas aplicaciones. Sin embargo, para resolver un problema de transporte, los *pivotes requieren sólo sumas y restas.*

Cómo pivotear en un problema de transporte

Al usar el procedimiento siguiente, los pivoteos para un problema de transporte podrían llevarse a cabo dentro de los confines del tableau de transporte:

Paso 1 Determine (por un criterio que se desarrollará en breve) la variable que debe entrar a la base.

Paso 2 Encuentre el bucle (se puede demostrar que sólo hay un bucle) en el que intervienen la variable entrante y algunas de las variables básicas.

Paso 3 Contando *sólo las celdas en el bucle*, marque las halladas en el paso 2 que son un número par (0, 2, 4, etcétera) de celdas aparte de la variable entrante como celdas *pa-*

res. También marque las que son un número impar de celdas aparte de la variable entrante como celdas *impares*.

Paso 4 Encuentre la celda impar cuya variable mide el valor más pequeño. Llame θ a este valor. La variable que corresponde a esta celda impar dejará la base. Para llevar a cabo el pivoteo, disminuya el valor de cada celda impar por θ e incremente el valor de cada celda par por θ. Los valores de las variables que no están en el bucle permanecen sin cambio. El pivoteo está completo. Si $\theta = 0$, entonces la variable entrante será igual a cero, y una variable que tiene un valor actual de cero dejará la base. En este caso, una sfb degenerada existió antes y resultará después del pivoteo. Si más de una celda impar en el bucle es igual a θ, se podría elegir de manera arbitraria que deje la base una de estas celdas impares; de nuevo, resultará una sfb degenerada.

El procedimiento de pivoteo se ilustra con el ejemplo de Powerco. Cuando se aplica el método de la esquina noroeste al ejemplo de Powerco, se encuentra la sfb de la tabla 33. Para esta sfb, las variables básicas son $x_{11} = 35$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 20$, $x_{23} = 20$, $x_{33} = 10$ y $x_{34} = 30$.

Suponga que se desea encontrar la sfb que resultaría si x_{14} se introdujera en la base. El bucle en el que interviene x_{14} y algunas de las variables básicas es

$$\begin{array}{cccccc} \text{E} & \text{O} & \text{E} & \text{O} & \text{E} & \text{O} \\ (1,4)\text{–} & (3,4)\text{–} & (3,3)\text{–} & (2,3)\text{–} & (2,1)\text{–} & (1,1) \end{array}$$

En este bucle, (1, 4), (3, 3) y (2, 1) son las celdas pares y (1, 1), (3, 4) y (2, 3) son las celdas impares. La celda impar con el valor más pequeño es $x_{23} = 20$. Así, después del pivoteo, x_{23} tendrá que dejar la base. Ahora se agrega 20 a cada una de las siete celdas y se resta 20 de cada una de las celdas impares. Se obtiene la sfb de la tabla 24. Debido a que cada renglón y columna tiene tantos +20 como −20, la nueva solución satisfará cada restricción de suministro y demanda. Si se elige que la variable impar más pequeña (x_{23}) deje la base, se asegura que las variables sean no negativas. Por consiguiente, la nueva solución es factible. No hay bucle en el que intervengan las celdas (1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3) y (3, 4), así que la nueva solución es una sfb. Después del pivoteo, la nueva sfb es $x_{11} = 15$, $x_{14} = 20$, $x_{21} = 30$, $x_{22} = 20$, $x_{33} = 30$ y $x_{34} = 10$, y las otras variables son igual a cero.

TABLA 33
Solución factible básica del método de la esquina noroeste para Powerco

35				35
10	20	20		50
		10	30	40
45	20	30	30	

TABLA 34
Nueva solución factible básica después del pivoteo de x_{14} en la base

35 − 20			0 + 20	35
10 + 20	20	20 − 20 (no básica)		50
		10 + 20	30 − 20	40
45	20	30	30	

Con la ilustración anterior del procedimiento de pivoteo queda claro que cada pivote en un problema de transporte tiene que ver sólo con sumas y restas. Usando este hecho, se demuestra que *si todos lo suministros y demandas para un problema de transporte son enteros, entonces el problema de transporte tendrá una solución óptima en la que las variables son enteros.* Comience por observar que, mediante el método de la esquina noroeste, se encuentra una sfb en la que cada variable es un entero. Cada pivote tiene que ver sólo con sumas y restas, así que cada sfb obtenida al llevar a cabo el algoritmo simplex (inclusive la solución óptima) se asignará a todas las variables valores enteros. Resulta útil el hecho de que un problema de transporte con valores enteros de suministros y demandas tenga una solución óptima de números enteros, porque esto asegura que es innecesario preocuparse acerca de si se justifica la suposición de divisibilidad.

Valoración de variables no básicas (con base en el capítulo 6)

Para completar el análisis del simplex de transporte, se muestra ahora cómo calcular el renglón 0 para cualquier sfb. De la sección 6.2, se sabe que para una sfb en la que el conjunto de variables básicas es VB, el coeficiente de la variable x_{ij} (llámelo $\bar{c}_{ij}$) en el renglón 0 del tableau está dado por

$$\bar{c}_{ij} = \mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_{ij} - c_{ij}$$

donde c_{ij} es el coeficiente de la función objetivo para x_{ij} y $\mathbf{a}_{ij}$ es la columna para x_{ij} en el PL original (se supone que se eliminó la primera restricción de suministro).

Debido a que se está resolviendo un problema de minimización, la sfb actual será óptima si las $\bar{c}_{ij}$ son no positivas; de otro modo, se introduce en la base la variable con el valor positivo de $\bar{c}_{ij}$ más grande.

Después de determinar $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$, se puede calcular fácilmente $\bar{c}_{ij}$. Debido a que se eliminó la primera restricción, $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$ tendrá $m + n - 1$ elementos. Se escribe

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1} = [u_2 \quad u_3 \quad \cdots \quad u_m \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$$

donde $u_2, u_3, \ldots, u_m$ son los elementos de $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$ que corresponden a las $m - 1$ restricciones de suministro, y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los elementos de $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$ que corresponden a las n restricciones de demanda.

Para determinar $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$, se utiliza el hecho de que en cualquier tableau, cada variable básica x_{ij} debe tener $\bar{c}_{ij} = 0$. Así, para cada una de las $m + n - 1$ variables en VB,

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_{ij} - c_{ij} = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Para un problema de transporte, es muy fácil resolver las ecuaciones en (4). A fin de ilustrar la solución de (4), se determina $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$ para (5), mediante la aplicación de la sfb del método de la esquina noroeste al problema de Powerco.

[8] 35	[6]	[10]	[9]	35
[9] 10	[12] 20	[13] 20	[7]	50
[14]	[9]	[16] 10	[5] 30	40
45	20	30	30	

(5)

Para esta sfb, VB = $\{x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}\}$. Aplicando (4) se obtiene

$$\bar{c}_{11} = [u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - 8 = v_1 - 8 = 0$$

$$\bar{c}_{21} = [u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - 9 = u_2 + v_1 - 9 = 0$$

$$\bar{c}_{22} = [u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - 12 = u_2 + v_2 - 12 = 0$$

$$\bar{c}_{23} = [u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} - 13 = u_2 + v_3 - 13 = 0$$

$$\bar{c}_{33} = [u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} - 16 = u_3 + v_3 - 16 = 0$$

$$\bar{c}_{34} = [u_2 \quad u_3 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} - 5 = u_3 + v_4 - 5 = 0$$

Para cada variable básica x_{ij} (excepto las que tienen $i = 1$), se ve que (4) se reduce a $u_i + v_j = c_{ij}$. Si se define $u_1 = 0$, se ve que (4) se reduce a $u_i + v_j = c_{ij}$ para todas las variables básica. Por consiguiente, para determinar el valor de $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$, se debe resolver el siguiente sistema de $m + n$ ecuaciones: $u_1 = 0$, $u_i + v_j = c_{ij}$ para todas las variables básicas.

Para (5), $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ se determina al resolver

$$u_1 = 0 \tag{6}$$
$$u_1 + v_1 = 8 \tag{7}$$
$$u_2 + v_1 = 9 \tag{8}$$
$$u_2 + v_2 = 12 \tag{9}$$
$$u_2 + v_3 = 13 \tag{10}$$
$$u_3 + v_3 = 16 \tag{11}$$
$$u_3 + v_4 = 5 \tag{12}$$

De (7), $v_1 = 8$. De (8), $u_2 = 1$. Entonces (9) produce $v_2 = 11$ y (10) produce $v_3 = 12$. De (11), $u_3 = 4$. Por último, (12) da como resultado $v_4 = 1$. Para cada variable no básica, se calcula $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Se obtiene

$$\bar{c}_{12} = 0 + 11 - 6 = 5 \qquad \bar{c}_{13} = 0 + 12 - 10 = 2$$
$$\bar{c}_{14} = 0 + 1 - 9 = -8 \qquad \bar{c}_{24} = 1 + 1 - 7 = -5$$
$$\bar{c}_{31} = 4 + 8 - 14 = -2 \qquad \bar{c}_{32} = 4 + 11 - 9 = 6$$

Debido a que $\bar{c}_{32}$ es la $\bar{c}_{ij}$, positiva más grande, a continuación se introduciría en la base x_{32}. Cada unidad de x_{32} que se introduce en la base disminuye en $6 el costo de Powerco.

Cómo determinar la variable entrante no básica (con base en el capítulo 5)

Para los lectores que no han cubierto el capítulo 6, se analiza ahora cómo determinar si una sfb es óptima y, si en caso contrario, cómo determinar cuál variable no básica debe entrar a la base. Sea $-u_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) el precio sombra de la i-ésima restricción de suministro, y sea $-v_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) el precio sombra de la j-ésima restricción de demanda. Se supone que se eliminó la primera restricción de suministro, así que se podría establecer $-u_1 = 0$. De la definición de precio sombra, si se tuviera que incrementar en 1 el lado derecho de la i-ésima restricción de suministro y la j-ésima restricción de demanda, el valor de z óptimo disminuiría en $-u_i - v_j$. De manera equivalente, si se tuviera que disminuir en 1 el lado derecho de la i-ésima restricción de suministro y la j-ésima restricción de demanda, el valor óptimo de z disminuiría en $-u_i - v_j$. Ahora suponga que x_{ij} es una variable no básica. ¿Se debe introducir x_{ij} en la base? Observe que si x_{ij} se incrementa en 1, los costos se incrementan directamente por c_{ij}. También, incrementar en 1 el valor de x_{ij} significa que se enviará una unidad menos del punto de suministro i y una unidad menos al punto de demanda j. Esto equivale a reducir en 1 el lado derecho de la i-ésima restricción de suministro y de la j-ésima restricción de demanda. Esto incrementa el valor de z en $-u_i - v_j$. Así, al incrementar en 1 el valor de x_{ij} se incrementa z por un total de $c_{ij} - u_i - v_j$. Entonces, si $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ (o $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$) para todas las variables no básicas, la sfb será óptima. Sin embargo, si una variable no básica x_{ij} tiene $c_{ij} - u_i - v_j < 0$ (o bien, $u_i + v_j - c_{ij} > 0$), entonces el valor de z se puede disminuir por $u_i + v_j - c_{ij}$ por unidad de x_{ij} al introducir x_{ij} en la base. Por consiguiente, se podría concluir que si $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ para todas las variables no básicas, entonces la sfb actual es óptima. De otro modo, la variable no básica con el valor positivo más grande de $u_i + v_j - c_{ij}$ debe entrar a la base. ¿Cómo se determinan los valores para u_i y v_j? El coeficiente de una variable no básica x_{ij} en el renglón 0 de cualquier tableau es la cantidad por la que un incremento unitario en x_{ij} disminuirá a z, de modo que se puede concluir que el coeficiente de cualquier variable no básica (y, resulta que, cualquier variable básica) en el renglón 0 es $u_i + v_j - c_{ij}$. Así, se podrían determinar las u_i y v_j resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones: $u_1 = 0$ y $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ para todas las variables básicas.

Para ilustrar la explicación anterior, considere la sfb para el problema de Powerco mostrada en (5).

[8] 35	[6]	[10]	[9]	35	
[9] 10	[12] 20	[13] 20	[7]	50	**(5)**
[14]	[9]	[16] 10	[5] 30	40	
45	20	30	30		

Los valores de u_i y v_j se determinan al resolver las ecuaciones siguientes

$$u_1 = 0 \tag{6}$$
$$u_1 + v_1 = 8 \tag{7}$$
$$u_2 + v_1 = 9 \tag{8}$$
$$u_2 + v_2 = 12 \tag{9}$$
$$u_2 + v_3 = 13 \tag{10}$$
$$u_3 + v_3 = 16 \tag{11}$$
$$u_3 + v_4 = 5 \tag{12}$$

De (7), $v_1 = 8$. De (8), $u_2 = 1$. Entonces (9) produce $v_2 = 11$, y (10) da como resultado $v_3 = 12$. De (11), $u_3 = 4$. Por último, (12) da $v_4 = 1$. Para cada variable no básica, ahora se calcula $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Se obtiene

$$\bar{c}_{12} = 0 + 11 - 6 = 5 \qquad \bar{c}_{13} = 0 + 12 - 10 = 2$$
$$\bar{c}_{14} = 0 + 1 - 9 = -8 \qquad \bar{c}_{24} = 1 + 1 - 7 = -5$$
$$\bar{c}_{31} = 4 + 8 - 14 = -2 \qquad \bar{c}_{32} = 4 + 11 - 9 = 6$$

Debido a que $\bar{c}_{32}$ es el valor de $\bar{c}_{ij}$ positivo más grande, a continuación se introduciría x_{32} en la base. cada unidad de x_{32} que se introduce en la base disminuirá el costo de Powerco en $6.

Ahora ya se puede resumir el procedimiento para usar el método simplex a fin de resolver un problema de transporte (min).

Resumen e ilustración de método de simplex de transporte

Paso 1 Si el problema está desequilibrado, proceda a equilibrarlo.

Paso 2 Utilice uno de los métodos descritos en la sección 7.2 para hallar una sfb.

Paso 3 Utilice el hecho de que $u_1 = 0$ y $u_i + v_j = c_{ij}$ para todas las variables básicas a fin de determinar $[u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_m \quad v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_n]$ para la sfb actual.

Paso 4 Si $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ para las variables no básicas, entonces la sfb actual es óptima. Si éste no es el caso, entonces se introduce en la base la variable con el valor positivo más grande de $u_i + v_j - c_{ij}$ por medio del procedimiento de pivoteo. Con esto se obtiene una nueva sfb.

Paso 5 Con la nueva sbf, vuelva a los pasos 3 y 4.

Para un problema de maximización, proceda como se expresa, pero sustituya el paso 4 por el paso 4′.

Paso 4′ Si $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$ para las variables no básicas, la sfb actual es óptima. De otro modo, introduzca en la base la variable con el valor negativo más grande de $u_i + v_j - c_{ij}$ por medio de procedimiento de pivoteo descrito antes.

El procedimiento para resolver un problema de transporte se ilustra con la solución del problema de Powerco. Se empieza con la sfb (5). Ya se determinó que x_{32} debe entrar a la base. Como se observa en la tabla 35, el bucle en el que interviene x_{32} y algunas de las variables básicas es (3, 2)–(3, 3)–(2, 3)–(2, 2). Las celdas impares del bucle son (3, 3) y (2, 2). Debido a que $x_{33} = 10$ y $x_{22} = 20$, el pivote disminuirá el valor de x_{33} y x_{22} en 10 e incrementa el valor de x_{32} y x_{23} en 10. La sfb resultante se muestra en la tabla 36. Las u_i y las v_j para la nueva sfb se obtuvieron al resolver

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 & u_2 + v_3 &= 13 \\ u_2 + v_2 &= 12 & u_2 + v_1 &= 9 \\ u_3 + v_4 &= 5 & u_3 + v_2 &= 9 \\ u_1 + v_1 &= 8 \end{aligned}$$

Al calcular $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ para cada variable no básica, se encuentra que $\bar{c}_{12} = 5$, $\bar{c}_{24} = 1$, y $\bar{c}_{13} = 2$ son los únicos valores positivos de las $\bar{c}_{ij}$. Por consiguiente, a continuación se introduce en la base la siguiente x_{12}. El bucle en el que interviene x_{12} y algunas de las variables básicas es (1, 2)–(2, 2)–(2, 1)–(1, 1). Las celdas impares son (2, 2) y (1, 1). Debido a que $x_{22} = 10$ es la entrada más pequeña en una celda impar, disminuimos x_{22} y x_{11} en 10 e incrementamos x_{12} y x_{21} en 10. La sfb resultante se muestra en la tabla 37. Para esta sfb, las u_i y las v_j se determinaron resolviendo las ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 & u_1 + v_2 &= 6 \\ u_2 + v_1 &= 9 & u_3 + v_2 &= 9 \\ u_1 + v_1 &= 8 & u_3 + v_4 &= 5 \\ u_2 + v_3 &= 13 \end{aligned}$$

Al calcular $\bar{c}_{ij}$ para cada variable no básica, se encuentra que la única $\bar{c}_{ij}$ positiva es $\bar{c}_{13} = 2$. Así, x_{13} entra a la base. El bucle en el que interviene x_{13} y algunas de las variables básicas es (1, 3)–(2, 3)–(2, 1)–(1, 1). Debido a que $x_{11} = 25$ es la entrada más pequeña

TABLA 35
Bucle en el que interviene la variable entrante x_{32}

[8] 35	[6]	[10]	[9]	35
[9] 10	[12] 20	[13] 20	[7]	50
[14]	[9]	[16] 10	[5] 30	40
45	20	30	30	

TABLA 36
x_{32} ya se introdujo a la base y x_{12} entra a continuación

	$v_j =$ 8	11	12	7	
$u_i = 0$	[8] 35	[6]	[10]	[9]	35
1	[9] 10	[12] 10	[13] 30	[7]	50
−2	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
	45	20	30	30	

TABLA 37
x_{12} ya se introdujo a la base y x_{13} entra a continuación

	$v_j =$ 8	6	12	2	
$u_i = 0$	[8] 25	[6] 10	[10]	[9]	35
1	[9] 20	[12]	[13] 30	[7]	50
3	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
	45	20	30	30	

TABLA 38
Tableau óptimo para Powerco

	$v_j =$ 6	6	10	2	
$u_i = 0$	[8]	[6] 10	[10] 25	[9]	35
3	[9] 45	[12]	[13] 5	[7]	50
3	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
	45	20	30	30	

en una celda impar, se disminuye x_{23} y x_{11} en 25 y se incrementa x_{13} y x_{21} en 25. La sfb resultante se muestra en la tabla 38. Para esta sfb, las u_i y las v_j se obtuvieron al resolver las ecuaciones siguientes

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0 & u_2 + v_3 = 13 \\ u_2 + v_1 = 9 & u_1 + v_3 = 10 \\ u_3 + v_4 = 5 & u_3 + v_2 = 9 \\ u_1 + v_2 = 6 & \end{array}$$

El lector debe comprobar que para esta sfb, todas las $\bar{c}_{ij} \leq 0$, así que se obtuvo una solución óptima. Por lo tanto, la solución óptima para el problema de Powerco es $x_{12} = 10$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 10$, $x_{34} = 30$, y

$$z = 6(10) + 10(25) + 9(45) + 13(5) + 9(10) + 5(30) = \$1\,020$$

PROBLEMAS

Grupo A

Utilice el método simplex de transporte para resolver los problemas 1 a 8 en la sección 7.1. Comience con las sfb encontradas en la sección 7.2.

7.4 Análisis de sensibilidad para problemas de transporte†

Ya se vio que para un problema de transporte, se simplifican la determinación de una sfb y del renglón 0 para un conjunto específico de variables básicas, así como el procedimiento de pivoteo. Por consiguiente, no debe ser sorpresa que se puedan simplificar ciertos aspectos del análisis de sensibilidad analizados en la sección 6.3. En esta sección, se analizan los tres aspectos siguientes del análisis de sensibilidad para el problema de transporte:

Cambio 1 Cambiar el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica.

Cambio 2 Cambiar el coeficiente de la función objetivo de una variable básica.

Cambio 3 Incrementar un solo suministro por Δ y una sola demanda por Δ.

Los tres cambios se ilustran por medio del problema de Powerco. Recuerde de la sección 7.3 que la solución óptima para el problema de Powerco fue $z = \$1\,020$; el tableau óptimo es la tabla 39.

Cómo cambiar el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica

Como en la sección 6.3, cambiar el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica x_{ij} no modifica el lado derecho de un tableau óptimo. Por consiguiente, aún será factible la base actual. No se está cambiando $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$, de modo que las u_i y las v_j permanecen sin cambio. En el renglón 0, sólo cambiará el coeficiente de x_{ij}. Así, siempre que el coeficiente de x_{ij} en el renglón 0 óptimo sea no positivo, la base actual es óptima.

Para ilustrar el método se contesta la siguiente pregunta: ¿para qué intervalo de valores del costo de enviar 1 millón de kwh de electricidad de la planta 1 a la ciudad 1 la base actual es óptima? Suponga que se cambia c_{11} de 8 a $8 + \Delta$. ¿Para qué valores de Δ la base actual es óptima? Ahora $\bar{c}_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 6 - (8 + \Delta) = -2 - \Delta$. Así la base actual permanece óptima para $-2 - \Delta \leq 0$ o $\Delta \geq -2$, y $c_{11} \geq 8 - 2 = 6$.

Cómo cambiar el coeficiente de la función objetivo de una variable básica

Ya que estamos cambiando $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B^{-1}$, el coeficiente de cada variable no básica en el renglón 0 puede cambiar, y para determinar si la base actual permanecerá óptima tenemos que encontrar los nuevos valores de u_i y de v_j y utilizarlos para calcular el precio de de todas la variables no básicas. La variable actual permanece óptima mientras que el precio de todas las variables no básicas sea no positivo. Para ilustrar la idea, determinaremos para el problema de Powerco el intervalos de valores del costo de envío de 1 millón de kwh desde la planta 1 hasta la ciudad 3. La base actual permanece óptima en este problema.

Suponga que se cambia c13 de 10 a $10 + \Delta$. Entonces la ecuación $\bar{c}_{13} = 0$ cambia de $u_1 + v_3 = 10$ a $u_1 + v_3 = 10 + \Delta$. Por lo tanto, para obtener los valores de u_i y de v_j tenemos que resolver las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{rlrl} u_1 &= 0 & u_3 + v_2 &= 9 \\ u_2 + v_1 &= 9 & u_1 + v_3 &= 10 + \Delta \\ u_1 + v_2 &= 6 & u_3 + v_4 &= 5 \\ u_2 + v_3 &= 13 & & \end{array}$$

†Esta sección cubre temas que podrían omitirse sin pérdida de continuidad.

TABLA 39
Tableau óptimo para Powerco

		Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Suministro
	$v_j =$	6	6	10	2	
Planta 1	$u_1 = 0$	(8)	(6) 10	(10) 25	(9)	35
Planta 2	3	(9) 45	(12)	(13) 5	(7)	50
Planta 3	3	(14)	(9) 10	(16)	(5) 30	40
Demanda		45	20	30	30	

Al resolver estas ecuaciones, obtenemos $u_1 = 0$, $v_2 = 6$, $v_3 = 10 + \Delta$, $v_1 = 6 + \Delta$, $u_2 = 3 - \Delta$, $u_3 = 3$ y $v_4 = 2$.

Ahora se calcula el precio de cada variable no básica. La base actual permanecerá óptima mientras cada variable no básica tenga un coeficiente no positivo en el renglón 0.

$$
\begin{aligned}
\bar{c}_{11} &= u_1 + v_1 - 8 = \Delta - 2 \le 0 && \text{para } \Delta \le 2\\
\bar{c}_{14} &= u_1 + v_4 - 9 = -7 &&\\
\bar{c}_{22} &= u_2 + v_2 - 12 = -3 - \Delta \le 0 && \text{para } \Delta \ge -3\\
\bar{c}_{24} &= u_2 + v_4 - 7 = -2 - \Delta \le 0 && \text{para } \Delta \ge -2\\
\bar{c}_{31} &= u_3 + v_1 - 14 = -5 + \Delta \le 0 && \text{para } \Delta \le 5\\
\bar{c}_{33} &= u_3 + v_3 - 16 = \Delta - 3 \le 0 && \text{para } \Delta \le 3
\end{aligned}
$$

Así, la base actual permanece óptima para $-2 \le \Delta \le 2$, o bien $8 = 10 - 2 \le c_{13} \le 10 + 2 = 12$.

Incremento tanto del suministro s_i como de la demanda d_j por Δ

Observe que este cambio mantiene un problema de transporte equilibrado. Debido a que las u_i y las v_j se podrían considerar como el negativo de cada uno de los precios sombra de restricción, se sabe de (37′) en el capítulo 6 que si la base actual es óptima,

$$\text{Nuevo valor de } z = \text{valor anterior de } z + \Delta u_i + \Delta v_j$$

Por ejemplo, si se incrementa en una unidad el suministro de la planta 1 y la demanda de la ciudad 2, entonces (el nuevo costo) = 1 020 + 1(0) + 1(6) = \$1 026.

Asimismo, se podrían encontrar los nuevos valores de las variables de decisión como sigue:

1 Si x_{ij} es una variable básica en la solución óptima, entonces se incrementa en Δ el valor de x_{ij}.

2 Si x_{ij} es una variable no básica en la solución óptima, entonces encuentre el bucle en el que interviene x_{ij} y algunas de las variables básicas. Encuentre una celda impar en el bucle que está en el renglón i. Incremente en Δ el valor de esta celda y recorra el bucle, incrementando de manera alterna y luego disminuyendo las variables básicas actuales en el bucle por Δ.

Para ilustrar la primera situación, suponga que s_1 y d_2 se incrementan en 2. Debido a que x_{12} es una variable básica en la solución óptima, la nueva solución óptima será la que se muestra en la tabla 40. El nuevo valor óptimo de z es $1\,020 + 2u_1 + 2v_2 = \$1\,032$. Para ilustrar la segunda situación, suponga que se incrementa en 1 tanto s_1 como d_1. Debido a que x_{11} es una variable no básica en la solución óptima actual, se debe determinar el bucle en el que interviene x_{11} y algunas de las variables básicas. El bucle es (1, 1)–(1, 3)–(2,

TABLA 40
Tableau óptimo para Powerco si $s_1 = 35 + 2 = 37$ y $d_2 = 20 + 2 = 22$

		Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Suministro
	$v_j =$	6	6	10	2	
Planta 1	$u_i = 0$	$\boxed{8}$	12 $\boxed{6}$	25 $\boxed{10}$	$\boxed{9}$	37
Planta 2	3	45 $\boxed{9}$	$\boxed{12}$	5 $\boxed{13}$	$\boxed{7}$	50
Planta 3	3	$\boxed{14}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
Demanda		45	22	30	30	

TABLA 41
Tableau óptimo para Powerco si $s_1 = 35 + 1 = 36$ y $d_1 = 45 + 1 = 46$

		Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Suministro
	$v_j =$	6	6	10	2	
Planta 1	$u_i = 0$	$\boxed{8}$	10 $\boxed{6}$	26 $\boxed{10}$	$\boxed{9}$	36
Planta 2	3	46 $\boxed{9}$	$\boxed{12}$	4 $\boxed{13}$	$\boxed{7}$	50
Planta 3	3	$\boxed{14}$	10 $\boxed{9}$	$\boxed{16}$	30 $\boxed{5}$	40
Demanda		46	20	30	30	

3)–(2, 1). La celda impar en el bucle y renglón 1 es x_{13}. Por consiguiente, la nueva solución óptima se obtendrá al incrementar en 1 tanto x_{13} como x_{21} y disminuir en 1 a x_{23}. Esto da la solución óptima mostrada en la tabla 41. El nuevo valor óptimo de z se encuentra a partir de (nuevo valor de z) = 1 020 + v_1 + v_1 = \$1 026 Observe que si s_1 y s_2 se incrementaran en 6, la base actual no sería factible. (¿Por qué?)

PROBLEMAS

Grupo A

Los problemas siguientes se refieren al ejemplo de Powerco.

1 Determine el intervalo de valores de c_{14} para el que la base actual es óptima.

2 Determine el intervalo de valores de c_{34} para el que la base actual es óptima.

3 Si s_2 y d_3 se incrementan en 3, ¿cuál es la nueva solución óptima?

4 Si s_3 y d_3 se incrementan en 2, ¿cuál es la nueva solución óptima?

5 Dos plantas abastecen a tres clientes con suministros médicos. Los costos unitarios de envío de las plantas a los clientes, junto con los suministros y demandas, se dan en la tabla 42.

a El objetivo de la compañía es minimizar el costo de satisfacer las demandas de los clientes. Encuentre la sfb óptima para este problema de transporte.

b Suponga que la demanda del cliente 2 se incremente en una unidad. ¿En cuánto se incrementarían los costos?

TABLA 42

	A			
De	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Suministro
Planta 1	\$55	\$65	\$80	35
Planta 2	\$10	\$15	\$25	50
Demanda	10	10	10	

7.5 Problemas de asignación

Aunque al parecer el simplex de transporte es muy eficiente, hay cierta clase de problemas de transporte, llamados problemas de asignación, para los que el simplex de transporte suele ser muy ineficiente. En esta sección, se definen los problemas de asignación y se analiza un método eficaz que se puede utilizar para resolverlos.

EJEMPLO 4 Problema de asignación de máquina

Machineco tiene cuatro máquinas y cuatro tareas por completar. Cada máquina se debe asignar para completar una tarea. El tiempo requerido para preparar cada máquina para completar cada tarea se muestra en la tabla 43. Machineco desea reducir el tiempo de preparación total necesario para completar las cuatro tareas. Resuelva este problema mediante programación lineal.

Solución Machineco debe determinar qué máquina debe asignarse a cada tarea. Se define (para $i, j = 1, 2, 3, 4$)

$x_{ij} = 1$ si la máquina i se asigna para satisfacer las demandas de la tarea j

$x_{ij} = 0$ si la máquina i no se asigna para satisfacer las demandas de la tarea j

Entonces el problema de Machineco podría formularse como

$$
\begin{aligned}
\min z = {} & 14x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 12x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24} \\
& + 7x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 9x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 10x_{44} \\
\text{s.a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad \text{(Restricciones de máquina)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \qquad \text{(Restricciones de trabajo)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
& x_{ij} = 0 \quad \text{o} \quad x_{ij} = 1
\end{aligned} \tag{13}
$$

Las primeras cuatro restricciones en (13) aseguran que cada máquina se asignó a una tarea, y las últimas cuatro aseguran que se completó cada tarea. Si $x_{ij} = 1$, entonces la función objetivo tomará el tiempo requerido para preparar la máquina i para la tarea j; si $x_{ij} = 0$, entonces la función objetivo no tomará el tiempo requerido.

Ignorando por el momento las restricciones $x_{ij} = 0$ o $x_{ij} = 1$, se ve que Machineco enfrenta un problema de transporte equilibrado en el que cada punto de suministro tiene un suministro de 1 y cada punto de demanda tiene una demanda de 1. En general, un **proble-**

TABLA 43
Tiempos de preparación para Machineco

	Tiempo (Horas)			
Máquina	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
1	14	5	8	7
2	2	12	6	5
3	7	8	3	9
4	2	4	6	10

ma de asignación es un problema de transporte equilibrado en el que suministros y demandas son iguales a 1. Así, un problema de asignación se caracteriza porque se conoce el costo de asignar cada punto de suministro a cada punto de demanda. La matriz de costos del problema de asignación es su **matriz de costos.**

Los suministros y demandas para el problema de Machineco (y para cualquier problema de asignación) son enteros, así que el análisis de la sección 7.3 significa que las variables en la solución óptima de Machineco deben ser números enteros. Debido a que el lado derecho de cada restricción es igual a 1, cada x_{ij} debe ser un entero no negativo que no es mayor que 1, entonces cada x_{ij} debe ser igual a 0 o 1. Esto significa que se pueden ignorar las restricciones de que $x_{ij} = 0$ o 1 y resolver (13) como un problema de transporte equilibrado. Por el método de costo mínimo, se obtiene la sfb de la tabla 44. La sfb actual es altamente degenerada. En cualquier sfb para un problema de asignación de $m \times m$, siempre habrá m variables básicas que son iguales a 1 y $m - 1$ variables básicas que son iguales a 0.)

Se encuentra que $\bar{c}_{43} = 1$ es el único valor positivo de $\bar{c}_{ij}$. Por consiguiente, se introduce a la base x_{43}. El bucle en el que interviene x_{43} y algunas de las variables básicas es (4, 3)–(1, 3)–(1, 2)–(4, 2). Las variables impares del bucle son x_{13} y x_{42}. Debido a que $x_{13} = x_{42} = 0$, ya sea x_{13} o x_{42} dejará la base. Se elige de manera arbitraria que x_{13} deje la base.

TABLA 44
Solución factible básica para Machineco

		Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	
	$v_j =$	3	4	8	7	
Máquina 1	$u_i = 0$	$\boxed{14}$	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{8}$ 0	$\boxed{7}$ 0	1
Máquina 2	−2	$\boxed{2}$	$\boxed{12}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 1	1
Máquina 3	−5	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{9}$	1
Máquina 4	−1	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{6}$	$\boxed{10}$	1
		1	1	1	1	

TABLA 45
x_{43} se introdujo a la base

		Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	
	$v_j =$	3	5	7	7	
Máquina 1	$u_i = 0$	$\boxed{14}$	$\boxed{5}$ 1	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$ 0	1
Máquina 2	−2	$\boxed{2}$	$\boxed{12}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$ 1	1
Máquina 3	−4	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{9}$	1
Máquina 4	−1	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{6}$ 0	$\boxed{10}$	1
		1	1	1	1	

Después de efectuar el pivoteo, se obtiene la sfb de la tabla 45. Las $\bar{c}_{ij}$ son ahora no positivas, así que se obtuvo una asignación óptima: $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{33} = 1$ y $x_{41} = 1$. Por lo tanto, la máquina 1 se asigna a la tarea 2, la máquina 2 se asigna a la tarea 4, la máquina 3 se asigna a la tarea 4 y la máquina 4 se asigna a la tarea 1. Se requiere un tiempo total de preparación de $5 + 5 + 3 + 2 = 15$.

El método húngaro

Considerando de nuevo la sfb inicial, se ve que era una solución óptima. Sin embargo, no se sabía que era una solución óptima hasta que se llevó a cabo una iteración del método simplex de transporte. Esto hace pensar que el alto grado de degeneración en un problema de asignación podría causar que el simplex de transporte sea una manera eficaz de resolver problemas de asignación. Por esta razón (y el hecho de que el algoritmo es aun más simple que el simplex de transporte), el método húngaro se utiliza por lo general para resolver problemas de asignación (min):

Paso 1 Encuentre el elemento mínimo en cada renglón de la matriz de costos $m \times m$. Construya una nueva matriz restando de cada costo el costo mínimo en su renglón. Para esta nueva matriz, determine el costo mínimo en cada columna. Construya una nueva matriz (llamada la matriz de costos reducida) restando de cada costo el costo mínimo en su columna.

Paso 2 Trace el número mínimo de líneas (horizontales, verticales o ambas) que son necesarias para cubrir todos los ceros en la matriz de costos reducida. Si se requieren m líneas, entonces está disponible una solución óptima entre los ceros cubiertos en la matriz. Si son necesarias menos de m líneas, entonces proceda al paso 3.

Paso 3 Determine el elemento no cero más pequeño (llámelo k) en la matriz de costos reducida que no cubren las líneas trazadas en el paso 2. Ahora reste k de cada elemento no cubierto de la matriz de costos reducida y agregue k a cada elemento cubierto por dos líneas. Vuelva al paso 2.

OBSERVACIONES

1 Para resolver un problema de asignación en el que el objetivo es maximizar la función objetivo, multiplique la matriz de utilidades por -1 y resuelva el problema como uno de minimización.

2 Si el número de renglones o columnas en la matriz de costos no es igual, entonces el problema de asignación está desequilibrado. El método húngaro podría producir una solución incorrecta si no está equilibrado el problema. Así, cualquier problema de asignación debe estar equilibrado (por la suma de uno o más puntos ficticios) antes de resolverlo por el método húngaro.

3 En un problema grande, es posible que se dificulte hallar el número mínimo de líneas necesario para cubrir los ceros en la matriz de costos actual. Para una discusión de cómo hallar el número mínimo de líneas necesario, véase Gillett (1976). Se puede demostrar que si se requieren j líneas, entonces sólo se puede asignar j "tareas" a los costos cero en la matriz actual. Esto explica por qué termina el algoritmo cuando se necesitan m líneas.

Solución del ejemplo de Machineco por el método húngaro

Se ilustra el método húngaro resolviendo el problema de Machineco (véase la tabla 46).

Paso 1 Para cada renglón, se resta el mínimo del renglón de cada elemento del renglón, obteniendo la tabla 47. Ahora se resta 2 de cada costo de la columna 4, obteniendo la tabla 48.

Paso 2 Como se muestra, las líneas por los renglones 1, 3 y la columna 1 cubren los ceros de la matriz de costos reducida. Por la observación 3, se deduce que sólo se pueden asignar tres tareas a los costos cero de la matriz de costos actual. Se requieren menos de cuatro líneas para cubrir todos los ceros, así que se procede al paso 3.

TABLA 46
Matriz de costos para Machineco

				Mínimo de renglón
14	5	8	7	5
2	12	6	5	2
7	8	3	9	3
2	4	6	10	2

TABLA 47
Matriz de costos después de restar los mínimos de renglón

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8
Mínimo de columna	0	0	2

TABLA 48
Matriz de costos después de restar los mínimos de columna

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

Paso 3 El elemento más pequeño no cubierto es igual a 1, así que ahora se resta 1 de cada elemento no cubierto en la matriz de costos reducida y se agrega 1 a cada elemento cubierto dos veces. La matriz resultante es la tabla 49. Ahora son necesarias cuatro líneas para cubrir todos los ceros. Por consiguiente, se tiene una solución óptima. Para hallar una asignación óptima, observe que el único cero cubierto en la columna 3 es x_{33}, así que se debe tener $x_{33} = 1$. También, el único cero cubierto disponible en la columna 2 es x_{12}, de modo que se establece $x_{12} = 1$ y se observa que ni el renglón 1 ni la columna 2 se pueden utilizar de nuevo. Ahora el único cero cubierto disponible en la columna 4 es x_{24}. Entonces, se elige $x_{24} = 1$ (que ya no se utiliza más en el renglón 2 y la columna 4). Por último, se elige $x_{41} = 1$.

TABLA 49
Cuatro líneas requeridas; la solución óptima está disponible

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

Por consiguiente, se ha encontrado la asignación óptima $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{33} = 1$ y $x_{41} = 1$. Por supuesto, esto concuerda con el resultado obtenido mediante el simplex de transporte.

Justificación intuitiva del método húngaro

A fin de dar una explicación intuitiva de por qué funciona el método húngaro, necesitamos analizar el siguiente resultado: *si se agrega una constante a cada costo en un renglón (o columna) de un problema de transporte equilibrado, entonces permanece sin cambio la solución óptima al problema.* Para mostrar por qué es cierto el resultado, suponga que se agrega k a cada costo en el primer renglón del problema de Machineco. Entonces

$$\text{Nueva función objetivo} = \text{función objetivo anterior} + k(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})$$

Debido a que cualquier solución factible para el problema de Machineco debe tener $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$,

$$\text{Nueva función objetivo} = \text{función objetivo anterior} + k$$

Así, la solución óptima para el problema de Machineco permanece sin cambio si se suma una constante k a cada costo en el primer renglón. A cualquier otro renglón o columna se aplica un argumento similar.

El paso 1 del método húngaro consiste (para cada renglón y columna) en restar una constante de cada elemento en el renglón o columna. Por consiguiente, el paso 1 crea una nueva matriz de costos que tiene la misma solución óptima que el problema original. El paso 3 del método húngaro es equivalente (véase el problema 7 al final de esta sección) a sumar k a cada costo que se encuentra en un renglón cubierto y restar k de cada costo que está en una columna no cubierta (o viceversa). Así, el paso 3 crea una nueva matriz de costos con la misma solución óptima que el problema de asignación inicial. Cada vez que se lleva a cabo el paso 3, por lo menos se crea un nuevo cero en la matriz de costos.

Los pasos 1 y 3 también aseguran que los costos son no negativos. Así, el efecto neto de los pasos 1 y 3 del método húngaro es crear una secuencia de problemas de asignación (con costos no negativos), todos con la misma solución óptima que el problema de asignación original. Ahora considere un problema de asignación en el que los costos son no negativos. Cualquier asignación factible en la que las x_{ij} que son iguales a 1 tienen costos cero, debe ser óptima para tal problema de asignación. Por consiguiente, cuando el paso 2 indica que son necesarias m líneas para cubrir los ceros en la matriz de costos, se ha encontrado una solución óptima para el problema original.

Solución por computadora de problemas de asignación

Para resolver problemas de asignación en LINDO, teclee la función objetivo y las restricciones. También, muchos programas por menús requieren que el usuario introduzca sólo una lista de puntos de suministro y demanda (como por ejemplo tareas y máquinas, respectivamente) y una matriz de costos. LINGO se puede utilizar también para resolver fácilmente problemas de asignación, entre otros el modelo siguiente para resolver el ejemplo de Machineco (archivo Assign.lng).

```
MODEL:
  1]SETS:
  2]MACHINES/1..4/;
  3]JOBS/1..4/;
  4]LINKS(MACHINES,JOBS):COST,ASSIGN;
  5]ENDSETS
  6]MIN=@SUM(LINKS:COST*ASSIGN);
  7]@FOR(MACHINES(I):
  8]@SUM(JOBS(J):ASSIGN(I,J))<1);
  9]@FOR(JOBS(J):
 10]@SUM(MACHINES(I):ASSIGN(I,J))>1);
 11]DATA:
 12]COST = 14,5,8,7,
 13]2,12,6,5,
 14]7,8,3,9,
 15]2,4,6,10;
 16]ENDDATA
END
```

La línea 2 define los cuatro puntos de suministro (máquinas) y la línea 3 define los cuatro puntos de demanda (tareas). En la línea 4, se define cada combinación posible de tareas y máquinas (16 en total) y con cada combinación se asocia un costo de asignación [por ejemplo COST(1, 2) = 5] y una variable ASSIGN(I,J). ASSIGN(I,J) es igual a 1 si la máquina *i* se utiliza para llevar a cabo la tarea *j*; de lo contrario, esto es igual a cero. La línea 5 termina la definición de conjuntos.

La línea 6 expresa la función objetivo al sumar en las combinaciones posibles (I,J) el producto del costo de asignación y ASSIGN(I,J). Las líneas 7 y 8 limitan cada MACHINE a efectuar a lo sumo una tarea obligando a que (para cada máquina) la suma de ASIGN(I,J) en las JOBS sea a lo sumo 1. Las líneas 9 a 10 requieren que cada JOB se complete al forzar a que (para cada tarea) la suma de ASSIGN(I,J) en las MACHINES sea por lo menos 1.

Las líneas 12 a 16 introducen la matriz de costos.

Observe que este programa de LINGO se puede utilizar (con simple edición) para resolver cualquier problema de asignación (¡incluso si no está equilibrado!). Por ejemplo, si están disponibles 10 máquinas para llevar a cabo 8 tareas, se tendría que editar la línea 3 para indicar que hay 8 tareas. Por último, en la línea 12, se escribirían las 80 entradas de la matriz de costos, después de "COST=" y se estaría listo para comenzar la actividad.

OBSERVACIÓN 1 Del análisis del ejemplo de Machineco, es innecesario forzar a que ASSIGN(I;J) sea igual a 0 o 1; ¡esto sucederá de manera automática!

PROBLEMAS

Grupo A

1 Se cuenta con cinco empleados para llevar a cabo cuatro tareas. El tiempo que toma a cada persona realizar cada tarea se da en la tabla 50. Determine la asignación de empleados a las tareas que reduce el tiempo total requerido para efectuar las cuatro tareas.

TABLA 50

	Tiempo (horas)			
Persona	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
1	22	18	30	18
2	18	—	27	22
3	26	20	28	28
4	16	22	—	14
5	21	—	25	28

Nota: los guiones indican que la persona no puede hacer esa tarea particular.

2[†] Doc Councillman reúne a un equipo de relevos para el relevo de 400 metros. Cada nadador debe nadar 100 metros de brazada de pecho, dorso, mariposa o estilo libre. Doc cree que cada nadador obtendrá los tiempos dados en la tabla 51. Para reducir el tiempo del equipo para la competencia, ¿qué nadador debe nadar cada estilo?

[†]Este problema se basa en Machol (1970).

3 Tom Cruise, Freddy Prinze Jr., Harrison Ford y Matt LeBlanc son abandonados en una isla desierta con Jennifer Aniston, Courteney Cox, Gwyneth Paltrow y Julia Roberts. Las "medidas de compatibilidad" de la tabla 52 indican cuánta felicidad podría experimentar cada pareja si pasan todo el tiempo juntos. La felicidad que obtiene una pareja es proporcional a la fracción de tiempo que pasan juntos. Por ejemplo, si Freddie y Gwyneth pasan la mitad de su tiempo juntos, obtienen una felicidad de $\frac{1}{2}(9) = 4.5$.

a Sea x_{ij} la fracción del tiempo que el i-ésimo hombre pasa con la j-ésima mujer. El objetivo de las ocho personas es maximizar la felicidad total de las personas en la isla. Formule un PL cuya solución óptima producirá los valores óptimos de las x_{ij}.

b Explique por qué la solución óptima del inciso (a) tendrá cuatro $x_{ij} = 1$ y doce $x_{ij} = 0$. La solución óptima requiere que cada persona pase todo su tiempo con una persona del sexo opuesto, así que este resultado a menudo se conoce como teorema del matrimonio.

c Determine la pareja de matrimonio de cada persona.

d ¿Cree usted que la suposición de proporcionalidad en la programación lineal es válida en esta situación?

4 Una compañía recibe ofertas para cuatro trabajos de construcción. Tres personas realizaron ofertas en relación con los trabajos. Sus ofertas (en miles de dólares) se dan en la tabla 53 (un * indica que la persona no realizó una oferta para un determinado trabajo). La persona 1 puede hacer sólo un trabajo, pero las personas 2 y 3 pueden llevar a cabo dos tareas. Determine la asignación de costo mínimo de persona a trabajos.

5 Greydog Bus Company opera autobuses entre Boston y Washington, D.C. Un viaje entre estas dos ciudades toma 6 horas. La ley federal requiere que un conductor descanse cuatro horas o más entre viajes. Un día de trabajo de un conductor consiste en dos viajes: uno de Boston a Washington y uno de Washington a Boston. En la tabla 54 se dan los tiempos de partida para los autobuses. El objetivo de Greydog es minimizar el tiempo de inactividad para los conductores. ¿Cómo debe asignar Greydog las tripulaciones para los viajes? *Nota:* se permite que el "día" de un conductor se superponga con la medianoche. Por ejemplo, un conductor con base en Washington puede ser asignado al viaje de las 3 p.m. de Washington a Boston y al viaje de 6 a.m. de Boston a Washington.

6 Cinco personajes de sexo masculino (Billie, John, Fish, Glen y Larry) y cinco personajes de sexo femenino (Ally, Georgia, Jane, Rene y Nell) de *Ally McBeal* son abandonados en una isla desierta. El problema es determinar qué porcentaje del tiempo cada mujer en la isla debe pasar con cada hombre. Por ejemplo, Ally podría pasar 100% de su tiempo con John o podría "salir con mucha gente" pasando 20% de su tiempo con cada hombre. Para cada posible pareja de hombre y mujer se muestra un "índice de felicidad" en la tabla 55. Por ejemplo, si Larry y Rene pasan todo su tiempo juntos, obtienen 8 unidades de felicidad para la isla.

a Haga la función de casamentero y determine una asignación del tiempo de cada hombre y mujer que logra la felicidad total máxima para la isla. Suponga que la felicidad obtenida por una pareja es proporcional a la cantidad del tiempo que pasan juntos.

b Explique por qué la solución óptima para este problema, para cualquier matriz de "índices de felicidad", siempre tiene que ver con que cada mujer pase todo su tiempo con un hombre.

TABLA 51

Nadador	Tiempo (segundos) Libre	Pecho	Mariposa	Dorso
Gary Hall	54	54	51	53
Mark Spitz	51	57	52	52
Jim Montgomery	50	53	54	56
Chet Jastremski	56	54	55	53

TABLA 52

	JA	CC	GP	JR
TC	7	5	8	2
FP	7	8	9	4
HF	3	5	7	9
ML	5	5	6	7

TABLA 53

Persona	Trabajo 1	2	3	4
1	50	46	42	40
2	51	48	44	*
3	*	47	45	45

TABLA 54

Viaje	Tiempo de partida	Viaje	Tiempo de partida
Boston 1	6 A.M.	Washington 1	5:30 A.M.
Boston 2	7:30 A.M.	Washington 2	9 A.M.
Boston 3	11.30 A.M.	Washington 3	3 P.M.
Boston 4	7 P.M.	Washington 4	6:30 P.M.
Boston 5	12:30 A.M.	Washington 5	12 de la noche

TABLA 55

	Ally	Georgia	Jane	Rene	Nell
Billie	8	6	4	7	5
John	5	7	6	4	9
Fish	10	6	5	2	10
Glen	1	0	0	0	0
Larry	5	7	9	8	6

c ¿Qué suposición hecha en el problema es necesaria para que se cumpla el teorema del matrimonio?

Grupo B

7 Cualquier problema de transporte se puede formular como un problema de asignación. Para ilustrar la idea, determine un problema de asignación que podría usarse para hallar la solución óptima del problema de transporte de la tabla 56. (*Sugerencia*: serán necesarios cinco puntos de suministro y cinco de demanda).

8 El consejo de Chicago de educación está aceptando ofertas en relación con las cuatro rutas del autobús escolar de la ciudad. Cuatro compañías hicieron las ofertas de la tabla 57.

a Suponga que a cada licitante se le puede asignar sólo una ruta. Utilice el método de asignación para minimizar el costo de Chicago de recorrer las cuatro rutas de autobús.

TABLA 56

	3	1	2
	2	3	3
	1	4	

TABLA 57

	Ofertas			
Compañía	Ruta 1	Ruta 2	Ruta 3	Ruta 4
1	\$4 000	\$5 000	—	—
2	—	\$4 000	—	\$4 000
3	\$3 000	—	\$2 000	—
4	—	—	\$4 000	\$5 000

b Suponga que a cada compañía se le puede asignar dos rutas. Utilice el método de asignación para minimizar el costo de Chicago de recorrer las cuatro rutas de autobús. (*Sugerencia*: para cada compañía son necesarios dos puntos de suministro.)

9 Muestre que el paso 3 del método húngaro es equivalente a efectuar las operaciones siguientes: (1) sume k a cada costo que se encuentra en un renglón cubierto. (2) Reste k de cada costo que está en una columna sin cubrir.

10 Suponga que c_{ij} es el costo más pequeño en el renglón i y la columna j de un problema de asignación. ¿En cualquier asignación óptima x_{ij} debe ser igual a 1?

7.6 Problemas de transbordo

Un problema de transbordo sólo permite envíos que van directamente de un punto de suministro a un punto de demanda. En muchas situaciones se permiten envíos entre puntos de suministro o entre puntos de demanda. Algunas veces también podría haber puntos (llamados *puntos de transbordo*) por los que se podría hacer el transbordo de los bienes en su viaje de un punto de suministro a un punto de demanda. Los problemas de envío con cualquiera o todas estas características son problemas de transbordo. Por fortuna, la solución óptima para un problema de transbordo se determina al resolver un problema de transporte.

En lo que sigue, se define un **punto de suministro** como un punto que envía bienes a otro punto pero no recibe bienes de ningún otro punto. De manera similar, un **punto de demanda** es un punto que recibe bienes de otros puntos, pero no envía bienes a ningún otro punto. Un punto de **transbordo** es un punto que puede recibir bienes de otros puntos y enviar bienes a otros puntos. En el ejemplo siguiente se ilustran estas definiciones ("—" indica que es imposible un envío).

EJEMPLO 5 Transbordo

Widgetco fabrica dispositivos mecánicos en dos fábricas, una en Memphis y una en Denver. La fábrica de Memphis puede producir 150 dispositivos por día, y la fábrica de Denver puede producir nada más y nada menos que 200 dispositivos por día. Los dispositivos se envían por aire a clientes en Los Ángeles y Boston. Los clientes en cada ciudad requieren 130 dispositivos por día. Debido a la desregulación de tarifas aéreas, Widgetco cree que podría ser más barato enviar primero algunos dispositivos a Nueva York o Chicago, y luego enviarlos a sus destinos finales. Los costos de enviar por vía aérea un dispositivo se muestran en la tabla 58. Widgetco quiere minimizar el costo total de enviar los dispositivos requeridos a sus clientes.

TABLA 58
Costos de envío para transbordos

De	A ($)					
	Memphis	Denver	N.Y.	Chicago	L.A.	Boston
Memphis	0	—	8	13	25	28
Denver	—	0	15	12	26	25
N.Y.	—	—	0	6	16	17
Chicago	—	—	6	0	14	16
L.A.	—	—	—	—	0	—
Boston	—	—	—	—	—	0

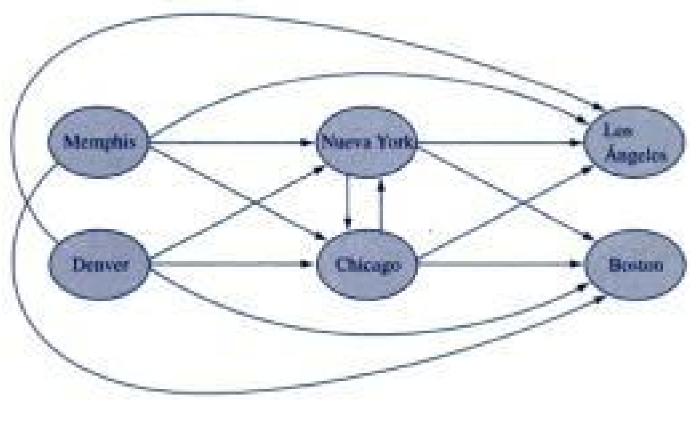
En este problema, Memphis y Denver son puntos de suministro, con suministros de 150 y 200 dispositivos por día, respectivamente. Nueva York y Chicago son puntos de transbordo. Los Ángeles y Boston son puntos de demanda, cada uno con una demanda de 130 dispositivos por día. En la figura se da una representación gráfica de los envíos posibles.

Ahora se describe cómo se puede determinar la solución óptima para un problema de transbordo resolviendo un problema de transporte. Dado un problema de transbordo, se crea un problema de transporte equilibrado mediante el procedimiento siguiente (suponga que el suministro total excede a la demanda total):

Paso 1 Si es necesario, agregue un punto de demanda ficticio (con un suministro de 0 y una demanda igual al suministro en exceso del problema) para equilibrar el problema. Los envíos al punto ficticio y desde un punto a sí mismo tendrán, por supuesto, un costo de envío cero. Sea s = suministro disponible total.

Paso 2 Construya un tableau de transporte como sigue: será necesario un renglón en el tableau para cada punto de suministro y punto de transbordo, y será necesaria una columna para cada punto de demanda y punto de transbordo. Cada punto de suministro tendrá un suministro igual a su suministro original, y cada punto de demanda tendrá una demanda igual a su demanda original. Sea s = suministro disponible total. Entonces cada punto de transbordo tendrá un suministro igual a (suministro original del punto) + s y una demanda igual a (demanda original del punto) + s. Esto asegura que cualquier punto de transbordo que sea un abastecedor neto tendrá una salida neta igual al suministro original del punto y, de manera similar, un demandador neto tendrá una entrada neta igual a la demanda original del punto. Aunque no se sabe cuánto se enviará por cada punto de transbordo, se puede asegurar que la cantidad total no excederá el valor de s. Esto explica por qué se agrega s al suministro y la demanda en cada punto de transbordo. Al sumar las mismas cantidades al suministro y la demanda, se asegura que la salida neta en cada punto de transbordo será correcta, y también se mantiene un tableau de transporte equilibrado.

FIGURA 9
Un problema de transbordo



Para el ejemplo de Widgetco, este procedimiento da como resultado el tableau de transporte y su solución óptima dada en la tabla 59. Debido a que s = (suministro total) = 150 + 200 = 350 y (demanda total) = 130 + 130 = 260, el punto de demanda ficticio tiene una demanda de 350 − 260 = 90. Los otros suministros y demandas en el tableau de transporte se obtienen sumando s = 350 a cada suministro y demanda del punto de transbordo.

En la interpretación de la solución del problema de transporte creado de un problema de transbordo, simplemente se ignoran los envíos al punto ficticio y desde un punto a sí mismo. De la tabla 59, se encuentra que Widgetco debe producir 130 dispositivos en Memphis, enviarlos a Nueva York y de allí pasarlos a Los Ángeles. Los 130 dispositivos producidos en Denver deben enviarse directamente a Boston. La salida neta de cada ciudad es

$$\begin{array}{lll}
\text{Memphis:} & 130 + 20 & = 150 \\
\text{Denver:} & 130 + 70 & = 200 \\
\text{N.Y.:} & 220 + 130 - 130 - 220 & = 0 \\
\text{Chicago:} & 350 - 350 & = 0 \\
\text{L.A.:} & -130 & \\
\text{Boston:} & -130 & \\
\text{Dummy:} & -20 - 70 & = -90
\end{array}$$

Una salida neta negativa representa una entrada. Observe que cada punto de transbordo (Nueva York y Chicago) tiene un flujo neto de cero; cualquier cosa que entre al punto de transbordo debe salir de éste. Una representación gráfica de la solución óptima para el ejemplo de Widgetco se da en la figura 10.

Suponga que se modifica el ejemplo de Widgetco y se permiten los envíos entre Memphis y Denver. Esto conformaría los puntos de transbordo de Menphis y Denver y añadiría las columnas para Memphis y Denver al tableau de la tabla 59. El renglón de Memphis en el tableau tendría ahora un suministro de 150 + 350 = 500, y el renglón de Denver tendría un suministro de 200 + 350 = 550. Por último, suponga que se permiten los envíos entre los puntos de demanda L.A. y Boston. Esto constituiría los puntos de

TABLA 59
Representación de un problema de transbordo como un problema de transporte balanceado

	N.Y.	Chicago	L.A.	Boston	Dummy	Suministro
Memphis	130 (8)	(13)	(25)	(28)	20 (0)	150
Denver	(15)	(12)	(26)	130 (25)	70 (0)	200
N.Y.	220 (0)	(6)	130 (16)	(17)	(0)	350
Chicago	(6)	350 (0)	(14)	(16)	(0)	350
Demanda	350	350	130	130	90	

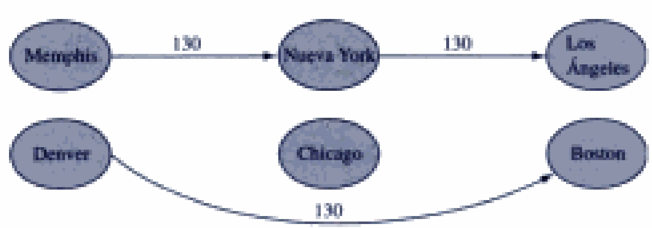


FIGURA 10
Solución óptima para el problema de Widgetco

transbordo de L.A y Boston y agregaría renglones para L.A. y Boston. El suministro para los renglones de L.A. y Boston sería 0 + 350 = 350. La demanda para las columnas de L.A. y Boston sería 130 + 350 = 480.

PROBLEMAS

Grupo A

1 General Ford produce automóviles en L.A. y Detroit y tiene un almacén en Atlanta; la compañía suministra automóviles a clientes en Houston y Tampa. El costo de enviar un automóvil entre los puntos se da en la tabla 60 ("—" significa que no se permite un envío). L.A. puede producir hasta 1 100 automóviles y Detroit puede producir hasta 2 900 automóviles. Houston debe recibir 2 400 automóviles y Tampa debe recibir 1 500 automóviles.

a Formule un problema de transporte equilibrado que pueda utilizarse para minimizar los costos de envío en que se incurre para satisfacer las demandas de Houston y Tampa.

b Modifique la respuesta al inciso a) si no se permiten los envíos entre L.A. y Detroit.

c Modifique la respuesta al inciso a) si se permiten los envíos entre Houston y Tampa a un costo de $5.

2 Sunco Oil produce petróleo en dos pozos. El pozo 1 produce 150 000 barriles por día y el pozo 2 produce 200 000 barriles al día. Es posible enviar petróleo directamente de los pozos a los clientes de Sunco en Los Ángeles y Nueva York. Alternativamente, Sunco podría transportar petróleo a los puertos de Mobile y Galveston y luego enviarlo en un buque cisterna a Nueva York y Los Ángeles. Esta última ciudad requiere 160 000 barriles por día y Nueva York requiere 140 000 barriles por día. El costo de enviar 1 000 barriles entre dos puntos se muestra en la tabla 61. Formule un problema de transbordo (y el modelo de transporte equivalente) que podría utilizarse para minimizar los costos de transporte a fin de satisfacer las demandas de petróleo de Los Ángeles y Nueva York.

3 En el problema 2, suponga que antes de ser enviado a Los Ángeles y Nueva York, todo el petróleo producido en los pozos debe refinarse en Galveston o Mobile. Refinar 1 000 barriles de petróleo cuesta $12 en Mobile y $10 en Galveston. Suponiendo que Mobile y Galveston tienen capacidad de refinación infinita, formule un modelo de transbordo y uno de transporte equilibrado para minimizar el costo diario de transportar y refinar los requerimientos de petróleo de Los Ángeles y Nueva York.

TABLA 60

	A ($)				
De	**L.A.**	**Detroit**	**Atlanta**	**Houston**	**Tampa**
L.A.	0	140	100	90	225
Detroit	145	0	111	110	119
Atlanta	105	115	0	113	78
Houston	89	109	121	0	—
Tampa	210	117	82	—	0

TABLA 61

	A ($)					
De	**Pozo 1**	**Pozo 2**	**Mobile**	**Galveston**	**N.Y.**	**L.A.**
Pozo 1	0	—	10	13	25	28
Pozo 2	—	0	15	12	26	25
Mobile	—	—	0	6	16	17
Galveston	—	—	6	0	14	16
N.Y.	—	—	—	—	0	15
L.A.	—	—	—	—	15	0

Nota: los guiones indican que no están permitidos los envíos.

4 Resuelva de nuevo el problema 3 suponiendo que Galveston tiene una capacidad de refinación de 150 000 barriles por día y Mobile tiene una de 180 000 barriles por día. (*Sugerencia*: modifique el método utilizado para determinar el suministro y la demanda en cada punto de transbordo para incorporar las restricciones de capacidad de refinación, pero asegúrese de mantener equilibrado el problema.)

5 General Ford tiene dos plantas, dos almacenes y tres clientes. Sus ubicaciones son las siguientes:

Plantas: Detroit y Atlanta
Almacenes: Denver y Nueva York
Clientes: Los Ángeles, Chicago y Filadelfia

Los automóviles se producen en las plantas, luego se envían a los almacenes y, por último a los clientes. Detroit puede producir 150 automóviles por semana y Atlanta produce 100 automóviles por semana. Los Ángeles requiere 80 automóviles por semana; Chicago, 70, y Filadelfia, 60. Cuesta $10 000 dólares producir un automóvil en cada planta, y el costo de enviar un automóvil entre dos ciudades se da en la tabla 62. Determine cómo satisfacer las demandas semanales de General Ford a costo mínimo.

Grupo B

6† Una compañía debe satisfacer las demandas siguientes de efectivo al comienzo de cada uno de los seis meses siguientes: mes 1, $200; mes 2, $100; mes 3, $50; mes 4, $80;

†Basado en Srinivasan (1974).

TABLA 62

De	A ($) Denver	Nueva York
Detroit	1 253	637
Atlanta	1 398	841

De	A ($) Los Ángeles	Chicago	Filadelfia
Denver	1 059	996	1 691
New York	2 786	802	100

TABLA 63

Bono	Mes de venta 1	2	3	4	5	6
1	$0.21	$0.19	$0.17	$0.13	$0.09	$0.05
2	$0.50	$0.50	$0.50	$0.33	$0.00	$0.00
3	$1.00	$1.00	$1.00	$1.00	$1.00	$0.00

mes 5, $160; mes 6, $140. Al comienzo del mes 1, la compañía tiene $150 en efectivo y un bono 1 con valor de $200, un bono 2 con valor de $100 y un bono 3 con valor de $400. La compañía tendrá que vender algunos bonos para satisfacer las demandas, pero se cargará una penalización para cualquier bono vendido antes que termine el mes 6. Las penalizaciones por vender un valor de $1 de cada bono se muestran en la tabla 63.

a Suponiendo que todas las cuentas deben pagarse a tiempo, formule un problema de transporte equilibrado que pueda utilizarse para minimizar el costo de satisfacer las demandas de efectivo para los siguientes seis meses.

b Suponga que el pago de las cuentas se puede hacer después de su vencimiento, pero se estima una penalización de 5¢ por mes por cada dólar de demandas de efectivo que se pospone para un mes. Suponiendo que todas las cuentas deben pagarse al final del mes 6, construya un modelo de transbordo que pueda utilizarse para minimizar el costo de pagar las cuentas de los siguientes seis meses. (*Sugerencia*: los puntos de transbordo son necesarios, en la forma Ct = efectivo disponible al comienzo del mes t después que se vendieron los bonos para el mes t, pero antes de que se cumpla la demanda del mes t. Los envíos hacia Ct ocurren de las ventas de bonos y $Ct - 1$. Los envíos fuera de Ct ocurren para $Ct + 1$ y las demandas para los meses $1, 2, \ldots, t$.)

RESUMEN

Notación

m = número de puntos de suministro.

n = número de puntos de demanda.

x_{ij} = número de unidades enviadas del punto de suministro i al punto de demanda j.

c_{ij} = costo de enviar 1 unidad del punto de suministro i al punto de demanda j.

s_i = suministro en el punto de suministro i.

d_j = demanda en el punto de demanda j.

$\bar{c}_{ij}$ = coeficiente de x_{ij} en el renglón 0 de un tableau determinado.

$\mathbf{a}_{ij}$ = columna para x_{ij} en las restricciones de transporte.

Un problema de transporte está **equilibrado** si el suministro total es igual a la demanda total. Para usar los métodos de este capítulo para resolver un problema de transporte, primero se debe balancear mediante un punto de suministro ficticio o un punto de demanda ficticio. Un problema de transporte equilibrado se podría escribir como

$$\min \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \text{(Restricciones de suministro)}$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(Restricciones de demanda)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

Cómo hallar soluciones básicas factibles para un problema de transporte en equilibrio

Se puede hallar una sfb para un problema de transporte equilibrado mediante el método de la esquina noroeste, el método del costo mínimo o el método de Vogel. Para hallar una sfb por medio del método de la esquina noroeste, comience en la esquina superior izquierda (o noroeste) del tableau de transporte y fije el valor de x_{11} tan grande como sea posible. Claramente, x_{11} no puede ser más grande que el valor más pequeño de s_1 y d_1. Si $x_{11} = s_1$, entonces cancele el primer renglón del tableau de transporte; esto indica que ya no provendrán más variables básicas del renglón 1 del tableau. Asimismo, cambie d_1 a $d_1 - s_1$. Si $x_{11} = d_1$, entonces cancele la primera columna del tableau de transporte y cambie s_1 a $s_1 - d_1$. Si $x_{11} = s_1 = d_1$, cancele el renglón 1 o la columna 1 (pero no ambos) del tableau de transporte. Si cancela el renglón 1, cambie d_1 a 0; si cancela la columna 1, cambie s_1 a 0. Continúe aplicando este procedimiento a la celda más al noroeste del tableau que no se encuentre en un renglón o columna que se haya eliminado. Por último, se llega a un punto donde sólo hay una celda que puede asignarse a un valor. Asigne a esta celda un valor igual a su demanda de renglón o columna, y cancele tanto el renglón de la celda como su columna. Ahora ya se tiene una solución factible básica.

Cómo hallar la solución óptima para un problema de transporte

Paso 1 Si es problema está desequilibrado, equilíbrelo.

Paso 2 Utilice uno de los métodos descritos en la sección 7.2 para hallar una sfb.

Paso 3 Utilice el hecho de que $u_1 = 0$ y $u_i + v_j = c_{ij}$ para todas las variables básicas con la finalidad de encontrar $[u_1 \quad u_2 \ldots u_m \quad v_1 \quad v_2 \ldots v_n]$ para la sfb.

Paso 4 Si $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ para las variables no básicas, entonces la sfb actual es óptima. Si éste no es el caso, entonces se introduce en la base la variable con el valor positivo más grande de $u_i + v_j - c_{ij}$. Para hacer esto, encuentre el bucle. Luego, *contando sólo las celdas en el bucle*, marque las celdas pares. También marque las celdas impares. Ahora encuentre la celda impar cuya variable toma el valor más pequeño, θ. Los valores de las variables que no están en el bucle permanecen sin cambio. El pivote ahora está completo. Si $\theta = 0$, entonces la variable entrante será igual a cero, y una variable impar que tiene un valor actual de 0 saldrá de la base. En este caso, resultará una sfb degenerada. Si más de una celda impar del bucle es igual a θ, se podría elegir de manera arbitraria que una de estas celdas impares salga de la base; de nuevo, se obtiene una sfb degenerada. Este pivoteo produce una nueva sfb.

Paso 5 Usando la nueva sfb, vuelva a los pasos 3 y 4.

Para un problema de maximización, proceda como se indica, pero sustituya el paso 4 por el paso 4′.

Paso 4′ Si $u_i + v_j - c_{ij} \geq 0$ para las variables no básicas, la sfb es óptima. De otro modo, introduzca la variable con el valor negativo más grande de $u_i + v_j - c_{ij}$ en la base por medio de procedimiento de pivoteo.

Problemas de asignación

Un **problema de asignación** es un problema de transporte equilibrado en el que los suministros y demandas son iguales a 1. Un problema de asignación de $m \times m$ se podría resolver de manera eficaz por medio del método húngaro.

Paso 1 Encuentre el elemento mínimo en cada renglón de la matriz de costos. Construya una nueva matriz restando de cada costo el costo mínimo de su renglón. Para esta nueva matriz, encuentre el costo mínimo en cada columna. Construya una nueva matriz (matriz de costos reducida) restando de cada costo el costo mínimo de su columna.

Paso 2 Cubra los ceros en la matriz de costos reducida por medio del número mínimo de líneas necesarias. Si se requieren m líneas, entonces está disponible una solución óptima entre los ceros cubiertos en la matriz. Si se necesitan menos de m líneas, entonces proceda con el paso 3.

Paso 3 Encuentre el elemento no cero más pequeño (k) en la matriz de costos reducida que no está cubierta por las líneas trazadas en el paso 2. Ahora reste k de cada elemento no cubierto y agregue k a cada elemento que está cubierto por dos líneas. Vuelva al paso 2.

OBSERVACIONES

1 Para resolver un problema de asignación en el que el objetivo es maximizar la función objetivo, multiplique la matriz de utilidades por -1 y resuélvala como un problema de minimización.

2 Si el número de renglones en la matriz de costos no es igual al de columnas, entonces el problema está desequilibrado. El método húngaro podría producir una solución incorrecta si el problema está desequilibrado. Así, cualquier problema de asignación debe estar equilibrado (por la adición de uno o más puntos ficticios) antes de resolverlo por el método húngaro.

Problemas de transbordo

Un problema de transbordo permite el envío entre puntos de suministro y entre puntos de demanda, y podría contener puntos de transbordo por los que se podrían enviar los bienes en su trayecto de un punto de suministro a un punto de demanda. Con el método siguiente, un problema de transbordo se podría transformar en un problema de transporte equilibrado.

Paso 1 Si es necesario, agregue un punto de demanda ficticio (con un suministro de 0 y una demanda igual al suministro excesivo del problema) para equilibrar el problema. Los envíos al punto ficticio y de un punto a sí mismo, por supuesto, tienen un costo de envío cero. Sea s = suministro disponible total.

Paso 2 Construya un tableau de transporte creando un renglón para cada punto de suministro y punto de transbordo, y una columna para cada punto de demanda y punto de transbordo. Cada punto de suministro tendrá un suministro igual a su suministro original, y cada punto de demanda tendrá una demanda igual a su demanda original. Sea s = suministro disponible total. Entonces cada punto de transbordo tendrá un suministro igual a (suministro original del punto) + s y un punto de demanda igual a (demanda original del punto) + s.

Análisis de sensibilidad para problemas de transporte

Después de describir el análisis de sensibilidad en el capítulo 6, se puede analizar cómo un cambio en el problema de transporte afecta a la solución óptima del problema.

Cambio 1 Cambiar el coeficiente de la función objetivo de una variable no básica. Siempre que el coeficiente de x_{ij} en el renglón 0 óptimo sea no positivo, la base actual es óptima.

Cambio 2 Cambiar el coeficiente de la función objetivo de una variable básica. Para ver si la base actual es óptima, encuentre las nuevas u_i y v_j y utilice estos valores para valorar las variables no básicas. La base actual es óptima siempre que las variables no básicas tengan un coeficiente no positivo en el renglón 0.

Cambio 3 Incrementar tanto el suministro s_i como la demanda d_j en Δ.

$$\text{Nuevo valor de } z = \text{antiguo valor de } z + \Delta u_i + \Delta v_j$$

Podríamos encontrar los nuevos valores de las variables de decisión como sigue:

1 Si x_{ij} es una variable básica en la solución óptima, entonces incremente x_{ij} por Δ.

2 Si x_{ij} es una variable no básica en la solución óptima, encuentre el bucle en el que interviene x_{ij} y algunas de las variables básicas. Encuentre una celda impar en el bucle que esté en el renglón i. Incremente el valor de esta celda impar por Δ y vaya alrededor del ciclo, incrementando y luego disminuyendo de manera alternativa las variables básicas actuales en el bucle por Δ.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Televco produce cinescopios de imagen para TV en tres plantas. La planta 1 puede producir 50 cinescopios por semana; la planta 2, 100 cinescopios por semana, y la planta 3, 50 cinescopios por semana. Los cinescopios se envían a tres clientes. La ganancia obtenida por cinescopio depende del sitio donde se produjo el cinescopio y del cliente que lo compra (véase la tabla 64). El cliente 1 está dispuesto a comprar 80 cinescopios por semana; el cliente 2, tantos como 90, y el cliente 3, 100. Televco quiere encontrar un plan de envío y producción que maximice las ganancias.

a Formule un problema de transporte equilibrado que puede utilizarse para maximizar las ganancias de Televco.

b Utilice el método de la esquina noroeste para encontrar una sfb para el problema.

c Utilice simplex de transporte para encontrar una solución óptima al problema.

2 Cinco trabajadores están disponibles para llevar a cabo cuatro tareas. El tiempo que tarda cada trabajador para llevar a cabo la tarea se da en la tabla 65. El objetivo es asignar los trabajadores a las tareas, con el fin de minimizar el tiempo requerido total para llevar a cabo cuatro tareas. Utilice el método húngaro para resolver el problema.

3 Una compañía debe satisfacer las demandas siguientes para un producto: enero, 30 unidades; febrero, 30 unidades; marzo, 20 unidades. La demanda podría acumularse a un costo de \$5/unidad/mes. Toda la demanda debe satisfacerse al final de marzo. Así, si 1 unidad de demanda de enero se satisface durante marzo, se incurre en un costo de pedidos pendientes de 5(2) = \$10. La capacidad de producción mensual y el costo de producción unitario durante cada mes se dan en la tabla 66. Se estima un costo de tenencia de \$20/unidad en el inventario al final de cada mes.

a Formule un problema de transporte equilibrado que pudiera utilizarse para determinar cómo minimizar el costo total (entre otros, costos de pedidos pendientes, tenencia y producción) de satisfacer la demanda.

b Utilice el método de Vogel para hallar una solución factible básica.

c Utilice el simplex de transporte para determinar cómo satisfacer la demanda de cada mes. Asegúrese de dar una interpretación de su solución óptima (por ejemplo, 20 unidades de demanda del mes 2 se satisfacen de la producción del mes 1).

4 Appletree Cleaning tiene cinco trabajadoras domésticas. Para completar la limpieza de una casa deben aspirar, limpiar la cocina, limpiar el baño y hacer un tableau general. El tiempo que tarda cada empleada en hacer el trabajo se muestra en la tabla 67. A cada sirvienta se le asigna una tarea.

TABLA 64

	A ($)		
De	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Planta 1	75	60	69
Planta 2	79	73	68
Planta 3	85	76	70

TABLA 65

	Tiempo (horas)			
Trabajador	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
1	10	15	10	15
2	12	8	20	16
3	12	9	12	18
4	6	12	15	18
5	16	12	8	12

TABLA 66

Mes	Capacidad de producción	Costo unitario de producción
Enero	35	\$400
Febrero	30	\$420
Marzo	35	\$410

TABLA 67

	Tiempo (horas)			
Criada	Limpieza con aspiradora	Limpieza de la cocina	Limpieza del baño	Arreglo general
1	6	5	2	1
2	9	8	7	3
3	8	5	9	4
4	7	7	8	3
5	5	5	6	4

Utilice el método húngaro para determinar las asignaciones que minimizan el número total de horas-criada necesarias para limpiar la casa.

5[†] En la actualidad, State University puede almacenar 200 archivos en disco duro, 100 archivos en la memoria de la computadora y 300 archivos en cinta. Los usuarios quieren almacenar 300 archivos de procesamiento de textos, 100 archivos de programa por paquetes y 100 archivos de datos. Cada mes se tiene acceso ocho veces a un archivo característico de procesamiento de textos; cuatro veces a un archivo representativo de programa por paquetes, y dos veces a un archivo de datos común. Cuando se tiene acceso al archivo, el tiempo que toma recuperar al archivo depende del tipo y del medio de almacenamiento (véase tabla 68).

a Si el objetivo es minimizar el tiempo total por mes que los usuarios gastan cuando tienen acceso a sus archivos, formule un problema de transporte equilibrado que se pueda usar para determinar dónde se deben almacenar los archivos.

b Utilice el método de costo mínimo para hallar una sfb.

c Utilice el simplex de transporte para hallar una solución óptima.

6 La policía de Gotham City recibió recientemente tres llamadas. Cinco automóviles están disponibles. La distancia (en cuadras de la ciudad) de cada automóvil desde cada llamada se da en la tabla 69. Gotham City quiere minimizar la distancia total que deben recorrer los automóviles para atender las tres llamadas. Utilice el método húngaro para determinar qué automóvil debe responder a cuál llamada.

7 Hay tres distritos escolares en el centro de Busville. El número de estudiantes negros y blancos en cada distrito se muestra en la tabla 70. La Suprema Corte requiere que las escuelas de Busville estén equilibradas en cuanto a razas. Así, cada escuela debe tener exactamente 300 estudiantes, y cada escuela debe tener el mismo número de estudiantes negros. Las distancias entre los distritos se muestran en la tabla 70.

Formule un problema de transporte equilibrado que se pueda utilizar para determinar la distancia total mínima por la que se debe llevar en autobús a los estudiantes, con la que aún se satisfacen los requerimientos de la corte.

TABLA 68

Medio de almacenamiento	Tiempo (minutos) Procesamiento de textos	Programas por paquetes	Datos
Disco duro	5	4	4
Memoria	2	1	1
Cinta	10	8	6

TABLA 69

Automóvil	Distancia (cuadras) Llamada 1	Llamada 2	Llamada 3
1	10	11	18
2	6	7	7
3	7	8	5
4	5	6	4
5	9	4	7

[†]Este problema se basa en Evans (1984).

TABLA 70

Distrito	No. de estudiantes Blancos	Negros	Distancia a (millas) Distrito 2	Distrito 3
1	210	120	3	5
2	210	30	—	4
3	180	150	—	—

8 Usando el método de la esquina noroeste para hallar una sfb, encuentre (vía el simplex de transporte) una solución óptima para el problema de transporte (minimización) mostrado en la tabla 71.

9 Resuelva el siguiente LP:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_3 + x_4 \le 5 \\ & x_1 + x_3 \ge 3 \\ & x_2 + x_4 \ge 6 \\ \min x_j &\ge 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

10 Determine la solución óptima para el problema de transporte equilibrado de la tabla 72 (minimización).

11 En el problema 10, suponga que se incrementa s_i a 16 y d_3 a 11. El problema aún está equilibrado, y debido a que se deben enviar 31 unidades (en lugar de 30), se pensaría que habría un aumento en los costos de envío totales. Muestre que el costo de envío total disminuyó en realidad en $2. A esto se le conoce como paradoja "más por menos". Explique por qué al incrementar tanto el suministro como la demanda disminuyó el costo. Por medio de la teoría de los precios sombra, explique cómo se podría haber predicho que incrementar a s_1 y d_3 en 1 disminuiría el costo total en $2.

12 Utilice el método de la esquina noroeste, el método del costo mínimo y el método de Vogel para hallar las soluciones factibles básicas del problema de transporte de la tabla 73.

13 Determine la solución óptima para el problema 12.

TABLA 71

12	14	16	60
14	13	19	50
17	15	18	40
40	70	10	

TABLA 72

4	2	4	15
12	8	4	15
10	10	10	

TABLA 73

20	11	3	6	5
5	9	10	2	10
18	7	4	1	15
3	3	12	12	

14 Oilco tiene campos petroleros en San Diego y Los Ángeles. El campo de San Diego produce 500 000 barriles por día y el campo de Los Ángeles produce 400 000 barriles por día. El petróleo se envía de los campos a una refinería, ya sea en Dallas o en Houston (suponga que cada refinería tiene capacidad ilimitada). Cuesta $700 refinar 100 000 barriles de petróleo en Dallas y $900 en Houston. El petróleo refinado se envía a los clientes en Chicago y Nueva York. Los clientes de Chicago requieren 400 000 barriles por día de petróleo refinado; los clientes de Nueva York requieren 300 000. Los costos de enviar 100 000 barriles de petróleo (refinado o sin refinar) entre ciudades se dan en la tabla 74. Formule un modelo de transporte equilibrado de esta situación.

15 Para el problema de Powerco, encuentre el intervalo de valores de c_{24} para los que la base actual sigue siendo óptima.

16 Para el problema de Powerco, determine el intervalo de valores de c_{23} para los que la base actual sigue siendo óptima.

17 Una compañía produce automóviles en Atlanta, Boston, Chicago y Los Ángeles. Los automóviles se envían a almacenes en Memphis, Milwaukee, Nueva York, Denver y San Francisco. El número de automóviles disponibles en cada planta se da en la tabla 75.

Cada almacén necesita tener disponible el número de automóviles mostrado en la tabla 76.

La distancia (en millas) entre las ciudades se da en la tabla 77.

a Suponiendo que el costo (en dólares) de enviar un automóvil es igual a la distancia entre dos ciudades, determine un programa de envío óptimo.

b Suponiendo que el costo (en dólares) de enviar un automóvil es igual a la raíz cuadrada de la distancia entre dos ciudades, determine un programa de envío óptimo.

TABLA 74

	A ($)			
De	Dallas	Houston	N.Y.	Chicago
L.A.	300	110	—	—
San Diego	420	100	—	—
Dallas	—	—	450	550
Houston	—	—	470	530

TABLA 75

Planta	Automóviles disponibles
Atlanta	5 000
Boston	6 000
Chicago	4 000
L.A.	3 000

TABLA 76

Almacén	Automóviles requeridos
Memphis	6 000
Milwaukee	4 000
N.Y.	4 000
Denver	2 000
San Francisco	2 000

TABLA 77

	Memphis	Milwaukee	N.Y.	Denver	S.F.
Atlanta	371	761	841	1 398	2 496
Boston	1 296	1 050	206	1 949	3 095
Chicago	530	87	802	996	2 142
L.A.	1 817	2 012	2 786	1 059	379

18 Durante los siguientes tres trimestres, Airco enfrenta las siguientes demandas para compresores de acondicionadores de aire: trimestre 1, 200; trimestre 2, 300; trimestre 3, 100. Durante cada trimestre se pueden producir unos 240 compresores de aire. Los costos de producción por compresor durante cada trimestre se dan en la tabla 78. El costo de mantener en inventario un compresor de aire es $100/trimestre. La demanda podría acumularse (siempre y cuando se cumpla al final del trimestre 3) a un costo de $60/compresor/trimestre. Formule el tableau para un problema de transporte equilibrado cuya solución indica a Airco cómo minimizar el costo total de satisfacer las demandas para los trimestres 1 a 3.

19 Una compañía está considerando contratar gente para cuatro tipos de trabajos. Le gustaría contratar el número de personas de la tabla 79 para cada tipo de trabajo.

La compañía puede contratar cuatro clases de personas. Cada clase está calificada para llevar a cabo dos tipos de

TABLA 78

Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3
$200	$180	$240

TABLA 79

	Trabajo			
	1	2	3	4
Número de personas	30	30	40	20

TABLA 80

	Tipo de persona			
	1	2	3	4
Trabajos solicitados	1 y 3	2 y 3	3 y 4	1 y 4

trabajos de acuerdo con la tabla 80. Un total de 20 personas han solicitado el trabajo tipo 1, 30 el tipo 2, 40 el tipo 3 y 20 el tipo 4. Formule un problema de transporte equilibrado cuya solución le indicará a la compañía cómo maximizar el número de empleados asignados a los trabajos adecuados. (*Nota:* se puede asignar a cada persona a lo sumo a un trabajo.)

20 Durante cada uno de los dos meses siguientes se pueden producir tantas como 50 unidades/mes de un producto a un costo de $12/unidad durante el mes 1 y $15/unidad durante el mes 2. El cliente está dispuesto a comprar unas 60 unidades/mes durante los dos meses siguientes. El cliente pagará $20/unidad durante el mes 1 y 16/unidad durante el mes 2. Cuesta $1/unidad mantener en inventario una unidad en inventario durante 1 mes. Formule un problema de transporte equilibrado cuya solución indicará cómo maximizar la ganancia.

Grupo B

21† La compañía Carte Caterer debe tener el siguiente número de servilletas de limpieza disponibles al comienzo de los siguientes cuatro días: día 1, 15; día 2, 12; día 3, 18; día 4, 6. Después de ser usada, una servilleta se limpia por medio de uno de dos métodos: servicio rápido o servicio lento. El servicio rápido cuesta 10¢ por servilleta, y una servilleta que se limpia vía rápida está disponible para uso el día posterior a su último uso. El servicio lento cuesta 6¢ por servilleta, y estas servilletas se pueden volver a usar después de que se usaron por última vez. Las servilletas nuevas se compran a un costo de 20¢ por servilleta. Formule un problema de transporte equilibrado para minimizar el costo de satisfacer la demanda de servilletas durante los siguientes cuatro días.

22 Braneast Airlines debe dotar de personal los vuelos diarios entre Nueva York y Chicago mostrados en la tabla 81. Cada una de las tripulaciones de Braneast vive en Nueva York o Chicago. Cada día una tripulación debe realizar un vuelo Nueva York-Chicago y uno Chicago-Nueva York con por lo menos 1 hora de tiempo de reposo entre vuelos. Braneast quiere programar las tripulaciones para minimizar el tiempo de reposo total. Establezca un problema de asignación que se pueda utilizar para completar este objetivo. (*Sugerencia:* sea $x_{ij} = 1$ si la tripulación que realiza el vuelo i también hace el vuelo j, y de lo contrario $x_{ij} = 0$. Si $x_{ij} = 1$, entonces se incurre en un costo c_{ij}, que corresponde al tiempo de reposo asociado con una tripulación que hace el vuelo i y el vuelo j.) Por supuesto, algunas asignaciones no son posibles. Encuentre las asignaciones de vuelo que minimizan el tiempo de reposo total. ¿Cuántas tripulaciones deben basarse en cada ciudad? Suponga que al final del día, cada tripulación debe estar en su ciudad de residencia.

TABLA 81

Vuelo	Sale de Chicago	Llega a Nueva York	Vuelo	Sale de Nueva York	Llega a Chicago
1	6 A.M.	10 A.M.	1	7 A.M.	9 A.M.
2	9 A.M.	1 P.M.	2	8 A.M.	10 A.M.
3	mediodía	4 P.M.	3	10 A.M.	mediodía
4	3 P.M.	7 P.M.	4	mediodía	2 P.M.
5	5 P.M.	9 P.M.	5	2 P.M.	4 P.M.
6	7 P.M.	11 P.M.	6	4 P.M.	6 P.M.
7	8 P.M.	medianoche	7	6 P.M.	8 P.M.

23 Una firma que produce un solo producto tiene tres plantas y cuatro clientes. Las tres plantas producirán 3000, 5000 y 5000 unidades, respectivamente, durante el siguiente periodo. La firma tiene el compromiso de vender 4000 unidades al cliente 1, 3000 unidades al cliente 2 y por lo menos 3000 unidades al cliente 3. Ambos clientes, 3 y 4, también quieren comprar tantas unidades restantes como sea posible. La ganancia asociada con el envío de una unidad de la planta i al cliente j se da en la tabla 82. Formule un problema de transporte equilibrado que se puede utilizar para maximizar la utilidad de la compañía.

24 Una compañía puede producir unas 35 unidades/mes. Las demandas de sus clientes principales deben cumplirse a tiempo cada mes; si lo desea, la compañía también podría vender unidades a clientes secundarios cada mes. El costo de retención de $1/unidad se evalúa contra el inventario final de cada mes. Los datos pertinentes se muestran en la tabla 83. Formule un problema de transporte equilibrado que se puede utilizar para maximizar las utilidades obtenidas durante los tres meses siguientes.

25 Una casa tiene cuatro pinturas valiosas que se ponen a la venta. Cuatro clientes hacen ofertas para las pinturas. El cliente 1 está dispuesto a comprar dos pinturas, pero los clientes entre sí están dispuestos a comprar a lo sumo una pintura. Los

TABLA 82

	Al cliente ($)			
De	1	2	3	4
Planta 1	65	63	62	64
Planta 2	68	67	65	62
Planta 3	63	60	59	60

†Este problema se basa en Jacobs (1954).

TABLA 83

Mes	Costo de producción/unidad ($)	Demanda primaria	Disponible para demanda secundaria	Precio de ventas/unidad ($)
1	13	20	15	15
2	12	15	20	14
3	13	25	15	16

TABLA 84

Cliente	Oferta para ($)			
	Pintura 1	Pintura 2	Pintura 3	Pintura 4
1	8	11	—	—
2	9	13	12	7
3	9	—	11	—
4	—	—	12	9

precios que cada cliente está dispuesto a pagar se dan en la tabla 84. Utilice el método húngaro para determinar cómo maximizar el ingreso total recibido de la venta de las pinturas.

26 Powerhouse produce capacitores en tres lugares: Los Ángeles, Chicago y Nueva York. Los capacitores se envían desde estos lugares a empresas de servicio público en cinco regiones del país: noreste (NE), noroeste (NO), medio oeste (MO), sudeste (SE) y suroeste (SW). El costo de producir y enviar un capacitor desde cada planta a cada región del país se da en la tabla 85. Cada planta tiene una capacidad de producción anual de 100 000 capacitores. Cada año, cada región del país debe recibir el siguiente número de capacitores: NE, 55 000; NO, 50 000; MO, 60 000; SE, 60 000; SO, 45 000. Powerhouse siente que los costos de envío son muy altos y, por consiguiente, la compañía está considerando construir una o dos plantas más de producción. Los sitios posibles son Atlanta y Houston. Los costos de producir un capacitor y enviarlo a cada región del país se dan en la tabla 86. Cada planta tiene una capacidad de producción anual de 100 000 capacitores. Cuesta $3 millones (en dólares actuales) construir una nueva planta, y al operar cada planta se incurre en un costo fijo (además de los costos variables de envío y producción) de $50 000 pesos por año. Una planta en Atlanta o Houston tendrá la capacidad de producir 100 000 capacitores por año.

Suponga que los patrones de demanda futuros y los costos de producción permanecerán sin cambio. Si los costos se descuentan a una tasa de 11$\frac{1}{9}$% por año, ¿cómo Powerhouse puede minimizar el valor presente de los costos asociados con satisfacer las demandas actual y futura?

27[†] Durante el mes de julio, Mosca B residente de Pittsburgh debe hacer cuatro viajes redondos por avión entre

TABLA 85

De	Al ($)				
	NE	NO	MO	SE	SO
L.A.	27.86	4.00	20.54	21.52	13.87
Chicago	8.02	20.54	2.00	6.74	10.67
N.Y.	2.00	27.86	8.02	8.41	15.20

TABLA 86

De	A ($)				
	NE	NO	MO	SE	SO
Atlanta	8.41	21.52	6.74	3.00	7.89
Houston	15.20	13.87	10.67	7.89	3.00

Pittsburgh y Chicago. Las fechas de los viajes se muestran en la tabla 87. La Mosca B debe comprar cuatro boletos de viaje redondo. Sin una tarifa de descuento, un boleto de viaje redondo entre Pittsburgh y Chicago cuesta $500. Si la estancia de Mosca en una ciudad incluye un fin de semana, entonces obtiene un descuento de 20% en la tarifa de viaje redondo. Si su estancia en una ciudad es por lo menos 21 días, entonces recibe un descuento de 35%, y si su estancia dura más de 10 días, entonces recibe 30% de descuento. Por supuesto, sólo se puede aplicar un descuento en la compra de cualquier boleto. Formule y resuelva un problema de asignación que minimice el costo total de comprar los cuatro boletos de viaje redondo. (*Sugerencia*: Sea $x_{ij} = 1$ si se compra un boleto de viaje redondo para uso en el i-ésimo vuelo fuera de Pittsburgh y el j-ésimo vuelo fuera de Chicago. También, considere dónde Mosca debe comprar un boleto si, por ejemplo, $x_{21} = 1$.)

28 Tres profesores deben ser asignados para enseñar seis secciones de finanzas. Cada profesor debe enseñar dos secciones y cada uno clasificó los seis periodos durante los que se enseña finanzas, como se ilustra en la tabla 88. Una clasificación de 10 significa que el profesor quiere enseñar en ese periodo, y una clasificación de 1 indica que no quiere enseñar en ese tiempo. Determine una asignación de profesores a las secciones que maximizarán la satisfacción total de los profesores.

29[‡] Tres incendios acaban de comenzar en Nueva York. Los incendios 1 y 2 requieren cada uno dos bombas contra incendios y el incendio 3 requiere tres bombas contra incendios. El "costo" de responder a cada incendio depende del tiempo en el que llegan las bombas. Sea t_{ij} el tiempo (en minutos) cuando la j-ésima bomba llega al incendio i. Entonces el costo de responder a cada incendio es como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{Incendio 1:}\quad 6t_{11} + 4t_{12}\\
&\text{Incendio 2:}\quad 7t_{21} + 3t_{22}\\
&\text{Incendio 3:}\quad 9t_{31} + 8t_{32} + 5t_{33}
\end{aligned}$$

Tres compañías responden a los tres incendios. La compañía 1 tiene tres bombas disponibles y las compañías 2 y 3 cada una tienen dos bombas disponibles. El tiempo (en mi-

TABLA 87

Sale de Pittsburgh	Sale de Chicago
Lunes, 1 de julio	Viernes, 5 de julio
Martes, 9 de julio	Jueves, 11 de julio
Lunes, 15 de julio	Viernes, 19 de julio
Miércoles, 24 de julio	Jueves, 25 de julio

[†]Basado en Hansen y Wendell (1982).
[‡]Basado en Denardo, Rothblum y Swersey (1988).

TABLA 88

Profesor	9 A.M.	10 A.M.	11 A.M.	1 P.M.	2 P.M.	3 P.M.
1	8	7	6	5	7	6
2	9	9	8	8	4	4
3	7	6	9	6	9	9

TABLA 89

Compañía	Incendio 1	Incendio 2	Incendio 3
1	6	7	9
2	5	8	11
3	6	9	10

nutos) que tarda una bomba en viajar de cada compañía a cada incendio se muestra en la tabla 89.

a Formule y resuelva un problema de transporte que se pueda utilizar para minimizar el costo asociado con asignar las tres bombas. (*Sugerencia*: serán necesarios siete puntos de demanda.)

b ¿Sería válida aún la formulación del inciso (a) si el costo del incendio 1 fuera $4t_{11} + 6t_{12}$?

BIBLIOGRAFÍA

En los siguientes seis textos se analizan problemas de transporte, asignación y transbordo:

Bazaraa, M. y J. Jarvis. *Linear Programming and Network Flows*. Nueva York: Wiley, 1990.

Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming. Reading*, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Dantzig, G. *Linear Programming and Extensions*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1963.

Gass, S. *Linear Programming: Methods and Applications*, 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1985.

Murty, K. *Linear Programming*. Nueva York: Wiley 1983.

Wu, N. y R. Coppins. *Linear Programming and Extensions*. Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

Aarvik, O. y P. Randolph. "The Application of Linear Programming to the Determination of Transmission Line Fees in an Electrical Power Network", *Interfaces* 6(1975):17-31.

Denardo, E., U. Rothblum y A. Swersey. "Transportation Problem in Which Costs Depend on Order of Arrival", *Management Science* 34(1988):774-784.

Evans, J. "The Factored Transportation Problem", *Management Science* 30(1984):1021-1024.

Gillett, B. *Introduction to Operations Research: A Computer-Oriented Algorithmic Approach*. Nueva York: McGraw-Hill, 1976.

Glassey, R. y V: Gupta. "A Linear Programming Analysis of Paper Recycling", *Management Science* 21(1974): 392-408.

Glover, F., et al. "A Computational Study on Starting Procedures, Basis Change Criteria and Solution Algorithms for Transportation Problems", *Management Science* 20(1974):793-813. En este artículo se analiza la eficacia computacional de varios métodos utilizados para encontrar soluciones factibles básicas para problemas de transporte.

Hansen, P. y R. Wendell. "A Note on Airline Commuting", *Interfaces* 11 (No. 12, 1982):85-87.

Jackson, B. "Using LP for Crude Oil Sales at Elk Hills: A Case Study", *Interfaces* 10(1980):65-70.

Jacobs, W. "The Caterer Problem", *Naval Logistics Research Quarterly* 1(1954):154-165.

Machol, R. "An Application of the Assignment Problem", *Operations Research* 18(1970):745-746.

Srinivasan, P. "A Transshipment Model for Cash Management Decisions", *Management Science* 20(1974): 1350-1363.

Wagner, H. y D. Rubin. "Shadow Prices: Tips and Traps for Managers and Instructors", *Interfaces* 20(No. 4, 1990):150-157.

8 Modelos de red

Muchos problemas de optimización importantes se analizan mejor por medio de una representación gráfica o de red. En este capítulo, se consideran cuatro modelos específicos de red: problemas de trayectoria más corta, problemas de flujo máximo, modelos de programación de proyecto CPM-PERT y problemas de árbol de expansión mínima, para los que existen procedimientos de solución eficientes. También se estudian problemas de redes en flujo mínimo o costo mínimo (FMOCM), de los cuales los problemas de transporte, asignación, transbordo, trayectoria más corta, flujo máximo, y los modelos de programación de proyecto CPM, son casos especiales. Por último, se analiza una generalización del simplex de transporte, el simplex de red, que se puede utilizar para resolver problemas de flujo de red de costo mínimo. El capítulo comienza con algunos términos básicos utilizados para describir gráficas y redes.

8.1 Definiciones básicas

Una **gráfica**, o **red**, se define mediante dos conjuntos de símbolos: nodos y arcos. Primero, se define un conjunto (llámelo V) de puntos extremos o **vértices**. Los vértices de una gráfica o red también se llaman **nodos**.

También se define un conjunto de arcos A.

DEFINICIÓN ■ Un **arco** consiste en un par ordenado de puntos extremos y representa una posible dirección de movimiento que podría ocurrir entre puntos extremos (o vértices). ■

Para los fines que aquí se persiguen, si una red contiene un arco (j, k), entonces el movimiento es posible del nodo j al nodo k. Suponga que los nodos 1, 2, 3 y 4 de la figura 1 representan ciudades y cada arco representa una carretera (de un solo sentido) que enlaza dos ciudades. Para esta red, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y $A = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 1)\}$. Para el arco (j, k), el nodo j es el **nodo inicial** y el nodo k es el **nodo terminal.** Se dice que el arco (j, k) va del nodo j al nodo k. Por consiguiente, el arco (2, 3) tiene el nodo inicial 2 y el nodo terminal 3, y va del nodo 2 al nodo 3. El arco (2, 3) se podría considerar como una carretera (unidireccional) en la que se podría viajar de la ciudad 2 a la ciudad 3. En la figura 1, los arcos muestran que se permite viajar de la ciudad 3 a la ciudad 4 y de la ciudad 4 a la ciudad 3, pero que el viaje entre las otras ciudades podría ser en un solo sentido.

Después, se estudia con frecuencia un grupo o conjunto de arcos. Las definiciones siguientes son formas convenientes de describir ciertos grupos o conjuntos de arcos.

DEFINICIÓN ■ Una secuencia de arcos tal que cada arco tiene exactamente un vértice en común con el arco previo, se llama una **cadena.** ■

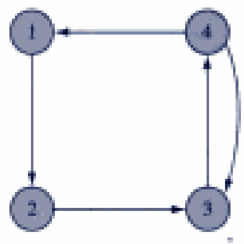


FIGURA 1
Ejemplo de una red

DEFINICIÓN ■ Una **trayectoria** es una cadena en la que el nodo terminal de cada arco es idéntico al nodo inicial del arco siguiente. ■

Por ejemplo, en la figura 1, (1, 2)-(2, 3)-(4, 3) es una cadena pero no una trayectoria; (1, 2)-(2, 3)-(3, 4) es una cadena *y* una trayectoria. La trayectoria (1, 2)-(2, 3)-(3, 4) representa una forma de viajar del nodo 1 al 4.

8.2 Problemas de trayectoria más corta

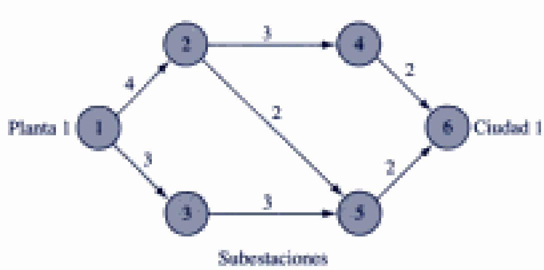
En esta sección, se supone que cada arco de la red tiene una longitud asociada con él. Suponga que se empieza en un nodo particular (digamos, el nodo 1). El problema de encontrar la trayectoria más corta (trayectoria de longitud mínima) del nodo 1 a cualquier otro nodo en la red se llama **problema de trayectoria más corta.** Los ejemplos 1 y 2 son problemas de trayectoria más corta.

EJEMPLO 1 **Trayectoria más corta**

Considere el ejemplo de Powerco (figura 2). Suponga que cuando se envía potencia de la planta 1 (nodo 1) a la ciudad 1 (nodo 6), ésta debe pasar por subestaciones de retransmisión (nodos 2 a 5). Para cualquier par de nodos entre los que se puede transportar la potencia, la figura 2 da la distancia (en millas) entre los nodos. Así, las subestaciones 2 y 4 están separadas tres millas, y la potencia no se puede enviar entre las subestaciones 4 y 5. Powerco quiere que la potencia se envíe de la planta 1 a la ciudad 1 para que recorra la distancia mínima posible, así que debe encontrar la trayectoria más corta en la figura 2 que une el nodo 1 con el nodo 6.

Si el costo de enviar potencia fuera proporcional a la distancia que viaja la potencia, entonces conocer la trayectoria más corta entre la planta 1 y la ciudad 1 en la figura 2 (y la trayectoria más corta entre la planta *i* y la ciudad *j* en diagramas similares) sería necesario determinar los costos de envío para la versión de transporte del problema de Powerco analizados en el capítulo 7.

FIGURA 2
Red para Powerco



EJEMPLO 2 Reemplazo de equipo

Acabo de comprar (en el tiempo 0) un automóvil nuevo por $12 000. El costo de mantener un automóvil durante un año depende de su edad al comienzo del año, como se da en la tabla 1. Para evitar costos de mantenimiento altos con un automóvil más antiguo, podría entregar a cuenta mi automóvil y comprar uno nuevo. El precio que recibo por dejar a cuenta mi automóvil, depende de la edad del automóvil al momento del intercambio (véase la tabla 2). Para simplificar los cálculos, suponga que en cualquier instante el costo de un automóvil nuevo son $12 000. El objetivo es minimizar el costo neto (costos de compra + costos de mantenimiento − dinero recibido en el intercambio) en que se incurre en los cinco años siguientes. Formule este problema como uno de trayectoria más corta.

Solución La red tendrá seis nodos (1, 2, 3, 4, 5 y 6). El nodo i es el comienzo del año i. Para $i < j$, un arco (i, j) corresponde a comprar un automóvil nuevo al comienzo del año i y conservarlo hasta el comienzo del año j. La longitud del arco (i, j) (llámela c_{ij}) es el costo neto total en que se incurre por tener y operar un automóvil desde el comienzo del año i al comienzo del año j si se compra un automóvil nuevo al comienzo del año i y este automóvil se intercambia por uno nuevo al comienzo del año j. Así,

$$\begin{aligned} c_{ij} = {} & \text{costo de mantenimiento en que se incurrió durante los años } i, i+1, \ldots, j-1 \\ & + \text{costo de comprar automóvil al comienzo del año } i \\ & - \text{valor de intercambio recibido al comienzo del año } j \end{aligned}$$

Al aplicar esta fórmula a la información del problema, se obtiene (los costos están en miles)

$c_{12} = 2 + 12 - 7 = 7$

$c_{13} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$

$c_{14} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21$

$c_{15} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 - 1 = 31$

$c_{16} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 + 12 - 0 = 44$

$c_{23} = 2 + 12 - 7 = 7$

$c_{24} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$

$c_{25} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21$

TABLA 1
Costos de mantenimiento del automóvil

Edad del automóvil (años)	Costos de mantenimiento anual
0	2 000
1	4 000
2	5 000
3	9 000
4	12 000

TABLA 2
Precios de intercambio del automóvil

Edad del automóvil (años)	Precio de intercambio
1	7 000
2	6 000
3	2 000
4	1 000
5	0

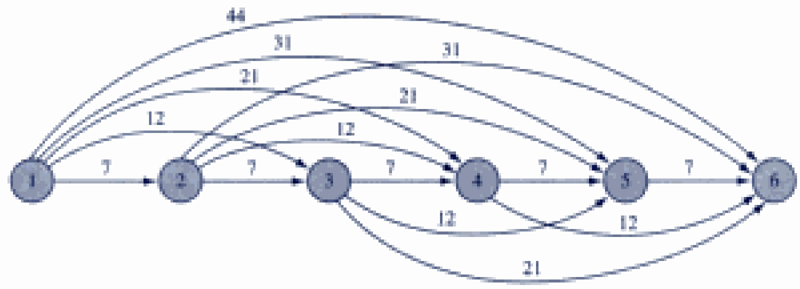


FIGURA 3
Red para minimizar los costos del automóvil

$c_{26} = 2 + 4 + 5 + 9 + 12 - 1 = 31$ $\quad c_{45} = 2 + 12 - 7 = 7$

$c_{34} = 2 + 12 - 7 = 7$ $\quad c_{46} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$

$c_{35} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12$ $\quad c_{56} = 2 + 12 - 7 = 7$

$c_{36} = 2 + 4 + 5 + 12 - 2 = 21$

Ahora se ve que la longitud de cualquier trayectoria del nodo 1 al nodo 6 es el costo neto en que se incurrió durante los siguientes cinco años correspondientes a una estrategia particular de intercambio. Por ejemplo, suponga que dejo a cambio mi automóvil al comienzo del año 3 y luego intercambio el automóvil al final del año 5 (el comienzo del año 6). Esta estrategia corresponde a la trayectoria 1−3−6 en la figura 3. La longitud de esta trayectoria ($c_{13} + c_{36}$) es el costo neto total en que se incurrió durante los siguientes cinco años si dejo a cambio mi automóvil al comienzo del año 3 y al comienzo del año 6. Así, la longitud de la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo 6 en la figura 3 es el costo neto mínimo en que se incurre al operar un automóvil los siguientes cinco años.

Algoritmo de Dijkstra

Suponiendo que las longitudes de arco son negativas, el método siguiente, conocido como **algoritmo de Dijkstra**, se puede usar para determinar la trayectoria más corta de un nodo (digamos, el nodo 1) a los demás nodos. Para empezar, marque el nodo 1 con una etiqueta permanente de 0. Luego, etiquete cada nodo i que esté conectado al nodo 1 mediante un solo arco con una etiqueta "temporal" igual a la longitud de arco que une al nodo 1 con el nodo i. Cada uno de los otros nodos (excepto, por supuesto, el nodo 1) tendrá una etiqueta temporal de ∞. Elija el nodo con etiqueta temporal más pequeña y haga permanente esta etiqueta.

Ahora suponga que el nodo i se convirtió en el nodo $(k + 1)$ al que se le dará una etiqueta permanente. El nodo i es k-ésimo nodo más cercano al nodo 1. En este punto, la etiqueta temporal de cualquier nodo (digamos, el nodo i') es la longitud de la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo i' que pasa sólo por los nodos contenidos en los $k - 1$ nodos más cercanos al nodo 1. Para cada nodo j que ahora tiene una etiqueta temporal y está conectado al nodo i por un arco, se remplaza la etiqueta temporal del nodo j con

$$\min \begin{cases} \text{etiqueta temporal actual del nodo } j \\ \text{etiqueta permanente del nodo } i + \text{longitud de arco } (i, j) \end{cases}$$

(Aquí, min $\{a, b\}$ es la más pequeña de a y b.) La nueva etiqueta temporal para el nodo j es la longitud de la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo j que pasa sólo por los nodos contenidos en los k nodos más cercanos al nodo 1. Ahora se convierte a la etiqueta temporal más pequeña en una etiqueta permanente. El nodo con esta nueva etiqueta permanente es el nodo $(k + 1)$ más cercano al nodo 1. Continúe este proceso hasta que los nodos tengan una etiqueta permanente. Para encontrar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo j, trabaje hacia atrás desde el nodo j encontrando los nodos que tienen etiquetas que difieren por exactamente la longitud del arco conector. Por supuesto, si se quiere la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo j, se detiene el proceso de marcado tan pronto como el nodo j reciba una etiqueta permanente.

Para ilustrar el algoritmo de Dijkstra, encontremos la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo 6 en la figura 2. Empecemos con las siguientes etiquetas (un * representa una etiqueta permanente, y el i-ésimo número es la etiqueta del nodo i): $[0^* \quad 4 \quad 3 \quad \infty \quad \infty \quad \infty]$. El nodo 3 ahora tiene una etiqueta temporal más pequeña. Por consiguiente, se hace permanente la etiqueta del nodo 3 y se obtienen las etiquetas siguientes:

$$[0^* \quad 4 \quad 3^* \quad \infty \quad \infty \quad \infty]$$

Ahora se sabe que el nodo 3 es el más cercano al nodo 1. Se calculan nuevas etiquetas temporales para los nodos que están conectados al nodo 3 mediante un solo arco. En la figura 2 se tiene que es el nodo 5.

$$\text{Nueva etiqueta temporal del nodo } 5 = \min\{\infty, 3 + 3\} = 6$$

El nodo 2 ahora tiene la etiqueta temporal más pequeña; ahora se hace permanente la etiqueta del nodo 2. Ahora se sabe que el nodo 2 es el segundo nodo más cercano al nodo 1. El nuevo conjunto de etiquetas ahora es

$$[0^* \quad 4^* \quad 3^* \quad \infty \quad 6 \quad \infty]$$

Debido a que los nodos 4 y 5 están conectados con el nodo 2 recién etiquetado permanentemente, se deben cambiar las etiquetas temporales de los nodos 4 y 5. La nueva etiqueta temporal del nodo 4 es min $\{\infty, 4 + 3\} = 7$ y la nueva etiqueta temporal del nodo 5 es min $\{6, 4 + 2\} = 6$. El nodo 5 ahora tiene la etiqueta temporal más pequeña, así que se hace permanente la etiqueta del nodo 5. Se sabe ahora que el nodo 5 es el tercer nodo más cercano al nodo 1. Las nuevas etiquetas son

$$[0^* \quad 4^* \quad 3^* \quad 7 \quad 6^* \quad \infty]$$

Sólo el nodo 6 está conectado al nodo 5, así que la etiqueta temporal del nodo 6 cambiará a min $\{\infty, 6 + 2\} = 8$. El nodo 4 tiene ahora la etiqueta temporal más pequeña, así que se hace permanente la etiqueta del nodo 4. Se sabe ahora que el nodo 4 es el más cercano al nodo 1. Las nuevas etiquetas son

$$[0^* \quad 4^* \quad 3^* \quad 7^* \quad 6^* \quad 8]$$

Debido a que el nodo 6 está conectado al nodo 4 recién etiquetado como permanente, se debe cambiar la etiqueta temporal del nodo 6 a min $\{8, 7 + 2\} = 8$. Ahora se puede hacer permanente la etiqueta del nodo 6. El conjunto final de etiquetas es $[0^* \quad 4^* \quad 3^* \quad 7^* \quad 6^* \quad 8^*]$. Ahora se puede trabajar hacia atrás y encontrar la trayectoria más corta del nodo 1 al 6. La diferencia entre las etiquetas permanentes de los nodos 6 y 5 es 2 = longitud del arco (5, 6), así que se retrocede al nodo 5. La diferencia entre las etiquetas permanentes de los nodos 5 y 2 es 2 = longitud del arco (2, 5), así que se podría ir de regreso al nodo 2. Entonces, por supuesto, se debe regresar al nodo 1. Así, 1–2–5–6 es una trayectoria corta (de longitud 8) del nodo 1 al nodo 6. Observe que cuando estuviéramos en el nodo 5, podríamos haber trabajado también hacia atrás al nodo 3 y haber obtenido la trayectoria más corta 1–3–5–6.

Problema de la trayectoria más corta como un problema de transbordo

Encontrar la trayectoria más corta entre el nodo i y el nodo j en una red se podría considerar como un problema de transbordo. Simplemente intente minimizar el costo de enviar una unidad del nodo i al nodo j (con los otros nodos de la red como puntos de transbordo), donde el costo de enviar una unidad del nodo k al nodo k' es la longitud de arco (k, k') si tal arco existe y es M (un número positivo grande) si tal arco no existe. Como en la sección 7.6, el costo de enviar una unidad de un nodo a sí mismo es cero. Siguiendo el método descrito en la sección 7.6, este problema de transbordo se podría transformar en un problema de transporte balanceado.

TABLA 3
Representación de transbordo del problema de trayectoria más corta y la solución óptima (1)

	Nodo					
Nodo	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Suministro**
1	4 1	3	M	M	M	1
2	0	M	3	2 1	M	1
3	M	0 1	M	3	M	1
4	M	M	0 1	M	2	1
5	M	M	M	0	2 1	1
Demanda	1	1	1	1	1	

Para ilustrar las ideas precedentes, se formula el problema de transporte balanceado asociado con encontrar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo 6 en la figura 2. Se desea enviar una unidad del nodo 1 al nodo 6. El nodo 1 es un punto de suministro, el nodo 6 es un punto de demanda y los nodos 2, 3, 4 y 5 serán puntos de transbordo. Con $s = 1$, se obtiene el problema de transporte equilibrado mostrado en la tabla 3. Este problema de transporte tiene dos soluciones óptimas:

1 $z = 4 + 2 + 2 = 8$, $x_{12} = x_{25} = x_{56} = x_{33} = x_{44} = 1$ (las otras variables son iguales a cero). Esta solución corresponde a la trayectoria 1–2–5–6.

2 $z = 3 + 3 + 2 = 8$, $x_{13} = x_{35} = x_{56} = x_{22} = x_{44} = 1$ (las otras variables son iguales a cero). Esta solución corresponde a la trayectoria 1–3–5–6.

OBSERVACIÓN Después de formular un problema de trayectoria más corta como un problema de transbordo, el problema se podría resolver fácilmente por medio de LINGO o un optimizador de hoja de cálculo. Véanse los detalles en la sección 7.1.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Encuentre la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo 6 en la figura 3.

2 Determine la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo 5 en la figura 4.

3 Formule el problema 2 como un problema de transbordo.

4 Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo 4 en la figura 5. ¿Por qué no se obtiene la respuesta correcta con el algoritmo de Dijkstra?

FIGURA 4
Red para el problema 2

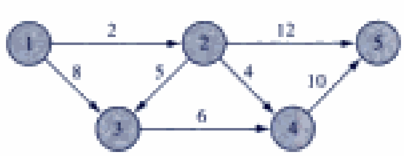
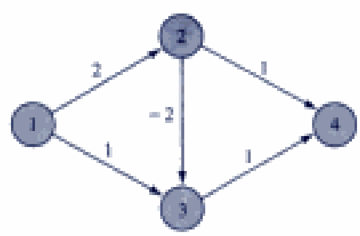


FIGURA 5
Red para el problema 4



5 Suponga que cuesta $10 000 comprar un automóvil nuevo. El costo de operación anual y el valor de reventa de un automóvil usado se muestran en la tabla 4. Suponiendo que en la actualidad se tiene un automóvil nuevo, determine una política de reemplazo que minimice los costos netos de poseer y operar un automóvil durante los siguientes seis años.

TABLA 4

Edad del automóvil (Años)	Valor de reventa ($)	Costo de operación ($)
1	7 000	300 (año 1)
2	6 000	500 (año 2)
3	4 000	800 (año 3)
4	3 000	1 200 (año 4)
5	2 000	1 600 (año 5)
6	1 000	2 200 (año 6)

6 Cuesta $40 comprar un teléfono de la tienda de departamentos. Suponga que puedo mantener un teléfono durante a lo sumo 5 años y que el costo de mantenimiento estimado cada año de operación es como sigue: año 1, $20; año 2, $30; año 3, $40; año 4, $60; año 5, $70. Acabo de comprar un nuevo teléfono. Suponiendo que un teléfono no tiene valor de salvamento, determine cómo minimizar el costo total de comprar y operar un teléfono durante los siguientes seis años.

7 Al comienzo del año 1, se debe comprar una nueva máquina. El costo de mantener una máquina con i años de antigüedad se da en la tabla 5.

El costo de compra de una máquina en el inicio de cada año se muestra en la tabla 6.

No hay valor de intercambio cuando se reemplaza una máquina. Su objetivo es minimizar el costo total (compra más mantenimiento) de tener una máquina durante cinco años. Determine los años en los que se debe comprar una nueva máquina.

Grupo B

8[†] Una biblioteca debe construir estantes para colocar 200 libros de 4 pulgadas de alto, 100 libros de 8 pulgadas de alto y 80 libros de 12 pulgadas de alto. Cada libro tiene 0.5 pulgadas de espesor. La biblioteca tiene varias formas de almacenar los libros. Por ejemplo, se podría construir un estante de 8 pulgadas de alto para acomodar los libros cuya altura sea menor o igual a 8 pulgadas, y se podría construir un anaquel de 12 pulgadas de alto para los libros de 12 pulgadas. Otra opción es construir un anaquel de 12 pulgadas para guardar todos los libros. La biblioteca cree que cuesta $2 300 construir un anaquel y que se incurre en un costo de $5 por pulgada cuadrada por almacenaje de libros. (Suponga que el área requerida para almacenar un libro está dada por la altura de área de almacenamiento multiplicada por el espesor del libro.

Formule y resuelva un problema de trayectoria más corta que pudiera utilizarse para ayudar a la biblioteca a determinar cómo colocar los libros a un costo mínimo. (*Sugerencia*: se tienen los nodos 0, 4, 8 y 12, con c_{ij} como el costo total de acomodar los libros de altura $> i$ y $\leq j$ en un solo anaquel.)

TABLA 5

Edad al comienzo del año	Costo de mantenimiento para el año siguiente ($)
0	38 000
1	50 000
2	97 000
3	182 000
4	304 000

[†]Basado en Ravindran (1971).

TABLA 6

Año	Costo de compra ($)
1	170 000
2	190 000
3	210 000
4	250 000
5	300 000

9 Una compañía vende siete tipos de cajas, que varían en volumen de 17 a 33 pies cúbicos. La demanda y tamaño de cada caja se dan en la tabla 7. El costo variable (en dólares) de producir cada caja es igual al volumen de la caja. Se incurre en un costo fijo de $1 000 para producir cualquier tipo de caja. Si lo desea la compañía, la demanda correspondiente a una caja se podría satisfacer con una caja de mayor tamaño. Formule y resuelva un problema de trayectoria más corta cuya solución minimice el costo de satisfacer la demanda para las cajas.

10 Explique cómo resolviendo un problema de transbordo simple se encuentra la trayectoria más corta a partir del nodo 1 en una red a *cada uno de los demás nodos* de la red.

TABLA 7

	Caja						
	1	2	3	4	5	6	7
Tamaño	33	30	26	24	19	18	17
Demanda	400	300	500	700	200	400	200

8.3 Problemas de flujo máximo

Muchas situaciones se modelan mediante una red en la que se podría considerar que los arcos tienen una capacidad que limita la cantidad de un producto que se podría enviar a través del arco. En estas situaciones, a menudo se desea transportar la cantidad máxima de flujo de un punto de partida (conocido como **fuente**) a un punto terminal (llamado **sumidero**). Esta clase de problemas se llaman **problemas de flujo máximo.** Existen varios algoritmos especializados para resolver problemas de flujo máximo. En esta sección, se empieza demostrando cómo se puede utilizar la programación lineal para resolver un problema de flujo máximo. Luego se analiza el método de Ford-Fulkerson (1962) para resolver problemas de flujo máximo.

Solución por PL de problemas de flujo máximo

EJEMPLO 3 Flujo máximo

Sunco Oil quiere enviar la máxima cantidad posible de petróleo (por hora) vía tubería del nodo *so* al nodo *si* en la figura 6. En su camino del nodo *so* al nodo *si*, el petróleo debe pasar por alguna o todas las estaciones 1, 2 y 3. Los distintos arcos representan tuberías de diferentes diámetros. El número máximo de barriles de petróleo (millones de barriles por hora) que se bombean por cada arco se muestran en la tabla 8. Cada número se llama una **capacidad de arco**. Formule un PL que permita determinar el número máximo de barriles de petróleo por hora que pueden enviarse de *so* a *si*.

Solución El nodo *so* se llama el nodo *fuente* porque el petróleo sale de él pero no entra. De manera análoga, el nodo *si* se llama el nodo *sumidero* porque el petróleo fluye hacia él y no sale. Por razones que pronto se aclararán, se agregó un arco artificial a_0 desde el sumidero a la fuente. El flujo por a_0 en realidad no es petróleo, de ahí el término **arco artificial**.

Para formular un PL que produzca el flujo máximo del nodo *so* al *si*, se observa que Sunco debe determinar cuánto petróleo (por hora) se debe enviar por el arco (i, j). Así, se define

x_{ij} = millones de barriles de petróleo por hora que pasarán por el arco (i, j) de la tubería

Como un ejemplo de flujo posible (denominado *flujo factible*), considere el flujo identificado por los números entre paréntesis en la figura 6.

$$x_{so,1} = 2, \quad x_{13} = 0, \quad x_{12} = 2, \quad x_{3,si} = 0, \quad x_{2,si} = 2, \quad x_{si,so} = 2, \quad x_{so,2} = 0$$

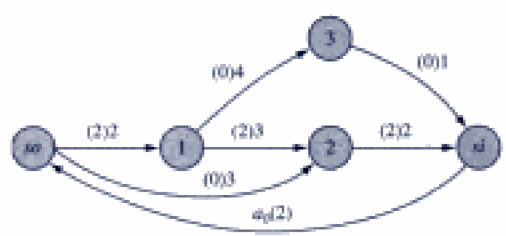


FIGURA 6
Red para Sunco Oil

TABLA 8
Capacidades de arco para Sunco Oil

Arco	Capacidad
(*so*, 1)	2
(*so*, 2)	3
(1, 2)	3
(1, 3)	4
(3, *si*)	1
(2, *si*)	2

Para que un flujo sea factible, éste debe tener dos características:

$$0 \leq \text{flujo a través de cada arco} \leq \text{capacidad de arco} \tag{1}$$

y

$$\text{Flujo hacia el nodo } i = \text{flujo que sale del nodo } i \tag{2}$$

Se supone que no se pierde petróleo mientras se bombea por la red, así que en cada nodo, un flujo factible debe satisfacer (2), la restricción de *conservación de flujo*. La introducción del arco artificial a_0 permite escribir la restricción de conservación de flujo para la fuente y el sumidero.

Si x_0 es el flujo por el arco artificial, entonces la conservación del flujo significa que x_0 = cantidad total de petróleo que entra al sumidero. Así, el objetivo de Sunco es maximizar x_0 sujeto a (1) y (2):

$$\begin{array}{lrl}
\max z = x_0 & & \\
\text{s.a} & x_{so,1} \leq 2 & \text{(Restricciones de capacidad de arco)} \\
& x_{so,2} \leq 3 & \\
& x_{12} \leq 3 & \\
& x_{2,si} \leq 2 & \\
& x_{13} \leq 4 & \\
& x_{3,si} \leq 1 & \\
& x_0 = x_{so,1} + x_{so,2} & \text{(Restricción de flujo del nodo } so) \\
& x_{so,1} = x_{12} + x_{13} & \text{(Restricción de flujo del nodo 1)} \\
& x_{so,2} + x_{12} = x_{2,si} & \text{(Restricción de flujo del nodo 2)} \\
& x_{13} = x_{3,si} & \text{(Restricción de flujo del nodo 3)} \\
& x_{3,si} + x_{2,si} = x_0 & \text{(Restricción de flujo del nodo } si) \\
& x_{ij} \geq 0 &
\end{array}$$

Una solución óptima para este PL es $z = 3$, $x_{so,1} = 2$, $x_{13} = 1$, $x_{12} = 1$, $x_{so,2} = 1$, $x_{3,si} = 1$, $x_{2,si} = 2$, $x_0 = 3$. Así, el flujo máximo posible del petróleo del nodo *so* a *si* es 3 millones de barriles por hora, con 1 millón de barriles enviados vía las trayectorias siguientes: *so*–1–2–*si*, *so*–1–3–*si*, y *so*–2–*si*.

La formulación de programación lineal de los problemas de flujo máximo es un caso especial del problema de flujo de red de costo mínimo (FMOCM) analizado en la sección 8.5. Se puede utilizar una generalización del simplex de transporte (conocido como *simplex de red*) para resolver el (FMOCM).

Antes de analizar el método de Ford-Fulkerson para resolver los problemas de flujo máximo, se dan dos ejemplos para situaciones en las que podría surgir un problema de flujo máximo.

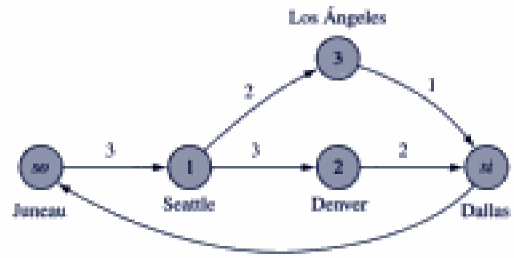
EJEMPLO 4 Flujo de aerolínea en máximo

Las aerolíneas Fly-by-Night deben determinar cuántos vuelos de conexión diarios se pueden concretar entre Juneau, Alaska y Dallas, Texas. Los vuelos de conexión deben detenerse en Seattle y después parar en Los Ángeles o Denver. Debido al espacio de aterrizaje limitado, Fly-by-Night está limitado a hacer el número de vuelos diarios entre los pares de ciudades que se muestran en la tabla 9. Establezca un problema de flujo máximo cuya solución le permita saber a la aerolínea cómo maximizar el número de vuelos de conexión diarios de Juneau a Dallas.

TABLA 9
Capacidades de arco para las aerolíneas Fly-by-Night

Ciudades	Número máximo de vuelos diarios
Juneau–Seattle (J, S)	3
Seattle–L.A. (S, L)	2
Seattle–Denver (S, De)	3
L.A.–Dallas (L, D)	1
Denver–Dallas (De, D)	2

FIGURA 7
Red para aerolíneas Fly-by-Night



Solución La red apropiada se ilustra en la figura 7. Aquí, la capacidad de arco (i, j) es el número máximo de vuelos diarios entre la ciudad i y la ciudad j. La solución óptima para este problema de flujo máximo es $z = x_0 = 3, x_{J,S} = 3, x_{S,L} = 1, x_{S,De} = 2, x_{L,D} = 1, x_{De,D} = 2$. Así, Fly-by-Night puede enviar tres vuelos diarios que conectan a Juneau y Dallas. Un vuelo conecta vía Juneau-Seattle-L.A.-Dallas y dos vuelos conectan vía Juneau-Seattle-Denver-Dallas.

EJEMPLO 5 Actividad de casamentero

Cinco artistas varones y cinco mujeres están en un baile. El objetivo del casamentero es emparejar cada mujer con un hombre de manera que maximice el número de personas cuya pareja es compatible. La compatibilidad de los artistas se describe en la tabla 10. Dibuje una red que haga posible representar el problema de maximizar el número de parejas compatibles como un problema de flujo máximo.

Solución La figura 8 es la red apropiada. En la figura 8, hay un arco con capacidad 1 que une la fuente con cada hombre, un arco con capacidad 1 que une cada par de parejas compatibles y un arco con capacidad 1 que une cada mujer con el sumidero. El flujo máximo en esta red es el número de parejas compatibles que puede crear el casamentero. Por ejemplo, si el ca-

TABLA 10
Compatibilidades para formar pareja

	Loni Anderson	Meryl Streep	Katharine Hepburn	Linda Evans	Victoria Principal
Kevin Costner	—	C	—	—	—
Burt Reynolds	C	—	—	—	—
Tom Selleck	C	C	—	—	—
Michael Jackson	C	C	—	—	C
Tom Cruise	—	—	C	C	C

Nota: C indica compatibilidad.

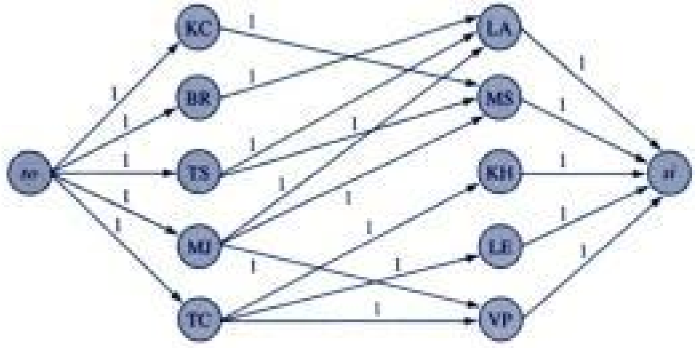


FIGURA 8
Red para casamentero

samentero forma parejas con KC y MS, BR y LA, MJ y VP, y TC y KH, se obtendría un flujo de 4 de la fuente al sumidero. (Esto resulta ser un flujo máximo para la red.)

Para ver por qué la representación de red modela correctamente el problema del casamentero, observe que debido a que el arco que une a cada mujer con el sumidero tiene una capacidad de 1, la conservación del flujo asegura que cada mujer formará pareja con, a lo sumo, un hombre. De manera similar, debido a que cada arco de la fuente a un hombre tiene una capacidad de 1, cada hombre puede formar pareja con a lo sumo una mujer. Debido a que no existen arcos entre parejas no compatibles, se puede asegurar que un flujo de *k* unidades de la fuente al sumidero representa una asignación de hombre a mujer en la que se crean *k* parejas compatibles.

Solución de problemas de flujo máximo con LINGO

Maxflow.lng

El flujo máximo en una red se puede encontrar por medio de LINDO, pero LINGO disminuye en gran medida el esfuerzo necesario para comunicar la información necesaria a la computadora. El siguiente programa de LINGO (en el archivo Maxflow.lng) se puede utilizar para encontrar el flujo máximo de la fuente al sumidero en la figura 6.

```
MODEL:
   1]SETS:
   2]NODES/1..5/;
   3]ARCS(NODES,NODES)/1,2  1,3  2,3  2,4  3,5  4,5  5,1/
   4]:CAP,FLOW;
   5]ENDSETS
   6]MAX=FLOW (5,1);
   7]@FOR(ARCS(I,J):FLOW(I,J)<CAP(I,J));
   8]@FOR(NODES(I):@SUM(ARCS(J,I):FLOW(J,I))
   9]=@SUM(ARCS(I,J):FLOW(I,J)));
  10]DATA:
  11]CAP=2,3,3,4,2,1,1000;
  12]ENDDATA
END
```

Si se utilizan números para identificar algunos nodos, entonces LINGO no le permitirá identificar otros nodos con nombres en los que intervienen letras. Así, se identificó el nodo 1 en la línea 2 con el nodo *so* en la figura 6 y el nodo 5 en la línea 2 con el nodo *si*. Asimismo, los nodos 1, 2 y 3 de la figura 6 corresponden a los nodos 2, 3 y 4, respectivamente, en la línea 2 del programa de LINGO. Así, la línea 2 define los nodos de la red de flujo. En la línea 3, se definen los arcos de la red listándolos (separados por espacios). Por ejemplo, 1, 2 representa el arco de la fuente al nodo 1 en la figura 6 y 5,1 es el arco artificial. En la línea 4, se indica que con cada arco se asocian una capacidad de arco y un flujo. La línea 5 termina la definición de los conjuntos relevantes.

En la línea 6, se indica que el objetivo es maximizar el flujo a través del arco artificial (esto iguala el flujo hacia el sumidero). La línea 7 especifica las restricciones de capacidad del arco: para cada arco, el flujo por el arco no puede exceder la capacidad del arco. Las líneas 8 y 9 crean la conservación de restricciones de flujo. Para cada nodo I, aseguran que el flujo hacia el nodo I es igual al flujo que sale del nodo I.

En la línea 10 comienza la sección DATA. En la línea 11, se introducen las capacidades de arco. Observe que se dio al arco artificial una gran capacidad de 1 000. En la línea 12 termina la sección DATA y la expresión **END** termina el programa. Al escribir GO se obtiene la solución, un flujo máximo de 3 descrito antes. Los valores de la variable FLOW (I,J) dan el flujo por cada arco.

Observe que este programa se puede utilizar para encontrar el flujo máximo en cualquier red. Comience por listar los nodos de la red en la línea 2. Luego liste los arcos de la red en la línea 3. Por último, liste la capacidad de cada arco en la red en la línea 11, ¡y ya se está listo para hallar el flujo máximo en la red!

Método de Ford-Fulkerson para resolver problemas de flujo máximo

Se supone que se encontró un flujo máximo (haciendo el flujo en cada arco igual a cero, se obtiene un flujo factible) y se pone atención a las siguientes preguntas importantes:

Pregunta 1 Dado un flujo factible, ¿cómo se puede decir si se trata de un flujo óptimo (es decir, maximiza x_0)?

Pregunta 2 Si un flujo factible es no óptimo, ¿cómo se modifica el flujo para obtener un nuevo flujo factible que tiene un flujo más grande de la fuente al sumidero?

Primero, contestamos la pregunta 2. Se determina cuáles de las propiedades siguientes posee cada arco en la red:

Propiedad 1 El flujo por el arco (i, j) está por debajo de la capacidad del arco (i, j). En este caso, se puede incrementar el flujo por el arco (i, j). Por esta razón, se permite que I represente el conjunto de arcos con esta propiedad.

Propiedad 2 El flujo en el arco (i, j) es positivo. En este caso, se puede reducir el flujo por el arco (i, j). Por esta razón, sea R el conjunto de arcos con esta propiedad.

Como una ilustración de las definiciones de I y R, considere la red de la figura 9. Los arcos en esta figura podrían clasificarse como sigue: $(so, 1)$ está en I y R; $(so, 2)$ están en I; $(1, si)$ está en R; $(2, si)$ está en I, y $(2, 1)$ está en I.

Ahora se puede escribir el procedimiento de marcado de Ford-Fulkerson utilizado para modificar un flujo factible en un esfuerzo por incrementar el flujo de la fuente al sumidero.

Paso 1 Etiquete la fuente.

Paso 2 Etiquete los nodos y los arcos (excepto el arco a_0) según las reglas siguientes: (1) si se marca el nodo x, entonces no se marca el nodo y, y el arco (x, y) es un miembro de I; luego marque el nodo y y el arco (x, y). En este caso, el arco (x, y) se llama **arco directo**. (2) Si no está marcado el nodo y, el nodo x está marcado y el arco (x, y) es un miembro de R; marque el nodo y y el arco (y, x). En este caso, (y, x) se conoce como **arco hacia atrás**.

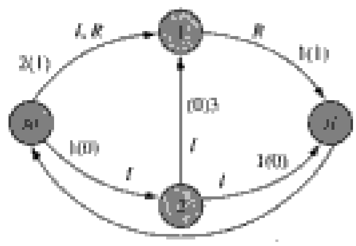


FIGURA 9
Ilustración de los arcos I y R

Paso 3 Continúe este proceso de marcado hasta que haya sido marcado el sumidero o hasta que no se pueda etiquetar más puntos extremos.

Si el proceso de etiquetado da como resultado el sumidero que está siendo etiquetado, entonces habrá una cadena de arcos etiquetados (llámela C) que va de la fuente al sumidero. Al ajustar el flujo de los arcos en C, se puede mantener un flujo factible e incrementar el flujo total de la fuente al sumidero. Para ver esto, observe que C debe consistir de uno de los siguientes casos:

Caso 1 C consiste por completo de arcos directos.

Caso 2 C contiene arcos directos e inversos.†

En cada caso, se obtiene un nuevo flujo factible que tiene un flujo más grande de la fuente al sumidero que el flujo factible actual. En el caso 1, la cadena C consiste por completo de arcos directos. Para cada arco directo en C, sea $i(x, y)$ la cantidad por la que el flujo en el arco (x, y) se puede incrementar sin violar la restricción de capacidad para el arco (x, y). Sea

$$k = \min_{(x,\ y)\in C} i(x, y)$$

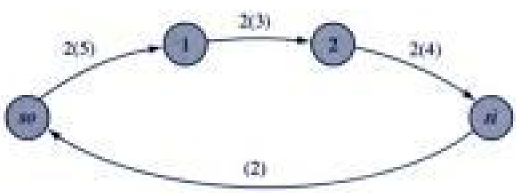
Entonces $k > 0$. Para crear un nuevo flujo, incremente el flujo a través de cada arco en C por k unidades. No se violan restricciones de capacidad y aún se mantiene la conservación de flujo. Así, el nuevo flujo es factible, y el nuevo flujo factible transportará k unidades adicionales de la fuente al sumidero de lo que lleva el flujo factible actual.

Se utiliza la figura 10 para ilustrar el cado 1. Actualmente, están siendo transportadas dos unidades de la fuente al sumidero. El proceso de etiquetado da como resultado el sumidero que está siendo etiquetado por la cadena $C = (so, 1) - (1, 2) - (2, si)$. Cada arco está en I, e $i(so, 1) = 5 - 2 = 3$; $i(1, 2) = 3 - 2 = 1$ e $i(2, si) = 4 - 2 = 2$. Por consiguiente, $k = \min(3, 1, 2) = 1$. Así, se puede obtener un flujo factible mejorado al incrementar el flujo en cada arco de C por 1 unidad. El flujo resultante transporta 3 unidades de la fuente al sumidero (véase la figura 11).

En el caso 2, la cadena C que va de la fuente al sumidero contiene arcos inversos y directos. Para cada arco inverso en C, sea $r(x, y)$ la cantidad por la que se puede reducir el flujo por el arco (x, y). Asimismo, defina

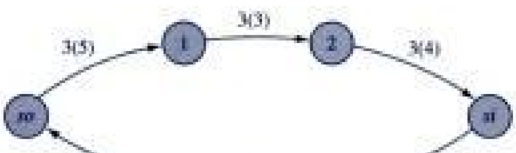
$$k_1 = \min_{x,\ y\in C\cap R} r(x, y) \quad \text{y} \quad k_2 = \min_{x,\ y\in C\cap I} i(x, y)$$

FIGURA 10
Ilustración del caso 1 del método de etiquetado



Flujo de la fuente al sumidero = 2
La cadena es (so, 1) — (1, 2) — (2, si)

FIGURA 11
Flujo mejorado de la fuente al sumidero: caso 1



Flujo de la fuente al sumidero = 3

†Debido a que se excluye el arco a_0 del procedimiento de etiquetado, ninguna cadena constituida por completo de arcos inversos puede llevar de la fuente al sumidero.

Por supuesto, tanto k_1 y k_2 y min (k_1, k_2) son > 0. Para incrementar el flujo de la fuente al sumidero (mientras se mantiene un flujo factible), disminuye por min (k_1, k_2) el flujo en todos los arcos inversos de C y se incrementa el flujo por todos los arcos directos de C por min (k_1, k_2). Esto mantendrá la conservación de flujo y asegurará que la restricción de capacidad del arco no sea violado. Debido a que el último arco en C es un arco directo orientado al sumidero, se ha encontrado un nuevo flujo factible, y se ha incrementado el flujo total hacia el sumidero en una cantidad de min (k_1, k_2). A continuación, se ajusta el flujo dentro del arco a_0 para mantener la conservación del flujo. Para ilustrar el caso 2, suponga que se encontró el flujo factible de la figura 12. Para este flujo, $(so, 1) \in R$; $(so, 2) \in I$; $(1, 3) \in I$; $(1, 2) \in I$ y R; $(2, si) \in R$; y $(3, si) \in I$.

Se empieza por etiquetar el arco $(so, 2)$ y el nodo 2 [así que $(so, 2)$ es un arco directo]. Luego se marca el arco (1, 2) y el nodo 1. El arco (1, 2) es un arco inverso, debido a que el nodo 1 no tenía etiqueta antes de etiquetar el arco (1, 2) y el arco (1, 2) está en R. Los nodos so, 1 y 2 están etiquetados, así que podemos etiquetar el arco (1, 3) y el nodo 3. [El arco (1, 3) es un arco directo, debido a que el nodo 3 no ha sido etiquetado todavía.] Por último, se etiqueta el arco $(3, si)$ y el nodo si. El arco $(3, si)$ es un arco directo, debido a que todavía no ha sido etiquetado el nodo si. Ahora ya se etiquetó el sumidero vía la cadena $C = (so, 2) - (1, 2) - (1, 3) - (3, si)$. Con excepción del arco (1, 2), los arcos de la cadena son directos. Debido a que $i(so, 2) = 3$; $i(1, 3) = 4$; $i(3, si) = 1$; y $r(1, 2) = 2$, se tiene

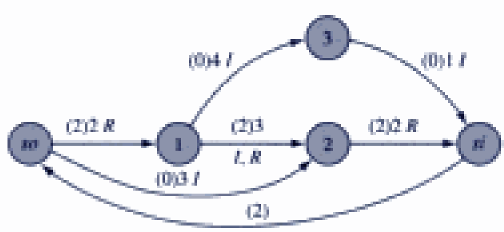
$$\min_{(x,\, y) \in C \cap R} r(x, y) = 2 \qquad \text{y} \qquad \min_{(x,\, y) \in C \cap I} i(x, y) = 1$$

Así, se puede incrementar el flujo en todos los arcos directos en C por 1 y disminuir el flujo en los arcos inversos por 1. El nuevo resultado, ilustrado en la figura 13, incrementó el flujo de la fuente al sumidero por 1 unidad (de 2 a 3). Esto se lleva a cabo desviando la unidad 1 que se transportó por el arco (1, 2) a la trayectoria $1-3-si$. Esto permite transportar una unidad extra de la fuente al sumidero vía la trayectoria $so-2-si$. Observe que el concepto de arco hacia atrás fue necesario para encontrar este flujo mejorado.

Si no se puede etiquetar el sumidero, entonces el flujo actual es óptimo. La demostración de este hecho depende del concepto de *corte* para una red.

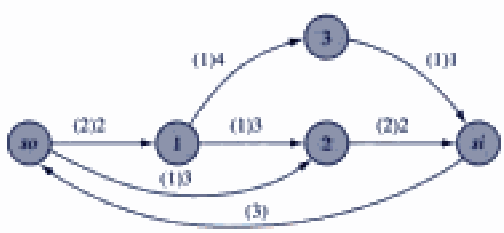
DEFINICIÓN ■ Elija cualquier conjunto de nodos V' que contiene el sumidero pero no contiene la fuente. Entonces el conjunto de arcos (i, j) con i que no pertenece a V' y j un miembro de V' es un **corte** para la red. ■

FIGURA 12
Ilustración del caso 2 del método de etiquetado



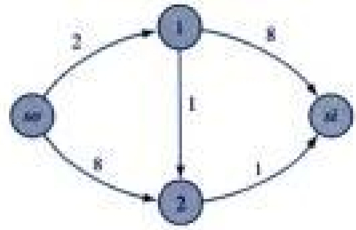
Flujo de la fuente al sumidero = 2
La cadena es $(so, 2) - (1, 2) - (1, 3) - (3, si)$

FIGURA 13
Flujo mejorado de la fuente al sumidero: caso 2



Flujo de la fuente al sumidero = 3

FIGURA 14
Ejemplo de un corte



$V' = \{1, si\}$ produce el corte $\{(so, 1), (2, si)\}$

DEFINICIÓN ■ La **capacidad** de un corte es la suma de las capacidades de los arcos en el corte. ■

En resumen, un corte es un conjunto de arcos cuya eliminación de la red hace imposible viajar de la fuente al sumidero. Una red podría tener muchos cortes. Por ejemplo, en la red de la figura 14, $V' = \{1, si\}$ produce el corte que contiene los arcos $(so, 1)$ y $(2, si)$, cuya capacidad es $2 + 1 = 3$. El conjunto $V' = \{1, 2, si\}$ produce el corte que contiene los arcos $(so, 1)$ y $(so, 2)$, cuya capacidad es $2 + 8 = 10$.

El lema 1 y el lema 2 indican la conexión entre cortes y flujos máximos.

LEMA 1

El flujo de la fuente al sumidero para cualquier flujo factible es menor o igual a la capacidad de *cualquier* corte.

Demostración Considere un corte arbitrario especificado por un conjunto de nodos V' que contiene al sumidero pero no contiene a la fuente. Sean V los otros nodos de la red. También, sea x_{ij} el flujo del arco (i, j) para cualquier flujo factible y f el flujo de la fuente al sumidero para este flujo factible. Suponiendo que las ecuaciones de balance de flujo (flujo que sale del nodo i − flujo que entra al nodo $i = 0$) sobre los nodos i en V, se encuentra que los términos en los que intervienen los arcos (i, j) que tienen i y j ambos miembros de V se cancelan, y se obtiene

$$\sum_{\substack{i \in V;\\ j \in V'}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in V';\\ j \in V}} x_{ij} = f \tag{3}$$

Ahora la primera suma en (3) es menor que o igual a la capacidad del corte. Cada x_{ij} es no negativa, entonces se observa que $f \leq$ capacidad del corte, que es el resultado deseado.

El lema 1 es análogo al resultado de dualidad débil analizado en el capítulo 6. Del lema 1, se observa que la capacidad de cualquier corte en una cota superior para el flujo máximo de la fuente al sumidero. Por consiguiente, si se puede encontrar un flujo factible y un corte para el cual el flujo de la fuente al sumidero es igual a la capacidad del corte, entonces se ha encontrado el flujo máximo de la fuente al sumidero.

Suponga que se encontró un flujo factible y no se puede etiquetar el sumidero. Sea CUT el corte que corresponde al conjunto de nodos no etiquetados.

LEMA 2

Si no se puede etiquetar el suministro, entonces

Capacidad de CUT = flujo actual de la fuente al sumidero

Demostración Sea V' el conjunto de nodos no etiquetados y V el conjunto de nodos etiquetados. Considere un arco (i, j) tal que i está en V y j está en V'. Entonces se sabe que x_{ij} = capacidad del arco (i, j) que se debe cumplir; de otro modo, se podría etiquetar el nodo j (vía un arco directo) y el nodo j podría no estar en V'. Ahora considere un arco (i, j) tal que i está en V' y j está en V. Entonces se debe cumplir x_{ij} = 0 de lo contrario, se podría etiquetar el nodo i (vía un arco inverso) y el nodo i podría no estar en V'. Ahora (3) muestra que se debe satisfacer el flujo actual

$$\text{Capacidad de CUT} = \text{flujo actual de la fuente al sumidero}$$

que es el resultado deseado.

De las observaciones del lema 1, cuando no se puede etiquetar el sumidero, se ha obtenido el flujo máximo de la fuente al sumidero.

Resumen e ilustración del método de Ford-Fulkerson

Paso 1 Encuentre un flujo factible (se tendrá que fijar en cero el flujo de cada arco).

Paso 2 Con el procedimiento de etiquetado, intente marcar el sumidero. Si esto no es posible, entonces el flujo factible actual es un flujo máximo; si está etiquetado el sumidero, entonces vaya al paso 3.

Paso 3 Con el método descrito antes, ajuste el flujo factible e incremente el flujo de la fuente al sumidero. Vuelva al paso 2.

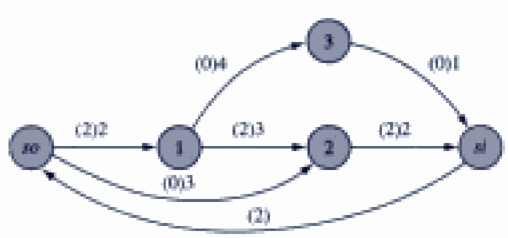
Para ilustrar el método de Ford-Fulkerson, encontremos el flujo máximo de la fuente al sumidero para Sunco Oil, ejemplo 3 (véase la figura 6). Se empieza por permitir que el flujo de cada arco sea igual a cero. Luego se intenta etiquetar el sumidero: etiquete la fuente y luego el arco (*so*, 1) y el nodo 1; después etiquete el arco (1, 2) y el nodo 2; por último, etiquete el arco (2, *si*) y el nodo *si*. Así, C = (so, 1)–(1, 2)–(2, *si*). Cada arco en C es un arco directo, de modo que se puede incrementar el flujo a través de cada arco en C por min (2, 3, 2) = 2 unidades. El flujo resultante se ilustra en la figura 15.

Como se vio antes (figura 12), se puede etiquetar el sumidero por medio de la cadena C = (*so*, 2)–(1, 2)–(1, 3)–(3, *si*). Se puede incrementar en 1 unidad el flujo por los arcos directos (*so*, 2), (1, 3), y (3, *si*) y disminuir en 1 unidad el flujo a través del arco inverso (1, 2). El flujo resultante se ilustra en la figura 16. Ahora es imposible etiquetar el sumidero. Cualquier intento por etiquetar el sumidero debe comenzar por marcar el arco (*so*, 2) y el nodo 2; entonces se podría marcar el arco (1, 2) y el arco (1, 3). Pero no hay forma de etiquetar el sumidero.

Se puede comprobar que el flujo actual es máximo determinando la capacidad del corte que corresponde al conjunto de puntos extremos (vértices) no etiquetados (en este caso, *si*). El corte correspondiente a *si* es el conjunto de arcos (2, *si*) y (3, *si*), con capacidad 2 + 1 = 3. Así, el lema 1 implica que cualquier flujo factible puede transportar a lo sumo 3 unidades de la fuente al sumidero. El flujo actual transporta 3 unidades de la fuente al sumidero, así que debe ser un flujo óptimo.

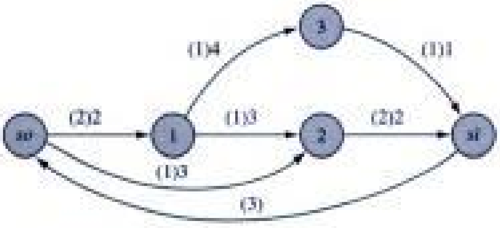
Otro ejemplo del método de Ford–Fulkerson se ilustra en la figura 17. Observe que sin el concepto de un arco inverso, se podría haber obtenido el flujo máximo de 7 unidades de

FIGURA 15
Red para Sunco Oil (flujo incrementado)



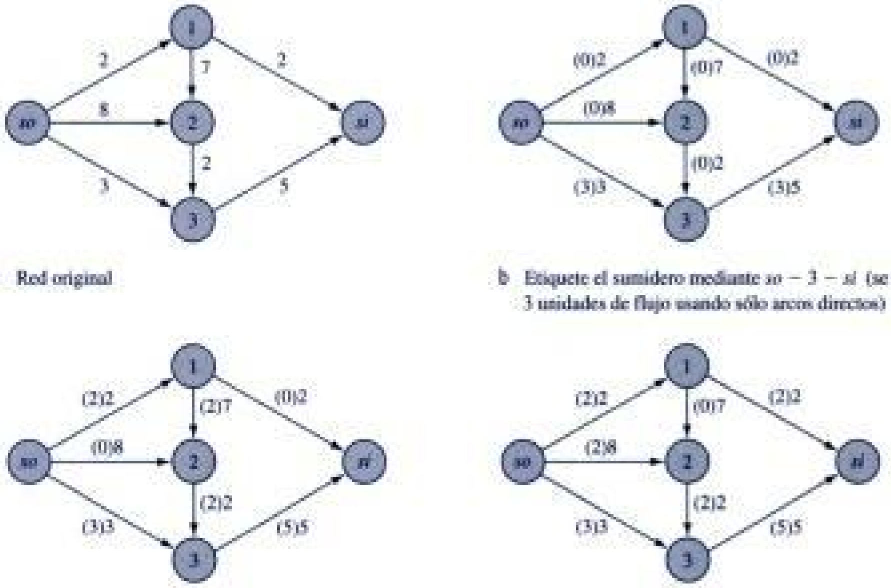
Flujo de la fuente al sumidero = 2
Etiquete el sumidero mediante (*so*, 2) – (1, 2) – (1, 3) – (3, *si*)

FIGURA 16
Red para Sunco Oil (flujo óptimo)



Flujo de la fuente al sumidero = 3
Puesto que no se puede etiquetar el sumidero, éste es un flujo óptimo

FIGURA 17
Ejemplo del metodo Ford-Fulkerson



a Red original

b Etiquete el sumidero mediante *so* − 3 − *si* (se agregan 3 unidades de flujo usando sólo arcos directos)

c Etiquete el sumidero mediante *so* − 1 − 2 − 3 − *si* (se agregan 2 unidades de flujo usando sólo arcos directos)

d Etiquete el sumidero con *so* − 2 − 1 − *si* (se agregan 2 unidades de flujo usando un arco inverso (1, 2); se obtuvo un flujo máximo de 7

la fuente al sumidero. El corte mínimo (con capacidad 7, por supuesto) corresponde a los nodos 1, 3 y *si* y consta de los arcos (*so*, 1), (*so*, 3) y (2, 3).

PROBLEMAS

Grupo A

1-3 Las figuras 18-20 muestran las redes para los problemas 1 a 3. Encuentre el flujo máximo de la fuente al sumidero en cada red. Encuentre un corte en la red cuya capacidad sea igual al flujo máximo en la red. También, prepare un PL que se pudiera usar para determinar el flujo máximo en la red.

FIGURA 18
Red para el problema 1

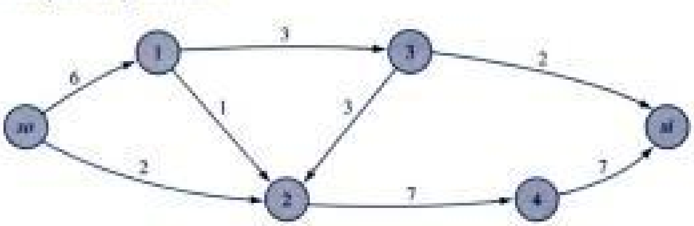


FIGURA 19
Red para el problema 2

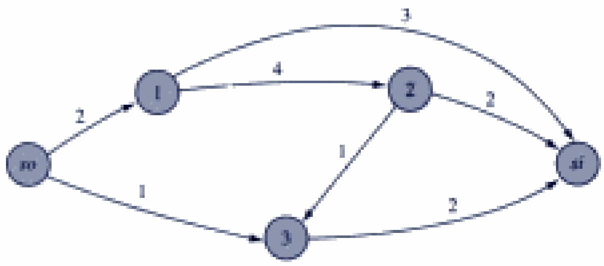


FIGURA 20
Red para el problema 3

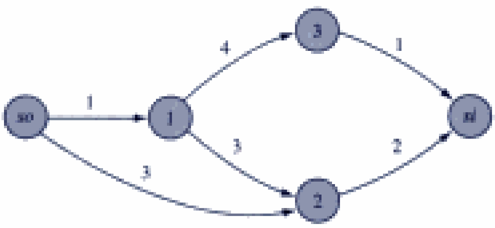


FIGURA 21
Red para el problema 4

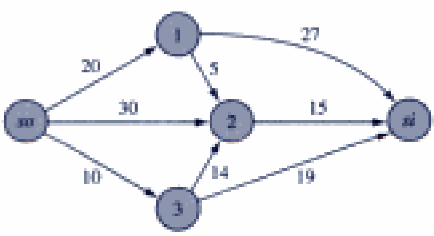
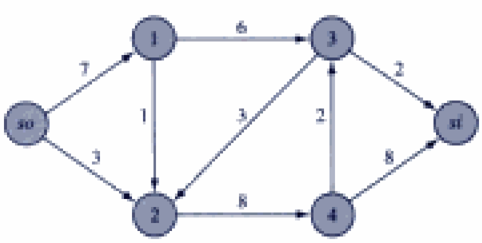


FIGURA 22
Red para el problema 5



4–5 Para las redes de las figuras 21 y 22, determine el flujo máximo de la fuente al sumidero. También encuentre un corte cuya capacidad es igual al flujo máximo en la red.

6 Cinco camiones entregan siete tipos de paquetes. Hay tres paquetes de cada tipo, y las capacidades de los cinco camiones son 6, 4, 5, 4 y 3 paquetes, respectivamente. Prepare un problema de flujo máximo que se puede usar para determinar si pueden cargarse los paquetes de modo que ningún camión lleve dos paquetes del mismo tipo.

7 Cuatro trabajadores están disponibles para efectuar las tareas 1 a 4. Desafortunadamente, tres trabajadores pueden hacer sólo ciertas tareas; el trabajador 1, sólo la tarea 1; el trabajador 2, sólo las tareas 1 y 2; el trabajador 3, sólo la tarea 2; el trabajador 4, cualquier tarea. Dibuje la red para el problema de flujo máximo que permita determinar si las tareas se pueden asignar a un trabajador adecuado.

8 Los Hatfields, los Montagues, los McCoys y los Capulets se van a su día de campo familiar anual. Se dispone de cuatro automóviles para transportar las familias. En los automóviles caben los siguientes números de personas: automóvil 1, cuatro; automóvil 2, tres; automóvil 3, tres, y automóvil 4, cuatro. Hay cuatro personas en cada familia, y ningún automóvil puede llevar más de dos personas de cualquier familia. Formule el problema de transportar el número máximo posible de personas al día de campo como un problema de flujo máximo.

9–10 Para las redes de las figuras 23 y 24, encuentre el flujo máximo de la fuente al sumidero. También encuentre un corte cuya capacidad sea igual al flujo máximo en la red.

Grupo B

11 Suponga que una red contiene un número finito de arcos y la capacidad de cada arco es un entero. Explique por qué con el método de Ford-Fulkerson se encuentra el flujo máximo en un número finito de pasos. También muestre que el flujo máximo de la fuente al sumidero será un entero.

12 Considere un problema de flujo en red con varias fuentes y varios sumideros en la que el objetivo es maximizar el flujo total en los sumideros. Muestre cómo tal problema se puede convertir en un problema de flujo máximo teniendo sólo una sola fuente y un solo sumidero.

FIGURA 23

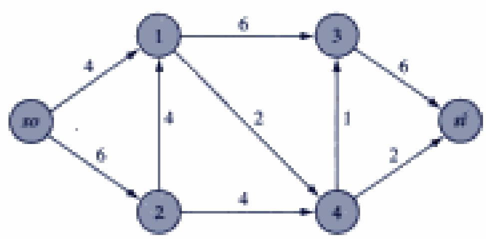
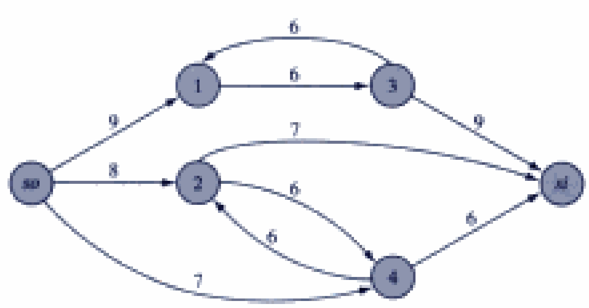


FIGURA 24



13 Suponga que el flujo total hacia un nodo de una red está restringido a 10 unidades o menos. ¿Cómo se representa esta restricción vía una restricción de capacidad de arco? (Esto aún permite usar el método de Ford-Fulkerson para determinar el flujo máximo.)

14 Suponga que unos 300 automóviles por hora viajan entre dos de las ciudades 1, 2, 3 y 4. Prepare un problema de flujo máximo que permita determinar cuántos automóviles se pueden enviar en las siguientes dos horas de la ciudad 1 a la ciudad 4. (*Sugerencia*: permita que las porciones de la red representen $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.)

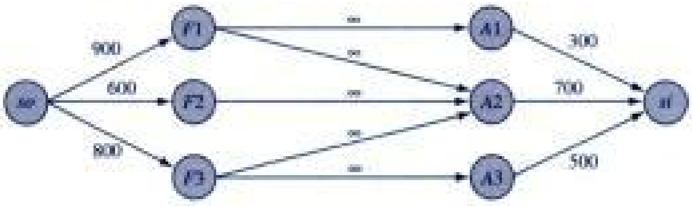
15 La aerolínea Fly-by-Night está considerando realizar tres vuelos. Los ingresos de cada vuelo y los aeropuertos utilizados por cada vuelo se muestran en la tabla 11. Cuando Fly-by-Night utiliza un aeropuerto, la compañía debe pagar las siguientes cuotas de aterrizaje (sin importar el número de vuelos que usen el aeropuerto): aeropuerto 1, $300; aeropuerto 2, $700; aeropuerto 3, $500. Así, si se hacen los vuelos 1 y 3, se obtendrá una ganancia de $900 + 800 - 300 - 700 - 500 = \$200$. Muestre que para la red de la figura 25 (ganancia máxima) = (ingresos totales de los vuelos) − (capacidad de corte mínimo). Explique cómo se podría usar este resultado para ayudar a Fly-by-Night a maximizar la ganancia (incluso si tiene cientos de vuelos posibles). [*Sugerencia*: considere cualquier conjunto de vuelos F (digamos, vuelos 1 y 3). Considere el corte que corresponde al sumidero, los nodos asociados con los vuelos que no están en F y los nodos asociados con los aeropuertos que no utiliza F. Muestre que (capacidad de este corte) = (ingresos de los vuelos que no están en F) + (Costos asociados en los aeropuertos utilizados por F).]

TABLA 11

Vuelo	Ingreso ($)	Aeropuerto utilizado
1	900	1 y 2
2	600	2
3	800	2 y 3

16 Durante los siguientes cuatro meses, una empresa constructora debe completar tres proyectos. El proyecto 1 debe completarse dentro de tres meses y requiere 8 meses de trabajo. El proyecto 2 se debe completar en cuatro meses y requiere 10 meses de trabajo. El proyecto 3 debe completarse al final de los 2 meses y requiere 12 meses de trabajo. Cada mes, están disponibles 8 trabajadores. Durante un mes, no más de 6 trabajadores pueden desempeñar una sola tarea. Formule un problema de flujo máximo que permita determinar si los tres proyectos se pueden completar a tiempo. (*Sugerencia*: si el flujo máximo de la red es 30, entonces los proyectos se completan a tiempo.)

FIGURA 25
Red para el problema 15



8.4 CPM y PERT

Los modelos de red se pueden utilizar como una ayuda en la programación de proyectos complejos de gran tamaño que consisten de muchas actividades. Si la duración de cada actividad se conoce con certeza, entonces el **método de la trayectoria crítica (CPM**, por sus siglas en inglés) se utiliza para determinar la longitud del tiempo requerido para completar el proyecto. El CPM también se utiliza par determinar cuánto se puede retardar cada actividad del proyecto sin retrasar la terminación del mismo. Investigadores de DuPont y Sperry Rand desarrollaron el CPM a finales de la década de 1950.

Si la duración de las actividades no se conoce con certeza, la técnica Program Evaluation Review Technique (PERT) se utiliza para estimar la probabilidad de que el proyecto se complete en una fecha específica. Asesores que trabajaban en el desarrollo del misil Polaris desarrollaron PERT a finales de la década de 1950. A CPM y PERT se les dio una mayor parte del crédito por el hecho de que el misil Polaris estuvo en operación dos años antes de lo programado.

CPM y PERT se han utilizado con éxito en muchas aplicaciones, entre otras:

1 Programación de proyectos de construcción, como edificios de oficinas, carreteras y albercas.

2 Programación del movimiento de un hospital de 400 camas de Portland, Oregon, a una ubicación suburbana.

3 Desarrollo de un procedimiento de conteo regresivo y procedimiento de "reserva" para el lanzamiento de vuelos espaciales.

4 Instalación de un nuevo sistema de computadora.

5 Diseño y comercialización de un nuevo producto.

6 Completar una fusión corporativa.

7 Construcción de una nave.

Para aplicar CPM y PERT, se necesita una lista de actividades que conformen el producto. Se considera que el proyecto está completo cuando se terminan todas las actividades. Para cada actividad, hay un conjunto de actividades (llamadas **predecesores** de la actividad) que deben completarse antes que comience la actividad. Un proyecto de red se utiliza para representar las relaciones de precedencia entre actividades. En este análisis, las actividades se representan por arcos directos, y los nodos se utilizan para representar la terminación de un conjunto de actividades. (Por esta razón, a menudo se hace referencia a los nodos del proyecto como **eventos.**) Este tipo de red de proyecto se llama red **AOA** (por sus siglas en inglés-**actividad en arco**).[†]

Para entender cómo una red AOA representa relaciones de precedencia, suponga que la actividad A es un predecesor de la actividad B. Cada nodo en una red AOA representa la terminación de una o más actividades. Así, el nodo 2 de la figura 26 representa la terminación de la actividad A y el comienzo de la actividad B. Suponga que las actividades A y B se deben completar antes que empiece la actividad C. En la figura 27, el nodo 3 representa el evento de que se completen las actividades A y B. En la figura 28 se muestra la actividad A como un predecesor de las actividades B y C.

Dada una lista de actividades y predecesores, una representación AOA de un proyecto (llamado una **red de proyecto** o **diagrama de proyecto**) se puede construir por medio de las reglas siguientes:

1 El nodo 1 representa el comienzo del proyecto. Un arco debe llevar desde el nodo 1 para representar cada actividad que no tiene predecesores.

FIGURA 26
La actividad A debe completarse antes que comience la actividad B

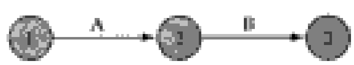


FIGURA 27
Las actividades A y B se deben completar antes que comience la actividad C

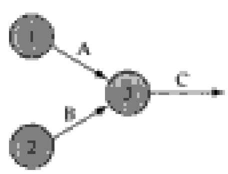
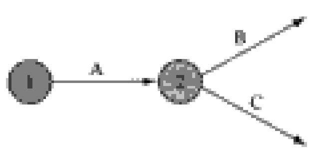


FIGURA 28
La actividad A se debe completar antes que comiencen las actividades B y C



[†]En una red de proyecto AON (actividad en el nodo), los nodos de la red se utilizan para representar las actividades. Véanse los detalles en Wiest y Levy (1977).

FIGURA 29
Violación de la regla 5

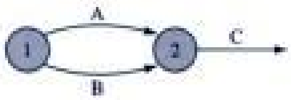
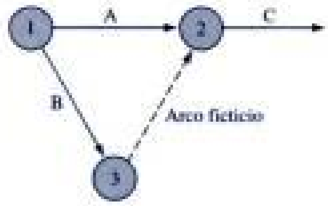


FIGURA 30
Uso de la actividad ficticia



2 Se debe incluir en la red un nodo (llamado **nodo de terminación**) que represente la terminación del proyecto.

3 Numere los nodos de la red de modo que el nodo que representa la terminación de una actividad siempre tenga un número más grande que el nodo que representa el comienzo de una actividad (es posible que haya más de un esquema de numeración que satisfaga la regla 3).

4 Una actividad no se debe representar por más de un arco en la red.

5 Dos nodos pueden estar conectados por más de un arco.

Para evitar violar las reglas 4 y 5, a veces es necesario utilizar una **actividad ficticia** que lleva el tiempo a cero. Por ejemplo, suponga que las actividades A y B son predecesoras de la actividad C y pueden comenzar al mismo tiempo. En ausencia de la regla 5, esto se podría representar por la figura 29. Sin embargo, debido a que los nodos 1 y 2 están conectados por más de un arco, la figura 29 viola la regla 5. Por medio de una actividad ficticia (indicada por un arco de línea discontinua), como en la figura 30, se podría representar el hecho de que A y B son predecesores de C. La figura 30 asegura que la actividad C no puede comenzar hasta que se completan A y B, pero esto no viola la regla 5. El problema 10 al final de esta sección ilustra cuán necesarias podrían ser las actividades ficticias para evitar violar la regla 4.

En el ejemplo 6 se ilustra una red de proyecto.

EJEMPLO 6 Cómo trazar una red de proyecto

Widgetco está a punto de introducir un nuevo producto (producto 3). Una unidad del producto 3 se produjo ensamblando 1 unidad del producto 1 y una unidad del producto 2. Antes que comience la producción del producto 1 o 2, se debe comprar las materias primas y capacitar a los trabajadores. Antes de poder ensamblar los productos 1 y 2 en el producto 3, es necesario inspeccionar el producto terminado 2. La tabla 12 es una lista de actividades y sus predecesores y de la duración de cada actividad. Para esto dibuje un diagrama de proyecto.

TABLA 12
Duración de actividades y relaciones predecesoras para Widgetco

Actividad	Predecesores	Duración (días)
A = capacitar a los trabajadores	—	6
B = comprar materias primas	—	9
C = producir el producto 1	A, B	8
D = producir el producto 2	A, B	7
E = probar el producto 2	D	10
F = ensamblar los productos 1 y 2	C, E	12

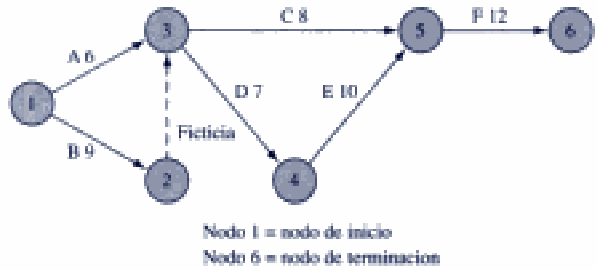


FIGURA 31
Diagrama de proyecto para Widgetco

Solución Observe que aunque sólo se listan C y E como predecesores de F, en realidad es cierto que las actividades A, B y D también deben completarse antes que comience F. Sin embargo, C puede comenzar hasta que se completan A y B, y E no puede empezar hasta que se completa D, así que es redundante expresar que A, B y D son predecesores de F. Así, para dibujar la red de proyecto, sólo es necesario interesarse en los predecesores inmediatos de cada actividad.

La red AOA para este proyecto se da en la figura 31 (el número arriba de cada arco representa la duración de la actividad en días). El nodo 1 es el comienzo del proyecto, y el nodo 6 es el nodo que representa la terminación del proyecto. El arco ficticio (2, 3) es necesario para asegurar que no se viola la regla 5.

Los dos componentes clave en CPM para un evento son los conceptos de tiempo inicial (ET) y el tiempo tardío (LT) de evento.

DEFINICIÓN ■ El **tiempo de evento inicial** para el nodo i, representado por $ET(i)$, es el primer momento en que ocurre el evento que corresponde al nodo i. ■

El **tiempo de evento tardío** para el nodo i, representado por $LT(i)$, es el último momento en que puede ocurrir un evento que corresponde al nodo i sin retrasar la terminación del proyecto. ■

Cálculo del tiempo de evento inicial

Para encontrar el tiempo de evento inicial de cada nodo en la red de proyecto, se empieza por observar que debido a que el nodo 1 representa el comienzo del proyecto, $ET(1) = 0$. Luego se calcula $ET(2)$, $ET(3)$, etcétera, deteniéndose cuando se calculó ET(nodo de terminación). Para ilustrar cómo se calcula $ET(i)$, supóngase que para el segmento de una red de proyecto en la figura 32, ya se determinó que $ET(3) = 6$, $ET(4) = 8$, y $ET(5) = 10$. Para determinar $ET(6)$, observe que el tiempo más próximo en que puede ocurrir el nodo 6 es cuando se completaron las actividades que corresponden al arco (3, 6), (4, 6) y (5, 6).

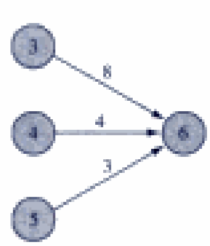


FIGURA 32
Determinación de $ET(6)$

$$ET(6) = \max \begin{cases} ET(3) + 8 = 14 \\ ET(4) + 4 = 12 \\ ET(5) + 3 = 13 \end{cases}$$

Así, el tiempo más próximo en que ocurre el nodo 6 es 14, y $ET(6) = 14$.

A partir de este ejemplo, resulta claro que el cálculo de $ET(i)$ requiere (para $j < i$) conocer uno o más de los $ET(j)$. Esto explica por qué se comienza por los ET predecesores. En general, si ya se determinaron $ET(1), ET(2), \ldots, ET(i-1)$, entonces $ET(i)$ se calcula como sigue:

Paso 1 Encuentre cada evento anterior al nodo i que esté conectado mediante un arco al nodo i. Estos eventos son **predecesores inmediatos** del nodo i.

Paso 2 Para el ET de cada predecesor inmediato del nodo i agregue la duración de la actividad que conecta el predecesor inmediato al nodo i.

Paso 3 $ET(i)$ es igual al máximo de las sumas calculadas en el paso 2.

Ahora se calcula el $ET(i)$ para el ejemplo 6. Se comienza por observar que $ET(1) = 0$. El nodo 1 es el único predecesor inmediato del nodo 2, así que $ET(2) = ET(1) + 9 = 9$. Los predecesores inmediatos del nodo 3 son los nodos 1 y 2. Así,

$$ET(3) = \max \begin{cases} ET(1) + 6 = 6 \\ ET(2) + 0 = 9 \end{cases} = 9$$

El único predecesor inmediato del nodo 4 es el nodo 3. Por consiguiente, $ET(4) = ET(3) + 7 = 16$. Los predecesores inmediatos del nodo 5 son los nodos 3 y 4. Así,

$$ET(5) = \max \begin{cases} ET(3) + \ \ 8 = 17 \\ ET(4) + 10 = 26 \end{cases} = 26$$

Por último, el nodo 5 es el único predecesor inmediato del nodo 6. Entonces, $ET(6) = ET(5) + 12 = 38$. Debido a que el nodo 6 representa la terminación del proyecto, se ve que el tiempo más próximo en que se puede ensamblar el producto 3 es 38 días a partir de ahora.

Se puede demostrar que $ET(i)$ es la longitud de la trayectoria más larga en la red de proyecto del nodo 1 al nodo i.

Cálculo del tiempo de evento tardío

Para calcular los $LT(i)$, se empieza con el nodo final y se trabaja hacia atrás (en orden numérico descendente) hasta que se determina $LT(1)$. El proyecto del ejemplo 6 se puede completar en 38 días, entonces se sabe que $LT(6) = 38$. Para ilustrar cómo se calcula $LT(i)$ para los nodos distintos al nodo final, supóngase que se está trabajando con una red (figura 33) para la cual ya de determinó que $LT(5) = 24$, $LT(6) = 26$ y $LT(7) = 28$. En esta situación, ¿cómo se calcula $LT(4)$? Si el evento que corresponde al nodo 4 ocurre después de $LT(5) - 3$, el nodo 5 ocurrirá después de $LT(5)$, y se retrasará la terminación del proyecto.

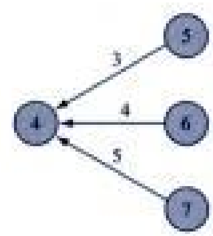


FIGURA 33
Cálculo de $LT(4)$

De manera similar, si el nodo 4 ocurre después de $LT(6) - 4$ o si el nodo 4 ocurre después de $LT(7) - 5$, se retrasará la terminación del proyecto. Así,

$$LT(4) = \min \begin{cases} LT(5) - 3 = 21 \\ LT(6) - 4 = 22 = 21 \\ LT(7) - 5 = 23 \end{cases}$$

En general, si se conoce $LT(j)$ para $j > i$, se puede encontrar $LT(i)$ como sigue:

Paso 1 Encuentre cada nodo que ocurre después del nodo i y está conectado al nodo i por un arco. Estos eventos son los **sucesores inmediatos** del nodo i.

Paso 2 A partir del LT para cada sucesor inmediato al nodo i, reste la duración de la actividad que une al sucesor con el nodo i.

Paso 3 $LT(i)$ es la más pequeña de las diferencias determinadas en el paso 2.

Ahora se calculan los $LT(i)$ para el ejemplo 6. Recuerde que $LT(6) = 38$. Debido a que el nodo 6 es el único sucesor inmediato del nodo 5, $LT(5) = LT(6) - 12 = 26$. El único sucesor inmediato del nodo 4 es el nodo 5. Así, $LT(4) = LT(5) - 10 = 16$. Los nodos 4 y 5 son sucesores inmediatos del nodo 3. Así,

$$LT(3) = \min \begin{cases} LT(4) - 7 = 9 \\ LT(5) - 8 = 18 \end{cases}$$

El nodo 3 es el único sucesor inmediato del nodo 2. Entonces, $LT(2) = LT(3) - 0 = 9$. Por último, el nodo 1 tiene a los nodos 2 y 3 como sucesores inmediatos. Así,

$$LT(1) = \min \begin{cases} LT(3) - 6 = 3 \\ LT(2) - 9 = 0 \end{cases}$$

Los cálculos para el ejemplo 6 se resumen en la tabla 13. Si $LT(i) = ET(i)$, cualquier retardo en la ocurrencia del nodo i retrasará la terminación del proyecto. Por ejemplo, debido a que $LT(4) = ET(4)$, cualquier retardo en la ocurrencia del nodo 4 retrasará la terminación del proyecto.

Tiempo libre total

Antes de que se empiece el proyecto, se desconoce la duración de la actividad, y la duración de cada actividad utilizada para construir la red de proyecto es sólo una estimación del tiempo de terminación real de la actividad. El concepto de tiempo libre total es una actividad que se puede utilizar como una medida de cuán importante es evitar que la duración de cada actividad exceda en gran medida la estimación de su tiempo de terminación.

TABLA 13
ET y LT para Widgetco

Nodo	$ET(i)$	$LT(i)$
1	0	0
2	9	9
3	9	9
4	16	16
5	26	26
6	38	38

DEFINICIÓN ■ Para un arco arbitrario que representa la actividad (i, j), el **tiempo libre total**, representado por $TF(i, j)$, de la actividad representada por (i, j) es la cantidad por la que se podría retrasar el tiempo de inicio de la actividad (i, j) más allá de su tiempo de inicio más próximo posible sin retrasar la terminación del proyecto (suponiendo que ninguna otra actividad se retrasa). ■

De manera equivalente, el tiempo libre total de una actividad es la cantidad por la que se puede incrementar la duración de la actividad sin retardar la terminación del proyecto.

Si definimos t_{ij} como la duración de la actividad (i, j), entonces $TF(i, j)$ se expresa fácilmente en términos de $LT(j)$ y $ET(i)$. La actividad (i, j) comienza en el nodo i. Si la ocurrencia del nodo i, o la duración de la actividad (i, j), se retarda por k unidades de tiempo, entonces la actividad (i, j) se completará en el tiempo $ET(i) + k + t_{ij}$. Así, la terminación del proyecto no se retardará si

$$ET(i) + k + t_{ij} \leq LT(j) \qquad \text{o} \qquad k \leq LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

Por consiguiente,

$$TF(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

Para el ejemplo 6, los $TF(i, j)$ son como sigue:

Actividad B: $TF(1, 2) = LT(2) - ET(1) - 9 = 0$
Actividad A: $TF(1, 3) = LT(3) - ET(1) - 6 = 3$
Actividad D: $TF(3, 4) = LT(4) - ET(3) - 7 = 0$
Actividad C: $TF(3, 5) = LT(5) - ET(3) - 8 = 9$
Actividad E: $TF(4, 5) = LT(5) - ET(4) - 10 = 0$
Actividad F: $TF(5, 6) = LT(6) - ET(5) - 12 = 0$
Actividad ficticia: $TF(2, 3) = LT(3) - ET(2) - 0 = 0$

Determinación de una trayectoria crítica

Si una actividad tiene un tiempo libre total de cero, entonces cualquier retraso en el comienzo de la actividad (o la duración de la actividad) retardará la terminación del proyecto. De hecho, incrementar Δ días la duración de una actividad aumentará Δ días la duración del proyecto. Esta clase de actividad es crítica para la terminación del proyecto a tiempo.

DEFINICIÓN ■ Cualquier actividad con un tiempo libre total de cero es una **actividad crítica**. ■

Una trayectoria del nodo 1 al nodo de terminación que consiste por completo en actividades críticas se llama **trayectoria crítica**. ■

En la figura 31, las actividades B, D, E, F y la actividad ficticia son actividades críticas, y la trayectoria 1−2−3−4−5−6 es la trayectoria crítica (es posible que una red tenga más de una trayectoria crítica). Una trayectoria crítica en cualquier red de proyecto es la trayectoria más larga desde el nodo de inicio al nodo de terminación (véase el problema 2 en la sección 8.5).

Cualquier retardo en la duración de una actividad crítica retardará la terminación del proyecto, así que es recomendable vigilar de cerca la terminación de actividades críticas.

Tiempo libre

Como ya se vio, el tiempo libre total de una actividad se puede utilizar como una medida de la flexibilidad en la duración de una actividad. Por ejemplo, la actividad A puede tomar hasta 3 días más de su duración programada de 6 días sin retrasar la terminación del proyecto. Otra medida de la flexibilidad disponible en la duración de una actividad es el tiempo libre u holgura.

DEFINICIÓN ■ El **tiempo libre** de la actividad que corresponde al arco (i, j), denotado por $FF(i, j)$, es la cantidad por la que el tiempo de inicio de la actividad que corresponde al arco (i, j) (o la duración de la actividad) se puede retrasar sin retardar el inicio de cualquier actividad posterior más allá de su tiempo de inicio más próximo posible. ■

Supóngase que la ocurrencia del nodo i, o la duración de la actividad (i, j), se retrasa por k unidades. Entonces lo más pronto que puede ocurrir el nodo j es $ET(i) + t_{ij} + k$. Así, si $ET(i) + t_{ij} + k \leq ET(j)$, o $k \leq ET(j) - ET(i) - t_{ij}$, entonces no se retarda el nodo j. Si no se retarda el nodo j, entonces ninguna otra actividad se retarda más allá de su tiempo de inicio posible más próximo. Por consiguiente,

$$FF(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}$$

Para el ejemplo 6, los $FF(i, j)$ son como sigue:

$$\begin{aligned}
&\text{Actividad B:} \quad FF(1, 2) = 9 - 0 - 9 = 0\\
&\text{Actividad A:} \quad FF(1, 3) = 9 - 0 - 6 = 3\\
&\text{Actividad D:} \quad FF(3, 4) = 16 - 9 - 7 = 0\\
&\text{Actividad C:} \quad FF(3, 5) = 26 - 9 - 8 = 9\\
&\text{Actividad E:} \quad FF(4, 5) = 26 - 16 - 10 = 0\\
&\text{Actividad F:} \quad FF(5, 6) = 38 - 26 - 12 = 0
\end{aligned}$$

Por ejemplo, debido a que el tiempo libre para la actividad C son 9 días, un retraso en el inicio de la actividad C (o en la ocurrencia del nodo 3), o un retardo en la duración de la actividad C de más de nueve días, retardará el inicio de alguna actividad posterior (en este caso, la actividad F).

Uso de la programación lineal para hallar una trayectoria crítica

Aunque el método descrito antes para hallar una trayectoria crítica en una red de proyecto se programa fácilmente en una computadora, la programación lineal también se puede utilizar para determinar la longitud de la trayectoria crítica. Se define

$$x_j = \text{tiempo en el que ocurre el evento que corresponde al nodo } j$$

Para cada actividad (i, j), se sabe que antes que ocurra el nodo j, debe ocurrir el nodo i y se debe completar la actividad (i, j). Esto significa que para cada arco (i, j) en la red de proyecto, $x_j \geq x_i + t_{ij}$. Sea F el nodo que representa la terminación del proyecto. El objetivo es minimizar el tiempo requerido para completar el proyecto, así que se usa una función objetivo de $z = x_F - x_1$.

A fin de ilustrar cómo se usa la programación lineal para hallar la longitud de la trayectoria crítica, se aplica el método anterior al ejemplo 6. El PL apropiado es

$$\begin{aligned}
\min z &= x_6 - x_1 \\
\text{s.a} \quad x_3 &\geq x_1 + 6 \qquad \text{(Restricción del arco (1, 3))}\\
x_2 &\geq x_1 + 9 \qquad \text{(Restricción del arco (1, 2))}\\
x_5 &\geq x_3 + 8 \qquad \text{(Restricción del arco (3, 5))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_4 &\geq x_3 + 7 && \text{(Restricción del arco (3, 4))}\\
x_5 &\geq x_4 + 10 && \text{(Restricción del arco (4, 5))}\\
x_6 &\geq x_5 + 12 && \text{(Restricción del arco (5, 6))}\\
x_3 &\geq x_2 && \text{(Restricción del arco (2, 3))}
\end{aligned}
$$

Variable nrs

Una solución óptima para este PL es $z = 38$, $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = 9$, $x_4 = 16$, $x_5 = 26$, y $x_6 = 38$. Esto indica que el proyecto se puede completar en 38 días.

Este PL tiene muchas otras soluciones óptimas. En general, el valor de x_i en cualquier solución óptima podría asumir cualquier valor entre $ET(i)$ y $LT(i)$. Sin embargo, las soluciones óptimas para este PL indicarán que la duración de cualquier trayectoria crítica es 38 días.

Una trayectoria crítica para esta red de proyecto consiste en una trayectoria del inicio del proyecto a la terminación en la que cada arco de la trayectoria corresponde a una restricción que tiene un precio dual de -1. A partir del resultado de LINDO en la figura 34, se encuentra, como antes, que 1–2–3–4–5–6 es una trayectoria crítica. Para cada restricción con un precio dual de -1, incrementar Δ días la duración de la actividad que corresponde a esa restricción incrementa Δ días la duración del proyecto. Por ejemplo, un incremento de Δ días en la duración de la actividad B incrementará Δ días la duración del proyecto. Esto da por hecho que la base actual es óptima.

Aceleración del proyecto

En muchas situaciones, el administrador del proyecto debe completarlo en un tiempo menor a la duración de la trayectoria crítica. Por ejemplo, suponga que Widgetco cree que tiene alguna oportunidad de ser un éxito, el producto 3 debe estar disponible en el mercado antes que el del competidor. Widgetco sabe que el producto del competidor está programado para que aparezca en el mercado 26 días a partir de ahora, así que Widgetco debe introducir el producto 3 dentro de 25 días. Debido a que la trayectoria crítica del ejemplo 6 tiene una duración de 38 días, Widgetco tendrá que gastar más recursos para cumplir con la fecha límite del proyecto de 25 días. En esta situación, la programación lineal se utiliza a menudo para determinar la asignación de recursos que minimiza el costo de satisfacer la fecha límite del proyecto.

Supóngase que al asignar recursos adicionales a una actividad, Widgetco reduce la duración de cualquier actividad por unos cinco días. El costo por día de reducir la duración de una actividad se muestra en la tabla 14. Para hallar el costo mínimo de completar el proyecto por la fecha límite de 25 días, defina las variables A, B, C, D, E y F como sigue:

A = número de días por los que se reduce la duración de la actividad F

$\vdots \qquad \vdots$

F = número de días por los que se reduce la duración de la actividad F

x_j = tiempo en que ocurre el evento que corresponde al nodo j

Entonces Widgetco debe resolver la siguiente PL:

$$
\begin{aligned}
\min z &= 10A + 20B + 3C + 30D + 40E + 50F\\
\text{s.a}\quad & A \leq 5\\
& B \leq 5\\
& C \leq 5\\
& D \leq 5\\
& E \leq 5\\
& F \leq 5
\end{aligned}
$$

```
MIN      X6 - X1
 SUBJECT TO
        2) - X1 + X3 >=  6
        3) - X1 + X2 >=  9
        4) - X3 + X5 >=  8
        5) - X3 + X4 >=  7
        6)   X5 - X4 >=  10
        7)   X6 - X5 >=  12
        8)   X3 - X2 >=  0
 END

     LP OPTIMUM FOUND  AT STEP     7

          OBJECTIVE FUNCTION VALUE

 1)          38.0000000

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
        X6        38.000000          0.000000
        X1         0.000000          0.000000
        X3         9.000000          0.000000
        X2         9.000000          0.000000
        X5        26.000000          0.000000
        X4        16.000000          0.000000

    ROW      SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         3.000000          0.000000
        3)         0.000000         -1.000000
        4)         9.000000          0.000000
        5)         0.000000         -1.000000
        6)         0.000000         -1.000000
        7)         0.000000         -1.000000
        8)         0.000000         -1.000000

 NO. ITERATIONS=       7

    RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                           OBJ COEFFICIENT RANGES
 VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE          DECREASE
        X6        1.000000       INFINITY           0.000000
        X1       -1.000000       INFINITY           0.000000
        X3        1.000000       INFINITY           0.000000
        X2        1.000000       INFINITY           0.000000
        X5        1.000000       INFINITY           0.000000
        X4        1.000000       INFINITY           0.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
    ROW           CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                    RHS          INCREASE          DECREASE
         2        6.000000         3.000000         INFINITY
         3        9.000000       INFINITY           3.000000
         4        8.000000         9.000000         INFINITY
         5        7.000000       INFINITY           9.000000
         6       10.000000       INFINITY           9.000000
         7       12.000000       INFINITY          38.000000
         8        0.000000       INFINITY           3.000000
```

FIGURA 34
Resultado de LINDO para Widgetco

TABLA 14

A	B	C	D	E	F
$10	$20	$3	$30	$40	$50

$$
\begin{array}{ll}
x_2 \geq x_1 + 9 - B & \text{(Restricción del arco (1, 2))} \\
x_3 \geq x_1 + 6 - A & \text{(Restricción del arco (1, 3))} \\
x_5 \geq x_3 + 8 - C & \text{(Restricción del arco (3, 5))} \\
x_4 \geq x_3 + 7 - D & \text{(Restricción del arco (3, 4))} \\
x_5 \geq x_4 + 10 - E & \text{(Restricción el arco (4, 5))} \\
x_6 \geq x_5 + 12 - F & \text{(Restricción del arco (5, 6))} \\
x_3 \geq x_2 + 0 & \text{(Restricción del arco (2, 3))} \\
x_6 - x_1 \leq 25 & \\
\quad A, B, C, D, E, F \geq 0, x_j \text{nrs} &
\end{array}
$$

Las primeras seis restricciones estipulan que la duración de cada actividad se puede reducir a lo sumo 5 días. Como antes, las siguientes siete restricciones aseguran que el evento j no puede ocurrir hasta después que ocurre el nodo i y se completa la actividad (i, j). Por ejemplo, la actividad B (arco (1, 2)) ahora tiene una duración de $9 - B$. Así, se necesita la restricción $x_2 \geq x_1 + (9 - B)$. La restricción $x_6 - x_1 \leq 25$ asegura que el proyecto se complete dentro de la fecha límite de 25 días. La función objetivo es el costo total en que se incurre al reducir la duración de las actividades. Una solución óptima para este PL es $z = \$390$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 13$, $x_6 = 25$, $A = 2$, $B = 5$, $C = 0$, $D = 5$, $E = 3$, $F = 0$. Después de reducir las duraciones de los proyectos B, A, D y E por las cantidades especificadas, se obtiene la red de proyecto ilustrada en la figura 35. El lector debe verificar que A, B, D, E y F son actividades críticas y que 1–2–3–4–5–6 y 1–3–4–5–6 son trayectorias críticas (cada una con una duración de 25). Así, la fecha límite del proyecto de 25 días se puede satisfacer por un costo de \$390.

Uso de LINGO para determinar la trayectoria crítica

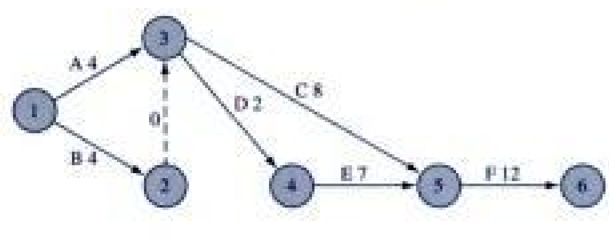
Widget1.lng

Muchos paquetes de computadora (como Microsoft Proyect) permiten al usuario determinar (¡entre otras cosas!) la(s) trayectoria(s) crítica(s) y las actividades críticas en una red de proyecto. Siempre se puede encontrar una trayectoria crítica y las actividades críticas por medio de LINDO, pero LINGO facilita transmitir la información necesaria a la computadora. El siguiente programa de LINGO (archivo Widget1.lng) genera la función objetivo y las restricciones necesarias para encontrar la trayectoria crítica para la red de proyecto del ejemplo 6 vía programación lineal.

```
MODEL:
   1]SETS:
   2]NODES/1..6/:TIME;
   3]ARCS(NODES,NODES)/
   4]1,2  1,3  2,3  3,4  3,5  4,5   5,6/:DUR;
   5]ENDSETS
   6]MIN=TIME(6)-TIME(1);
   7]@FOR(ARCS(I,J):TIME(J)>TIME(I)+DUR(I,J));
   8]DATA:
   9]DUR=9,6,0,7,8,10,12;
  10]ENDDATA
END
```

La línea 1 comienza la porción SETS del programa. En la línea 2, se definen los seis nodos de la red de proyecto y con cada nodo se asocia un tiempo en que ocurren los eventos que corresponden al nodo. Por ejemplo, TIME(3) representa el tiempo cuando se han

FIGURA 35
Duración de actividades después de la aceleración



```
MIN    -ET(1 + ET(6
SUBJECT TO
2)- ET(1 + ET(2 >=  9
3)- ET(1 + ET(3 >=  6
4)- ET(2 + ET(3 >=  0
5)- ET(3 + ET(4 >=  7
6)- ET(3 + ET(5 >=  8
7)- ET(4 + ET(5 >=  10
8)- ET(5 + ET(6 >=  12
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      6
OBJECTIVE VALUE =   38.0000000

                    VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
                      ET( 1)     0.0000000E+00     0.0000000E+00
                      ET( 2)       9.000000        0.0000000E+00
                      ET( 3)       9.000000        0.0000000E+00
                      ET( 4)       16.00000        0.0000000E+00
                      ET( 5)       26.00000        0.0000000E+00
                      ET( 6)       38.00000        0.0000000E+00
                  DUR( 1, 2)       9.000000        0.0000000E+00
                  DUR( 1, 3)       6.000000        0.0000000E+00
                  DUR( 2, 3)     0.0000000E+00     0.0000000E+00
                  DUR( 3, 4)       7.000000        0.0000000E+00
                  DUR( 3, 5)       8.000000        0.0000000E+00
                  DUR( 4, 5)       10.00000        0.0000000E+00
                  DUR( 5, 6)       12.00000        0.0000000E+00

                         ROW    SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICE
                           1       38.00000          1.000000
                           2     0.0000000E+00      -1.000000
                           3       3.000000        0.0000000E+00
                           4     0.0000000E+00      -1.000000
                           5     0.0000000E+00      -1.000000
                           6       9.000000        0.0000000E+00
                           7     0.0000000E+00      -1.000000
                           8     0.0000000E+00      -1.000000
```

FIGURA 36

completado las actividades A y B. En la línea 3, se generan loa arcos de la red de proyecto listándolos (separados por espacios). Por ejemplo, el arco (3, 4) representa la actividad D. En la línea 4, se asocia una duración (DUR) de cada actividad con cada arco. La línea 5 termina la sección SETS del programa.

La línea 6 especifica el objetivo, para minimizar el tiempo que le toma completar el proyecto. Para cada arco definido en la línea 3, la línea 7 crea una restricción análoga a $x_j \geq x_i + t_{ij}$.

La línea 8 comienza la sección DATA del programa. En la línea 9, se lista la duración de cada actividad. La línea 10 concluye la entrada de datos y la expresión **END** concluye el programa. El resultado de este modelo de LINGO se da en la figura 36, donde siguiendo los arcos que corresponden a las restricciones que tienen precios duales de -1, se encuentra que la trayectoria crítica es 1–2–3–4–5–6.

Para encontrar la trayectoria crítica en cualquier red, se empezaría por listar los nodos, arcos y el tiempo que duran las actividades en el programa. Luego se modificaría la función objetivo creada por la línea 6 para reflejar el número de nodos en la red. Por ejemplo, si hubiera 10 nodos en la red de proyecto, se cambiaría la línea 6 a **MIN** = TIME(10)− TIME(1); y ¡eso sería todo!

Widget2.lng

El siguiente programa de LINGO (archivo Widget2.lng) permite al usuario determinar la trayectoria crítica y el tiempo libre total en cada nodo para el ejemplo 6 sin usar programación lineal.

```
MODEL:
  1]MODEL:
  2]SETS:
  3]NODES/1..6/:ET,LT;
  4]ARCS(NODES,NODES)/1,2   1,3   2,3   3,4   3,5   4,5   5,6/:DUR,TFLOAT;
  5]ENDSETS
  6]DATA:
  7]DUR = 9,6,0,7,8,10,12;
```

```
 8]ENDDATA
 9]ET(1)=0;
10]@FOR(NODES(J) | J#GT#1:
11]ET(J) = @MAX(ARCS(I,J): ET(I)+DUR(I,J)););
12]LNODE=@SIZE(NODES);
13]LT(LNODE) = ET(LNODE);
14]@FOR(NODES(I) | I#LT#LNODE:
15]LT(I) = @MIN(ARCS(I,J): LT(J) - DUR(I,J)););
16]@FOR(ARCS(I,J):TFLOAT(I,J)=LT(J)-ET(I)-DUR(I,J));
END
```

En la línea 3, se definen los nodos de la red de proyecto y se asocia un tiempo de evento inicial (ET) y un tiempo de evento tardío (LJ) con cada nodo. Se definen los arcos de la red de proyecto, listándolos en la línea 4. Con cada arco se asocia la duración de la actividad del arco y el tiempo libre total de la actividad. En la línea 7, se introduce la duración de cada actividad.

Para comenzar el cálculo de los ET(J) para cada nodo, se establece ET(1) = 0 en la línea 9. En las líneas 10−11, se calcula ET(J) para los otros nodos. Para J > 1 ET(J) es el valor máximo de ET(I) + DUR(I, J) para todo (I, J) tal que (I, J) es un arco en la red. Por medio de la función **@SIZE**, que devuelve el número de elementos en un conjunto, se identifica el nodo de terminación en la red en la línea 12. Así, la línea 12 define al nodo 6 como el último nodo. En la línea 13, se establece LT(6) = ET(6). Las líneas 14-15 funcionan hacia atrás desde el nodo 6 hacia el nodo 1 para calcular los LT(I). Para todo nodo I distinto al último nodo (6), LT(I) es el mínimo de LT(J) − DUR(I, J), donde el mínimo se toma en todo (I, J) tal que (I, J) es un arco en la red de proyecto.

Por último, la línea 16 calcula el tiempo libre total para cada actividad (I, J) a partir del tiempo total libre para la actividad (I, J) = LT(Nodo J) − ET(Nodo I) − Duración (I, J). Todas las actividades cuyo tiempo libre total es igual a 0 son actividades críticas.

Después de introducir una lista de nodos, arcos y duraciones de actividad, este programa se puede usar para analizar cualquier red de proyecto (sin cambiar ninguna de las líneas 9 a 16). También es fácil escribir un programa de LINGO que se pueda usar para acelerar la red (véase el problema 14).

PERT: Evaluación del programa y Técnica de evaluación

CPM supone que la duración de cada actividad se conoce con certeza. Para muchos proyectos, esto claramente no es aplicable. PERT es un intento por corregir esta deficiencia de CPM modelando la duración de cada actividad como una variable aleatoria. Para cada actividad, PERT requiere que el administrador de proyecto estime las tres cantidades siguientes:

a = estimación de la duración de la actividad en las condiciones más favorables

b = estimación de la duración de la actividad en las condiciones menos favorables

m = valor más probable para la duración de la actividad

Sea $\mathbf{T}_{ij}$ (las variables aleatorias se imprimen en negrita) la duración de la actividad (i, j). PERT requiere la suposición de que $\mathbf{T}_{ij}$ sigue una distribución beta. La definición específica de una distribución beta no debe preocuparnos, pero es importante entender que ésta puede aproximar una amplia variedad de variables aleatorias, entre otras muchas variables aleatorias sesgadas, sesgadas negativamente y simétricas. Si $\mathbf{T}_{ij}$ sigue una distribución beta, entonces se puede demostrar que la media y la varianza de $\mathbf{T}_{ij}$ se podría aproximar por

$$E(\mathbf{T}_{ij}) = \frac{a + 4m + b}{6} \tag{4}$$

$$\text{var}\mathbf{T}_{ij} = \frac{(b - a)^2}{36} \tag{5}$$

PERT requiere la suposición de que las duraciones de las actividades son independientes. Entonces para cualquier trayectoria en la red de proyecto, la media y la varianza del tiempo requerido para completar las actividades de la trayectoria están dadas por

$$\sum_{(i,\ j)\in \text{trayectoria}} E(\mathbf{T}_{ij}) = \text{duración esperada de las actividades en cualquier trayectoria} \tag{6}$$

$$\sum_{(i,\ j)\in \text{trayectoria}} \text{var}\mathbf{T}_{ij} = \text{varianza de la duración de actividades en cualquier trayectoria} \tag{7}$$

Sea **CP** la variable aleatoria que denota la duración total de las actividades en una trayectoria crítica encontrada por CPM. PERT supone que la trayectoria crítica encontrada por CPM contiene suficientes actividades que permiten invocar el Teorema del límite central y concluir que

$$\mathbf{CP} = \sum_{(i,\ j)\in \text{trayectoria crítica}} \mathbf{T}_{ij}$$

Está normalmente distribuida. Con esta suposición, (4)−(7) se pueden usar para contestar preguntas relacionadas con la probabilidad de que el proyecto se complete en una fecha específica. Por ejemplo, supóngase que para el ejemplo 6, *a*, *b* y *m* para cada actividad se muestran en la tabla 15. Ahora con (4) y (5), se obtiene

$$E(\mathbf{T}_{12}) = \frac{\{5 + 13 + 36\}}{6} = 9 \qquad \text{var}\mathbf{T}_{12} = \frac{(13 - 5)^2}{36} = 1.78$$

$$E(\mathbf{T}_{13}) = \frac{\{2 + 10 + 24\}}{6} = 6 \qquad \text{var}\mathbf{T}_{13} = \frac{(10 - 2)^2}{36} = 1.78$$

$$E(\mathbf{T}_{35}) = \frac{\{3 + 13 + 32\}}{6} = 8 \qquad \text{var}\mathbf{T}_{35} = \frac{(13 - 3)^2}{36} = 2.78$$

$$E(\mathbf{T}_{34}) = \frac{\{1 + 13 + 28\}}{6} = 7 \qquad \text{var}\mathbf{T}_{34} = \frac{(13 - 1)^2}{36} = 4$$

$$E(\mathbf{T}_{45}) = \frac{\{8 + 12 + 40\}}{6} = 10 \qquad \text{var}\mathbf{T}_{45} = \frac{(12 - 8)^2}{36} = 0.44$$

$$E(\mathbf{T}_{56}) = \frac{\{9 + 15 + 48\}}{6} = 12 \qquad \text{var}\mathbf{T}_{56} = \frac{(15 - 9)^2}{36} = 1$$

Por supuesto, el hecho de que el arco (2, 3) sea un arco ficticio, da como resultado

$$E(\mathbf{T}_{23}) = \text{var } \mathbf{T}_{23} = 0$$

Recuerde que la trayectoria crítica para el ejemplo 6 fue 1–2–3–4–5–6. De las ecuaciones (6) y (7),

$$E(\mathbf{CP}) = 9 + 0 + 7 + 10 + 12 = 38$$
$$\text{var}\mathbf{CP} = 1.78 + 0 + 4 + 0.44 + 1 = 7.22$$

Entonces la desviación estándar para **CP** es $(7.22)^{1/2} = 2.69$.

TABLA 15
***a*, *b* y *m* para las actividades en Widgetco**

Actividad	*a*	*b*	*m*
(1, 2)	5	13	9
(1, 3)	2	10	6
(3, 5)	3	13	8
(3, 4)	1	13	7
(4, 5)	8	12	10
(5, 6)	9	15	12

Aplicando la suposición de que **CP** está normalmente distribuida, se pueden contestar preguntas como la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que el proyecto se complete en 35 días? Para contestar esta pregunta, se debe hacer también la siguiente suposición: *sin importar cuáles resulten ser las duraciones de las actividades del proyecto, 1-2-3-4-5-6 será una trayectoria crítica.* Esta suposición implica que la probabilidad del proyecto se complete en 35 días es $P(\mathbf{CP} \leq 35)$. Estandarizando y aplicando la suposición de que **CP** está normalmente distribuida, se encuentra que **Z** es una variable aleatoria normal estandarizada con media 0 y varianza 1. La función de distribución acumulativa para una variable aleatoria normal se tabula en la tabla 16. Por ejemplo, $P(\mathbf{Z} \leq -1) = 0.1587$ y $P(\mathbf{Z} \leq 2) = 0.9772$. Así,

$$P(\mathbf{CP} \leq 35) = P\left(\frac{\mathbf{CP} - 38}{2.69} \leq \frac{35 - 38}{2.69}\right) = P(\mathbf{Z} \leq -1.12) = .13$$

donde $F(-1.12) = .13$ se podría obtener por medio de la distribución NORMSDIST en Excel. Introduciendo la fórmula NORMSDIST(x) se obtiene la probabilidad de que una variable aleatoria normal estándar con media 0 y desviación estándar 1 sea menor o igual a x. Por ejemplo con = NORMDIST(−1.12) se obtiene .1313.

Dificultades con PERT

Hay varias dificultades con PERT:

1 Es difícil justificar la suposición de que las duraciones de actividad sean independientes.

2 Las duraciones de actividad pueden no seguir una distribución beta.

3 Es posible que no se justifique la suposición de que la trayectoria crítica encontrada mediante CPM siempre será la trayectoria crítica para el proyecto.

La última dificultad es la más importante. Por ejemplo, en el análisis del ejemplo 6, se supuso que 1–2–3–4–5–6 siempre sería la trayectoria crítica. Sin embargo, si la actividad A tuviera un retraso significativo y la actividad B se completara antes de lo programado, entonces la trayectoria crítica podría ser 1–3–4–5–6.

A continuación se da un ejemplo más concreto del hecho de que (debido a la duración incierta de las actividades) la trayectoria crítica encontrada mediante CPM pudiera no ser en realidad la trayectoria que determina la fecha de terminación del proyecto. Considere la red de proyecto simple de la figura 37. Suponga que para cada actividad de la tabla 16, a,

TABLA 16
***a*, *b* y *m* para la figura 37**

Actividad	*a*	*b*	*m*
A	1	9	5
B	6	14	10
C	5	7	6
D	7	9	8

FIGURA 37
Red de proyecto para ilustrar las dificultades con PERT

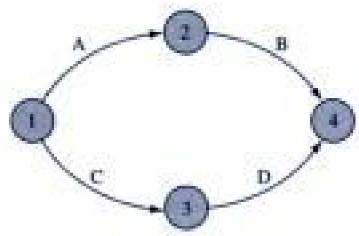


FIGURA 38
Red para determinar la trayectoria crítica si cada duración de actividad es igual a m

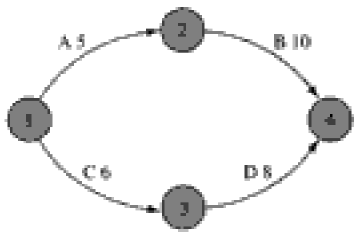


TABLA 17
Probabilidad de que cada arco esté en una trayectoria crítica

Actividad	Probabilidad
A	$\frac{17}{27}$
B	$\frac{17}{27}$
C	$\frac{12}{27}$
D	$\frac{12}{27}$

b y m ocurren cada una con probabilidad $\frac{1}{3}$. Si se aplicara CPM (usando la duración esperada de cada actividad como la duración de la actividad), entonces se obtendría la red de la figura 38. Para esta red, la trayectoria crítica es 1–2–4. Sin embargo, en realidad la trayectoria crítica podría ser 1–3–4. Por ejemplo, si ocurriera la duración optimista de B (6 días) y las otras actividades tuvieran una duración m, entonces 1–3–4 sería la ruta crítica de la red. Suponiendo que las cuatro actividades son variables aleatorias independientes, entonces con probabilidad elemental (véase el problema 11 al final de esta sección), se demuestra que hay una probabilidad de $\frac{10}{27}$ de que 1–3–4 sea la trayectoria crítica, una probabilidad $\frac{15}{27}$ de que 1–2–4 sea la trayectoria crítica y una probabilidad de $\frac{2}{27}$ de que 1–2–4 y 1–3–4 sean las trayectorias críticas. En este ejemplo se observa que se debe tener precaución en designar una actividad como crítica. En esta situación, la probabilidad de que cada arco sea en realidad una actividad crítica se muestra en la tabla 17.

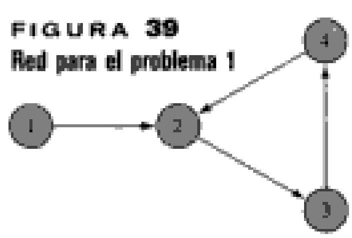
Cuando la duración de las actividades es incierta, la mejor manera de analizar un proyecto es usar un programa de ayuda de simulación de Monte Carlo para Excel. En el capítulo 23, se muestra cómo usar el programa de ayuda de Excel @Risk para llevar a cabo simulaciones de Monte Carlo. Con @Risk, se puede determinar fácilmente la probabilidad de que un proyecto se complete a tiempo y determinar la probabilidad de que cada actividad sea crítica.

PROBLEMAS

Grupo A

1 ¿Qué problema surgiría si la red de la figura 39 fuera una porción de una red de proyecto?

FIGURA 39
Red para el problema 1



2 Una compañía está planeando fabricar un producto que consiste en tres partes (A, B y C). La compañía anticipa que toma 5 semanas diseñar las tres partes y determinar la forma en que se deben ensamblar estas partes para conformar el producto. Entonces la compañía estima que tomará 4 semanas hacer la parte A, 5 semanas la parte B y 3 semanas la parte C. La compañía debe probar la parte A después de su terminación (esto toma dos semanas). Así, el proceso de la línea de ensamblado procederá como sigue: ensamblar las partes A y B (dos semanas) y luego añadir la parte C (una semana). Luego el producto final debe experimentar una semana de prueba. Trace la red de proyecto y encuentre

la trayectoria crítica, el tiempo libre total y el tiempo libre para cada actividad. También prepare el PL que pudiera ser utilizado para determinar la trayectoria crítica.

Al determinar la trayectoria crítica en los problemas 3 y 4, suponga que m = duración de la actividad.

3 Considere la red de proyecto de la figura 40. Para cada actividad, se dan las estimaciones de a, b y m en la tabla 18. Determine la trayectoria crítica para esta red, el tiempo libre total para cada actividad, el tiempo libre para cada actividad y la probabilidad de que el proyecto se complete en 40 días. También prepare un PL que se puede utilizar para encontrar la trayectoria crítica.

4 El promotor de un concierto de rock en Indianápolis debe llevar a cabo las tareas mostradas en la tabla 19 antes de celebrar el concierto (las duraciones están en días).

a Trace la red del proyecto.

b Determine la trayectoria crítica.

c Si el promotor anticipado quiere tener una probabilidad de 99% de completar las preparaciones el 30 de junio, ¿cuándo debe comenzar el trabajo de hallar un sitio para el concierto?

d Prepare el PL que puede ser usado encontrar el proyecto de trayectoria crítica.

5 Considere la lista (simplificada) de actividades y predecesores en relación con la construcción de una casa (tabla 20).

FIGURA 40
Red para el problema 3

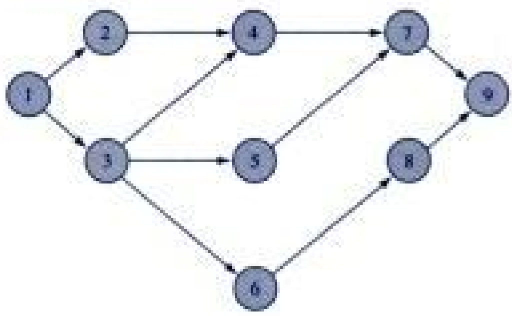


TABLA 18

Actividad	a	b	m
(1, 2)	4	8	6
(1, 3)	2	8	4
(2, 4)	1	7	3
(3, 4)	6	12	9
(3, 5)	5	15	10
(3, 6)	7	18	12
(4, 7)	5	12	9
(5, 7)	1	3	2
(6, 8)	2	6	3
(7, 9)	10	20	15
(8, 9)	6	11	9

TABLA 19

Actividad	Descripción	Predecesores inmediatos	a	b	m
A	Encontrar el sitio	—	2	4	3
B	Encontrar a los ingenieros	A	1	3	2
C	Contratar el acto de apertura	A	2	10	6
D	Poner anuncios de radio y TV	C	1	3	2
E	Preparar agentes de boletos	A	1	5	3
F	Preparar lo relacionado con la electrónica	B	2	4	3
G	Imprimir anuncios	C	3	7	5
H	Organizar el transporte	C	0.5	1.5	1
I	Ensayos	F, H	1	2	1.5
J	Detalles de último minuto	I	1	3	2

TABLA 20

Actividad	Descripción	Predecesores inmediatos	Duración (días)
A	Construir la cimentación	—	5
B	Construir paredes y plafones	A	8
C	Construir el techo	B	10
D	Hacer la instalación eléctrica	B	5
E	Colocar ventanas	B	4
F	Revestir las paredes externas	E	6
G	Pintar la casa	C, F	3

a Trace una red de proyecto, determine la trayectoria crítica, encuentre el tiempo libre total para cada actividad y determine el tiempo libre para cada actividad.

b Suponga que si se contrata a más trabajadores, se reduce la duración de cada actividad. Los costos por día de reducir la duración de las actividades se dan en la tabla 21. Escriba un PL por resolver para minimizar el costo total de completar el proyecto dentro de 20 días.

6 Horizon Cable está a punto de expandir sus ofertas de TV por cable en Smalltown agregando MTV y otras estaciones excitantes. Las actividades de la tabla 22 se deben completar antes de terminar el servicio de expansión.

a Dibuje la red de proyecto y determine la trayectoria crítica para la red, el tiempo libre total para cada actividad y el tiempo libre de cada actividad.

b Prepare un PL que se pueda usar para encontrar la trayectoria crítica del proyecto.

7 Cuando una empresa de contabilidad audita una corporación, la primera fase de la auditoría tiene que ver con obtener "conocimiento del negocio". Esta fase de la auditoría requiere las actividades de la tabla 23.

a Trace la red de proyecto y determine la trayectoria crítica para la red, el tiempo libre total para cada actividad y el tiempo libre de cada actividad. También prepare un PL que se pueda usar para determinar la trayectoria crítica del proyecto.

TABLA 21

Actividad	Costo por día de reducir la duración de la actividad	Redución máxima posible en la duración de la actividad (días)
Cimentación	30	2
Paredes y plafones	15	3
Techo	20	1
Cableado eléctrico	40	2
Ventanas	20	2
Revestimiento	30	3
Pintura	40	1

TABLA 22

Actividad	Descripción	Predecesores inmediatos	Duración (semanas)
A	Elegir estaciones	—	2
B	Conseguir que el ayuntamiento apruebe la expansión	A	4
C	Ordenar los convertidores necesarios para expandir el servicio	B	3
D	Instalar nuevas antenas para recibir nuevas estaciones	B	2
E	Instalar convertidores	C, D	10
F	Convertir el sistema de facturación	B	4

TABLA 23

Actividad	Descripción	Predecesores inmediatos	Duración (días)
A	Determinar los términos de participación	—	3
B	Evaluar el riesgo de controlabilidad y la importancia	A	6
C	Identificación de tipo de transacciones y errores posibles	A	14
D	Descripción de sistemas	C	8
E	Verificación de descripción de sistemas	D	4
F	Evaluación de controles internos	B, E	8
G	Diseño del método de auditoria	F	9

b Suponga que el proyecto se debe completar en 30 días. La duración de cada actividad se puede reducir al incurrir en los costos mostrados en la tabla 24. Formule un PL que permite minimizar el costo de satisfacer la fecha límite del proyecto.

8 El resultado de LINDO de la figura 41 se puede usar para determinar la trayectoria crítica para el problema 5. Utilice este resultado para hacer lo siguiente:

TABLA 24

Actividad	Costo por día de reducir la duración de la actividad ($)	Reducción máxima posible en la duración de la actividad (días)
A	100	3
B	80	4
C	60	5
D	70	2
E	30	4
F	20	4
G	50	4

FIGURA 41
Resultado de LINDO para el problema 8

```
MIN      X6 - X1
    SUBJECT TO
           2) - X1 + X2 >=  5
           3) - X2 + X3 >=  8
           4) - X3 + X4 >=  4
           5) - X3 + X5 >=  10
           6) - X4 + X5 >=  6
           7)   X6 - X3 >=  5
           8)   X6 - X5 >=  3
    END

      LP OPTIMUM FOUND  AT STEP      6

           OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)         26.0000000

    VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
           X6      26.000000          0.000000
           X1       0.000000          0.000000
           X2       5.000000          0.000000
           X3      13.000000          0.000000
           X4      17.000000          0.000000
           X5      23.000000          0.000000

        ROW      SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
           2)       0.000000         -1.000000
           3)       0.000000         -1.000000
           4)       0.000000         -1.000000
           5)       0.000000          0.000000
           6)       0.000000         -1.000000
           7)       8.000000          0.000000
           8)       0.000000         -1.000000

    NO. ITERATIONS=       6


  RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED

                            OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE          CURRENT        ALLOWABLE           ALLOWABLE
                    COEF         INCREASE            DECREASE
      X6         1.000000        INFINITY            0.000000
      X1        -1.000000        INFINITY            0.000000
      X2         0.000000        INFINITY            0.000000
      X3         0.000000        INFINITY            0.000000
      X4         0.000000        INFINITY            0.000000
      X5         0.000000        INFINITY            0.000000

                           RIGHTHAND SIDE RANGES
ROW              CURRENT        ALLOWABLE           ALLOWABLE
                   RHS          INCREASE            DECREASE
            2     5.000000      INFINITY             5.000000
            3     8.000000      INFINITY            13.000000
            4     4.000000       0.000000            8.000000
            5    10.000000      INFINITY             0.000000
            6     6.000000       0.000000            8.000000
            7     5.000000       8.000000          INFINITY
            8     3.000000      INFINITY             8.000000
```

a Trace el diagrama de proyecto.

b Determine la longitud de la trayectoria crítica y las actividades críticas para este proyecto.

9 Explique por qué el tiempo libre de una actividad nunca puede ser mayor que el tiempo libre total de la actividad.

10 Un proyecto está completo cuando se terminan las actividades A–E. Los predecesores de cada actividad se muestran en la tabla 25. Trace el diagrama de proyecto apropiado. (*Sugerencia*: no viole la regla 4.)

11 Determine las probabilidades de que 1–2–4 y 1–3–4 sean trayectorias críticas para la figura 37.

12 Dada información de la tabla 26, (**a**) trace la red de proyecto apropiada y (**b**) determine la trayectoria crítica.

13 El gobierno va a construir una computadora de alta velocidad en Austin, Texas. Una vez que esté diseñada la computadora (D), se puede seleccionar el sitio exacto (S), el contratista de construcción (C) y el personal operativo (P). Una vez seleccionado el sitio, se empieza a erigir el edificio (B). Se empieza por construir la computadora (COM) y preparar el manual de operaciones (M) sólo después de seleccionar el contratista. Se puede empezar con la capacitación de los operadores de la computadora (T) cuando se terminen el manual de operación y la selección de personal. Cuando estén terminados la computadora y el edificio, se podría instalar la computadora (I). Entonces se considera operacional a la computadora. Trace una red de proyecto que se pudiera utilizar para determinar cuándo es operacional el proyecto.

14 Escriba un programa de LINGO que se pueda usar para acelerar la red de proyecto del ejemplo 6 con los costos de aceleramiento mostrados en la tabla 14.

15 Considere el diagrama del proyecto en la figura 42. Este proyecto debe terminarse en 90 días. El tiempo requerido para completar cada actividad se puede reducir hasta en cinco días a costos dados en la tabla 27.

Formule un PL cuya solución permita minimizar el costo de completar el proyecto en 90 días.

16–17 Determine la trayectoria crítica, el tiempo libre total y el tiempo libre para cada actividad en las redes de proyecto de las figuras 43 y 44.

TABLA 25

Actividad	Predecesores
A	—
B	A
C	A
D	B
E	B, C

TABLA 26

Actividad	Predecesores inmediatos	Duración (días)
A	—	3
B	—	3
C	—	1
D	A, B	3
E	A, B	3
F	B, C	2
G	D, E	4
H	E	3

FIGURA 42

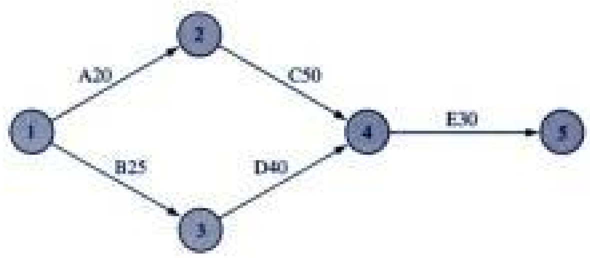


TABLA 27

Actividad	Costo de reducir la duración de las actividades por un día ($)
A	300
B	200
C	350
D	260
E	320

FIGURA 43

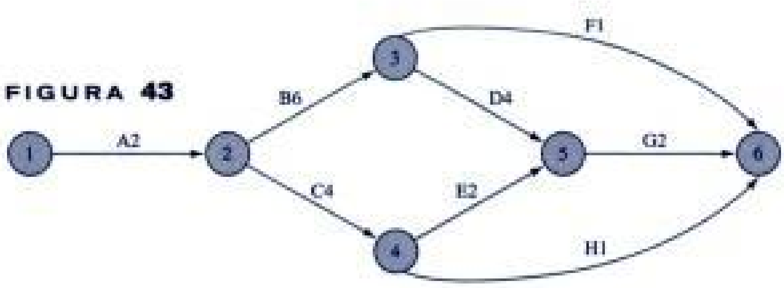
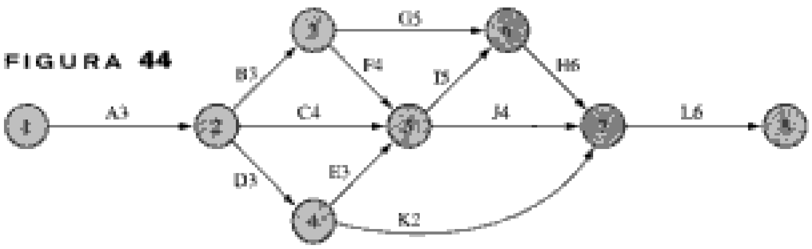


FIGURA 44



8.5 Red de costo mínimo para problemas de flujo

Los problemas de transporte, asignación, transbordo, trayectoria más corta, flujo máximo y CPM son casos especiales del problema de red de costo mínimo (FMOCM). Cualquier FMOCM se puede resolver mediante una generalización del simplex de transporte llamado **simplex de red**.

Para definir un FMOCM, sea

x_{ij} = número de unidades de flujo enviadas del nodo i al nodo j por el arco (i, j)

b_i = suministro neto (flujo saliente − flujo entrante) al nodo i

c_{ij} = costo de transportar 1 unidad del flujo del nodo i al nodo j vía el arco (i, j)

L_{ij} = límite inferior del flujo por el arco (i, j)
(si no hay límite inferior, sea $L_{ij} = 0$)

U_{ij} = límite superior del flujo por el arco (i, j)
(si no hay límite superior, sea $U_{ij} = \infty$)

Entonces el FMOCM se puede escribir como

$$\min \sum_{\text{todos los arcos}} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i \qquad \text{(para cada nodo } i \text{ en la red)} \qquad (8)$$

$$L_{ij} \le x_{ij} \le U_{ij} \qquad \text{(para todo arco de la red)} \qquad (9)$$

Las restricciones (8) estipulan que el flujo neto que sale del nodo i debe ser igual a b_i. Las restricciones (8) se conocen como **ecuaciones de balance de flujo** para la red. Las restricciones (9) aseguran que el flujo por cada arco satisface las restricciones de capacidad del arco. En los ejemplos anteriores, se estableció que $L_{ij} = 0$.

Se mostrará que los problemas de transporte y flujo máximo son casos especiales del problema de flujo de red de costo mínimo.

Formulación de un problema de transporte como un FMOCM

Considere el problema de transporte de la tabla 28. Los nodos 1 y 2 son los dos puntos de suministro, y los nodos 3 y 4 son los dos puntos de demanda. Entonces $b_1 = 4$, $b_2 = 5$, $b_3 = -6$ y $b_4 = -3$. La red que corresponde a este problema de transporte contiene los arcos (1, 3), (1, 4), (2, 3) y (2, 4) (véase la figura 45). El PL para este problema de transporte se podría escribir como se muestra en la tabla 29.

Las dos primeras restricciones son las restricciones de suministro, y las dos últimas restricciones son (después de multiplicarlas por −1) las restricciones de demanda. Debido a que este problema de transporte no tiene restricciones de capacidad de arco, las ecuaciones de balance de flujo son las únicas restricciones. Se observa que si no estuviera equili-

TABLA 28

1	2	4 (Node 1)
3	4	5 (Node 2)
6 (Node 3)	3 (Node 4)	

FIGURA 45
Representación del problema de transporte como un FMOCM

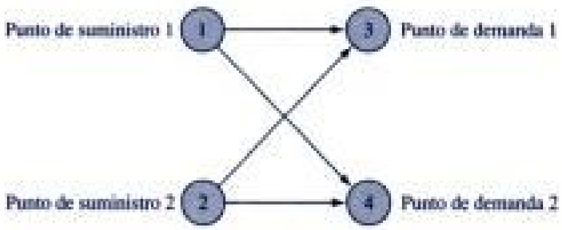


TABLA 29
Representación FMOCM del problema de transporte

$\min z = x_{13} + 2x_{14} + 3x_{23} + 4x_{24}$						
x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}		ld	Restricción
1	1	0	0	=	4	Nodo 1
0	0	1	1	=	5	Nodo 2
−1	0	−1	0	=	−6	Nodo 3
1	−1	0	−1	=	−3	Nodo 4
Las variables son no negativas						

brado el problema, no se podría formular como un FMOCM. Esto se debe a que si el suministro total excede a la demanda total, no se sabría con certeza el flujo neto saliente en cada punto de suministro. Así, para formular un problema de transporte (o transbordo) como un FMOCM, podría ser necesario agregar un punto ficticio.

Formulación de un problema de flujo máximo como un FMOCM

Para ver cómo se ajusta un problema de flujo máximo en el contexto de flujo de red de costo mínimo, considere el problema de encontrar el flujo máximo de la fuente al sumidero en la red de la figura 6. Después de crear un arco a_0 que une al sumidero con la fuente, se tiene $b_{so} = b_1 = b_2 = b_3 = b_{si} = 0$. Entonces las restricciones del PL para hallar el flujo máximo de la figura 6 se podrían escribir como se muestra en la tabla 30.

Las primeras cinco restricciones son las ecuaciones de balance de flujo para los nodos de la red, y las últimas seis restricciones son las correspondientes a la capacidad de arco. Debido a que no hay límite superior en el flujo a través del arco artificial, no hay restricción de capacidad de arco para a_0.

Las ecuaciones de balance de flujo en cualquier FMOCM tienen la siguiente propiedad importante: *cada variable x_{ij} = tiene un coeficiente de +1 en la ecuación de balance de flujo del nodo i, un coeficiente de −1 en la ecuación de balance de flujo del nodo j y un coeficiente de 0 en las otras ecuaciones de balance de flujo.* Por ejemplo, en un problema de transporte, la variable x_{ij} tendrá un coeficiente de +1 en la ecuación de balance de flujo

TABLA 30
Representación FMOCM del problema de flujo máximo

				min $z = x_0$					
$x_{so,1}$	$x_{so,2}$	x_{13}	x_{12}	$x_{3,si}$	$x_{2,si}$	x_0		ld	Restricción
1	1	0	0	0	0	-1	=	0	Nodo *so*
-1	0	1	1	0	0	0	=	0	Nodo 1
0	-1	0	-1	0	1	0	=	0	Nodo 2
0	0	-1	0	1	0	0	=	0	Nodo 3
0	0	0	0	-1	-1	1	=	0	Nodo *si*
1	0	0	0	0	0	0	≤	2	Arco (*so*, 1)
0	1	0	0	0	0	0	≤	3	Arco (*so*, 2)
0	0	1	0	0	0	0	≤	4	Arco (1, 3)
0	0	0	1	0	0	0	≤	3	Arco (1, 2)
0	0	0	0	1	0	0	≤	1	Arco (3, *si*)
0	0	0	0	0	1	0	≤	2	Arco (2, *si*)
				Todas las variables son no negativas					

para el punto de suministro i, un coeficiente de -1 en la ecuación de balance de flujo para el punto de demanda j y un coeficiente de 0 en la otras ecuaciones de balance de flujo. Incluso si las restricciones de un PL al parecer no contienen las ecuaciones de balance de flujo de una red, la transformación inteligente de las restricciones de un PL muestran a menudo que un PL es equivalente a un FMOCM (véase el problema 6 al final de esta sección).

Un FMOCM se puede resolver mediante una generalización del simplex de transporte conocido como el *algoritmo simplex de red* (véase la sección 8.7). Igual que con el simplex de transporte, los pivotes en el simplex de red tienen que ver sólo con sumas y restas. Este hecho se puede usar para demostrar que si las b_i y las capacidades de arco son enteros, entonces en la solución óptima para un FMOCM, las variables serán números enteros. Los códigos de computadora que utilizan el simplex de red pueden resolver con rapidez incluso problemas de red extremadamente grandes. Por ejemplo, los FMOCM con 5 000 nodos y 600 000 arcos se han resuelto en menos de 10 minutos. A fin de usar un código de computadora para el simplex de red el usuario sólo necesita introducir una lista de nodos y arcos de la red, las c_{ij} y la capacidad de arco para cada arco y las b_i para cada nodo. El simplex de red es eficaz y fácil de usar, así que es muy importante formular un PL, si es posible, como un FMOCM.

Para cerrar esta sección, se formula un problema simple de asignación de tráfico como un FMOCM.

EJEMPLO 7 FMOCM de tráfico

Cada hora, un promedio de 900 automóviles entra a la red de la figura 46 en el nodo 1 y busca viajar al nodo 6. El tiempo que tarda un automóvil en recorrer cada arco se muestra en la tabla 31. En la figura 46, el número arriba de cada arco es el número máximo de automóviles que pasan por cualquier punto en el arco durante un periodo de una hora. Formule un FMOCM que minimiza el tiempo total requerido para que los automóviles viajen del nodo 1 al nodo 6.

Solución Sea

$$x_{ij} = \text{número de automóviles por hora que cruzan el arco del nodo } i \text{ al nodo } j$$

Entonces se quiere minimizar

$$z = 10x_{12} + 50x_{13} + 70x_{25} + 30x_{24} + 30x_{56} + 30x_{45} + 60x_{46} + 60x_{35} + 10x_{34}$$

Se tiene que $b_1 = 900$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$, y $b_6 = -900$ (no se introduce el arco artificial que conecta el nodo 6 con el nodo 1). Las restricciones para este FMOCM se muestran en la tabla 32.

FIGURA 46
Representación del ejemplo de tráfico como FMOCM

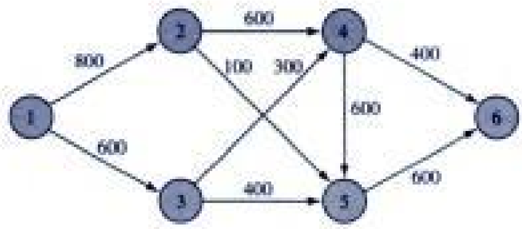


TABLA 31
Tiempos de viaje para el ejemplo de tráfico

Arco	Tiempo (minutos)
(1, 2)	10
(1, 3)	50
(2, 5)	70
(2, 4)	30
(5, 6)	30
(4, 5)	30
(4, 6)	60
(3, 5)	60
(3, 4)	10

TABLA 32
Representación FMOCM del ejemplo de tráfico

x_{12}	x_{13}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	x_{46}	x_{56}		ld	Restricción
1	1	0	0	0	0	0	0	0	=	900	Nodo 1
−1	0	1	1	0	0	0	0	0	=	0	Nodo 2
0	−1	0	0	1	1	0	0	0	=	0	Nodo 3
0	0	−1	0	−1	0	1	1	0	=	0	Nodo 4
0	0	0	−1	0	−1	−1	0	1	=	0	Nodo 5
0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	=	−900	Nodo 6
1	0	0	0	0	0	0	0	0	≤	800	Arco (1, 2)
0	1	0	0	0	0	0	0	0	≤	600	Arco (1, 3)
0	0	1	0	0	0	0	0	0	≤	600	Arco (2, 4)
0	0	0	1	0	0	0	0	0	≤	100	Arco (2, 5)
0	0	0	0	1	0	0	0	0	≤	300	Arco (3, 4)
0	0	0	0	0	1	0	0	0	≤	400	Arco (3, 5)
0	0	0	0	0	0	1	0	0	≤	600	Arco (4, 5)
0	0	0	0	0	0	0	1	0	≤	400	Arco (4, 6)
0	0	0	0	0	0	0	0	1	≤	600	Arco (5, 6)

Todas las variables son no negativas

Solución de un FMOCM con LINGO

Traffic.lng

El siguiente programa de LINGO (archivo Traffic.lng) se puede usar para hallar la solución óptima del ejemplo 7 (o cualquier FMOCM).

```
MODEL:
   1] SETS:
   2] NODES/1..6/:SUPP;
   3] ARCS(NODES,NODES)/1,2   1,3   2,4   2,5   3,4   3,5   4,5   4,6   5,6/
   4] :CAP,FLOW,COST;
   5] ENDSETS
   6] MIN=@SUM(ARCS:COST*FLOW);
   7] @FOR(ARCS(I,J):FLOW(I,J)<CAP(I,J));
   8] @FOR(NODES(I):-@SUM(ARCS)(J,I):FLOW(J,I))
   9] +@SUM(ARCS(I,J):FLOW(I,J))=SUPP(I));
  10] DATA:
  11] COST=10,50,30,70,10,60,30,60,30;
  12] SUPP=900,0,0,0,0,-900;
  13] CAP=800,600,600,100,300,400,600,400,600;
  14] ENDDATA
END
```

En la línea 2, se definen los nodos de la red y se asocia un suministro neto (flujo saliente − flujo entrante) con cada nodo. Los datos de suministro se introducen en la línea 12. En la línea 3, se define, listando los arcos de la red y en la línea 4 se asocia una capacidad (CAP), un flujo (FLOW) y un costo por unidad enviada (COST) con cada arco. Los datos de costos de envío unitarios se introducen en la línea 11. La línea 6 genera la función objetivo sumando en todos los arcos (costo unitario por arco)*(flujo a través del arco). La línea 7 genera la restricción de capacidad de cada arco (los datos de capacidad de arco se introducen en la línea 13). Para cada nodo, las líneas 8 y 9 generan la restricción de conservación de flujo. Implican que para cada nodo I, −(flujo hacia el nodo I) + (flujo saliente del nodo I) = suministro del nodo I). Cuando se resuelve en LINGO, se encuentra que la solución para el ejemplo 7 es z =95,000 minutos, $x_{12} = 700$, $x_{13} = 200$, $x_{24} = 600$, $x_{25} = 100$, $x_{34} = 200$, $x_{45} = 400$, $x_{46} = 400$, $x_{56} = 500$.

El programa de LINGO se puede usar para resolver cualquier FMOCM. Sólo introduzca el conjunto de nodos, suministros, arcos y el costo de envío unitario; teclee **GO** y ¡listo!

PROBLEMAS

Nota: para formular un problema como un FMOCM, se debe trazar la red apropiada y determinar las c_{ij}, las b_i y las capacidades de arco.

Grupo A

1 Formule el problema de encontrar la trayectoria más corta del nodo 1 al 6 en la figura 2 como un FMOCM. (*Sugerencia*: piense en hallar la trayectoria más corta como el problema de minimizar el costo total de enviar 1 unidad de flujo del nodo 1 al nodo 6.)

2 **a** Encuentre el dual del PL que se usó para determinar la longitud de la trayectoria crítica para el ejemplo 6 de la sección 8.4.

b Muestre que la respuesta del inciso (a) es un FMOCM.

c Explique por qué el valor óptimo de la función objetivo para el PL encontrado en el inciso (a) es la trayectoria más larga en la red de proyecto del nodo 1 al nodo 6. ¿Por qué esto justifica la afirmación anterior de que la trayectoria crítica en una red de proyecto es la trayectoria más larga del nodo de inicio al nodo terminal?

3 Fordco produce automóviles en Detroit y Dallas. La planta de Detroit puede producir 6500 automóviles y la planta de Dallas puede producir 6000 automóviles. Producir un automóvil cuesta $2000 en Detroit y $1800 en Dallas. Los automóviles se deben enviar a tres ciudades. La ciudad 1 debe recibir 5000 automóviles, la ciudad 2, 4 000 y la ciudad 3, 3000. El costo de enviar un automóvil de cada planta a cada ciudad se da en la tabla 33. A lo sumo se debe enviar 2 200 automóviles de una planta a una ciudad. Formule un FMOCM que se pueda usar para minimizar el costo de satisfacer la demanda.

4 Cada año, Data Corporal produce unas 400 computadoras en Boston y 300 en Raleigh. Los clientes de Los Ángeles deben recibir 400 computadoras y a los clientes de Austin se les deben suministrar 300 computadoras. Producir una computadora cuesta $800 en Boston y $900 en Raleigh. Las computadoras se transportan en avión y se podrían enviar por Chicago. Los costos de enviar una computadora entre pares de ciudades se muestran en la tabla 34.

a Formule un FMOCM que se puede usar para minimizar el costo total (producción + distribución) de satisfacer la demanda anual de Data Corporal.

TABLA 33

	A ($)		
De	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Detroit	800	600	300
Dallas	500	200	200

TABLA 34

	A ($)		
De	Chicago	Austin	Los Ángeles
Boston	80	220	280
Raleigh	100	140	170
Chicago	—	40	50

b ¿Cómo modificaría la formulación del inciso (a) si a lo sumo se pudiera enviar 200 unidades vía Chicago? [*Sugerencia*: agregue un nodo y un arco a la red del inciso (a).]

5 Oilco tiene campos petroleros en San Diego y Los Ángeles. El campo de San Diego tiene una capacidad de 500 000 barriles por día y el de Los Ángeles produce 400 000 barriles por día. El petróleo se envía de los campos a una refinería, ya sea en Dallas o Houston (suponga que cada refinería tiene capacidad ilimitada). Refinar 100 000 barriles cuesta $700 en Dallas y 900 en Houston. El petróleo refinado se envía a los clientes de Chicago y Nueva York. Los clientes de Chicago requieren 400 000 barriles por día y los clientes de Nueva York requieren 300 000 barriles por día. Los costos de enviar 100 000 barriles de petróleo (refinado o crudo) entre ciudades se muestra en la tabla 35.

a Formule un FMOCM que se pueda usar para determinar cómo minimizar el costo total de satisfacer las demandas.

b Si cada refinería tiene una capacidad de 500 000 barriles por día, ¿cómo se modificaría la respuesta del inciso (a)?

Grupo B

6 Workco debe tener el siguiente número de trabajadores disponibles durante los tres meses siguientes: mes 1, 20; mes 2, 16; mes 3, 25. Al comienzo del mes 1, Workco no tiene trabajadores. A Workco le cuesta $100 contratar un trabajador y $50 despedirlo. Cada trabajador recibe un salario de $140/mes. Se mostrará que el problema de determinar una estrategia de contrato y despido que minimiza el costo total en que se incurre durante los tres meses siguientes (o en general, los n siguientes) se puede formular como un FMOCM.

a Sea

x_{ij} = número de trabajadores contratados al comienzo del mes i y despedidos después de trabajar hasta el fin del mes $j - 1$

(si $j = 4$, nunca se despide al trabajador). Explique por qué el siguiente PL produce una estrategia de contratación y despido de costo mínimo.

TABLA 35

	A ($)			
De	Dallas	Houston	Nueva York	Chicago
Los Ángeles	300	110	—	—
San Diego	420	100	—	—
Dallas	—	—	450	550
Houston	—	—	470	530

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 50(x_{12} + x_{13} + x_{23}) \\
& + 100(x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34}) \\
& + 140(x_{12} + x_{23} + x_{34}) \\
& + 280(x_{13} + x_{24}) + 420x_{14}
\end{aligned}$$

s.a

(1) $x_{12} + x_{13} + x_{14} \quad - e_1 = 20$ (Restricción del mes 1)

(2) $x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} - e_2 = 16$ (Restricción del mes 2)

(3) $x_{14} + x_{24} + x_{34} \quad - e_3 = 25$ (Restricción del mes 3)

$$x_{ij} \geq 0$$

b Para obtener un FMOCM, sustituya las restricciones del inciso (a) por

i Restricción (1);

ii Restricción (2) − Restricción (1);

iii Restricción (3) − Restricción (2);

iv − (Restricción (3)).

Explique por qué un PL con restricciones (i)-(iv) es un FMOCM.

c Trace la red que corresponde al FMOCM obtenido en la respuesta del inciso (b).

7[†] Braneast Airlines debe determinar cuántos aviones deben servir el corredor aéreo Boston-Nueva York-Washington y qué vuelos llevar a cabo. Braneast podría hacer cualquiera de los vuelos diarios mostrados en la tabla 36. El costo fijo de operar un aeroplano es $800/día. Formule un FMOCM que permita maximizar las ganancias diarias de Braneast. (*Sugerencia*: Cada nodo de la red representa una ciudad y un tiempo. Además de los arcos que representan los vuelos, se debe considerar la posibilidad de que un aeroplano permanezca en el mismo sitio durante una hora o más. Se debe asegurar que el modelo incluya el costo fijo de operar un avión. Para incluir este costo, se deben incluir los tres arcos siguientes en la red: De Boston 7 p.m. a Boston 9 a.m.; de Nueva York 7 p.m. a Nueva York 9 a.m., y de Washington 7 a.m. a Washington 9 a.m.)

8 Daisymay Van Line transporta personas entre Nueva York, Filadelfia y Washington, D.C. Una camioneta tarda un día en viajar entre cualquier par de estas ciudades. La compañía incurre en costos de $1000 por día para una camioneta con carga completa y haciendo su recorrido, $800 por día para una camioneta vacía que hace el recorrido, $700/día para una camioneta llena que permanece en una ciudad y $400/día para una camioneta vacía que permanece en una ciudad. Cada día de la semana, se deben enviar las cargas descritas en la tabla 37. El lunes, por ejemplo, se debe enviar dos camionetas de Filadelfia a Nueva York (llegando el martes). También, dos camionetas deben ser enviadas de Filadelfia a Washington el viernes (suponga que los envíos del viernes deben llegar el lunes). Formule un FMOCM que permita minimizar el costo de satisfacer los requerimientos semanales. Para simplificar la formulación, suponga que los requerimientos se repiten cada semana. Entonces, parece plausible suponer que cualquiera de las camionetas de la compañía comenzara cada semana en la misma ciudad en la que empezaron la semana previa.

[†]Este problema se basa en Glover *et al.* (1982).

TABLA 36

Salidas		Llegadas		Ingresos por vuelo	Costo variable de vuelo ($)
Ciudad	Hora	Ciudad	Hora		
N.Y.	9 A.M.	Wash.	10 A.M.	$900	400
N.Y.	2 P.M.	Wash.	3 P.M.	$600	350
N.Y.	10 A.M.	Bos.	11 A.M.	$800	400
N.Y.	4 P.M.	Bos.	5 P.M.	$1 200	450
Wash.	9 A.M.	N.Y.	10 A.M.	$1 100	400
Wash.	3 P.M.	N.Y.	4 P.M.	$900	350
Wash.	10 A.M.	Bos.	mediodía	$1 500	700
Wash.	5 P.M.	Bos.	7 P.M.	$1 800	900
Bos.	10 A.M.	N.Y.	11 A.M.	$900	500
Bos.	2 P.M.	N.Y.	3 P.M.	$800	450
Bos.	11 A.M.	Wash.	1 P.M.	$1 100	600
Bos.	3 P.M.	Wash.	5 P.M.	$1 200	650

TABLA 37

Viaje	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
Phil.–N.Y.	2	—	—	—	—
Phil.–Wash.	—	2	—	—	2
N.Y.–Phil.	3	2	—	—	—
N.Y.–Wash.	—	—	2	2	—
N.Y.–Phil.	1	—	—	—	—
Wash.–N.Y.	—	—	1	—	1

8.6 Problemas de árbol de expansión mínima

Supóngase que cada arco (i, j) en una red tiene una longitud asociada y que el arco (i, j) representa una forma de conectar el nodo i al nodo j. Por ejemplo, si cada nodo de una red representa una computadora en la universidad estatal, entonces el arco (i, j) podría representar un cable subterráneo que conecta la computadora i con la computadora j. En muchas aplicaciones, se desea determinar el conjunto de arcos de una red que conecta los nodos tal que se minimiza la suma de la longitud de los arcos. Es evidente que este grupo de arcos no debe contener ningún bucle. (A un bucle a menudo se le llama *trayectoria cerrada o ciclo.*) Por ejemplo, en la figura 47, la secuencia de arcos (1, 2)–(2, 3)–(3, 1) es un bucle.

DEFINICIÓN ■ Para una red con n nodos, un **árbol de extensión** es un grupo de $n - 1$ arcos que conectan los nodos de la red y no contiene bucles. ■

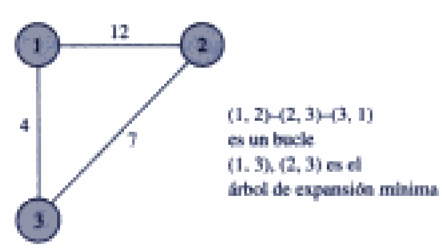


FIGURA 47
Ilustración del bucle y el árbol de expansión mínima

En la figura 47, hay tres árboles de expansión:

1 Arcos (1, 2) y (2, 3)

2 Arcos (1, 2) y (1, 3)

3 Arcos (1, 3) y (2, 3)

Un árbol de expansión de longitud mínima en una red es un **árbol de expansión mínima (MST**, por sus siglas en inglés). En la figura 47, el árbol de expansión que consiste en los arcos (1, 3) y (2, 3) es el único árbol de expansión mínima.

Es posible usar el método siguiente (algoritmo MST) para hallar un árbol de expansión mínima.

Paso 1 Comience en el nodo i, y una el nodo i con el nodo de la red (llámelo nodo j) que esté más cercano al nodo i. Los dos nodos i y j ahora forman un conjunto conectado de nodos $C = \{i, j\}$, y el arco (i, j) estará en el árbol de expansión mínima. Los demás nodos de la red (llámelos C') se conocen como conjunto *desconectado* de nodos.

Paso 2 Ahora elija un miembro de C' (llámelo n) que sea el más cercano a algún nodo en C. Sea m el nodo en C que sea el más cercano a n. Entonces el arco (m, n) estará en el árbol de expansión mínima. Ahora actualice C y C'. Debido a que n ahora está conectado a $\{i, j\}$, C ahora es igual a $\{i, j, n\}$ y se debe eliminar el nodo n de C'.

Paso 3 Repita este proceso hasta que se encuentre un árbol de expansión mínima. Los enlaces para el nodo y el arco más cercanos que se incluirán en el árbol de expansión mínima se pueden romper de manera arbitraria.

En cada paso el algoritmo elige el arco más corto que se puede usar para expandir C, así que suele hacerse referencia al algoritmo como "ávido". Es notable que el acto de ser "ávido" en cada paso del algoritmo nunca puede obligar después a seguir un "mal arco". En el ejemplo 1 del capítulo 9, se verá que para cierta clase de problemas, es posible que un algoritmo ávido ¡no produzca una solución óptima! En el problema 3 se da una justificación del algoritmo MST al final de esta sección. En el ejemplo 8 se ilustra el algoritmo.

EJEMPLO 8 Algoritmo MST

El campus de la universidad estatal tiene cinco microcomputadoras. La distancia entre cada par de computadoras (en cuadras de la ciudad) se da en la figura 48. Las computadoras deben estar interconectadas mediante un cable subterráneo. ¿Cuál es la longitud mínima de cable requerido? Observe que si no se traza ningún arco que conecte un par de nodos, esto significa que (debido a las formaciones rocosas subterráneas) no se puede tender un cable entre estas dos computadoras.

Solución Se desea encontrar el árbol de expansión mínima para la figura 48.

Iteración 1 Siguiendo el algoritmo MST, se elige sin ninguna razón en particular comenzar en el nodo 1. El nodo más cercano al nodo 1 es el nodo 2. Ahora $C = \{1, 2\}$, $C' = \{3, 4, 5\}$ y el arco (1, 2) será el árbol de expansión mínima (véase la figura 49a).

Iteración 2 El nodo 5 es el más cercano (dos cuadras de distancia) a C. Debido a que el nodo 5 está a dos cuadras del nodo 1 y del nodo 2, se podría incluir el arco (2, 5) o el arco (1, 5) en el árbol de expansión mínima. Se elige de manera arbitraria incluir el arco (2, 5). Entonces $C = \{1, 2, 5\}$ y $C' = \{3, 4\}$ (véase la figura 49b).

Iteración 3 El nodo 3 está a dos cuadras del nodo 5, así que se podría incluir el arco (5, 3) en el árbol de expansión mínima. Ahora $C = \{1, 2, 3, 5\}$ y $C' = 4$ (véase la figura 49c).

Iteración 4 El nodo 5 es el más próximo al nodo 4, así que se agrega el arco (5, 4) al árbol de expansión mínima (véase la figura 49d).

Ahora se tiene el árbol de expansión mínima que consta de los arcos (1, 2), (2, 5), (5, 3) y (5, 4). La longitud del árbol de expansión mínima es $1 + 2 + 2 + 4 = 9$ cuadras.

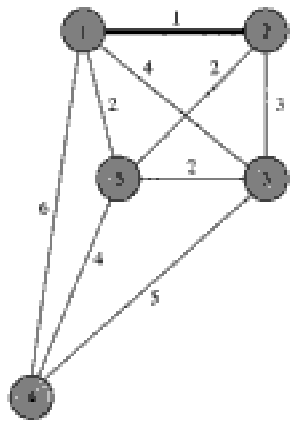


FIGURA 48
Distancias entre las computadoras de la universidad estatal

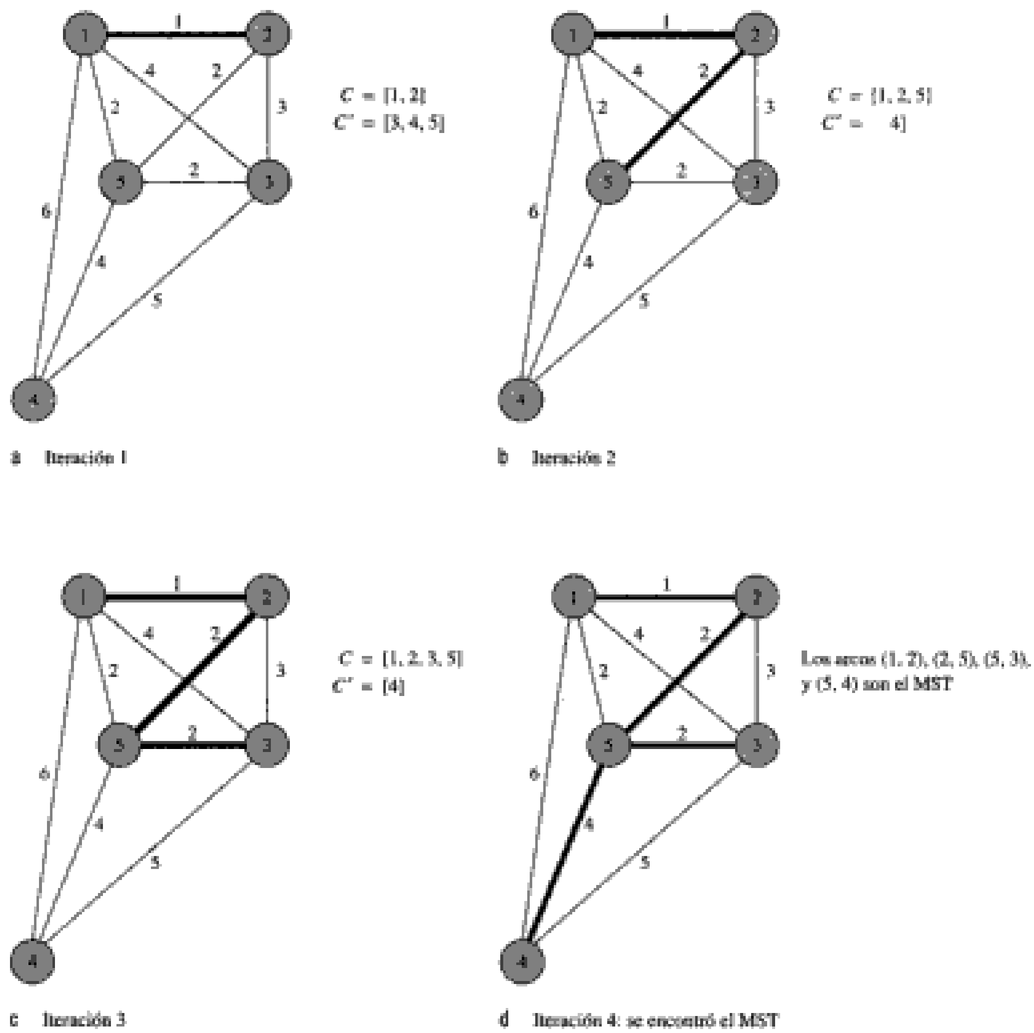


FIGURA 49
Algoritmo MST para el ejemplo de las computadoras

PROBLEMAS

Grupo A

1 Las distancias (en millas) entre las ciudades de Indiana: Gary, Fort Wayne, Evansville, Terre Haute y South Bend, se muestran en la tabla 38. Es necesario construir un sistema estatal de carreteras que una todas estas ciudades. Suponga que por razones políticas no es posible construir una carretera que una a Gary y Fort Wayne, y tampoco una carretera que una a South Bend y Evansville. ¿Cuál es la longitud mínima de la carretera requerida?

2 La ciudad de Smalltown consiste en cinco subdivisiones. El alcalde Jhon Lion quiere construir líneas telefónicas para asegurar que las subdivisiones se puedan comunicar entre sí. Las distancias entre las subdivisiones se dan en la figura 50. ¿Cuál es la longitud mínima de la línea telefónica requerida? Suponga que entre las subdivisiones 1 y 4 no se puede construir ninguna línea telefónica.

Grupo B

3 En este problema, se explica por qué funciona el algoritmo MST. Defina

S = árbol de expansión mínima

C_t = los nodos conectados después de completar la iteración t del algoritmo MST

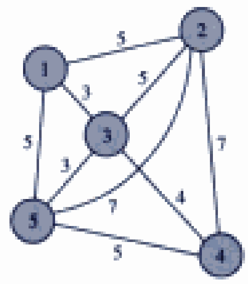
C'_t = nodos no conectados después que se completó la iteración t del algoritmo MST

A_t = conjunto de arcos en el árbol de expansión mínima después de completar t iteraciones del algoritmo MST

TABLA 38

	Gary	Fort Wayne	Evansville	Terre Haute	South Bend
Gary	—	132	217	164	58
Fort Wayne	132	—	290	201	79
Evansville	217	290	—	113	303
Terre Haute	164	201	113	—	196
South Bend	58	79	303	196	—

FIGURA 50
Red para el problema 2



Supóngase que el algoritmo MST no produce un árbol de expansión mínima. Entonces, para alguna t, debe ser el caso que todos los arcos en A_{t-1} están en S, pero el arco elegido en la iteración t (llámelo a_t) del algoritmo MST no está en S. Entonces S debe contener algún arco a'_t que lleva de un nodo en C_{t-1} a un nodo en C'_{t-1}. Muestre que sustituyendo el arco a'_t con el arco a_t se puede obtener un árbol de expansión más corto que S. Esta contradicción demuestra que los arcos elegidos por el algoritmo MST deben estar en S. Así, el algoritmo MST de hecho encuentra un árbol de expansión mínima.

4 **a** Tres ciudades están en los vértices de un triángulo equilátero de longitud unitaria. Las aerolíneas Flying Lion necesita suministrar servicios de conexión entre estas tres ciudades. ¿Cuál es la longitud mínima de las dos rutas necesarias para suministrar el servicio de conexión?

b Ahora suponga que Flying Lion agrega un nodo al "centro" del triángulo equilátero. Muestre que la longitud de las rutas necesarias para conectar las tres ciudades disminuyó en 13%. (*Nota*: se ha demostrado que sin importar cuántos "nodos" se agreguen y cuántos puntos deban conectarse, nunca se puede ahorrar más de 13% de la distancia total necesaria para "abarcar" los puntos originales añadiendo nodos.)†

8.7 Método simplex para redes‡

En esta sección, se describe cómo se simplifica el algoritmo simplex para problemas de flujo de red de costo mínimo (FMOCM). Para simplificar la presentación, se supone que para cada arco, $L_{ij} = 0$. Entonces la información necesaria para describir un FMOCM de la forma (8)-(9) se podría resumir en forma gráfica como en la figura 51. Para cada arco, c_{ij} se denota con el símbolo \$, y el otro número en cada arco representa el límite superior del arco (U_{ij}). La b_i para cualquier nodo con flujo saliente distinto de cero se lista entre paréntesis. Así, la figura 51 representa un FMOCM con $c_{12} = 5$, $c_{25} = 2$, $c_{13} = 4$, $c_{35} = 8$,

†Basado en Peterson (1990).
‡Esa sección cubre temas que se podrían omitir sin pérdida de continuidad.

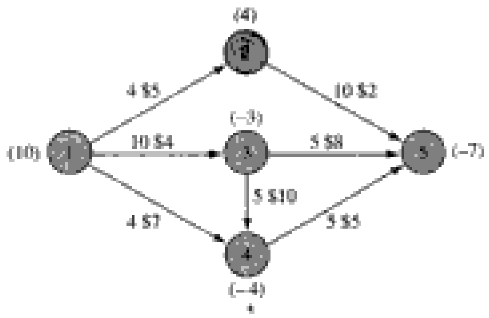


FIGURA 51
Representación gráfica de un FMOCM

$c_{14} = 7$, $c_{34} = 10$, $c_{45} = 5$, $b_1 = 10$, $b_2 = 4$, $b_3 = -3$, $b_4 = -4$, $b_5 = -7$, $U_{12} = 4$, $U_{25} = 10$, $U_{13} = 10$, $U_{35} = 5$, $U_{14} = 4$, $U_{34} = 5$, $U_{45} = 5$. Para el simplex de red que se usará, se debe tener $\Sigma b_i = 0$; normalmente esto se puede asegurar añadiendo un nodo ficticio.

Recuerde que cuando se utiliza el método simplex para resolver un problema de transporte, se simplifican los siguientes aspectos del algoritmo simplex: hallar una solución factible básica, calcular el coeficiente de una variable no básica en el renglón 0 y pivotear. Ahora se describe cómo se simplifican estos aspectos del algoritmo simplex cuando se está resolviendo un FMOCM.

Soluciones factibles básicas para problemas de flujo de red de costo mínimo

¿Cómo se determina si una solución factible para un FMOCM es una sfb? Comience por observar que cualquier sfb para un FMOCM contendrá tres tipos de variables:

1 Variables básicas: en ausencia de degeneración, cada variable básica x_{ij} satisfará $L_{ij} < x_{ij} < U_{ij}$; con degeneración, es posible que una variable básica x_{ij} sea igual al límite superior o inferior del arco (i, j).

2 Variables no básicas x_{ij}: éstas son iguales al límite superior U_{ij} del arco (i, j).

3 Variables no básicas x_{ij}: éstas son iguales al límite inferior L_{ij} del arco (i, j).

Supóngase que se está resolviendo un FMOCM con n nodos. Para resolver un FMOCM, considere las n restricciones de conservación de flujo e ignore las restricciones de límite superior e inferior (por razones que pronto serán evidentes). Como en el problema de transporte, cualquier solución que satisface $n - 1$ de las restricciones de conservación de flujo satisfará de manera automática la última restricción de la conservación de flujo, así que se podría eliminar tal restricción. Esto significa que una sfb para un FMOCM de n nodos tendrá $n - 1$ variables básicas. Supóngase que se elige un conjunto de $n - 1$ variables (o arcos). ¿Cómo se determina si este conjunto de $n - 1$ variables produce una solución factible básica? Un conjunto de $n - 1$ variables produce una sfb si y sólo si los arcos que corresponden a las variables básicas forman un árbol de expansión para la red. Por ejemplo, considere el FMOCM de la figura 52. En la figura 53, se da una sfb para este FMOCM. Las variables básicas son x_{13}, x_{35}, x_{25} y x_{45}. Las variables $x_{12} = 5$ y $x_{14} = 4$ son variables no básicas en su límite superior. (Este tipo de variables se indican por arcos de línea discontinua.) Debido a que los arcos (1, 3), (3, 5), (5, 2) y (4, 5) forman un árbol

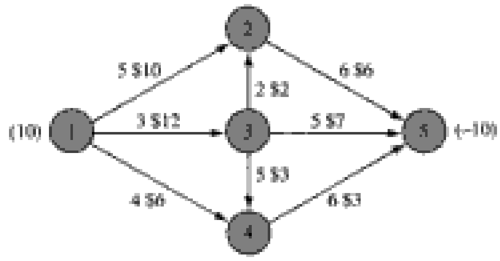


FIGURA 52
Ejemplo de un FMOCM

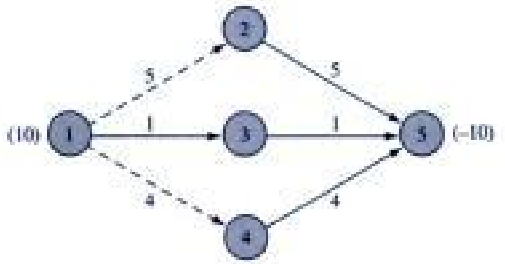


FIGURA 53
Ejemplo de una sfb para un FMOCM

de expansión (los arcos conectan los nodos de la gráfica y no contienen ningún ciclo), se sabe que ésta es una sfb. Como se verá pronto, una sfb para problemas pequeños a menudo se puede obtener por prueba y error.

Cálculo del renglón 0 para cualquier sfb

Para alguna sfb particular, ¿cómo se determina el coeficiente de la función objetivo para una variable no básica? Suponga que se elige de manera arbitraria eliminar la restricción de conservación de flujo para el nodo 1. Para una sfb dada, sea $c_{BV}B^{-1} = [y_2 \quad y_3 \quad \cdots \quad y_n]$. Cada variable x_{ij} tendrá un coeficiente $+1$ en la restricción de flujo del nodo i y un coeficiente -1 en la restricción del nodo j. Si se define $y_1 = 0$, entonces el coeficiente de x_{ij} en el renglón 0 de un tableau determinado se podría escribir como $\bar{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}$. Cada variable básica debe tener $\bar{c}_{ij} = 0$, de modo que se puede determinar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ resolviendo al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$y_1 = 0, \quad y_i - y_j = c_{ij} \quad \text{para cada variable básica}$$

Las $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que corresponden a una sfb se llaman **multiplicadores simplex** para la sfb.

¿Cómo se determina si una sfb es óptima? Para que una sfb sea óptima, debe ser posible mejorar (disminuir) el valor de z cambiando el valor de una variable no básica. Observe que $\bar{c}_{ij} \leq 0$ si y sólo si incrementando x_{ij} no disminuye z. También observe que $\bar{c}_{ij} \geq 0$ si y sólo si disminuyendo x_{ij} no disminuye z. Estas observaciones se pueden utilizar para mostrar que una sfb es óptima si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1 Si una variable $x_{ij} = L_{ij}$, entonces un incremento en x_{ij} no produce una disminución en z. Así, si $x_{ij} = L_{ij}$ y la sfb es óptima, entonces se debe cumplir $\bar{c}_{ij} \leq 0$.

2 Si una variable $x_{ij} = U_{ij}$, entonces una disminución en x_{ij} no produce una disminución en z. Por consiguiente, $x_{ij} = U_{ij}$ y la sfb es óptima, entonces se debe cumplir que $\bar{c}_{ij} \geq 0$.

Si las condiciones 1 y 2 no se cumplen, entonces se puede mejorar z (exceptuando la degeneración) pivoteando en la base cualquier variable no básica que viole cualquiera de las condiciones. Como ilustración se determina el coeficiente de la función objetivo para cada variable no básica en el tableau simplex que corresponde a la sfb de la figura 53. Para encontrar y_1, y_2, y_3, y_4 y y_5, se resuelve el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 12, \quad y_2 - y_5 = 6, \quad y_3 - y_5 = 7, \quad y_4 - y_5 = 3$$

Las soluciones a estas ecuaciones son $y_1 = 0, y_2 = -13, y_3 = -12, y_4 = -16$, y $y_5 = -19$. Ahora se "valora" cada variable no básica y se obtiene

$\bar{c}_{12} = y_1 - y_2 - c_{12} = 0 - (-13) - 10 = 3$ (Satisface la condición de optimalidad para la variable no básica en el límite superior)

$\bar{c}_{14} = y_1 - y_4 - c_{14} = 0 - (-16) - 6 = 10$ (Satisface la condición de optimalidad para la variable no básica en el límite superior)

$\bar{c}_{32} = y_3 - y_2 - c_{32} = -12 - (-13) - 2 = -1$ (Satisface la condición de optimalidad para la variable no básica en el límite inferior)

$\bar{c}_{34} = y_3 - y_4 - c_{34} = -12 - (-16) - 3 = 1$ (Viola las condiciones de optimalidad para la variable no básica en el límite inferior)

Debido a que $\bar{c}_{34} = 1 > 0$, cada unidad por la que se incrementa x_{34} (x_{34} está en su límite inferior, así que es correcto incrementarla) disminuye a z en una unidad. Entonces, se puede mejorar z introduciendo x_{34} en la base. Observe que si una variable no básica x_{ij} en su límite superior tuvo $\bar{c}_{ij} < 0$ entonces se podría disminuir z introduciendo x_{ij} en la base y disminuyendo x_{ij}. Ahora se muestra que al resolver un FMOCM, el paso de pivoteo se lleva a cabo casi por inspección.

Pivoteo en el simplex de red

Como se mostró, para la sfb de la figura 53, se quiere introducir x_{34} en la base. Para hacer esto, observe que si se agrega el arco (3, 4) al conjunto de arcos que corresponden al conjunto actual de variables básicas, se formará un ciclo (o bucle). Para introducir x_{34} en la base, observe que $x_{34} = 0$ está en su límite inferior, se quiere incrementar x_{34}. Suponga que se intenta incrementar x_{34} por θ. Los valores de las variables después que x_{34} se introduce en la base se podría encontrar invocando las restricciones de conservación de flujo. En la figura 54, se encuentra que el arco (3, 4), (4, 5) y (3, 5) forma un ciclo. Después del pivoteo, las variables que corresponden a los arcos que no están en el ciclo permanecerán sin cambio, pero cuando se fija $x_{34} = \theta$, cambian los valores de las variables que corresponden a los arcos del ciclo. Si se fija $x_{34} = \theta$, se incrementa el flujo hacia el nodo 4 por θ, así que el flujo saliente del nodo 4 debe incrementarse por θ. Esto requiere $x_{45} = 4 + \theta$. Debido a que el flujo hacia el nodo 5 ahora se incrementó por θ, la conservación de flujo requiere que $x_{35} = 1 - \theta$. El pivoteo deja a las otras variables sin cambio. Para encontrar los nuevos valores de las variables, observe que se quiere incrementar x_{34} tanto como sea posible. Se puede incrementar x_{34} hasta el punto donde una variable básica obtiene primero su límite superior o inferior. Así, el arco (3, 4) implica que $\theta \leq 5$; el arco (3, 5) requiere que $1 - \theta \geq 0$, o bien, $\theta \leq 1$; el arco (4, 5) requiere que $4 + \theta \leq 6$ o $\theta \leq 2$. Así que lo mejor que se puede hacer es fijar $\theta = 1$. La variable básica que llega primero a su límite superior o inferior cuando se incrementa θ se elige que salga de la base (en el caso de un empate, se puede elegir de manera arbitraria la variable saliente). Ahora x_{35} sale de la base, y la nueva sfb se muestra en la figura 55. El árbol de expansión que corresponde al conjunto actual de variables básicas es (1, 3), (3, 4), (4, 5) y (2, 5). Ahora se calcula el coeficiente de cada variable no básica en el renglón 0. Para empezar, se resuelve el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 12, \quad y_3 - y_4 = 3, \quad y_2 - y_5 = 6, \quad y_4 - y_5 = 3$$

Esto da $y_1 = 0$, $y_2 = -12$, $y_3 = -12$, $y_4 = -15$, y $y_5 = -18$.

Las variables no básicas que actualmente son iguales a sus límites superiores tendrán coeficientes de renglón 0 de

$$\bar{c}_{12} = 0 - (-12) - 10 = 2 \quad \text{y} \quad \bar{c}_{14} = 0 - (-15) - 6 = 9$$

FIGURA 54
El ciclo (3, 4), (4, 5), (3, 5) ayuda al pivoteo en x_{34}

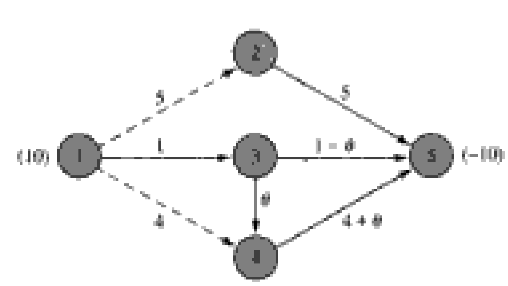
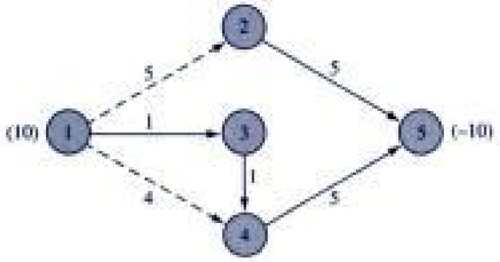


FIGURA 55
Nueva sfb ($\theta = 1$) después que se introduce x_{34} y sale x_{35}



Las variables no básicas que actualmente son iguales a sus límites inferiores tendrán coeficientes de renglón 0 de

$$\bar{c}_{32} = -12 - (-12) - 2 = -2 \quad \text{y} \quad \bar{c}_{35} = -12 - (-18) - 7 = -1$$

Debido a que cada variable no básica en su límite superior tiene $\bar{c}_{ij} \geq 0$, y cada variable no básica en su límite inferior tiene $\bar{c}_{ij} \leq 0$, la sfb actual es óptima. Así, la solución óptima para el FMOCM de la figura 52 es

Variables con límite superior: $x_{12} = 5$, $x_{14} = 4$
Variables con límite inferior: $x_{32} = x_{35} = 0$
Variables básicas: $x_{13} = 1, x_{34} = 1, x_{25} = 5, x_{45} = 5$

Resumen del método simplex de redes

Paso 1 Determine una sfb de inicio. Las $n - 1$ variables básicas corresponderán a un árbol de expansión. Indique las variables no básicas en su límite superior mediante arcos de línea discontinua.

Paso 2 Calcule $y_1, y_2, \ldots y_n$ (conocidas como multiplicadores simplex) resolviendo $y_1 = 0$, $y_i - y_j = c_{ij}$ para las variables básicas x_{ij}. Para las variables no básicas, determine el coeficiente del renglón 0 $\bar{c}_{ij}$ a partir de $\bar{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}$. La sfb es óptima si $\bar{c}_{ij} \leq 0$ para toda $x_{ij} = L_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} \geq 0$ para toda $x_{ij} = U_{ij}$. Si la sfb no es óptima, elija la variable no básica que más viola las condiciones de optimalidad como la variable básica entrante.

Paso 3 Identifique el ciclo (¡habrá exactamente uno!) creado al agregar el arco que corresponde a la variable entrante al árbol de expansión mínima de la sfb actual. Utilice la conservación del flujo para determinar los nuevos valores de las variables del ciclo. La variable que sale de la base será la variable que choca primero con su límite superior o inferior cuando se cambia el valor de la variable básica entrante.

Paso 4 Encuentre la nueva sfb cambiando los flujos de los arcos del ciclo encontrado en el paso 3. Ahora vaya al paso 2.

La red simplex se ilustra en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Solución simplex de red para el FMOCM

Utilice el simplex de red para resolver el FMOCM de la figura 56.

Solución Una sfb requiere que se encuentre un árbol de expansión (tres arcos que conectan los nodos 1, 2, 3 y 4 y no forman un ciclo). Cualquiera de los arcos que no están en el árbol de expansión se podría igualar a su límite superior o inferior. Por prueba y error, se encuentra la sfb de la figura 57 que tiene que ver con el árbol de expansión (1, 2), (1, 3) y (2, 4).

Para encontrar y_1, y_2, y_3 y y_4 se resuelve

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_2 = 4, \quad y_2 - y_4 = 3, \quad y_1 - y_3 = 3$$

FIGURA 56
Ejemplo de simplex de red

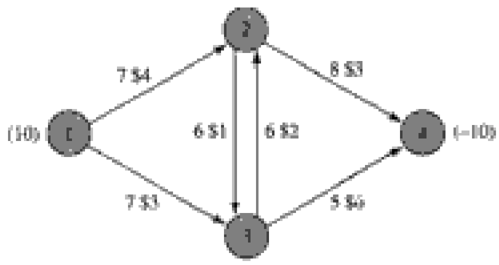
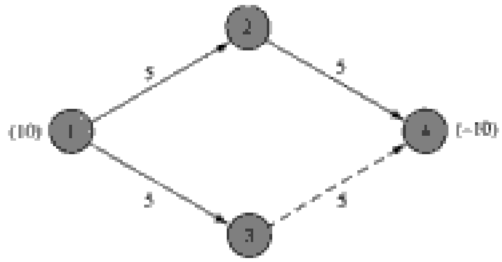


FIGURA 57
sfb para el ejemplo 9



Esto da $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = -3$ y $y_4 = -7$. Los coeficientes del renglón 0 para cada variable básica son

$$\bar{c}_{34} = -3 - (-7) - 6 = -2 \quad \text{(Viola la condición de optimalidad)}$$
$$\bar{c}_{23} = -4 - (-3) - 1 = -2 \quad \text{(Satisface la condición de optimalidad)}$$
$$\bar{c}_{32} = -3 - (-4) - 2 = -1 \quad \text{(Satisface la condición de optimalidad)}$$

Así, x_{34} entra en la base. Se establece $x_{34} = 5 - \theta$ y se obtiene el ciclo en la figura 58. Del arco (1, 2), se encuentra que $5 + \theta \leq 7$ o $\theta \leq 2$. Del arco (1, 3), se encuentra que $5 - \theta \geq 0$ o $\theta \leq 5$. Del arco (2, 4), se encuentra que $5 + \theta \leq 8$ o $\theta \leq 3$. Del arco (3, 4), se encuentra que $5 - \theta \geq 0$ o $\theta \leq 5$. Así, se puede establecer $\theta = 2$. Ahora x_{12} sale de la base en su límite superior y x_{34} entra, produciendo la sfb de la figura 59.

La nueva sfb se asocia con el árbol de expansión (1, 3), (2, 4) y (3, 4). Resolviendo para los nuevos valores de los multiplicadores simplex, se obtiene

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 3, \quad y_3 - y_4 = 6, \quad y_2 - y_4 = 3$$

Esto da $y_1 = 0$, $y_2 = -6$, $y_3 = -3$, $y_4 = -9$. El coeficiente de cada variable no básica en el renglón 0 está dado por

$$\bar{c}_{12} = 0 - (-6) - 4 = 2 \qquad \text{(Satisface la condición de optimalidad)}$$
$$\bar{c}_{23} = -6 - (-3) - 1 = -4 \qquad \text{(Satisface la condición de optimalidad)}$$
$$\bar{c}_{32} = -3 - (-6) - 2 = 1 \qquad \text{(Viola la condición de optimalidad)}$$

Ahora x_{32} entra a la base, y produce el ciclo de la figura 60. Del arco (2, 4), se encuentra que $7 + \theta \leq 8$ o $\theta \leq 1$); del arco (3, 4), se encuentra que $3 - \theta \geq 0$ o $\theta \leq 3$. Del arco (3, 2), se encuentra que $\theta \leq 6$. Así, ahora se establece $\theta = 1$, y tiene que salir x_{24} de la base en su límite superior. La nueva sfb se da en la figura 61.

El conjunto actual de valores básicos corresponde al árbol de expansión (1, 3), (3, 2) y (3, 4). Los nuevos valores de los multiplicadores simplex se encuentran al resolver

$$y_1 = 0, \quad y_1 - y_3 = 3, \quad y_3 - y_2 = 2, \quad y_3 - y_4 = 6$$

cuya solución es $y_1 = 0$, $y_2 = -5$, $y_3 = -3$, $y_4 = -9$. El coeficiente de cada variable no básica en el renglón 0 ahora es

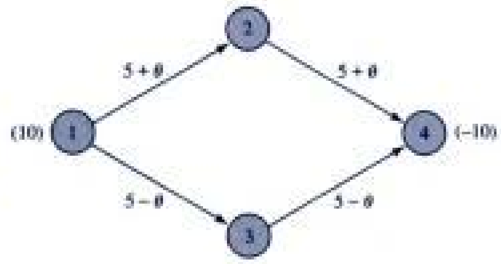


FIGURA 58
Ciclo creado cuando x_{34} entra a la base

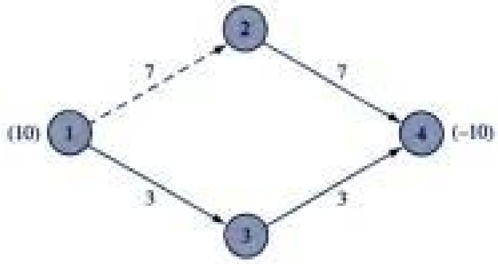


FIGURA 59
sfb después que x_{12} sale y x_{34} entra

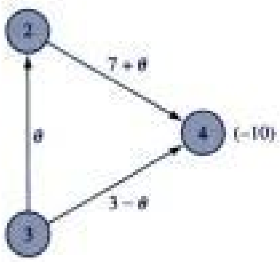


FIGURA 60
Ciclo creado cuando x_{32} entra a la base

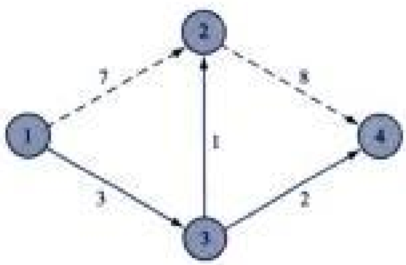


FIGURA 61
Nueva sfb cuando x_{32} entra y x_{24} sale

$$\bar{c}_{23} = -5 - (-3) - 1 = -3 \quad \text{(Satisface la condicción de optimalidad)}$$
$$\bar{c}_{12} = 0 - (-5) - 4 = 1 \quad \text{(Satisface la condición de optimalidad)}$$
$$\bar{c}_{24} = -5 - (-9) - 3 = 1 \quad \text{(Satisface la condición de optimalidad)}$$

Así, la sfb actual es óptima. La solución óptima para el FMOCM es

Variables básicas: $x_{13} = 3$, $x_{32} = 1$, $x_{34} = 2$
Variables no básicas en su límite superior: $x_{12} = 7$, $x_{24} = 8$
Variable no básica en el límite inferior: $x_{23} = 0$

El valor óptimo de z se obtiene de

$$z = 7(4) + 3(3) + 1(2) + 8(3) + 2(6) = \$75$$

PROBLEMAS

Grupo A

1 Considere el problema de hallar la trayectoria más corta del nodo 1 al 6 en la figura 2.

a Formule este problema como un FMOCM.

b Encuentre una sfb en la que x_{12}, x_{24} y x_{46} son positivas. (*Sugerencia*: se obtendrá un sfb degenerada.)

c Utilice el simplex de red para hallar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo 6.

2 Para el FMOCM de la figura 62, encuentre una sfb.

3 Determine la solución óptima para el FMOCM de la figura 63 por medio de la sfb de la figura 64 como base de partida.

FIGURA 62

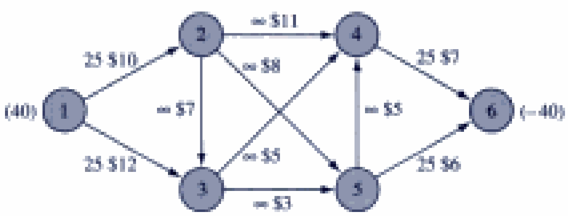


FIGURA 63

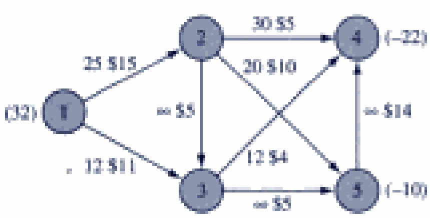
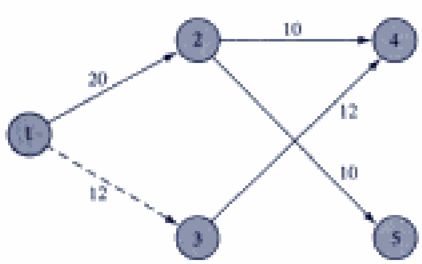


FIGURA 64



4 Encuentre una sfb para la red de la figura 65.

5 Obtenga la solución óptima para el FMOCM de la figura 66 por medio de la sfb de la figura 67 como una base de partida.

FIGURA 65

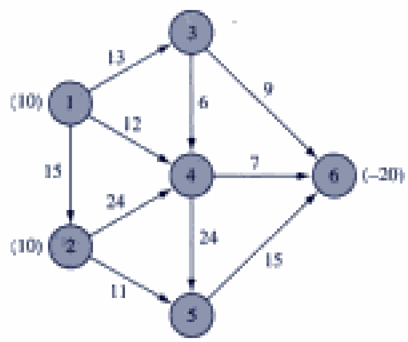


FIGURA 66

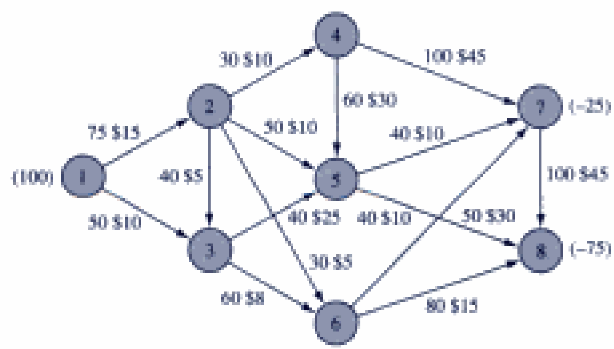
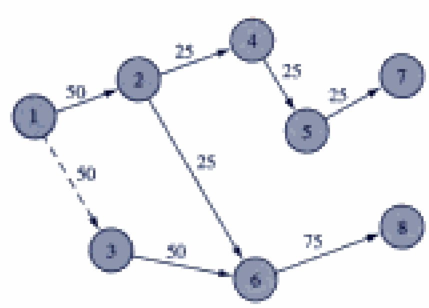


FIGURA 67



RESUMEN Problemas de trayectoria más corta

Supóngase que se desea encontrar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo j en una red en la que los arcos tienen longitudes no negativas.

Algoritmo de Dijkstra

1 Etiquete el nodo 1 con una etiqueta permanente de 0. Luego marque cada arco conectado al nodo 1 mediante un solo arco con una etiqueta "temporal" igual a la longitud del arco que une al nodo 1 con el nodo i. Los demás nodos tendrán una etiqueta temporal de ∞. Elija el nodo con la etiqueta temporal más pequeña y haga permanente a esta etiqueta.

2 Supóngase que el nodo i es el $(k + 1)$-ésimo nodo que recibirá una etiqueta permanente. Para cada nodo j que ahora tiene una etiqueta temporal y está conectado al nodo i por un arco, sustituya la etiqueta temporal del nodo j con min {etiqueta temporal actual del nodo j, (etiqueta permanente del nodo i) + longitud del arco (i, j)}. Haga permanente a la etiqueta temporal más pequeña. Continúe este proceso hasta que todos los nodos tengan etiquetas permanentes. Para encontrar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo j, trabaje hacia atrás desde el nodo j encontrando los nodos que tienen etiquetas que difieren por exactamente la longitud del arco de conexión. Si se desea la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo j, detenga el proceso de etiquetado tan pronto como el nodo j reciba una etiqueta permanente.

Problema de la trayectoria más corta como un problema de transbordo

Para hallar la trayectoria más corta del nodo 1 al nodo j, trate de minimizar el costo de enviar una unidad del nodo 1 al nodo j (con los demás nodos de la red como puntos de transbordo), donde el costo de enviar una unidad del nodo k al nodo k' es la longitud del arco (k, k') si tal arco existe y es M (un número positivo grande) si tal arco no existe. Como en la sección 7.6, el costo de enviar una unidad de un nodo a sí mismo es cero.

Problemas de flujo máximo

Se puede hallar el flujo máximo de la fuente al sumidero en una red mediante programación lineal o por el método de Ford-Fulkerson.

Determinación del flujo máximo mediante programación lineal

Sea

$$x_0 = \text{flujo por el arco artificial que va del sumidero a la fuente}$$

Entonces para hallar el flujo máximo de la fuente al sumidero, maximice x_0 sujeta a los siguientes dos conjuntos de restricciones:

1 El flujo por cada arco debe ser no negativo y no puede exceder la capacidad del arco.

2 Flujo hacia el nodo i = flujo saliente del nodo i (Conservación del flujo)

Obtención del flujo máximo por el método de Ford-Fulkerson

Sean

$$I = \text{conjunto de arcos en los que se podría incrementar el flujo}$$
$$R = \text{conjunto de arcos en los que se podría reducir el flujo}$$

Paso 1 Encuentre un flujo factible (una manera de lograrlo es establecer en cero el flujo de cada arco).

Paso 2 Usando el procedimiento siguiente, trate de encontrar una cadena de arcos y nodos etiquetados que se pueda usar para marcar el sumidero. Etiquete la fuente. Luego etiquete los puntos extremos y arcos (excepto el arco a_0) de acuerdo con las reglas siguientes: (1) si el punto extremo x está etiquetado, entonces el punto extremo y no está etiquetado y el arco (x, y) es un miembro de I; luego etiquete el punto extremo y y el arco (x, y). El arco (x, y) se llama **arco directo**. (2) Si el punto extremo y no está etiquetado, entonces se etiqueta el punto extremo x y el arco (x, y) es un miembro de R; a continuación etiquete el punto extremo y y el arco (x, y). El arco (x, y) se llama **arco inverso**.

Si no se puede etiquetar el sumidero, el flujo factible actual es un flujo máximo; si está etiquetado el sumidero, vaya al paso 3.

Paso 3 Si la cadena utilizada para etiquetar el sumidero consiste por completo en arcos directos, se podría incrementar el flujo por cada uno de los arcos directos de la cadena principal y, por consiguiente, se incrementa el flujo de la fuente al sumidero. Si la cadena utilizada para marcar el sumidero consta de arcos directos e inversos, incremente el flujo en cada arco directo de la cadena y disminuya el flujo en cada arco inverso de la cadena. De nuevo, esto incrementará el flujo de la fuente al sumidero. Vuelva al paso 2.

Método de la trayectoria crítica

Suponiendo que se conoce la duración de cada actividad, se podría usar el método de la trayectoria crítica (CPM) para hallar la duración de un proyecto.

Reglas para construir un diagrama de proyecto AOA

1 El nodo 1 representa el inicio del proyecto. Un arco debe partir desde el nodo 1 para representar cada actividad que no tiene predecesores.

2 Se debe incluir en la red un nodo (llamado nodo de terminación) que representa la conclusión del proyecto.

3 Numere los nodos de la red de modo que el nodo que representa la terminación de una actividad siempre tenga un número más grande que el nodo que representa el comienzo de una actividad (podría haber más de un esquema de numeración que satisface la regla 3).

4 Una actividad no debe estar representada por más de un arco en la red.

5 Dos nodos pueden estar conectados por a lo sumo un arco.

Para evitar violar las reglas 4 y 5, a veces es necesario utilizar una **actividad ficticia** que tome el tiempo a cero.

Cálculo del tiempo de evento inicial

El tiempo de evento inicial para el nodo i, denotado por $ET(i)$, es la fecha más próxima en que puede ocurrir el evento que corresponde al nodo i. $ET(i)$ se calcula como sigue:

Paso 1 Encuentre cada evento anterior al nodo i que esté conectado mediante un arco al nodo i. Estos eventos son los **predecesores inmediatos** del nodo i.

Paso 2 Para el ET de cada predecesor inmediato del nodo i, agregue la duración de la actividad que conecta al predecesor inmediato con el nodo i.

Paso 3 $ET(i)$ es igual al máximo de las sumas calculadas en el paso 2.

Cálculo del tiempo de evento tardío

El tiempo de evento tardío para el nodo i, denotado $LT(i)$, es la última fecha en que puede ocurrir el evento que corresponde al nodo i sin retrasar la terminación del proyecto. $LT(i)$ se calcula como sigue:

Paso 1 Encuentre cada nodo que ocurre después del nodo i y está conectado al nodo i mediante un arco. Estos eventos son los **sucesores inmediatos** del nodo i.

Paso 2 A partir del LT para cada sucesor inmediato al nodo i, reste la duración de la actividad que une al sucesor con el nodo i.

Paso 3 $LT(i)$ es la más pequeña de las diferencias determinadas en el paso 2.

Tiempo libre total

Para un arco arbitrario que representa la actividad (i, j), el tiempo libre total (denotado como $TF(i, j)$) de la actividad representada por (i, j) es la cantidad porque el tiempo de inicio de la actividad (i, j) se podría retardar más allá de su tiempo de inicio más próximo posible sin retardar la terminación del proyecto (suponiendo que ninguna otra actividad se retrasa):

$TF(i, j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$ [t_{ij} = duración de la actividad representada por el arco (i, j)]

Cualquier actividad con un tiempo libre total de cero es una **actividad crítica**. Una trayectoria del nodo 1 al nodo terminal que consiste por completo en actividades críticas se llama **trayectoria crítica.** Cualquier trayectoria crítica (podría haber más de una en un proyecto de red) es la trayectoria más larga en la red del nodo de inicio (nodo 1) al nodo terminal. Si se retrasa el inicio de una actividad crítica, o si la duración de una actividad crítica es más larga de lo esperado, entonces se retrasa la terminación del proyecto.

Tiempo libre

El tiempo libre de la actividad que corresponde al arco (i, j), denotado por $FF(i, j)$, es la cantidad por la que el tiempo de inicio de la actividad que corresponde al arco (i, j) (o la duración de la actividad) se puede retrasar sin retardar el inicio de alguna actividad posterior más allá de su tiempo de inicio más próximo posible:

$$FF(i, j) = ET(j) - ET(i) - t_{ij}$$

La programación lineal se puede usar para encontrar una trayectoria crítica y la duración del proyecto. Sea

$$x_j = \text{tiempo en el que ocurre el nodo } j \text{ en la red de proyecto}$$
$$F = \text{nodo que representa el final o la terminación del proyecto}$$

Para encontrar la trayectoria crítica, minimice $z = x_F - x_1$ sujeta a

$$x_j \geq x_i + t_{ij} \quad \text{o} \quad x_j - x_i \geq t_{ij} \quad \text{para cada arco}$$
$$x_j \text{ nrs (no restringido en signo)}$$

El valor óptimo de la función objetivo es la duración de cualquier trayectoria crítica (o tiempo para completar el proyecto). Para encontrar una trayectoria crítica, simplemente encuentre una trayectoria del nodo 1 al nodo F para la cual cada arco de la trayectoria esté representado por un arco (i, j) cuya restricción ($x_j - x_i \geq t_{ij}$) tiene un precio dual de -1.

La programación lineal también se puede usar para determinar el método del costo mínimo de reducir la duración de actividades (aceleración) para satisfacer la fecha límite de terminación de un proyecto.

PERT

Si las duraciones de las actividades del proyecto no se conocen con certeza, entonces se podría usar PERT para estimar la probabilidad de que el proyecto se completará en una cantidad de tiempo específica. PERT requiere que para cada actividad se especifiquen los siguientes:

a = estimación de la duración de la actividad en las condiciones más favorables
b = estimación de la duración de la actividad en las condiciones menos favorables
m = valor más probable para la duración de la actividad

Si las estimaciones a, b y m se refieren a la actividad representada por el arco (i, j), entonces $\mathbf{T}_{ij}$ es la variable aleatoria que representa la duración de la actividad representada por el arco (i, j). $\mathbf{T}_{ij}$ tiene (aproximadamente) las propiedades siguientes:

$$E(\mathbf{T}_{ij}) = \frac{a + 4m + \mathrm{b}}{6}$$

$$\mathrm{var}\mathbf{T}_{ij} = \frac{(b - a)^2}{36}$$

Entonces

$$\sum_{(i,\ j)\in \text{trayectoria}} E(\mathbf{T}_{ij}) = \text{duración esperada de actividades en cualquier trayectoria}$$

$$\sum_{(i,\ j)\in \text{trayectoria}} \mathrm{var}\mathbf{T}_{ij} = \text{varianza de la duración de actividades en cualquier trayectoria}$$

Suponiendo (algunas veces incorrectamente) que la trayectoria crítica encontrada mediante CPM es la trayectoria crítica, y suponiendo que la duración de la trayectoria crítica tiene una distribución normal, las ecuaciones anteriores se podrían utilizar para estimar la probabilidad de que el proyecto se termine dentro de cualquier tiempo específico.

Problemas de flujo de red de costo mínimo

Los problemas de transporte, asignación, transbordo, trayectoria más corta, flujo máximo y trayectoria crítica son casos especiales del problema de flujo de red de costo mínimo (FMOCM).

x_{ij} = número de unidades de flujo enviadas del nodo i al nodo j por el arco (i, j)
b_i = suministro neto (salida – entrada) al nodo i
c_{ij} = costo de transportar una unidad de flujo del nodo i al nodo j vía el arco (i, j)
L_{ij} = límite inferior en el flujo a través del arco (i, j) (si no hay límite inferior, sea $L_{ij} = 0$)
U_{ij} = límite superior en el flujo a través del arco (i, j) (si no hay límite superior, sea $U_{ij} = \infty$)

Entonces un FMOCM se puede escribir como

$$\min \sum_{\text{todos los arcos}} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} = b_i \qquad (\text{para cada nodo } i \text{ de la red})$$

$$L_{ij} \le x_{ij} \le U_{ij} \qquad (\text{Para cada arco de la red})$$

El primer conjunto de restricciones son las **ecuaciones de balance de flujo**, y el segundo conjunto de restricciones expresa limitaciones en las capacidades de arco.

Cualquier FMOCM se puede resolver mediante un código de computadora usando el **simplex de red**; el usuario sólo necesita introducir los nodos y arcos de la red, las c_{ij} y la capacidad de cada arco y las b_i para cada nodo. La formulación de un problema como un FMOCM podría requerir agregar un punto ficticio al problema.

Problemas de árbol de expansión mínima

El método siguiente (algoritmo MST) se puede usar para hallar el árbol de expansión mínima para una red:

Paso 1 Comience en el nodo i, y una el nodo i con el nodo de la red (nodo j) que está más cercano al nodo i. Los dos nodos i y j ahora forman un conjunto de nodos conectado $C = \{i, j\}$ y el arco (i, j) estará en el árbol de expansión mínima. Los nodos restantes de la red (C') son el conjunto desconectado de nodos.

Paso 2 Elija un miembro de $C'(n)$ que sea el más cercano a algún nodo en C. Sea m el nodo en C que es el más cercano a n. Entonces el arco (m, n) estará en el árbol de expansión mínima. Actualice C y C'. Debido a que n ahora está conectado a $\{i, j\}$, C ahora es igual a $\{i, j, n\}$, y se debe eliminar el nodo n de C'.

Paso 3 Repita este proceso hasta encontrar un árbol de expansión mínima. Los empates para el nodo más cercano y el arco se pueden romper de manera arbitraria.

Método simplex de red

Paso 1 Determine una sfb inicial. Las $n - 1$ variables básicas corresponderán a un árbol de expansión. Indique las variables no básicas en su límite superior mediante arcos de línea discontinua.

Paso 2 Calcule $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (más conocidos como *multiplicadores simplex*) resolviendo $y_1 = 0$, $y_i - y_j = c_{ij}$ para las variables básicas x_{ij}. Para las variables no básicas, determine el coeficiente $\bar{c}_{ij}$ del renglón 0 a partir de $\bar{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}$. La sfb actual es óptima si $\bar{c}_{ij} \leq 0$ para toda $x_{ij} = L_{ij}$ y $\bar{c}_{ij} \geq 0$ para toda $x_{ij} = U_{ij}$. Si la sfb no es óptima, entonces elija la variable no básica que más violó las condiciones de optimalidad como la variable básica entrante.

Paso 3 Identifique el ciclo (¡habrá exactamente uno!) creado al agregar el arco que corresponde a la variable entrante para el árbol de expansión actual de la sfb actual. Utilice la conservación del flujo para determinar los nuevos valores de las variables en el ciclo. La variable que choca primero con su límite superior o inferior cuando se cambia el valor de la variable básica entrante sale de la base.

Paso 4 Encuentre la nueva sfb cambiando los flujos de los arcos en el ciclo encontrado en el paso 3. Vaya al paso 2.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

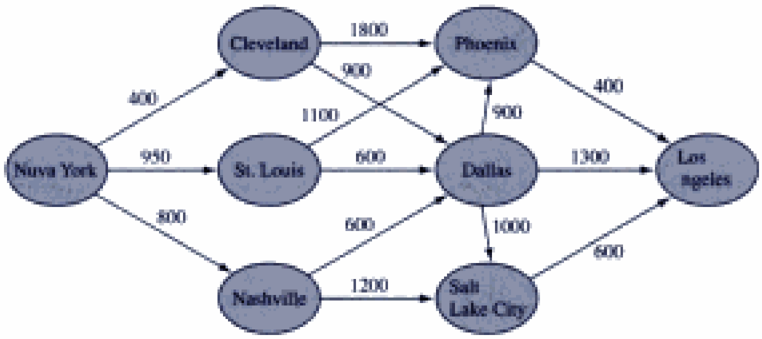
1 Un camión debe viajar de Nueva York a Los Ángeles. Como se ilustra en la figura 68, existen varias rutas. El número asociado con cada arco es el número de galones de combustible que requiere el camión para atravesar el arco.

a Utilice el algoritmo de Dijkstra para encontrar la ruta de Nueva York a Los Ángeles que utiliza la cantidad mínima de combustible.

b Formule un problema de transporte balanceado que permita encontrar la ruta de Nueva York a Los Ángeles que utiliza la mínima cantidad de combustible.

c Formule como un FMOCM el problema de hallar la ruta de Nueva York a Los Ángeles que utiliza la mínima cantidad de combustible.

FIGURA 68
Red para el problema 1



2 Las llamadas de Nueva York a Los Ángeles se transportan como sigue: La llamada se envía primero a Chicago o Memphis, luego se dirige por Denver o Dallas y, por último, se envía a Los Ángeles. El número de líneas telefónicas que une a cada par de ciudades se muestra en la tabla 39.

a Formule un PL que se pueda utilizar para determinar el número máximo de llamadas que pueden enviarse de Nueva York a Los Ángeles en cualquier momento.

b Por medio del método de Ford-Fulkerson, determine el número máximo de llamadas que pueden enviarse de Nueva York a Los Ángeles en cualquier instante.

TABLA 39

Ciudad	No. de líneas telefónicas
N.Y.–Chicago	500
N.Y.–Memphis	400
Chicago–Denver	300
Chicago–Dallas	250
Memphis–Denver	200
Memphis–Dallas	150
Denver–L.A.	400
Dallas–L.A.	350

3 Antes de poder introducir un nuevo producto, se deben completar las actividades de la tabla 40 (los tiempos están en semanas).

a Dibuje el diagrama de proyecto.

b Determine las trayectorias y las actividades críticas.

c Determine el tiempo libre total y el tiempo libre para cada actividad.

d Prepare un PL que se pueda usar para determinar la trayectoria crítica.

e Formule un FMOCM que se pueda usar para encontrar la trayectoria crítica.

f Faltan 12 semanas para Navidad. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto esté en las tiendas antes de Navidad?

g La duración de cada actividad se puede reducir por hasta 2 semanas al costo siguiente por semana: A, \$80; B, \$60; C, \$30; D, \$60; E, \$40; F, \$30; G, \$20. Suponiendo que se conoce con certeza la duración de cada actividad, formule un PL que minimice el costo de tener el producto en las tiendas por Navidad.

4 Durante los tres meses siguientes, Shoemakers, Inc., debe satisfacer (a tiempo) las siguientes demandas de zapatos: mes 1, 1000 pares; mes 2, 1500 pares; mes 3, 1800 pares. Toma 1 hora de trabajo producir un par de zapatos. Durante cada uno de los tres meses siguientes, se tiene disponible el siguiente número de horas de trabajo en tiempo regular: mes 1, 1000 horas, mes 2, 1200 horas; mes 3, 1200 horas. Cada mes, la compañía puede requerir trabajadores para añadir hasta 400 horas de tiempo extra. A los trabajadores se les paga sólo las horas que trabajan, y un trabajador reci-

TABLA 40

Actividad	Descripción	Predecesores	Duración	a	b	m
A	Diseñar el producto	—	6	2	10	6
B	Sondear el mercado	—	5	4	6	5
C	Pedir la materia prima	A	3	2	4	3
D	Recibir la materia prima	C	2	1	3	2
E	Construir el prototipo del producto	A, D	3	1	5	3
F	Desarrollar una campaña publicitaria	B	2	3	5	4
G	Preparar un plan para la producción en masa	E 4	2	6	4	
H	Entregar el producto a las tiendas	G, F	2	0	4	2

be $4 por hora para trabajo en tiempo regular y $6 por hora para el trabajo en tiempo extra. El final de cada mes, se incurre en un costo de $1.50 por par de zapatos. Formule un FMOCM que se pueda usar para minimizar el costo total en que se incurre para satisfacer las demandas de los tres meses siguientes. Una formulación requiere dibujar la red apropiada y determinar las c_{ij}, b_i y capacidades de arco. ¿Cómo modificaría su respuesta si se pudiera acumular la demanda (toda la demanda se debe satisfacer todavía al final del mes 3) a un costo de $20/par/mes?

5 Encuentre un árbol de expansión mínima para la red de la figura 68.

6 Una compañía produce un producto en dos plantas, 1 y 2. El costo de producir una unidad y la capacidad de producción durante cada periodo se dan en la tabla 41. El producto se envía de inmediato al único cliente de la compañía de acuerdo con los costos de envío por unidad dados en la tabla 42. Si durante el periodo 1 se produce y se envía una unidad, ésta aún se puede utilizar para satisfacer una demanda del periodo 2, pero se estima un costo de retención de $13 por unidad en inventario. Al final del periodo 1, a lo sumo se podría mantener en inventario seis unidades. Las demandas son como sigue: periodo 1, 9; periodo 2, 11. Formule un FMOCM que se pueda usar para minimizar el costo de satisfacer las demandas a tiempo. Trace la red y determine el flujo saliente neto en cada nodo, las capacidades de arco y los costos de envío.

7 Se considera que un proyecto está completo cuando se integran las actividades A−F. La duración y predecesores de cada actividad se dan en la tabla 43. El resultado de LINDO de la figura 69 se puede usar para determinar la trayectoria crítica para este proyecto.

a Utilice el resultado de LINDO para trazar la red de proyecto. Indique la actividad representada por cada arco.

b Determine una trayectoria crítica en la red. ¿Cuál es la fecha más próxima en que se puede completar el proyecto?

8[†] La universidad estatal tiene tres profesores que enseñan cada uno cuatro cursos por año. Cada año, se ofrecen cuatro secciones de comercialización, finanzas y producción. Por lo menos una sección de cada clase se debe ofrecer durante cada semestre (otoño y primavera). La preferencia de horario de cada profesor y la preferencia para enseñar varios cursos se dan en la tabla 44.

TABLA 41

	Costo de producción unitario ($)	Capacidad
Planta 1 (periodo 1)	33	7
Planta 1 (periodo 2)	43	4
Planta 2 (periodo 1)	30	9
Planta 2 (periodo 2)	41	9

TABLA 42

	Periodo 1	Periodo 2
Planta 1 al cliente	$51	$60
Planta 2 al cliente	$42	$71

[†]Basado en Mulvey (1979).

FIGURA 69

```
MIN      X6 - X1
SUBJECT TO
       2) - X1 + X3 >=   3
       3)   X4 - X2 >=   1
       4) - X3 + X4 >=   0
       5) - X4 + X5 >=   7
       6) - X3 + X5 >=   5
       7)   X6 - X5 >=   5
       8)   X3 - X2 >=   0
       9) - X1 + X2 >=   2
END

    LP OPTIMUM FOUND AT STEP    3

         OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)          15.0000000

VARIABLE          VALUE            REDUCED COST
      X6        15.000000            0.000000
      X1         0.000000            0.000000
      X3         3.000000            0.000000
      X4         3.000000            0.000000
      X2         2.000000            0.000000
      X5        10.000000            0.000000

ROW           SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
      2)         0.000000           -1.000000
      3)         0.000000            0.000000
      4)         0.000000           -1.000000
      5)         0.000000           -1.000000
      6)         2.000000            0.000000
      7)         0.000000           -1.000000
      8)         1.000000            0.000000
      9)         0.000000            0.000000

NO. ITERATIONS=        3
```

TABLA 43

Actividad	Duración	Predecesores inmediatos
A	2	—
B	3	—
C	1	A
D	5	A, B
E	7	B, C
F	5	D, E

La satisfacción total que obtiene un profesor por enseñar una clase es la suma de la satisfacción semestral y la satisfacción del curso. Así, el profesor 1 obtiene una satisfacción de 3 + 6 = 9 por enseñar comercialización durante el semestre de otoño. Formule un FMOCM que se pueda usar para asignar profesores a los cursos para maximizar la satisfacción total de los tres profesores.

Grupo B

9[†] Durante los dos meses siguientes, Machineco debe satisfacer (a tiempo) las demandas para tres tipos de productos mostrados en la tabla 45. Hay dos máquinas para producir estos productos. La máquina 1 sólo puede producir

[†]Este problema se basa en Brown, Geoffrion, y Bradley (1981).

TABLA 44

	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3
Preferencia de otoño	3	5	4
Preferencia de primavera	4	3	4
Comercialización	6	4	5
Finanzas	5	6	4
Producción	4	5	6

TABLA 45

Mes	Producto 1	Producto 2	Producto 3
1	50 unidades	70 unidades	80 unidades
2	60 unidades	90 unidades	120 unidades

los productos 1 y 2. Y la máquina 2 sólo puede producir los productos 2 y 3. Cada máquina se puede usar por hasta 40 horas por mes. En la tabla 46 se muestra el tiempo requerido para producir una unidad de cada producto (independiente del tipo de máquina); el costo de producir una unidad de cada producto en cada tipo de máquina; y el costo de mantener una unidad de cada producto en inventario durante un mes. Formule un FMOCM que se pueda usar para minimizar el costo total de satisfacer a tiempo las demandas.

TABLA 46

Producto	Tiempo de producción	Costo de producción ($)		Costo de retención ($)
		Máquina 1	Máquina 2	
1	30	40	—	15
2	20	45	60	10
3	15	—	55	5

BIBLIOGRAFÍA

Brown, G., A. Geoffrion, y G. Bradley. "Production and Sales Planning with Limited Shared Tooling at the Key Operation", *Management Science* 27(1981):247-259.

Glover, F., et al. "The Passenger-Mix Problem in the Scheduled Airlines," *Interfaces* 12(1982):73-80.

Mulvey, M. "Strategies in Modeling: A Personnel Example", *Interfaces* 9(No. 3, 1979):66-75.

Peterson, I. "Proven Path for Limiting Shortest Shortcut", *Science News* diciembre 22, 1990:389.

Ravidran, A. "On Compact Book Storage in Libraries", *Opsearch* 8(1971).

Los tres textos siguientes contienen una revisión de las redes a nivel elemental:

Chachra, V., P. Ghare, y J. Moore. *Applications of Graph Theory Algorithms.* Nueva York: North-Holland, 1979.

Mandl, C. *Applied Network Optimization.* Orlando, Fla.: Academic Press, 1979.

Phillips, D., y A. Diaz. *Fundamentals of Network Analysis.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1981.

Las dos mejores referencias completas sobre modelos de red a nivel elemental son:

Ahuja, R., Magnanti, T., y Orlin, J. *Network Flows: Theory Algorithms and Applications.* Englewood-Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1993.

Bersetkas, D. *Linear Network Optimization: Algorithms and Codes.* Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991.

El análisis detallado de los métodos para resolver problemas de trayectoria más corta se encuentra en los tres textos siguientes:

Denardo, E. *Dynamic Programming: Theory and Applications.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1982.

Evans, T., y E. Minieka. *Optimization Algorithms for Networks and Graphs.* Nueva York: Dekker, 1992. También lleva a cabo un análisis de los algoritmos de árboles de expansión mínima.

Hu, T. *Combinatorial Algorithms.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982. También analiza los algoritmos para árboles de expansión mínima.

Evans y Minieka (1992) y Hu (1982) analizan en detalle los problemas de flujo mínimo, como se hace en los tres textos siguientes:

Ford, L., y D. Fulkerson. *Flows in Networks.* Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1962.

Jensen, P., y W. Barnes. *Network Flow Programming.* Nueva York: Wiley, 1980.

Lawler, E. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.* Chicago: Holt, Rinehart & Winston, 1976.

Explicaciones excelentes del CPM y PERT se encuentran en:

Hax, A., y D. Candea. *Production and Inventory Management.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Wiest, J., y F. Levy. *A Management Guide to PERT/CPM,* 2a ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1977.

Jensen y Barnes (1980) y las referencias siguientes contienen un análisis detallado del método simplex para redes utilizado para resolver un FMOCM.

Chvàtal, V. *Linear Programming.* San Francisco: Freeman, 1983.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms.* Nueva York: Wiley, 1979.

Wu, N., y R. Coppins. *Linear Programming and Extensions.* Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

Una explicación excelente de las aplicaciones de los FMOCM se encuentra en los siguientes textos:

Glover, F., D. Klingman, y N. Phillips. *Network Models and Their Applications in Practice.* Nueva York: Wiley, 1992.

9

Programación entera

Recuerde que los problemas de programación entera se definieron al estudiar la suposición de divisibilidad de la sección 3.1. Expresado en forma sencilla, un *problema de programación entera* (PE) es un PL en el cual se requiere que algunas variables o todas sean enteros no negativos.[†]

En este capítulo (como con los PL en el capítulo 3) se observa que muchas situaciones de la vida cotidiana se pueden plantear como una PE. Pero también se ve que, infortunadamente, las PE son por lo regular más difíciles de resolver que el PL.

En la sección 9.1 se empieza con las definiciones necesarias y algunos comentarios de introducción acerca de la PE. La manera de plantear modelos de programación entera se explica en la sección 9.2. También se trata la forma de resolver las PE en computadora con ayuda de LINDO, LINGO y Solver para Excel. En las secciones 9.3 a 9.8 se estudian otros métodos para resolver PE.

9.1 Introducción a la programación entera

Una PE en la cual se requiere que todas las variables tienen que ser enteros se denomina **problema puro de programación con enteros.** Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned} \tag{1}$$

es un problema puro de programación con enteros.

Una PE en la cual se requiere que sólo algunas de las variables sean números enteros, se llama **problema combinado de programación con enteros.** Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0,\ x_1 \text{ enteros} \end{aligned}$$

es un problema combinado de programación con enteros (no se requiere que x_2 sea un entero).

Un problema de programación entera en el cual todas las variables tienen que ser iguales a 0 o a 1 recibe el nombre de PE 0−1 o PE binaria. Como se trata en la sección 9.2, las PE 0−1 o binarias se presentan sorprendentemente en muchas situaciones.[‡] El ejemplo que sigue es una PE 0−1:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & 2x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 = 0 \text{ o bien } 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Los procedimientos de solución diseñados especialmente para las PE 0−1 se estudian en la sección 9.7.

[†]Un problema de programación no lineal entera es un problema de optimización en el cual la función objetivo o el lado derecho de algunas de las restricciones es una función no lineal, y algunas de las variables, o todas, tienen que ser números enteros. Estos problemas se pueden resolver, algunas veces, con la ayuda de LINGO o el Solver para Excel.

[‡]Una PE pura se puede replantear, en realidad, como una PE 0−1 equivalente (sección 9.7).

El concepto de relajación del PL de un problema de programación entera es un punto clave en la solución de las PE.

DEFINICIÓN ■ El PL obtenido cuando se omiten todos los enteros o las restricciones $0-1$ en las variables se llama **relajación del PL** de la PE. ■

Por ejemplo, la relajación del PL de (1) es

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{1'}$$

y la relajación del PL de (2) es

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & 2x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{2'}$$

Cualquier PE se podría considerar como la relajación del PL más restricciones adicionales (las restricciones que establecen cuáles variables tienen que ser enteros o ser 0 o 1). De aquí que la relajación del PL es una versión de la PE con menos restricciones, o bien, más relajada. Esto significa que *la región factible para cualquier PE debe estar contenida en la región factible para la relajación del PL correspondiente.* Para cualquier PE que es un problema de maximización, de aquí se infiere que

$$\text{Valor óptimo de } z \text{ para la relajación del PL} \ge \text{valor óptimo de } z \text{ para PE} \tag{3}$$

Este resultado también es clave cuando se estudia la solución de las PE.

Con el fin de dilucidar las propiedades de los problemas de programación entera, considérese la PE simple que sigue:

$$\begin{aligned} \max z &= 21x_1 + 11x_2 \\ \text{s.a} \quad & 7x_1 + 4x_2 \le 13 \\ & x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned} \tag{4}$$

De acuerdo con la figura 1, se ve que la región factible para este problema consiste en el conjunto siguiente de puntos: $S = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1)\}$. A diferencia de la región factible para cualquier PL, el único para (4) no es un conjunto convexo. Si se calculan y comparan los valores de z para cada uno de los seis puntos en la región factible, se encuentra que la solución óptima para (4) es $z = 33$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Si es acotada la región factible de una relajación del PL de una PE pura, como en (4), entonces la región factible para la PE constará de una cantidad finita de puntos. En teoría, dicho PE se podría resolver (como se explica en el párrafo anterior) mediante la enumeración de los valores de z para cada punto factible y la determinación del punto factible cuyo valor de z es el más grande. El problema con este procedimiento es que los PE más reales tienen regiones factibles que consisten en billones de puntos factibles. En tales situaciones, una enumeración exhaustiva de todos los puntos factibles requeriría una gran cantidad de tiempo de computadora. Según se explica en la sección 9.3, los PE se resuelven con frecuencia mediante la enumeración de todos los puntos en la región factible del PE.

Un estudio más a fondo de (4) aclara otras propiedades interesantes de los PE. Suponga que un analista lego recomienda el procedimiento siguiente para resolver un PE: primero, resolver la relajación del PL; luego redondear (al entero más próximo) cada variable que debe ser necesariamente un entero y que asume un valor fraccionario en la solución óptima de la relajación del PL.

Al aplicar este procedimiento en (4), primero se encuentra la solución óptima de la relajación de la PL: $x_1 = \frac{13}{7}$, $x_2 = 0$. Cuando se redondea esta solución, se llega a $x_1 = 2$,

FIGURA 1
Región factible para el PE simple (4)

$x_2 = 0$ como una posible solución óptima de (4). Pero $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ no es factible para (4), así que no puede ser la solución óptima de (4). Aun cuando se redondee hacia abajo (con lo que se obtendría como solución $x_1 = 1$, $x_2 = 0$), no se llegaría a la solución óptima ($x_1 = 0$, $x_2 = 3$ es la solución óptima).

En el caso de ciertos PE, puede resultar que cada redondeo de la solución óptima para la relajación del PL no sea factible. Para aclararlo, véase el PE siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned}$$

La solución óptima para la relajación del PL en el caso de este PE es $z = 10$, $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 0$. Al redondear esta solución, otra solución posible sería $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, o bien, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$. Ninguna de estas posibles soluciones es una solución factible para el PE.

De acuerdo con el capítulo 4, el algoritmo simplex facilita la resolución de los PL partiendo desde una solución factible básica hasta llegar a otra mejor. Recuerde que en la mayor parte de los casos, el algoritmo simplex examina sólo una pequeña fracción de todas las soluciones factibles básicas antes de obtener la solución óptima. Esta propiedad del algoritmo simplex posibilita resolver PL relativamente grandes haciendo un esfuerzo ínfimo en la computadora. De manera análoga, uno esperaría que un PE se podría resolver mediante un algoritmo que proceda desde una solución factible con enteros a una mejor solución factible con enteros. Pero aún no se conoce, infortunadamente, un algoritmo semejante.

En resumen, aun cuando la región factible para un PE es un subconjunto de la región factible para la relajación del PL del PE, el PE es por lo regular mucho más difícil de resolver que la relajación del PL del PE.

9.2 Planteamiento de problemas de programación entera

En esta sección se muestra la manera de plantear soluciones prácticas como PE. Cuando el estudiante termine esta sección habrá logrado un buen nivel en el arte de elaborar planteamientos con la programación entera. Se empieza con algunos problemas simples, pero de modo gradual se llega a planteamientos más complicados. El primer ejemplo es un problema de presupuesto de capital que trae a la mente el problema de Star Oil de la sección 3.6.

EJEMPLO 1 PE de un presupuesto de capital

Stockco proyecta cuatro inversiones. La inversión 1 genera un valor neto actual (VNA) de 16 000 dólares: la inversión 2, un VNA de 22 000 dólares; la inversión 3, un VNA de 12 000 dólares, y la inversión 4, una VNA de 8 000 dólares. Para cada inversión se requiere una cierta salida de efectivo en el tiempo presente: la inversión 1, 5 000 dólares; la inversión 2, 7 000 dólares; la inversión 3, 4 000 dólares; la inversión 4, 3 000 dólares. Dispone en la actualidad de 14 000 dólares para invertir. Plantee un PE cuya solución le indique a Stockco el modo de maximizar el VNA obtenido de las inversiones 1 a 4.

Solución Al igual que en los planteamientos de los PL, se empieza por definir una variable por cada decisión que Stockco debe tomar. Esto lleva a definir una variable 0−1:

$$x_j(j = 1, 2, 3, 4) = \begin{cases} 1 & \text{si se efectúa la inversión } j \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$$

Por ejemplo, $x_2 = 1$ si se concreta la inversión 2, pero $x_2 = 0$ si no es así.

El VNA que logra Stockco (en miles de dólares) es

$$\text{VNA total que logra Stockco} = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \tag{5}$$

Para comprender mejor lo anterior, observe que si $x_j = 1$, entonces (5) abarca el VNA de la inversión j, y si $x_j = 0$, la ecuación (5) no abarca el VNA de la inversión j. Esto quiere decir que no importa la combinación de inversiones que se inicie, la ecuación (5) da el VNA de la combinación de proyectos. Por ejemplo, si Stockco invierte en 1 y en 4, entonces obtiene un VNA de 16 000 + 8 000 = 24 000 dólares. Esta combinación de inversiones corresponde a $x_1 = x_4 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, por eso (5) indica que el VNA para esta combinación de inversiones es $16(1) + 22(0) + 12(0) + 8(1) = 24$ (miles de) dólares. De este razonamiento se infiere que la función objetivo de Stockco es

$$\max z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \tag{6}$$

Stockco se enfrenta a la restricción de que se pueden invertir cuando mucho 14 000 dólares. Si se aplica el mismo razonamiento utilizado para llegar a (5), se puede demostrar que

$$\text{Cantidad total invertida (en miles de dólares)} = 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \tag{7}$$

Por ejemplo, si $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, entonces Stockco invierte en 2, 3 y 4. En este caso, Stockco tiene que invertir $7 + 4 + 3 = 14$ (miles de) dólares. La ecuación (7) genera una cantidad total invertida de $5(0) + 7(1) + 4(1) + 3(1) = 14$ mil dólares. Como se pueden invertir a lo más 14 000 dólares, x_1, x_2, x_3 y x_4 deben satisfacer

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 \tag{8}$$

Si se combinan (6) y (8) con las restricciones $x_j = 0$ o 1 ($j = 1, 2, 3, 4$) se obtiene el PE 0−1 siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 \\ & x_j = 0 \text{ o } 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \tag{9}$$

OBSERVACIONES 1 En la sección 9.5 se demuestra que la solución óptima de (9) es $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $z =$ 42 000 dólares. De aquí que Stockco debe invertir en 2, 3 y 4, pero no en 1. La inversión 1 genera un VNA superior por dólar invertido que cualquiera de las otras (la inversión 1 produce 3.20 dólares por dólar invertido; la inversión 2, 3.14 dólares; la inversión 3, 3 dólares, y la inversión 4, 2.67 dólares), por eso podría parecer sorprendente que la inversión 1 no se realice. Para comprender por qué la solución óptima para (9) no significa tomar la "mejor" inversión, obsérvese que cualquier combinación de inversiones que incluya la inversión 1 no puede usar más de 12 000 dólares. Lo anterior significa que si se efectuara la inversión 1 se forzaría a Stockco a abstenerse de invertir 2 000

TABLA 1
Pesos y ventajas de los artículos en la mochila de Josie

Artículo	Peso (libras)	Beneficio
1	5	16
2	7	22
3	4	12
4	3	8

dólares. Por otro lado, la combinación óptima de inversiones utiliza los 14 000 dólares del presupuesto para inversiones. Esto hace posible que la combinación óptima para obtener un VNA superior al de cualquier combinación que incluya la inversión 1. Si, como en el capítulo 3, se permitiera la inversión de fracciones, la solución óptima para (9) sería $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0.50$, $x_4 = 0$, $z = 44\,000$ y se podría invertir en 1. Mediante este simple ejemplo se ilustra que la elección de modelar un problema de presupuesto de capital como una programación lineal o como un problema de programación entera puede afectar de manera importante la solución óptima del problema.

2 Cualquier PE, como (9), que tenga sólo una restricción recibe el nombre de **problema de la mochila.** Suponga que Josie Camper va a efectuar una caminata nocturna. Hay cuatro objetos que ella está considerando llevar consigo en el viaje. El peso de cada uno y el beneficio que Josie siente que recibirá de cada objeto se proporcionan en la tabla 1.

Suponga que la mochila de Josie aguanta hasta 14 libras de equipo. Para $j = 1, 2, 3, 4$, defina

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ si Josie lleva el objeto } j \text{ en la caminata} \\ 0 \text{ si no sucede así.} \end{cases}$$

Entonces, Josie puede maximizar el beneficio total al resolver (9).

En el ejemplo siguiente se muestra la manera en que el planteamiento de Stockco se puede modificar para manejar restricciones adicionales.

EJEMPLO 2 Presupuesto de capital (continuación)

Modifique la formulación de Stockco para tomar en cuenta cada una de las condiciones siguientes:

1 Stockco puede invertir cuando mucho en dos inversiones.

2 Si Stockco invierte en 2, entonces también debe invertir en 1.

3 Si Stockco invierte en 2, no puede invertir en 4.

Solución **1** Simplemente sume la restricción

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \tag{10}$$

a (9). Puesto que cualquier elección de tres o cuatro inversiones dará $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 3$, la desigualdad (10) ya no considera las combinaciones de inversión que impliquen tres o más inversiones. Por lo tanto, (10) deja de considerar exactamente aquellas combinaciones de inversiones que no cumplen con la primera condición.

2 Desde el punto de vista de x_1 y x_2, esta condición establece que si $x_2 = 1$, entonces x_1 tiene que ser igual también a 1. Si se suma la restricción

$$x_2 \leq x_1 \quad \text{o bien,} \quad x_2 - x_1 \leq 0 \tag{11}$$

a (9), entonces ya se tomó en cuenta la segunda condición. Para demostrar que (11) equivale a la condición 2, considérense dos posibilidades: $x_2 = 1$, o bien, $x_2 = 0$.

Caso 1 $x_2 = 1$. Si $x_2 = 1$, entonces (11) implica que $x_1 \geq 1$. Como x_1 tiene que ser igual a 0 o a 1, esto quiere decir que $x_1 = 1$, como se requiere en 2.

Caso 2 $x_2 = 0$. En este caso, (11) se reduce a $x_1 \geq 0$, lo cual permite que $x_1 = 0$ o que $x_1 = 1$. En resumen, si $x_2 = 0$, (11) no limita el valor de x_1. Esto también es consistente con la condición 2.

Entonces, para cualquier valor de x_2, (11) es equivalente a la condición 2.

3 Sume simplemente la restricción

$$x_2 + x_4 \leq 1 \tag{12}$$

a (9). A continuación se ilustra que para los dos casos $x_2 = 1$ y $x_2 = 0$, (12) equivale a la tercera condición.

Caso 1 $x_2 = 1$. En este caso se invierte en 2, y la condición 3 establece que Stockco no puede invertir en 4 (es decir, x_4 tiene que ser igual a 0). Observe que si $x_2 = 1$, entonces (12) sí implica $1 + x_4 \leq 1$, o bien, $x_4 \leq 0$. Por lo tanto, si $x_2 = 1$, entonces (12) es consistente con la condición 3.

Caso 2 $x_2 = 0$. En este caso, la condición 3 no limita el valor de x_4. Observe que si $x_2 = 0$, entonces (12) se reduce a $x_4 \leq 1$, lo cual también deja libre a x_4 para ser igual a 0 o a 1.

Problemas de cargo fijo

Mediante el ejemplo 3 se ilustra una táctica importante que se usa para plantear muchos problemas de ubicación y de producción como PE.

EJEMPLO 3 PE para cargo fijo

Gandhi Cloth Company fabrica tres tipos de prendas de vestir: camisetas, shorts y pantalones. La elaboración de cada tipo de prenda requiere que Gandhi tenga disponible el tipo de maquinaria apropiada. La maquinaria necesaria para manufacturar cada tipo de prenda se tiene que rentar a las tarifas siguientes: maquinaria para camisetas, 200 dólares por semana; maquinaria para shorts, 150 dólares por semana; maquinaria para pantalones, 100 dólares por semana. La hechura de cada tipo de prenda también requiere las cantidades de tela y mano de obra que se indican en la tabla 2. Están disponibles cada semana 150 horas de mano de obra y 160 yardas cuadradas de tela. El costo unitario variable y el precio de venta para cada tipo de prenda, se proporcionan en la tabla 3. Formule un PE cuya solución maximice la utilidad semanal de Gandhi.

Solución Al igual que en los planteamientos de PL, se define una variable de decisión por cada decisión que Gandhi debe tomar. Evidentemente, Gandhi tiene que decidir cuántas prendas de cada tipo debe fabricar a la semana, así que definimos

x_1 = cantidad de camisetas fabricada a la semana
x_2 = cantidad de shorts fabricada a la semana
x_3 = cantidad de pantalones fabricada a la semana

TABLA 2
Recursos necesarios para Gandhi

Tipo de prenda	Mano de obra (H)	Tela (Yardas cuadradas)
Camiseta	3	4
Shorts	2	3
Pantalones	6	4

TABLA 3
Ingresos e información del costo para Gandhi

Tipo de prenda	Precio de venta (dólares)	Costo variable (dólares)
Camiseta	12	6
Shorts	8	4
Pantalones	15	8

Observe que el costo de rentar la maquinaria depende sólo de los tipos de prenda que se elaboran, y no de la cantidad de cada tipo de prenda. Esta situación nos permite expresar el costo de rentar maquinaria utilizando las variables siguientes:

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{si se fabrican camisetas} \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{si se fabrican shorts} \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

$$y_3 = \begin{cases} 1 & \text{si se fabrican pantalones} \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

En pocas palabras, si $x_j > 0$, entonces $y_j = 1$, y si $x_j = 0$, entonces $y_j = 0$. Por consiguiente, la utilidad semanal de Gandhi = (ingresos por las ventas semanales) − (costos variables semanales) − (costos semanales de la renta de maquinaria).

También,

$$\text{Costo a la semana de la renta de maquinaria} = 200y_1 + 150y_2 + 100y_3 \qquad \textbf{(13)}$$

Para justificar (13), observe que ésta toma en cuenta sólo los costos de la renta de la maquinaria necesaria para elaborar los productos que Gandhi está fabricando realmente. Por ejemplo, suponga que se hacen camisetas y pantalones. Entonces, $y_1 = y_3 = 1$ y $y_2 = 0$, y el costo total de la renta por semana será 200 + 100 = 300 dólares.

Puesto que el costo de la renta, por ejemplo, de la maquinaria para las camisetas no depende de la cantidad de camisetas fabricadas, el costo por rentar cada tipo de maquinaria se llama **cargo fijo.** Un cargo fijo para una actividad es un costo que se evalúa cada vez que la actividad se emprenda a un nivel no cero. La presencia de los cargos fijos hará mucho más difícil el planteamiento del problema de Gandhi.

Ahora ya se pueden expresar las utilidades de la semana como

$$\begin{aligned}\text{Utilidades de la semana} &= (12x_1 + 8x_2 + 15x_3) - (6x_1 + 4x_2 + 8x_3) \\ &\quad - (200y_1 + 150y_2 + 100y_3) \\ &= 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3\end{aligned}$$

Por lo tanto, Gandhi desea maximizar

$$z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

Ya que el suministro de mano de obra y tela es limitado, Gandhi afronta las dos restricciones siguientes:

Restricción 1 Se puede usar cada semana cuando mucho 150 horas de mano de obra.

Restricción 2 Se puede usar cada semana cuando mucho 160 yardas cuadradas de tela.

La restricción 1 se expresa mediante

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \qquad \text{(Restricción de la mano de obra)} \qquad \textbf{(14)}$$

La restricción 2 se expresa a través de

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \qquad \text{(Restricción de tela)} \tag{15}$$

Observe que $x_j > 0$ y x_j entero ($j = 1, 2, 3$) debe cumplirse junto con $y_j = 0$ o 1 ($j = 1, 2, 3$). Si se combinan (14) y (15) con estas restricciones y la función objetivo genera el PE siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z &= 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3 \\
\text{s.a} \quad z\ & 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0;\ x_1, x_2, x_3 \text{ enteros} \\
& y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ o } 1
\end{aligned} \tag{PE 1}$$

La solución óptima de este problema es $x_1 = 30$, $x_3 = 10$, $x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Ésta no puede ser la solución óptima para el problema de Gandhi porque indica que la compañía es capaz de fabricar camisetas y pantalones sin incurrir en el costo de rentar la maquinaria necesaria. El planteamiento actual es incorrecto porque las variables y_1, y_2 y y_3 no están representadas en las restricciones. Lo anterior quiere decir que no hay nada que impida establecer $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Fijar $y_i = 0$ es ciertamente menos costoso que hacer $y_i = 1$, de modo que una solución de costo mínimo para el (PE 1) siempre fijará $y_i = 0$. De una u otra manera tenemos que modificar (PE 1) de modo que cada vez que $x_i > 0$ se cumpla $y_i = 1$. La estrategia siguiente logra este objetivo. Sea M_1, M_2 y M_3 tres números positivos grandes, y sume las restricciones siguientes a (PE 1):

$$x_1 \leq M_1 y_1 \tag{16}$$

$$x_2 \leq M_2 y_2 \tag{17}$$

$$x_3 \leq M_3 y_3 \tag{18}$$

Al añadir (16) a (18) a PE 1 hay la certeza de que si $x_i > 0$, entonces $y_i = 1$. Para ejemplificar, demostremos que (16) asegura que si $x_1 > 0$, entonces $y_1 = 1$. Si $x_1 > 0$, entonces y_1 no puede ser 0. Pero si $y_1 = 0$, entonces (16) implicaría que $x_1 \leq 0$ o $x_1 = 0$. Por lo tanto, si $x_1 > 0$, debe cumplirse $y_1 = 1$. Si se fabricaran camisetas ($x_1 > 0$), la desigualdad (16) asegura que $y_1 = 1$, y la función objetivo incluirá el costo de la maquinaria necesaria para producir camisetas. Obsérvese que si $y_1 = 1$, entonces (16) se vuelve $x_1 \leq M_1$, lo cual no limita inútilmente el valor de x_1. Pero si M_1 no se escogiera grande (por ejemplo, $M_1 = 10$), entonces, (16) limitaría inútilmente el valor de x_1. En general, M_i debería ser igual al valor máximo que x_i puede alcanzar. En el problema actual, se pueden elaborar cuando mucho 40 camisetas (si Gandhi fabricara más de 40 camisetas, la compañía se quedaría sin tela), por eso podemos elegir con toda seguridad $M_1 = 40$. El lector debería verificar que es posible escoger $M_2 = 53$ y $M_3 = 25$.

Si $x_1 = 0$, (16) se transforma en $0 \leq M_1 y_1$. Esto permite $y_1 = 0$, o bien, $y_1 = 1$. Puesto que $y_1 = 0$ es menos costosa que $y_1 = 1$, la solución óptima elegirá $y_1 = 0$ si $x_1 = 0$. Se ha demostrado, en resumen, que si (16) a (18) se suman a (PE 1), entonces $x_i > 0$ implicará $y_i = 1$, y $x_i = 0$ implicará $y_i = 0$.

La solución óptima para el problema de Gandhi es $z = 75$ dólares, $x_3 = 25$, $y_3 = 1$. Por lo tanto, Gandhi debería fabricar 25 pantalones cada semana.

El problema de Gandhi es un ejemplo de un **problema de cargos fijos.** En un problema de cargos fijos hay un costo relacionado con el desarrollo de una actividad en un nivel no cero que no depende del nivel de la actividad. Por lo tanto, en el problema de Gandhi, si se fabrican camisetas (no importa cuántas se hagan), se tiene que pagar el cargo fijo de 200 dólares de renta por una máquina para camisetas. Los problemas en los cuales el que toma las decisiones debe elegir dónde ubicar instalaciones, son a menudo problemas de cargo fijo. Esta persona tiene que escoger dónde ubicar distintas instalaciones (como plantas, almacenes u oficinas de negocios), y con frecuencia se relaciona un cargo fijo con la construcción u operación de unas instalaciones. El ejemplo 4 es un problema representativo de ubicación que se relaciona con la idea de un cargo fijo.

EJEMPLO 4 El problema del sistema de percepción de pagos

J. C. Nickles recibe pagos de tarjeta de crédito desde cuatro regiones del país (Oeste, Oeste medio, Este y Sur). El valor promedio diario de pagos que envían por correo los clientes desde cada región es como se indica: Oeste, 70 000 dólares; Oeste medio, 50 000 dólares; Este, 60 000 dólares, Sur, 40 000 dólares. Nickles tiene que decidir en dónde los clientes deben enviar por correo sus pagos. Como Nickles puede ganar 20% de interés anual si invierte estos ingresos, le gustaría recibir los pagos tan rápido como sea posible. Nickles piensa iniciar un sistema de percepción de pagos para procesar los pagos tan rápido como sea posible en cuatro ciudades distintas: Los Ángeles, Chicago, Nueva York y Atlanta. La cantidad promedio de días (desde el momento en que el pago se envía) hasta que es aprobado el cheque y Nickles puede depositar el dinero, depende de la ciudad a la cual se envía el pago, según se muestra en la tabla 4. Por ejemplo, si se envía un cheque desde el Oeste hasta Atlanta, se requieren 8 días promedio antes de que Nickles pueda ganar intereses con el cheque. El costo anual de financiar un sistema de percepción de pagos en cualquier ciudad es 50 000 dólares. Plantee un PE con el que Nickles pueda minimizar la suma de los costos debido al interés perdido y a las operaciones del sistema de percepción de pagos. Suponga que cada región tiene que enviar todo su dinero a una sola ciudad, y que no hay límite en cuanto a la cantidad de dinero que puede manejar cada sistema de percepción de pagos.

Solución Nickles debe tomar dos tipos de decisiones. Primero, Nickles tiene que decidir dónde operar el sistema de percepción de pagos. Definimos para $j = 1, 2, 3, 4,$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si opera en la ciudad } j \text{ el sistema de percepción de pagos} \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

Por lo tanto, $y_2 = 1$ si se opera un sistema de percepción de pagos en Chicago, y $y_3 = 0$ si no se opera sistema alguno de percepción de pagos en Nueva York. Segundo, Nickles tiene que determinar a dónde debe enviar los pagos cada región del país. Definamos (para $i, j = 1, 2, 3, 4$)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la región } i \text{ envía los pagos a la ciudad } j \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

Por ejemplo, $x_{12} = 1$ si el Oeste envía los pagos a Chicago, y $x_{23} = 0$ si el Oeste medio no envía los pagos a Nueva York.

Nickles desea minimizar (costo total anual) = (costo anual de la operación del sistema de percepción de pagos) + (costo anual del interés perdido). Para poder estimar cuánto interés pierde Nickles al año, se tiene que determinar cuánto ingreso se perdería si los pagos de la región i se enviaran a la región j. Por ejemplo, ¿cuánto perdería Nickles en interés anual si los clientes de la región del Oeste envían los pagos a Nueva York? En cualquier día dado, el valor de 8 días, es decir, 8(70 000) = 560 000 dólares de los pagos del Oeste estarán en el correo, pero no estarán ganando intereses. Como Nickles puede ganar 20% al año, los fon-

TABLA 4
Número promedio de días del envío del pago hasta que la deuda es cubierta

	De			
A	Ciudad 1 (Los Ángeles)	Ciudad 2 (Chicago)	Ciudad 3 (Nueva York)	Ciudad 4 (Atlanta)
Región 1 Oeste	2	6	8	8
Región 2 medio Oeste	6	2	5	5
Región 3 Este	8	5	2	5
Región 4 Sur	8	5	5	2

dos del Oeste ocasionarán cada año 0.20(560 000) = 112 000 dólares en intereses perdidos. Cálculos similares del costo anual de intereses perdidos por cada asignación posible de una región a una ciudad generan los resultados que se proporcionan en la tabla 5. Se incurre en el costo de intereses perdidos por enviar los pagos de la región i a la ciudad j sólo si $x_{ij} = 1$, de modo que los costos por los intereses que pierde al año Nickles (en miles de dólares) son

$$\begin{aligned}\text{Costos anuales por los intereses perdidos} = {} & 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} \\ & + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} \\ & + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} \\ & + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44}\end{aligned}$$

El costo de operar un sistema de percepción de pagos en la ciudad i se genera si y sólo si $y_i = 1$, de modo que los costos anuales por operar un sistema de percepción de pagos (en miles de dólares) están dados por

$$\begin{gathered}\text{Costos total de operar un sistema de percepción de pagos} \\ = 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4\end{gathered}$$

Por lo tanto, la función objetivo de Nickles podría ser

$$\begin{aligned}\min z = {} & 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} \\ & + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} \\ & + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} \qquad \text{(19)} \\ & + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44} \\ & + 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4\end{aligned}$$

Pero Nickles enfrenta dos tipos de restricciones.

Restricción tipo 1 Cada región tiene que enviar sus pagos a una sola ciudad.

Restricción tipo 2 Si a una región se le asigna una ciudad para que envíe sus pagos a ella, esta ciudad debe tener un sistema de percepción de pagos.

TABLA 5
Cálculo de los intereses perdidos al año

Asignación	Costos de los intereses perdidos al año
Oeste a L.A.	0.20(70 000)2 = 28 000
Oeste a Chicago	0.20(70 000)6 = 84 000
Oeste a N.Y.	0.20(70 000)8 = 112 000
Oeste a Atlanta	0.20(70 000)8 = 112 000
Oeste medio a L.A.	0.20(50 000)6 = 60 000
Oeste medio a Chicago	0.20(50 000)2 = 20 000
Oeste medio a N.Y.	0.20(50 000)5 = 50 000
Oeste medio a Atlanta	0.20(50 000)5 = 50 000
Este a L.A.	0.20(60 000)8 = 96 000
Este a Chicago	0.20(60 000)5 = 60 000
Este a N.Y.	0.20(60 000)2 = 24 000
Este a Atlanta	0.20(60 000)5 = 60 000
Sur a L.A.	0.20(40 000)8 = 64 000
Sur a Chicago	0.20(40 000)5 = 40 000
Sur a N.Y.	0.20(40 000)5 = 40 000
Sur a Atlanta	0.20(40 000)2 = 16 000

Las restricciones tipo 1 establecen exactamente que para la región i ($i = 1, 2, 3, 4$) una de x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} y x_{i4} debe ser igual a 1 y las otras deben ser iguales a cero. Lo anterior se puede lograr si se incluyen las cuatro restricciones siguientes:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad \text{(Restricción de la región Oeste)} \tag{20}$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \qquad \text{(Restricción de la región Oeste medio)} \tag{21}$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \qquad \text{(Restricción de la región Este)} \tag{22}$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \qquad \text{(Restricción de la región Sur)} \tag{23}$$

Las restricciones tipo 2 establecen que si

$$x_{ij} = 1 \qquad \text{(es decir, los clientes en la región } i \text{ envían pagos a la ciudad } j) \tag{24}$$

entonces, y_j tiene que ser igual a 1. Por ejemplo, suponga que $x_{12} = 1$. Entonces, tiene que haber un sistema de percepción de pagos en la ciudad 2, así que se tiene que cumplir $y_2 = 1$. Hay la certeza de lo anterior si se suman 16 restricciones de la forma

$$x_{ij} \le y_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4) \tag{25}$$

Si $x_{ij} = 1$, entonces (25) asegura que $y_j = 1$, que es lo que se quiere. Asimismo, si $x_{1j} = x_{2j} = x_{3j} = x_{4j} = 0$, entonces (25) posibilita que $y_j = 0$ o $y_j = 1$. Al igual que en el ejemplo de los cargos fijos, el acto de minimizar costos dará por resultado $y_j = 0$. En resumen, las restricciones en (25) garantizan que Nickles paga un sistema de percepción de pagos en la ciudad i si ésta utiliza un sistema de percepción de pagos en la ciudad i.

Al combinar (19) a (23) con las 4(4) = 16 restricciones en (25) y las restricciones 0−1 de las variables se obtiene el planteamiento siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} \\
& + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44} \\
& + 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 50y_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 && \text{(Restricción de la región Oeste)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 && \text{(Restricción de la región Oeste medio)} \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 && \text{(Restricción de la región Este)} \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 && \text{(Restricción de la región Sur)}
\end{aligned}$$

$$x_{11} \le y_1, x_{21} \le y_1, x_{31} \le y_1, x_{41} \le y_1, x_{12} \le y_2, x_{22} \le y_2, x_{32} \le y_2, x_{42} \le y_2,$$
$$x_{13} \le y_3, x_{23} \le y_3, x_{33} \le y_3, x_{43} \le y_3, x_{14} \le y_4, x_{24} \le y_4, x_{34} \le y_4, x_{44} \le y_4$$
$$\text{Toda } x_{ij} \text{ y } y_j = 0 \text{ o } 1$$

La solución óptima es $z = 242$, $y_1 = 1$, $y_3 = 1$, $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{43} = 1$. Por lo tanto, Nickles debe tener en operación un sistema de percepción de pagos en Los Ángeles y Nueva York. Los clientes del Oeste deben enviar sus pagos a Los Ángeles y todos los otros clientes, a Nueva York.

Hay otro modo de modelar las restricciones del tipo 2. En lugar de las 16 restricciones de la forma $x_{ij} \le y_j$, se podrían incluir las cuatro restricciones siguientes:

$$\begin{aligned}
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 4y_1 && \text{(Restricción de Los Ángeles)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 4y_2 && \text{(Restricción de Chicago)} \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \le 4y_3 && \text{(Restricción de Nueva York)} \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \le 4y_4 && \text{(Restricción de Atlanta)}
\end{aligned}$$

Para la ciudad dada, cada restricción proporciona la certeza de que si utiliza el sistema de percepción de pagos, entonces Nickles debe pagar. Por ejemplo, considere $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \le 4y_4$. El sistema de percepción de pagos en Atlanta se usa si $x_{14} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{34} = 1$, o bien, $x_{44} = 1$. Si cualquiera de estas variables es igual a 1, entonces la restricción de Atlanta asegura que $y_4 = 1$, y Nickles tiene que pagar por el sistema de percepción de pagos. En el supuesto de que todas las variables son 0, entonces el acto de minimizar los costos ocasionará que $y_4 = 0$, y no se generará el costo del sistema de percepción de pagos en Atlanta. ¿Por qué el lado derecho de cada restricción es igual a 4? Porque así se asegura que por cada ciudad, es posible enviar dinero desde las cuatro regiones a la ciudad. En la sección 9.3 se analiza cuál de las dos formulaciones alternativas del problema del sistema de percepción de pagos es más fácil de resolver mediante computadora. ¡La respuesta lo puede sorprender!

Problemas de recubrimiento de conjuntos

El ejemplo siguiente es representativo de una clase importante de PE conocida como problemas de recubrimiento de conjuntos.

EJEMPLO 5 Problema de recubrimiento de conjuntos para la ubicación de instalaciones

Hay seis ciudades (ciudades 1 a 6) en el condado de Kilroy. El condado debe decidir dónde construir la estación de bomberos. Asimismo, el condado quiere construir la cantidad mínima de estaciones de bomberos necesarias para tener la certeza de que por lo menos una está dentro de 15 minutos (tiempo de manejo) de cada ciudad. Los tiempos (en minutos) necesarios para ir en automóvil de una ciudad a otra del condado se indican en la tabla 6. Plantee una PE mediante el cual Kilroy sepa cuántas estaciones de bomberos debe construir y dónde ubicarlas.

Solución Kilroy tiene que determinar, para cada ciudad, si construye una estación de bomberos allí. Definimos las variables 0−1 (binarias) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 mediante

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se construye una estación de bomberos en la ciudad } i \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

Entonces la cantidad total de estaciones de bomberos que se construyen, está dada por $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$, y la función objetivo de Kilroy se tiene que minimizar

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

¿Cuáles son las restricciones de Kilroy? El condado debe tener la certeza de que hay una estación de bomberos a 15 minutos de cada ciudad. En la tabla 7 se indica a cuáles lugares se puede llegar en 15 minutos o en menos. Para asegurar que por lo menos una estación de bomberos está a 15 minutos de la ciudad 1, se suma la restricción

$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad \text{(Restricción de la ciudad 1)}$$

Esta restricción asegura que $x_1 = x_2 = 0$ es imposible, de modo que por lo menos una estación de bomberos se construirá a 15 minutos de la ciudad 1. De manera igual, la restricción

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \qquad \text{(Restricción de la ciudad 2)}$$

asegura que por lo menos una estación de bomberos se localiza a 15 minutos de la ciudad 2. Las restricciones para las ciudades 3 a 6, se obtienen de modo similar. Al combinar es-

TABLA 6
Tiempo necesario para viajar de ciudad a ciudad en el condado de Kilroy

	A					
Desde	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5	Ciudad 6
Ciudad 1	0	10	20	30	30	20
Ciudad 2	10	0	25	35	20	10
Ciudad 3	20	25	0	15	30	20
Ciudad 4	30	35	15	0	15	25
Ciudad 5	30	20	30	15	0	14
Ciudad 6	20	10	20	25	14	0

TABLA 7
Ciudades a 15 minutos de una ciudad particular

Ciudad	A 15 minutos
1	1, 2
2	1, 2, 6
3	3, 4
4	3, 4, 5
5	4, 5, 6
6	2, 5, 6

tas seis restricciones con la función objetivo (y con el hecho de que cada variable tiene que ser igual a 0 o a 1), se obtiene el PE siguiente:

$$\begin{array}{llr}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad \geq 1 & & \text{(Restricción de la ciudad 1)} \\
\qquad x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 \geq 1 & & \text{(Restricción de la ciudad 2)} \\
\qquad\qquad x_3 + x_4 \qquad\qquad \geq 1 & & \text{(Restricción de la ciudad 3)} \\
\qquad\qquad x_3 + x_4 + x_5 \qquad \geq 1 & & \text{(Restricción de la ciudad 4)} \\
\qquad\qquad\qquad x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 & & \text{(Restricción de la ciudad 5)} \\
\qquad x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 \geq 1 & & \text{(Restricción de la ciudad 6)} \\
\qquad x_i = 0 \text{ o } 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) & &
\end{array}$$

Una solución óptima para este PE es $z = 2$, $x_2 = x_4 = 1$, $x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$. Por lo tanto, el condado de Kilroy puede construir dos estaciones de bomberos: una en la ciudad 2 y otra en la ciudad 4.

Según se mencionó, el ejemplo 5 representa una clase de PE conocida como **problemas de recubrimiento de conjuntos.** En un problema de este tipo, cada elemento de un conjunto dado (conjunto 1) tiene que estar "cubierto" por un elemento aceptable de algún conjunto (conjunto 2). El objetivo del problema es minimizar el número de elementos del conjunto 2 que se requieren para "abarcar" todos los elementos del conjunto 1. En el ejemplo 5, el conjunto 1 lo forman las ciudades del condado Kilroy, y el conjunto 2 es el conjunto de estaciones de bomberos. La estación en la ciudad 2 sirve a las ciudades 1, 2 y 6, en tanto que la estación en la ciudad 4 cubre las ciudades 3, 4 y 5. Este tipo de problemas tienen muchas aplicaciones en campos como los horarios de las tripulaciones de los aviones, formación de los distritos políticos, horario de aviones y rutas de camiones.

Restricciones inclusivas o distributivas

La situación siguiente se presenta de manera muy común en los problemas de programación matemática. Se dan dos restricciones de la forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \tag{26}$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \tag{27}$$

Se desea asegurar que por lo menos una de las dos, (26) o (27), se cumpla; con frecuencia se les llama **restricciones inclusivas.** Al sumar las dos restricciones (26′) y (27′) a la formulación, se asegura que se satisface por lo menos una de las dos, (26) o (27):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My \tag{26′}$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1 - y) \tag{27′}$$

En (26′) y (27′), y es una variable 0−1 (binaria), y M es un número suficientemente grande como para asegurar que se cumplen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M$ y $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M$ para todos los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen las otras restricciones del problema.

Mostremos que la inclusión de (26′) y (27′) es equivalente a que por lo menos se cumpla una de las dos desigualdades (26) y (27). O $y = 0$ o $y = 1$. Si $y = 0$, entonces (26′) y (27′) se convierten en $f \leq 0$ y $g \leq M$. Por lo tanto, si $y = 0$, entonces se tiene que cumplir (26) (y posiblemente (27). De igual manera, si $y = 1$, entonces (26′) y (27′) se transforman en $f \leq M$ y $g \leq 0$. Por lo tanto, si $y = 1$, entonces (27) (y posiblemente (26)) se tienen que cumplir. Por lo tanto, ya sea que $y = 0$ o $y = 1$, (26′) y (27′) aseguran que se cumple (26) o (27), por lo menos una de las dos.

Mediante el ejemplo siguiente se ilustra el uso de las restricciones inclusivas.

EJEMPLO 6 Restricciones inclusivas

Dorian Auto proyecta fabricar tres tipos de automóviles: compactos, medianos y grandes. El recurso que requiere cada tipo de automóvil y las utilidades que genera, se proporcionan en la tabla 8. Ahora dispone de 6 000 toneladas de acero y 60 000 horas de mano de obra. Para que la producción de un tipo de automóvil sea factible desde el punto de vista económico, se tienen que producir por lo menos 1 000 automóviles de ese tipo. Plantee una PE para maximizar las utilidades de Dorian.

Solución Puesto que Dorian tiene que determinar cuántos automóviles de cada tipo tiene que fabricar, se definen

$$x_1 = \text{número de automóviles compactos fabricados}$$
$$x_2 = \text{número de automóviles medianos fabricados}$$
$$x_3 = \text{número de automóviles grandes fabricados}$$

Entonces, la contribución a la utilidad (en miles de dólares) es $2x_1 + 3x_2 + 4x_3$, y la función objetivo de Dorian es

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Ya sabemos que si se fabrican automóviles de un tipo dado, entonces se tienen que producir por lo menos 1 000 automóviles de ese tipo. Por lo tanto, para $i = 1, 2, 3$, debemos tener $x_i \leq 0$ o $x_i \geq 1\,000$. El acero y la mano de obra son limitados, por eso Dorian tiene que cumplir con las cinco restricciones siguientes:

Restricción 1 $x_1 \leq 0$ o $x_1 \geq 1\,000$.

Restricción 2 $x_2 \leq 0$ o $x_2 \geq 1\,000$.

Restricción 3 $x_3 \leq 0$ o $x_3 \geq 1\,000$.

Restricción 4 Los automóviles fabricados pueden utilizar a lo más 6 000 toneladas de acero.

Restricción 5 Los automóviles fabricados pueden utilizar a lo más 60 000 horas de mano de obra.

TABLA 8
Recursos y utilidades para los tres tipos de automóviles

	Tipo de automóvil		
Recurso	Compacto	Mediano	Grande
Acero necesario	1.5 toneladas	3 toneladas	5 toneladas
Mano de obra requerida	30 horas	25 horas	40 horas
Utilidad generada	2 000	3 000	4 000

De acuerdo con el análisis anterior, se tiene que si definimos $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ y $g(x_1, x_2, x_3) = 1\,000 - x_1$, es posible reemplazar la restricción 1 por el par siguiente de restricciones:

$$x_1 \le M_1y_1$$
$$1\,000 - x_1 \le M_1(1 - y_1)$$
$$y_1 = 0 \text{ o } 1$$

Con el fin de tener la certeza de que tanto x_1 como $1000 - x_1$ nunca excederán M_1, es suficiente que ésta tenga tal valor que sea mayor que 1 000; x_1 es siempre menor que M_1. Al fabricar $\frac{60\,000}{30} = 2\,000$ automóviles compactos se utilizaría toda la mano de obra disponible (pero sobraría algo de acero), por eso se pueden producir cuando mucho 2000 automóviles compactos. Por lo tanto, se podría elegir $M_1 = 2000$. Del mismo modo, la restricción 2 se podría reemplazar por el par de restricciones siguiente:

$$x_2 \le M_2y_2$$
$$1\,000 - x_2 \le M_2(1 - y_2)$$
$$y_2 = 0 \text{ o } 1$$

El estudiante podría comprobar que $M_2 = 2000$ es satisfactorio. De igual manera, la restricción 3 se podría reemplazar por

$$x_3 \le M_3y_3$$
$$1\,000 - x_3 \le M_3(1 - y_3)$$
$$y_3 = 0 \text{ o } 1$$

Una vez más, se debería comprobar que $M_3 = 1200$ es satisfactorio. La restricción 4 es una restricción de recurso directo que se reduce a

$$1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 6\,000 \qquad \text{(Restricción del acero)}$$

La restricción 5 es una restricción del uso directo del recurso que se reduce a

$$30x_1 + 25x_2 + 40x_3 \le 60\,000 \qquad \text{(Restricción de la mano de obra)}$$

Después de hacer notar que $x_i \ge 0$ y que x_i tiene que ser un entero, se obtiene el PE siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.a} \quad x_1 &\le 2\,000y_1 \\
1\,000 - x_1 &\le 2\,000(1 - y_1) \\
x_2 &\le 2\,000y_2 \\
1\,000 - x_2 &\le 2\,000(1 - y_2) \\
x_3 &\le 1\,200y_3 \\
1\,000 - x_3 &\le 1\,200(1 - y_3) \\
1.5x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 6\,000 \qquad \text{(Restricción del acero)} \\
30x_1 + 25x_2 + 40x_3 &\le 60\,000 \qquad \text{(Restricción de la mano de obra)} \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0;\ x_1, x_2, x_3 \text{ enteros} \\
y_1, y_2, y_3 &= 0 \text{ o } 1
\end{aligned}$$

La solución óptima para el PE es $z = 6\,000$, $x_2 = 2\,000$, $y_2 = 1$, $y_1 = y_3 = x_1 = x_3 = 0$. Por lo tanto, Dorian debe fabricar 2000 automóviles medianos. Si Dorian no estuviera obligada a fabricar por lo menos 1000 automóviles de cada tipo, entonces la solución óptima habría sido producir 570 automóviles compactos y 1715 medianos.

Restricciones si... entonces

En muchas aplicaciones se presenta la situación siguiente: se desea tener la certeza de que si una restricción $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ se satisface, entonces la restricción $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ se tiene que cumplir, en tanto que si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ no se cumple, entonces $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ se podría satisfacer o no. En pocas palabras, se desea asegurar que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ implica $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$.

Para tener la certeza de que sucede lo anterior se incluyen las restricciones siguientes en el planteamiento:

$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My \tag{28}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1 - y) \tag{29}$$

$$y = 0 \text{ o } 1$$

Como es lo usual, M es un número positivo grande. (Se debe elegir M lo suficientemente grande como para que $f \leq M$ y $-g \leq M$ se cumplan para todos los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen las otras restricciones del problema.) Observe que si $f > 0$, entonces, (29) se cumple sólo si $y = 0$. Entonces, (28) implica que $-g \leq 0$, o $g \geq 0$, que es el resultado deseado. Por lo tanto, si $f > 0$, entonces (28) y (29) aseguran que $g \geq 0$. Asimismo, si $f > 0$ no se cumple, entonces (29) posibilita que $y = 0$, o bien, $y = 1$. Al elegir $y = 1$, (28) se cumple de modo automático. Por lo tanto, si $f > 0$ no se satisface, entonces los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no están restringidos y $g < 0$ o $g \geq 0$ son posibles.

Con el fin de ilustrar el uso de esta idea, suponga que se suman las restricciones siguientes al problema del sistema de percepción de pagos de Nickles: si los clientes de la región 1 envían sus pagos a la ciudad 1, entonces ningún otro cliente podría enviar sus pagos a la ciudad 1. Desde el punto de vista matemático, esta restricción se podría expresar como sigue

$$\text{Si } x_{11} = 1, \qquad \text{entonces} \qquad x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0 \tag{30}$$

Como toda x_{ij} debe ser igual a 0 o a 1, (30) se podría escribir como

$$\text{Si } x_{11} > 0, \quad \text{entonces } x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 0, \text{ o bien, } -x_{21} - x_{31} - x_{41} \geq 0 \tag{30'}$$

Si se define $f = x_{11}$ y $g = -x_{21} - x_{31} - x_{41}$, es posible usar (28) y (29) para expresar (30′) [y, por lo tanto, (30)] mediante las dos restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} x_{21} + x_{31} + x_{41} &\leq My \\ x_{11} &\leq M(1 - y) \\ y &= 0 \text{ o } 1 \end{aligned}$$

Como $-g$ y f nunca pueden exceder 3, se elige $M = 3$ y se suman las restricciones siguientes al planteamiento original del sistema de percepción de pagos:

$$\begin{aligned} x_{21} + x_{31} + x_{41} &\leq 3y \\ x_{11} &\leq 3(1 - y) \\ y &= 0 \text{ o } 1 \end{aligned}$$

Programación entera y funciones lineales por segmentos†

Mediante el ejemplo siguiente, se ilustra el modo en que las variables 0−1 se pueden usar para modelar problemas de optimización en los que intervienen funciones lineales por segmentos. Una **función lineal por segmentos** consta de varios segmentos de recta. La función lineal por segmentos de la figura 2 está formada de cuatro segmentos rectos. Los puntos donde la pendiente de la función lineal por segmentos cambia (o el intervalo de definición de la función termina) se denominan **puntos de quiebre** de la función. Por lo tanto, 0, 10, 30, 40 y 50 son los puntos de quiebre de la función que se encuentra en la figura 2.

†Esta sección cubre temas que pueden omitirse sin pérdida de continuidad.

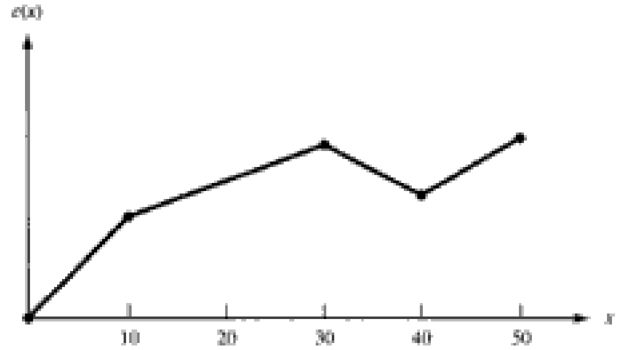


FIGURA 2
Función lineal por segmentos

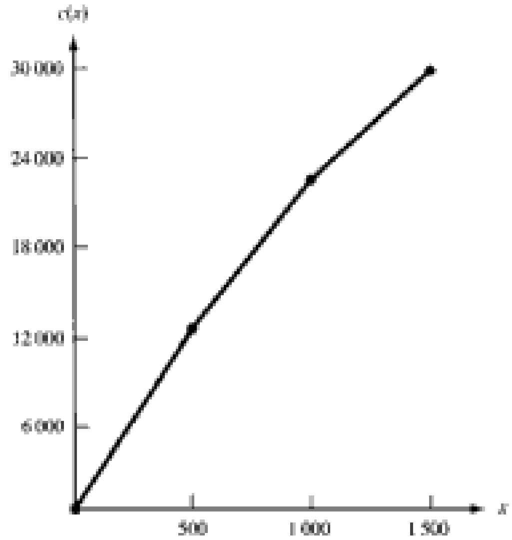


FIGURA 3
Costo de compra de petróleo

Para ilustrar por qué las funciones lineales por segmentos se presentan en las aplicaciones, suponga que se elabora gasolina a partir de petróleo. Al comprar petróleo con el proveedor, se recibe un descuento por cantidad. Los primeros 500 galones de petróleo comprado cuestan 25 centavos por galón; los siguientes 500 galones cuestan 20 centavos por galón y los siguientes 500 galones cuestan 15 centavos por cada galón. Se pueden comprar a lo más 1500 galones. Sea x el número de galones de petróleo comprado y $c(x)$ el costo (en centavos) de la compra de x galones de petróleo. Para $x \leq 0$, $c(x) = 0$. Entonces, para $0 \leq x \leq 500$, $c(x) = 25x$. Para $500 \leq x \leq 1\,000$, $c(x) =$ (costo de comprar los primeros 500 galones a 25 centavos el galón) + (costo de comprar los siguientes $x - 500$ galones a 20 centavos el galón) $= 25(500) + 20(x - 500) = 20x + 2\,500$. Para $1\,000 \leq x \leq 1\,500$, $c(x) =$ (costo de comprar los primeros 1000 galones) + (costo de comprar los siguientes $x - 1000$ galones a 15 centavos el galón) $= c(1\,000) + 15(x - 1\,000) = 7\,500 + 15x$. Por lo tanto, $c(x)$ tiene puntos de quiebre 0, 500, 1000 y 1500, y se grafica en la figura 3.

Una función lineal por segmentos no es una función lineal, así que uno podría pensar que la programación lineal no se podría utilizar para resolver problemas de optimización en las que se presenten estas funciones. Cuando se usan variables 0−1, es posible representar las funciones lineales por segmentos en forma lineal. Suponga que una función lineal por segmentos $f(x)$ tiene puntos de quiebre $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Para alguna k ($k = 1, 2, \ldots, n - 1$), $b_k \leq x \leq b_{k+1}$. Entonces, para algún número z_k ($0 \leq z_k \leq 1$), x podría expresarse de la siguiente manera

$$x = z_k b_k + (1 - z_k)b_{k+1}$$

Como $f(x)$ es lineal para $b_k \leq x \leq b_{k+1}$, se podría escribir

$$f(x) = z_k f(b_k) + (1 - z_k)f(b_{k+1})$$

Con el fin de aclarar la idea, haga $x = 800$ en el ejemplo del petróleo. Entonces se tiene $b_2 = 500 \leq 800 \leq 1\,000 = b_2$, y se podría escribir

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{5}(500) + \tfrac{3}{5}(1\,000) \\ f(x) &= f(800) = \tfrac{2}{5}f(500) + \tfrac{3}{5}f(1{,}000) \\ &= \tfrac{2}{5}(12\,500) + \tfrac{3}{5}(22\,500) = 18\,500 \end{aligned}$$

Ya estamos listos para explicar el método usado para expresar una función lineal por segmentos por medio de las restricciones lineales y las variables 0−1.

Paso 1 Dondequiera que aparezca $f(x)$ en el problema de optimización, reemplace $f(x)$ por $z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \cdots + z_n f(b_n)$.

Paso 2 Sume las restricciones siguientes al problema:

$$z_1 \leq y_1, z_2 \leq y_1 + y_2, z_3 \leq y_2 + y_3, \ldots, z_{n-1} \leq y_{n-2} + y_{n-1}, z_n \leq y_{n-1}$$
$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = 1$$
$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1$$
$$x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \cdots + z_n b_n$$
$$y_i = 0 \text{ o } 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1); \qquad z_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

EJEMPLO 7 PE con funciones lineales por segmentos

Euing Gas elabora dos tipos de gasolina (gasolina 1 y gasolina 2) a partir de dos tipos de petróleo (petróleo 1 y petróleo 2). Cada galón de gasolina 1 debe contener por lo menos 50% de petróleo 1, y cada galón de gasolina 2 debe contener por lo menos 60% de petróleo 1. Cada galón de gasolina 1 se puede vender en 12 centavos, y cada galón de gasolina 2 se vende en 14 centavos. Dispone ahora de 500 galones de petróleo y de 1000 galones de petróleo 2. Se pueden comprar no menos de 1500 galones más de petróleo 1 a los precios siguientes: primeros 500 galones, 25 centavos por galón; siguientes 500 galones, 20 centavos por galón; siguientes 500 galones, 15 centavos por galón. Plantee un PE con el que maximicen las utilidades de Euing (ingresos − costos de compra).

Solución Excepto por el hecho de que el costo de la compra adicional de petróleo 1 es una función lineal por segmentos, éste es un problema directo de mezclas. Sin olvidar esto, definimos

x = cantidad comprada de petróleo 1

x_{ij} = cantidad usada de petróleo i para producir gas j $\qquad (i, j = 1, 2)$

Entonces (en centavos)

Ingreso total − costo de la compra de petróleo 1 $= 12(x_{11} + x_{21}) + 14(x_{12} + x_{22}) - c(x)$

Como ya se vio con anterioridad,

$$c(x) = \begin{cases} 25x & (0 \leq x \leq 500) \\ 20x + 2\,500 & (500 \leq x \leq 1\,000) \\ 15x + 7\,500 & (1\,000 \leq x \leq 1\,500) \end{cases}$$

Por lo tanto, la función objetivo de Euing es maximizar

$$z = 12x_{11} + 12x_{21} + 14x_{12} + 14x_{22} - c(x)$$

Euing tiene las restricciones siguientes:

Restricción 1 Euing puede usar cuando mucho $x + 500$ galones de petróleo 1.

Restricción 2 Euing puede utilizar cuando mucho 1 000 galones de petróleo 2.

Restricción 3 El petróleo mezclado para producir la gasolina 1 tiene que contener por lo menos 50% de petróleo 1.

Restricción 4 El petróleo mezclado para elaborar la gasolina 2 debe contener por lo menos 60% de petróleo 1.

Por la restricción 1 se obtiene

$$x_{11} + x_{12} \leq x + 500$$

Con la restricción 2 se tiene

$$x_{21} + x_{22} \leq 1\,000$$

Con la restricción 3 se obtiene

$$\frac{x_{11}}{x_{11} + x_{21}} \geq 0.5 \quad \text{o} \quad 0.5x_{11} - 0.5x_{21} \geq 0$$

Por la restricción 4,

$$\frac{x_{12}}{x_{12} + x_{22}} \geq 0.6 \quad \text{o} \quad 0.4x_{12} - 0.6x_{22} \geq 0$$

Además, todas las variables tienen que ser no negativas. Por lo tanto, Euing Gas tiene que resolver el problema de optimización siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z = 12x_{11} + 12x_{21} + 14x_{12} + 14x_{22} - c(x) \\
\text{s.a} \quad x_{11} + x_{12} &\leq x + 500 \\
x_{21} + x_{22} &\leq 1\,000 \\
0.5x_{11} - 0.5x_{21} &\geq 0 \\
0.4x_{12} - 0.6x_{22} &\geq 0 \\
x_{ij} \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1\,500
\end{aligned}$$

Puesto que $c(x)$ es una función lineal por segmentos, la función objetivo no es una función lineal de x, por lo que esta optimización no es un PL. No obstante, al aplicar el método explicado antes es posible transformar este problema en un PE. Luego de recordar que los puntos de quiebre para $c(x)$ son 0, 500, 1000 y 1500 se procede como se indica:

Paso 1 Reemplace $c(x)$ por $c(x) = z_1c(0) + z_2c(500) + z_3c(1\,000) + z_4c(1\,500)$.

Paso 2 Sume las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned}
x &= 0z_1 + 500z_2 + 1\,000z_3 + 1\,500z_4 \\
z_1 &\leq y_1,\ z_2 \leq y_1 + y_2,\ z_3 \leq y_2 + y_3,\ z_4 \leq y_3 \\
z_1 &+ z_2 + z_3 + z_4 = 1, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\
y_i &= 0 \text{ o } 1\ (i = 1, 2, 3);\ z_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

El PE siguiente es la nueva formulación:

$$\begin{aligned}
\max z = 12x_{11} + 12x_{21} + 14x_{12} + 14x_{22} - z_1c(0) - z_2c(500) \\
- z_3c(1\,000) - z_4c(1\,500) \\
\text{s.a} \quad x_{11} + x_{12} &\leq x + 500 \\
x_{21} + x_{22} &\leq 1\,000 \\
0.5x_{11} - 0.5x_{21} &\geq 0 \\
0.4x_{12} - 0.6x_{22} &\geq 0
\end{aligned}$$

$$x = 0z_1 + 500z_2 + 1\,000z_3 + 1\,500z_4 \tag{31}$$

$$z_1 \leq y_1 \tag{32}$$

$$z_2 \leq y_1 + y_2 \tag{33}$$

$$z_3 \leq y_2 + y_3 \tag{34}$$

$$z_4 \leq y_3 \quad (35)$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \quad (36)$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 \quad (37)$$
$$y_i = 0 \text{ o } 1 \qquad (i = 1, 2, 3); z_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$
$$x_{ij} \geq 0$$

Para ver por qué funciona esta formulación, observe que como $y_1 + y_2 + y_3 = 1$ y $y_i = 0$ o 1, exactamente una de las y_i será igual a 1, y las otras serán iguales a 0. Ahora, (32) a (37) implican que si $y_i = 1$, entonces z_i y z_{i+1} podrían ser positivas, pero todas las otras z_i deben ser iguales a 0. Por ejemplo, si $y_2 = 1$, entonces $y_1 = y_3 = 0$. Entonces, (32) a (35) se vuelven $z_1 \leq 0$, $z_2 \leq 1$, $z_3 \leq 1$ y $z_4 \leq 0$. Estas restricciones obligan a $z_1 = z_4 = 0$ y permiten que z_2 y z_3 sean números no negativos menores que o iguales a 1. Ahora ya podemos mostrar que (31) a (37) representan de modo correcto la función lineal por segmentos $c(x)$. Elija cualquier valor de x, por ejemplo $x = 800$. Observe que $b_2 = 500 \leq 800 \leq 1\,000 = b_3$. Para $x = 800$, ¿qué valores asignan las restricciones a y_1, y_2, y y_3? El valor $y_1 = 1$ es imposible porque si $y_1 = 1$, entonces $y_2 = y_3 = 0$. Luego (34) y (35) obligan a $z_3 = z_4 = 0$. Entonces (31) se reduce a $800 = x = 500z_2$, la cual no se puede satisfacer con $z_2 \leq 1$. De igual manera, $y_3 = 1$ es imposible. Si intentamos con $y_2 = 1$, (32) y (35) obligan a $z_1 = z_4 = 0$. Entonces (33) y (34) implican $z_2 \leq 1$ y $z_3 \leq 1$. Ahora (31) se vuelve $800 = x = 500z_2 + 1\,000z_3$. Puesto que $z_2 + z_3 = 1$, se obtiene entonces $z_2 = \frac{2}{5}$ y $z_3 = \frac{3}{5}$. Entonces, la función objetivo se reduce a

$$12x_{11} + 12x_{21} + 14x_{21} + 14x_{22} - \frac{2c(500)}{5} - \frac{3c(1\,000)}{5}$$

Puesto que

$$c(800) = \frac{2c(500)}{5} + \frac{3c(1\,000)}{5}$$

¡la función objetivo proporciona el valor correcto de las utilidades de Euing!

La solución óptima para el problema de Euing es $z = 12\,500$, $x = 1\,000$, $x_{12} = 1\,500$, $x_{22} = 1\,000$, $y_3 = z_3 = 1$. Por lo tanto, Euing debería comprar 1000 galones de petróleo 1 y producir 2500 galones de gasolina 2.

En general, las restricciones de la forma (31) a (37) aseguran que si $b_i \leq x \leq b_{i+1}$, entonces $y_i = 1$ y sólo pueden ser positivas z_i y z_{i+1}. Como $c(x)$ es lineal para $b_i \leq x \leq b_{i+1}$, la función objetivo asignará el valor correcto a $c(x)$.

Si una función lineal por segmentos $f(x)$ que surge en un planteamiento tiene la propiedad de que la pendiente de $f(x)$ se vuelve menos favorable para el que toma las decisiones cuando x se incrementa, entonces es innecesaria la formulación PE tediosa que justo hemos explicado.

EJEMPLO 8 Selección de medios con funciones lineales por segmentos

Dorian Auto tiene un presupuesto para publicidad de 20 000 dólares. Dorian puede comprar anuncios de una página completa en dos periódicos: *Inside Jocks* (IJ) y en *Family Square* (FS). Una exposición se presenta cuando una persona lee un anuncio de Dorian Auto por primera vez. La cantidad de exposiciones generadas por cada anuncio en IJ es como sigue: 1 a 6 anuncios, 10 000 exposiciones; 7 a 10 anuncios, 3000 exposiciones; 11 a 15 anuncios, 2500 exposiciones; más de 16 anuncios, 0 exposiciones. Es decir, 8 anuncios en IJ generarian 6(10 000) + 2(3000) = 66 000 exposiciones. La cantidad de exposiciones que genera cada anuncio en FS es como se indica: 1 a 4 anuncios, 8000 exposiciones;

5 a 12 anuncios, 6000 exposiciones; 13 a 15 anuncios, 2 000 exposiciones; más de 16 anuncios, 0 exposiciones. Por lo tanto, 13 anuncios en FS generarían 4(8000) + 8(6000) + 1(12 000) = 82 000 exposiciones. Cada anuncio de página completa en cualquiera de los periódicos cuesta 1000 dólares. Suponga que no se traslapan los lectores de los dos periódicos. Formule un PE para maximizar la cantidad de exposiciones que Dorian puede conseguir con fondos limitados para publicidad.

Solución Si se definen

x_1 = número de anuncios en IJ que generan 10 000 exposiciones
x_2 = número de anuncios en IJ que generan 3000 exposiciones
x_3 = número de anuncios en IJ que generan 2500 exposiciones
y_1 = número de anuncios en FS que generan 8000 exposiciones
y_2 = número de anuncios en FS que generan 6000 exposiciones
y_3 = número de anuncios en FS que generan 2000 exposiciones

entonces la cantidad total de exposiciones (en miles) está dada por

$$10x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + 8y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

Por consiguiente, Dorian desea maximizar

$$z = 10x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + 8y_1 + 6y_2 + 2y_3$$

Como la cantidad total gastada (en miles de dólares) es justamente la cantidad total de anuncios colocados en los dos periódicos, la restricción del presupuesto de Dorian se podría expresar como

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \leq 20$$

Del enunciado del problema se infiere que se tienen que cumplir $x_1 \leq 6$, $x_2 \leq 4$, $x_3 \leq 5$, $y_1 \leq 4$, $y_2 \leq 8$ y $y_3 \leq 3$. Al sumar las restricciones de signo en cada variable, y advirtiendo que cada variable debe ser un entero, se obtiene el PE siguiente:

$$\begin{aligned}
\max z = {} & 10x_1 + 3x_2 + 2.5x_3 + 8y_1 + 6y_2 + 2y_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \leq 20 \\
& x_1 \leq 6 \\
& x_2 \leq 4 \\
& x_3 \leq 5 \\
& y_1 \leq 4 \\
& y_2 \leq 8 \\
& y_3 \leq 3 \\
& x_i, y_i \text{ enteros} \quad (i = 1, 2, 3) \\
& x_i, y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}$$

Observe que del enunciado del problema se infiere que x_2 no puede ser positiva a menos que x_1 asuma su valor máximo de 6. De igual manera, x_3 no puede ser positiva a menos que x_2 asuma su valor máximo de 4. Como x_1 anuncios generan más exposiciones que x_2 anuncios, el hecho de maximizar asegura que x_2 será positiva sólo si x_1 es tan grande como sea posible. Del mismo modo, como x_3 anuncios generan menos exposiciones que x_2 anuncios, x_3 será positiva sólo si x_2 asume su valor máximo. (Asimismo, y_2 será positivo sólo si $y_1 = 4$ y y_3 será positiva sólo si $y_2 = 8$.)

La solución óptima para el PE de Dorian es $z = 146 000$, $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $y_1 = 4$, $y_2 = 8$, $x_3 = 0$, $y_3 = 0$. Por lo tanto, Dorian colocará $x_1 + x_2 = 8$ anuncios en IJ y $y_1 + y_2 = 12$ anuncios en FS.

En el ejemplo 8, la publicidad adicional en un periódico generaba menores rendimientos. Esto aseguraba que x_i (y_i) sería positiva sólo si x_{i-1} (y_{i-1}) asumía su valor máximo. Si la publicidad adicional generaba rendimientos crecientes, entonces este planteamiento no llevaría a la solución correcta. Por ejemplo, suponga que el número de exposiciones que generó cada anuncio en IJ fue como se indica: 1 a 6 anuncios, 2500 exposiciones; 7 a 10 anuncios, 3000 exposiciones; 11 a 15 anuncios, 10 000 exposiciones. Suponga también que la cantidad de exposiciones generada por cada FS es como se indica: 1 a 4 anuncios, 2000 exposiciones; 5 a 12 anuncios, 6000 exposiciones; 13 a 15 anuncios, 8000 exposiciones.

Si se definen

x_1 = número de anuncios en IJ que generan 2500 exposiciones
x_2 = número de anuncios en IJ que generan 3000 exposiciones
x_3 = número de anuncios en IJ que generan 10 000 exposiciones
y_1 = número de anuncios en FS que generan 2000 exposiciones
y_2 = número de anuncios en FS que generan 6000 exposiciones
y_3 = número de anuncios en FS que generan 8000 exposiciones

el razonamiento que se aplicó en el ejemplo anterior llevaría a la formulación siguiente:

$$
\begin{array}{lrl}
\max z = 2.5x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 2y_1 + 6y_2 + 8y_3 & & \\
\text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 & \le & 20 \\
x_1 & \le & 6 \\
x_2 & \le & 4 \\
x_3 & \le & 5 \\
y_1 & \le & 4 \\
y_2 & \le & 8 \\
y_3 & \le & 3 \\
x_i, y_i \text{ enteros} & & (i = 1, 2, 3) \\
x_i, y_i \le 0 & & (i = 1, 2, 3)
\end{array}
$$

La solución óptima para este PE es $x_3 = 5$, $y_3 = 3$, $y_2 = 8$, $x_2 = 4$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, la cual no puede ser correcta. Según esta solución, se deberían colocar $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ anuncios en IJ. Pero si se colocaran 9 anuncios en IJ, entonces, tiene que ser $x_1 = 6$ y $x_2 = 3$. Por lo tanto, observamos que el tipo de planteamiento usado en el ejemplo de Dorian Auto es correcto sólo si la función objetivo lineal por segmentos tiene una pendiente menos favorable para los valores mayores de x. En el segundo ejemplo, la efectividad de un anuncio se incrementó cuando la cantidad de anuncios en un periódico aumentó; y el hecho de maximizar no asegurará que x_i pueda ser positiva sólo si x_{i-1} asume su valor máximo. En este caso, el enfoque utilizado en el ejemplo de Euing Gas generaría un planteamiento correcto (véase problema 8).

Solución de PE con LINDO

Se puede utilizar LINDO para resolver PE puros o mezclados. Además de la solución óptima, los resultados que proporciona LINDO para un PE indican los precios sombra y los costos reducidos. Infortunadamente, los precios sombra y los costos reducidos se refieren a subproblemas que se generan durante la solución ramificada y acotada: *no* el PE. A diferencia de la programación lineal, no hay una teoría del análisis de sensibilidad muy bien formulada para la programación con enteros. El lector interesado en el análisis de sensibilidad para el PE debe referirse a Williams (1985).

Para utilizar LINDO con el fin de resolver un PE, empiece por introducir el problema como si fuera un PL. Después de escribir **END** (para indicar el final de las restricciones del PL), escriba por cada variable x $0-1$ el enunciado siguiente:

INTE x

Por lo tanto, para un PE en el cual x y y son variables $1-0$, los enunciados siguientes se escribirían después del enunciado **END**:

INTE x

INTE y

Una variable (por ejemplo, w) que es capaz de asumir cualquier valor entero no negativo se indica mediante el enunciado **GIN**. Por lo tanto, si w pudiera asumir los valores 0, 1, 2, . . . , escribiríamos el siguiente enunciado después del **END**:

GIN w

Utilice el comando **INT** n para señalar a LINDO que las primeras n variables que aparecen en la formulación deben ser variables $0-1$.

El comando **GIN** n para indicarle a LINDO que las primeras n variables que aparecen en la formulación podrían asumir cualquier valor entero no negativo.

Gandhi.xls

Para ilustrar cómo usar LINDO para resolver PE, se resuelve enseguida el ejemplo 3 con LINDO. Escriba la información siguiente (archivo Gandhi):

```
MAX        6 X1 + 4 X2 + 7 X3 - 200 Y1 - 150 Y2 - 100 Y3
SUBJECT TO
         2)    3 X1 + 2 X2 + 6 X3 <= 150
         3)    4 X1 + 3 X2 + 4 X3 <= 160
         4)    X1 - 40 Y1 <= 0
         5)    X2 - 53 Y2 <= 0
         6)    X3 - 25 Y3 <= 0
END
GIN         X1
GIN         X2
GIN         X3
INTE        Y1
INTE        Y2
INTE        Y3
```

Entonces se ve que X1, X2 y X3 pueden ser enteros no negativos, en tanto que Y1, Y2 y Y3 deben ser igual a 0 o a 1. Por cierto, se podría haber escrito GIN 3 para tener la certeza de que X1, X2 y X3 tienen que ser enteros no negativos. La solución óptima que encuentra LINDO es la que se presenta en la figura 4.

Solución de PE con LINGO

También es posible usar LINGO para resolver PE. Para indicar que una variable puede ser igual a 0 o a 1 utilice el operador **@BIN** (véase el ejemplo siguiente). La manera de señalar que una variable tiene que ser igual a un entero no negativo utilice el operador **@GIN**. El uso de LINGO para resolver PE se ilustra con el ejemplo 4 (el problema del sistema de percepción de pagos). Es posible utilizar el programa siguiente de LINGO (archivo Lock.lng) para resolver el ejemplo 4 (o cualquier programa de sistema de recepción de pagos razonablemente dimensionado).

Lock.lng

```
MODEL:
  1]SETS:
  2]REGIONS/W,MW,E,S/:DEMAND;
  3]CITIES/LA,CHIC,NY,ATL/:Y;
  4]LINKS(REGIONS,CITIES):DAYS,COST,ASSIGN;
  5]ENDSETS
  6]MIN=@SUM(CITIES:50000*Y)+@SUM(LINKS:COST*ASSIGN);
  7]@FOR(LINKS(I,J):ASSIGN(I,J) < Y(J));
  8]@FOR(REGIONS(I):
  9]@SUM(CITIES(J):ASSIGN(I,J))=1);
 10]@FOR(CITIES(I):@BIN(Y(I)););
```

```
MAX      6 X1 + 4 X2 + 7 X3 - 200 Y1 - 150 Y2 - 100 Y3
SUBJECT TO
       2)   3 X1 + 2 X2 + 6 X3 <=   150
       3)   4 X1 + 3 X2 + 4 X3 <=   160
       4)   X1 - 40 Y1 <=   0
       5)   X2 - 53 Y2 <=   0
       6)   X3 - 25 Y3 <=   0
END
GIN        X1
GIN        X2
GIN        X3
INTE       Y1
INTE       Y2
INTE       Y3

      OBJECTIVE FUNCTION VALUE

      1)      75.000000

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1           .000000         -6.000000
      X2           .000000         -4.000000
      X3         25.000000         -7.000000
      Y1           .000000        200.000000
      Y2           .000000        150.000000
      Y3          1.000000        100.000000

     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)           .000000           .000000
      3)         60.000000           .000000
      4)           .000000           .000000
      5)           .000000           .000000
      6)           .000000           .000000

NO. ITERATIONS=       11
BRANCHES=      1 DETERM.=  1.000E    0
```

FIGURA 4

```
  11]@FOR(LINKS(I,J):@BIN(ASSIGN(I,J)););
  12]@FOR(LINKS(I,J):COST(I,J)=.20*DEMAND(I)*DAYS(I,J));
  13]DATA:
  14]DAYS=2,6,8,8,
  15]6,2,5,5,
  16]8,5,2,5,
  17]8,5,5,2;
  18]DEMAND=70000,50000,60000,40000;
  19]ENDDATA
 END
```

En el renglón 2 se definen las cuatro regiones del país y se asocia una demanda diaria para pagos en efectivo de cada región. En el renglón 3 se especifican las cuatro ciudades donde un sistema de percepción de pagos se puede echar a andar. Con cada ciudad I se asocia una variable $0-1$ (Y(I)) que es igual a 1 si un sistema de percepción de pagos se pone en marcha en la ciudad o 0 si no es así. En el renglón 4 se crea un "vínculo" (LINK(I,J)) entre cada región del país y cada sitio posible para un sistema de percepción de pagos posible. Las cantidades siguientes están relacionadas con cada vínculo:

1 El número promedio de días (DAYS) que se requieren para que sea aprobado un cheque cuando es enviado por correo desde la región I a la ciudad J. Esta información se proporciona en la sección de DATA.

2 El costo de los intereses perdidos al año por fondos enviados desde la región i (COST) que se genera si la región I envía su dinero a la ciudad J.

3 Una variable $0-1$ ASSIGN(I,J) que es igual a 1 si la región I envía su dinero a la ciudad J y 0 si no sucede así.

En el renglón 6 se calcula el costo total mediante la suma de 50000*Y(I) a todas las ciudades. De esta manera se determina el costo anual total de la operación de los sistemas de percepción de pagos. Luego se suma COST*ASSIGN a todos los vínculos. Así se obtiene el costo anual total de los intereses perdidos. La restricción del renglón 7 asegura que (para todas las combinaciones de I y de J) si la región I envía su dinero a la ciudad J, entonces Y(J) = 1. Esto obliga a pagar por los sistemas de percepción de pagos que se utilizan. Los renglones 8 y 9 aseguran que cada región del país envía su dinero a alguna ciudad. El renglón 10 asegura que cada Y(I) es igual a 0 o a 1. El renglón 11 da la certeza de que cada ASSIGN(I,J) es igual a 0 o a 1 (en realidad no se necesita este enunciado; véase problema 44). Se estima el costo anual de los intereses perdidos si la región I envía su dinero a la ciudad J en el renglón 12. Esto duplica los cálculos de la tabla 5. Observe que un * es necesario para asegurar que se ejecutan las multiplicaciones.

En los renglones 14 a 17 se introduce la cantidad promedio de días que se requiere para que un cheque sea aprobado cuando se envió desde la región I a la ciudad J. En el renglón 18 se introduce la demanda diaria para cada región.

Observe que se seleccionó la ventana Model y luego se escogió LINDO, Generate, Display Model para obtener la función objetivo y las restricciones. Véase figura 8.

Solución de problemas de PE mediante Solver para Excel

Gandhi.xls

Es fácil de usar el Solver para Excel para resolver problemas de programación con enteros. El archivo Gandhi.xls contiene una solución en hoja de cálculo para el ejemplo 3. La solución óptima se da en la figura 7. En la hoja de cálculo, las celdas que cambian J4:J6 (la cantidad elaborada de cada producto) tienen que ser números enteros. Para indicarle al Solver que estas celdas deben contener enteros sólo seleccione Add Constraint y señale las celdas J4:J6. Luego elija int del cuadro con flecha de en medio.

Las celdas K4:K6, en las que se efectúan cambios, son las variables binarias de cargos fijos. Para indicar al Solver que estas celdas deben ser binarias, seleccione Add Constraint y señale las celdas K4:K6. Luego elija bin del cuadro con flecha. Véase figura 6.

En la figura 7 se observa que la solución óptima (la que se encontró con LINDO) recomienda fabricar 25 pantalones.

FIGURA 5

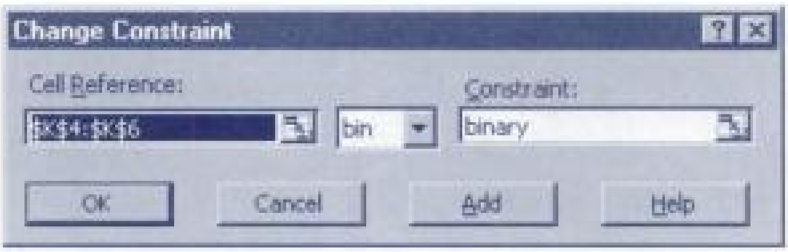


FIGURA 6

FIGURA 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Gandhi**										
2											
3				Labor hours used	Cloth yards used	Unit price	Unit cost	Unit profit	Fixed Cost	Number Made	Binary variable
4			Shirt	3	4	$ 12.00	$ 6.00	$ 6.00	$ 200.00	0	0
5			Shorts	2	3	$ 8.00	$ 4.00	$ 4.00	$ 150.00	0	0
6			Pants	6	4	$ 15.00	$ 8.00	$ 7.00	$ 100.00	25	1
7		**Resource Constraints**									
8			Used		Available				Fixed charge	$ 100.00	
9		Labor	150	<=	150				Variable cost	$ 200.00	
10		Cloth	100	<=	160				Revenue	$ 375.00	
11									Profit	$ 75.00	
12		**Fixed Charge Constraints**	Number Made		Logical Upper Bound	Max possible to make					
13		Shirts	0	<=	0	40					
14		Shorts	0	<=	0	53.33333					
15		Pants	25	<=	25	25					

```
MIN     50000 Y(ATL + 50000 Y(NY + 50000 Y(CHIC + 50000 Y(LA + 16000 ASSIGNSA
     + 40000 ASSIGNSN + 40000 ASSIGNSC + 64000 ASSIGNSL + 60000 ASSIGNEA
     + 24000 ASSIGNEN + 60000 ASSIGNEC + 96000 ASSIGNEL + 50000 ASSIGNMW
     + 50000 ASSIGNMW + 20000 ASSIGNMW + 60000 ASSIGNMW + 112000 ASSIGNWA
     + 112000 ASSIGNWN + 84000 ASSIGNWC + 28000 ASSIGNWL
SUBJECT TO
2)- Y(LA + ASSIGNWL <=   0
3)- Y(CHIC + ASSIGNWC <=   0
4)- Y(NY + ASSIGNWN <=   0
5)- Y(ATL + ASSIGNWA <=   0
6)- Y(LA + ASSIGNMW <=   0
7)- Y(CHIC + ASSIGNMW <=   0
8)- Y(NY + ASSIGNMW <=   0
9)- Y(ATL + ASSIGNMW <=   0
10)- Y(LA + ASSIGNEL <=   0
11)- Y(CHIC + ASSIGNEC <=   0
12)- Y(NY + ASSIGNEN <=   0
13)- Y(ATL + ASSIGNEA <=   0
14)- Y(LA + ASSIGNSL <=   0
15)- Y(CHIC + ASSIGNSC <=   0
16)- Y(NY + ASSIGNSN <=   0
17)- Y(ATL + ASSIGNSA <=   0
18)  ASSIGNWA + ASSIGNWN + ASSIGNWC + ASSIGNWL =    1
19)  ASSIGNMW + ASSIGNMW + ASSIGNMW + ASSIGNMW =    1
20)  ASSIGNEA + ASSIGNEN + ASSIGNEC + ASSIGNEL =    1
21)  ASSIGNSA + ASSIGNSN + ASSIGNSC + ASSIGNSL =    1
END
INTE    20


[ERROR CODE: 96]
WARNING: SEVERAL LINGO NAMES MAY HAVE BEEN TRANSFORMED INTO A
SINGLE LINDO NAME.

LP OPTIMUM FOUND AT STEP     14
OBJECTIVE VALUE =   242000.000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     0 PIVOTS=    14
```

FIGURA 8

```
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

                    VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
                  DEMAND( W)        70000.00         0.0000000E+00
                 DEMAND( MW)        50000.00         0.0000000E+00
                  DEMAND( E)        60000.00         0.0000000E+00
                  DEMAND( S)        40000.00         0.0000000E+00
                      Y( LA)        1.000000           50000.00
                    Y( CHIC)        0.0000000E+00      50000.00
                      Y( NY)        1.000000           50000.00
                     Y( ATL)        0.0000000E+00      50000.00
               DAYS( W, LA)         2.000000         0.0000000E+00
             DAYS( W, CHIC)         6.000000         0.0000000E+00
               DAYS( W, NY)         8.000000         0.0000000E+00
              DAYS( W, ATL)         8.000000         0.0000000E+00
              DAYS( MW, LA)         6.000000         0.0000000E+00
            DAYS( MW, CHIC)         2.000000         0.0000000E+00
              DAYS( MW, NY)         5.000000         0.0000000E+00
             DAYS( MW, ATL)         5.000000         0.0000000E+00
               DAYS( E, LA)         8.000000         0.0000000E+00
             DAYS( E, CHIC)         5.000000         0.0000000E+00
               DAYS( E, NY)         2.000000         0.0000000E+00
              DAYS( E, ATL)         5.000000         0.0000000E+00
               DAYS( S, LA)         8.000000         0.0000000E+00
             DAYS( S, CHIC)         5.000000         0.0000000E+00
               DAYS( S, NY)         5.000000         0.0000000E+00
              DAYS( S, ATL)         2.000000         0.0000000E+00
               COST( W, LA)        28000.00          0.0000000E+00
             COST( W, CHIC)        84000.00          0.0000000E+00
               COST( W, NY)        112000.0          0.0000000E+00
              COST( W, ATL)        112000.0          0.0000000E+00
              COST( MW, LA)        60000.00          0.0000000E+00
            COST( MW, CHIC)        20000.00          0.0000000E+00
              COST( MW, NY)        50000.00          0.0000000E+00
             COST( MW, ATL)        50000.00          0.0000000E+00
               COST( E, LA)        96000.00          0.0000000E+00
             COST( E, CHIC)        60000.00          0.0000000E+00
               COST( E, NY)        24000.00          0.0000000E+00
              COST( E, ATL)        60000.00          0.0000000E+00
               COST( S, LA)        64000.00          0.0000000E+00
             COST( S, CHIC)        40000.00          0.0000000E+00
               COST( S, NY)        40000.00          0.0000000E+00
              COST( S, ATL)        16000.00          0.0000000E+00
             ASSIGN( W, LA)         1.000000           28000.00
           ASSIGN( W, CHIC)       0.0000000E+00        84000.00
             ASSIGN( W, NY)       0.0000000E+00        112000.0
            ASSIGN( W, ATL)       0.0000000E+00        112000.0
            ASSIGN( MW, LA)       0.0000000E+00        60000.00
          ASSIGN( MW, CHIC)       0.0000000E+00        20000.00
            ASSIGN( MW, NY)         1.000000           50000.00
           ASSIGN( MW, ATL)       0.0000000E+00        50000.00
             ASSIGN( E, LA)       0.0000000E+00        96000.00
           ASSIGN( E, CHIC)       0.0000000E+00        60000.00
             ASSIGN( E, NY)         1.000000           24000.00
            ASSIGN( E, ATL)       0.0000000E+00        60000.00
             ASSIGN( S, LA)       0.0000000E+00        64000.00
           ASSIGN( S, CHIC)       0.0000000E+00        40000.00
             ASSIGN( S, NY)         1.000000           40000.00
            ASSIGN( S, ATL)       0.0000000E+00        16000.00
```

FIGURA 8
(Continuación)

```
ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICE
 1       242000.0           -1.000000
 2      0.0000000E+00       0.0000000E+00
 3      0.0000000E+00       0.0000000E+00
 4       1.000000           0.0000000E+00
 5      0.0000000E+00       0.0000000E+00
 6       1.000000           0.0000000E+00
 7      0.0000000E+00       0.0000000E+00
 8      0.0000000E+00       0.0000000E+00
 9      0.0000000E+00       0.0000000E+00
10       1.000000           0.0000000E+00
11      0.0000000E+00       0.0000000E+00
12      0.0000000E+00       0.0000000E+00
13      0.0000000E+00       0.0000000E+00
14       1.000000           0.0000000E+00
15      0.0000000E+00       0.0000000E+00
16      0.0000000E+00       0.0000000E+00
17      0.0000000E+00       0.0000000E+00
18      0.0000000E+00       0.0000000E+00
19      0.0000000E+00       0.0000000E+00
20      0.0000000E+00       0.0000000E+00
21      0.0000000E+00       0.0000000E+00
22      0.0000000E+00      -1.000000
23      0.0000000E+00       0.0000000E+00
24      0.0000000E+00       0.0000000E+00
25      0.0000000E+00       0.0000000E+00
26      0.0000000E+00       0.0000000E+00
27      0.0000000E+00       0.0000000E+00
28      0.0000000E+00      -1.000000
29      0.0000000E+00       0.0000000E+00
30      0.0000000E+00       0.0000000E+00
31      0.0000000E+00       0.0000000E+00
32      0.0000000E+00      -1.000000
33      0.0000000E+00       0.0000000E+00
34      0.0000000E+00       0.0000000E+00
35      0.0000000E+00       0.0000000E+00
36      0.0000000E+00      -1.000000
37      0.0000000E+00       0.0000000E+00
```

FIGURA 8
(Continuación)

PROBLEMAS

Grupo A

1 El entrenador Night pretende elegir la alineación inicial para el equipo de basquetbol. El equipo consta de siete jugadores que están clasificados (con una escala de 1 = malo y 3 = excelente) de acuerdo con su manejo del balón, disparos, rebote y habilidades defensivas. Las posiciones que a cada elemento se le permite jugar y las capacidades del jugador se listan en la tabla 9.

Las alineaciones iniciales de cinco jugadores tienen que satisfacer las restricciones siguientes:

1 Por lo menos cuatro miembros deben ser capaces de jugar en la defensiva, por lo menos dos elementos deben ir a la ofensiva y uno en el centro.

2 El nivel promedio de manejo del balón, disparos y rebotes de la alineación inicial tiene que ser por lo menos de 2.

3 Si el jugador 3 empieza a jugar, entonces el miembro 6 no puede jugar.

4 Si el elemento 1 inicia, entonces los miembros 4 y 5 también deben jugar.

5 Debe empezar el jugador 2 o el jugador 3.

Dadas estas restricciones, el entrenador desea maximizar la capacidad defensiva total del equipo inicial. Formule un PE que ayude al entrenador a escoger a su equipo inicial.

TABLA 9

Jugador	Posición	Manejo del balón	Disparos	Rebote	Defensa
1	G	3	3	1	3
2	C	2	1	3	2
3	G-F	2	3	2	2
4	F-C	1	3	3	1
5	G-F	3	3	3	3
6	F-C	3	1	2	3
7	G-F	3	2	2	1

2 El estado Momiss va a construir plantas de tratamiento de agua debido a la contaminación excesiva del río Momiss. Se seleccionaron tres sitios (1, 2 y 3). Momiss está interesado en controlar los niveles de contaminación de dos contaminantes (1 y 2). La legislatura del estado requiere que se eliminen del río por lo menos 80 000 toneladas del contaminante 1 y por lo menos 50 000 toneladas del contaminante 2. La información pertinente a este problema se muestra en la tabla 10. Formule un PE que minimice el costo al cumplir con los objetivos de la legislatura del estado.

3 Un fabricante puede vender el producto 1 y obtener una utilidad de 2 dólares por unidad y del producto 2, una utilidad de 5 dólares por unidad. Se necesitan tres unidades de materia prima para elaborar una unidad del producto 1, y 6 unidades de materia prima para una unidad del producto 2.

TABLA 10

Lugar	Costo de la construcción de la planta (dólares)	Costo de tratar una tonelada de agua (dólares)	Cantidad eliminada por tonelada de agua	
			Contaminante 1	Contaminante 2
1	100 000	20	0.40	0.30
2	60 000	30	0.25	0.20
3	40 000	40	0.20	0.25

Se dispone de un total de 120 unidades de materia prima. Si se elabora cualquier cantidad del producto 1 se incurre en un costo de preparación de 20 dólares. Plantee un PE para maximizar las utilidades.

4 Suponga que se suma la restricción siguiente al ejemplo 1 (Stockco): si se eligen las inversiones 2 y 3, entonces se debe seleccionar la inversión 4. ¿Qué restricciones se sumarían al planteamiento que se dio en el texto?

5 ¿Qué tanto modificarían las restricciones siguientes la formulación del ejemplo 6 (tamaños de los automóviles de Dorian? (Desarrolle cada inciso en forma separada.)

a Si se fabrican los automóviles medianos, entonces también se tienen que producir los compactos.

b Se tienen que fabricar automóviles compactos o grandes.

6 Para graduarse en la Basketweavers University en la especialidad de Investigación de operaciones el estudiante debe completar por lo menos dos cursos de matemáticas, por lo menos dos cursos de investigación de operaciones y por lo menos dos cursos de manejo de computadoras. Algunos cursos pueden servir para cumplir con más de un requisito: cálculo puede servir para el requisito de matemáticas; investigación de operaciones, sirve para los requisitos de matemáticas e investigación de operaciones; estructuras de la información sirve para los requisitos de manejo de computadoras y matemáticas; estadística para negocios, abarca los requisitos de matemáticas e investigación de operaciones; simulación por computadora es para los requisitos de investigación de operaciones y manejo de la computadora; introducción a la programación de computadoras, para el requisito de computación, y pronósticos, para investigación de operaciones y matemáticas.

Algunos cursos son requisitos previos para otros: cálculo es un requisito previo para estadística para negocios, introducción a la programación de computadoras, simulación por computadora y estructuras de datos; estadística de negocios es un requisito previo para pronósticos. Plantee un PE que minimice la cantidad de cursos necesarios para satisfacer los requisitos de la especialidad.

7 En el ejemplo 7 (Euing Gas), suponga que $x = 300$. ¿Cuáles serían los valores de $y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ y z_4? ¿Qué pasa si $x = 1\,200$?

8 Formule un PE para resolver el problema de Dorian Auto en lo que se refiere a los datos de publicidad que muestran rendimientos crecientes en la medida en que más anuncios se colocan en un periódico (pp. 495-496).

9 ¿Cómo se puede usar la programación con enteros para tener la certeza de que la variable x puede asumir sólo los valores 1, 2, 3 y 4?

10 Si x y y son enteros, ¿cómo aseguraría usted que $x + y \le 3$, $2x + 5y \le 12$, o que ambas se cumplen con x y y?

TABLA 11

Desde	Hasta (dólares)		
	Región 1	Región 2	Región 3
Nueva York	20	40	50
Los Ángeles	48	15	26
Chicago	26	35	18
Atlanta	24	50	35

11 Si x y y son enteros, ¿cómo podría usted estar seguro de que siempre que $x \le 2$, entonces $y \le 3$?

12 Una compañía planea abrir unas bodegas en cuatro ciudades; Nueva York, Los Ángeles, Chicago y Atlanta. Desde cada bodega se pueden embarcar 100 unidades por semana. El costo fijo por semana por mantener en operación cada bodega es de 400 dólares para Nueva York, 500 dólares para Los Ángeles, 300 dólares para Chicago y 150 dólares para Atlanta. La región 1 del país requiere 80 unidades por semana, la región 2 demanda 70 unidades por semana y la región 3 necesita 40 unidades por semana. Los costos (sin olvidar los costos de producción y embarque) por enviar una unidad desde una planta a una región se señalan en la tabla 11. Se desea cumplir con las demandas semanales a un costo mínimo, sujeto a la información precedente y a las restricciones siguientes:

1 Si se abre la bodega de Nueva York, entonces se debe abrir la bodega de Los Ángeles.

2 Es posible abrir a lo más dos bodegas.

3 Se tiene que abrir la bodega de Atlanta o la de Los Ángeles.

Formule un PE que se pueda usar para minimizar los costos semanales de cumplir con las demandas.

13 Glueco fabrica tres tipos de pegamento en dos líneas de producción distintas. Hasta 7 trabajadores usan a la vez cada línea. Cada trabajador recibe un pago de 500 dólares por semana en la línea de producción 1, y 900 dólares por semana en la línea de producción 2. Una semana de producción en la línea de producción 1 cuesta 1 000 dólares para organizarla y 2000 en la línea de producción 2. Durante una semana en una línea de producción cada trabajador elabora la cantidad de unidades de pegamento que se proporcionan en la tabla 12. Se tienen que elaborar a la semana, por lo menos, 120 unidades del pegamento 1, por lo menos 150 unidades del pegamento 2 y por lo menos 200 unidades del pegamento 3. Formule un PE para minimizar el costo total por cumplir con las demandas semanales.

14† El jefe del Departamento de cómputo de la universidad estatal desea poder tener acceso a cinco archivos distintos. Estos archivos andan dispersos en 10 discos según se indica en la tabla 13. La cantidad de almacenamiento que requiere cada disco es como se señala: disco 1, 3K; disco 2, 5K; disco 3,

TABLA 12

Línea de producción	Pegamento		
	1	2	3
1	20	30	40
2	50	35	45

†Basado en Day (1965).

TABLA 13

Archivo	Disco 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	x		x	x			x	x	
2	x		x							
3		x			x		x			x
4			x			x		x		
5	x	x		x		x	x		x	x

1K; disco 4, 2K; disco 5, 1K; disco 6, 4K; disco 7, 3K; disco 8, 1K; disco 9, 2K; disco 10, 2K.

a Formule un PE que determine un conjunto de discos que requiere la cantidad mínima de almacenamiento tal, que cada archivo está en al menos uno de los discos. Por lo que se refiere a un disco dado, se tiene que almacenar el disco completo o no almacenar nada de los discos; no es posible almacenar una parte de un disco.

b Modifique el planteamiento de tal manera que si se usa el disco 3 o el disco 5, entonces el disco 2 también se tiene que utilizar.

15 Fruit Computer fabrica dos tipos de computadoras: las computadoras Pear y la Apricot. La información pertinente se proporciona en la tabla 14. Se dispone de un total de 3 000 microprocesadores y 1200 horas de mano de obra. Formule un PE para ayudar a la compañía a maximizar las utilidades.

16 El Lotus Point Condo Project tendrá casas y departamentos. En el lugar se pueden construir hasta 10 000 viviendas. El proyecto debe considerar una zona de esparcimiento: un complejo para natación y tenis o una marina para veleros, pero no ambos. Si se construye una marina, entonces la cantidad de casas en el proyecto tiene que ser por lo menos el triple de la de departamentos. Una marina cuesta 1.2 millones de dólares y un complejo para natación y tenis cuesta 2.8 millones. Los urbanizadores opinan que cada departamento generará ingresos con un VNA de 48 000 dólares y cada casa proporcionará ingresos con un VNA de 46 000 dólares. El costo de construir cada casa o departamento es de 40 000 dólares. Plantee un PE para ayudar a Lotus Point a maximizar las utilidades.

17 Un producto se puede fabricar en cuatro máquinas distintas. Cada máquina tiene un costo fijo de preparación, costos variables de producción por unidad procesada y una capacidad de producción que se proporcionan en la tabla 15. Se tiene que fabricar un total de 2000 unidades del producto. Plantee un PE cuya solución indique cómo minimizar los costos totales.

TABLA 14

Computadora	Mano de obra	Microprocesadores	Costos de equipo (dólares)	Precio de venta (dólares)
Pear	1 hora	2	5 000	400
Apricot	2 horas	5	7 000	900

TABLA 15

Máquina	Costo fijo (dólares)	Costo variable por unidad (dólares)	Capacidad
1	1 000	20	900
2	920	24	1 000
3	800	16	1 200
4	700	28	1 600

TABLA 16

	Libro 1	2	3	4	5
Demanda máxima	5 000	4 000	3 000	4 000	3 000
Costo variable (dólares)	25	20	15	18	22
Precio de venta (dólares)	50	40	38	32	40
Costo fijo (miles de dólares)	80	50	60	30	40

18 Utilice LINDO, LINGO o el Solver para Excel para encontrar la solución óptima para el PE siguiente:

Bookco Publishers proyectan publicar cinco libros de texto. La cantidad máxima de ejemplares de cada obra que se puede vender, el costo variable por la producción de cada libro, el precio de venta de cada obra y el costo fijo de una corrida de producción para cada libro, se dan en la tabla 16. Por lo tanto, producir 2000 ejemplares, por ejemplo, del libro 1 genera un ingreso de 2000(50) = 100 000 dólares, pero cuesta 80 000 + 25(2000) = 130 000 dólares. Bookco es capaz de producir cuando mucho 10 000 libros si desea maximizar las utilidades.

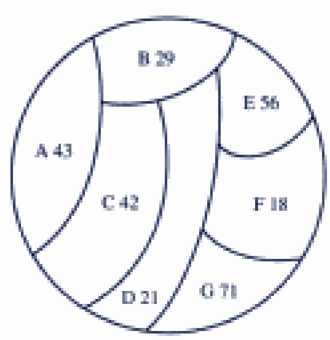
19 Comquat es dueña de cuatro plantas de producción en las cuales se producen computadoras personales. Comquat puede vender hasta 20 000 computadoras por año a un precio de 3500 dólares la unidad. La capacidad de producción, el costo de producción por computadora y el costo fijo de operación anual de una planta, se proporcionan en la tabla 17. Determine cómo puede Comquat maximizar sus utilidades anuales a partir de la producción de computadoras.

20 WSP Publishing vende libros de texto a estudiantes universitarios. WSP tiene disponibles dos representantes de ventas para ser asignados a la zona de los estados A a G. El número de estudiantes universitarios (en miles) en cada es-

TABLA 17

Planta	Capacidad de producción	Costo fijo de la planta (millones de dólares)	Costo por computadora (dólares)
1	10 000	9	1 000
2	8 000	5	1 700
3	9 000	3	2 300
4	6 000	1	2 900

FIGURA 9



tado se da en la figura 9. Cada representante de ventas debe ser asignado a dos estados adyacentes, por ejemplo a A y a B, pero no a A y a D. El objetivo de WSP es maximizar el número total de estudiantes en los estados que es asignado a los representantes de ventas. Plantee un PE cuya solución indique dónde asignar a los representantes. Luego resuelva el PE utilizando LINDO.

21 Eastinghouse vende acondicionadores de aire. La demanda anual de acondicionadores de aire en cada región del país es como sigue: Este, 100 000; Sur, 150 000; Oeste medio, 110 000; Oeste, 90 000. Eastinghouse planea fabricar los acondicionadores en cuatro ciudades distintas: Nueva York, Atlanta, Chicago y Los Ángeles. El costo de producción de un acondicionador de aire en una ciudad y embarcarlo a una región del país se presenta en la tabla 18. Cualquier fábrica produce al menos 150 000 acondicionadores al año. El costo de operación anual fijo de una fábrica en cada ciudad se da en la tabla 19. Por lo menos 50 000 unidades de la demanda del Oeste medio debe provenir de Nueva York, o por lo menos 50 000 unidades de la demanda del Oeste medio debe llegar de Atlanta. Formule un PE cuya solución indique a Eastinghouse el modo de minimizar el costo anual de cumplir con la demanda de acondicionadores de aire.

22 Considere el acertijo siguiente: Se seleccionan 4 palabras de tres letras de la siguiente lista:

DBA DEG ADI FFD GHI BCD FDF BAI

Por cada palabra usted gana una calificación igual a la posición que tiene la tercera letra de la palabra en el alfabeto. Por ejemplo, DBA da una calificación de 1, DEG da una puntaje de 7, y así sucesivamente. El objetivo es elegir las cuatro palabras que maximicen el puntaje total, pero sujeto a las restricciones siguientes: la suma de las posiciones en el alfabeto para la primera letra de cada palabra elegida debe ser por lo menos tan grande como la suma de las posiciones en el alfabeto para la segunda letra de cada palabra elegida. Formule un PE para resolver este problema.

23 En una planta de máquinas herramienta se deben terminar cinco trabajos cada día. El tiempo que toma efectuar cada trabajo depende de la máquina usada para ejecutar dicho trabajo. Si se usa en modo alguno una máquina, entonces hay un tiempo de preparación o de puesta a punto necesario. Los tiempos relacionados se proporcionan en la tabla 20. El objetivo de la compañía es minimizar la suma de los tiempos de preparación y de operación necesaria para completar todos los trabajos. Formule y resuelva un PE (con LINDO, LINGO o el Solver para Excel) cuya solución lo haga posible.

TABLA 18

	Precio por región (dólares)			
Ciudad	Este	Sur	Oeste medio	Oeste
Nueva York	206	225	230	290
Atlanta	225	206	221	270
Chicago	230	221	208	262
Los Ángeles	290	270	262	215

TABLA 19

Ciudad	Costo fijo anual (millones de dólares)
Nueva York	6
Atlanta	5.5
Chicago	5.8
Los Ángeles	6.2

TABLA 20

	Trabajo					Tiempo de preparación
Máquina	1	2	3	4	5	de la máquina (min)
1	42	70	93	X	X	30
2	X	85	45	X	X	40
3	58	X	X	37	X	50
4	58	X	55	X	38	60
5	X	60	X	54	X	20

Grupo B

24[†] Breadco Bakeries es una nueva cadena de panaderías que vende pan a lo largo de todo el estado de Indiana. Breadco planea abrir panaderías en tres lugares: Evansville, Indianápolis y South Bend. Cada panadería puede hornear al menos 900 000 hogazas de pan cada año. El costo de echar a andar una panadería en cada sitio es 5 millones de dólares en Evansville, 4 millones de dólares en Indianápolis y 4.5 millones de dólares en South Bend. Con el fin de simplificar el problema suponga que Breadco tiene sólo tres clientes, cuya demanda anual es 700 000 hogazas (cliente 1); 400 000 hogazas (cliente 2), y 300 000 hogazas (cliente 3). El costo total del horneado y embarque de una hogaza de pan para un cliente se da en la tabla 21.

Suponga que los costos futuros de embarque y producción se descuentan a una tasa de $11\frac{1}{9}$% al año. Suponga, además, que una vez puestas en marcha, una panadería dura por siempre. Formule un PE para minimizar el costo total de Breadco para cumplir con la demanda (presente y futura). (*Sugerencia*: usted necesitará saber que para $x < 1$, $a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots = a/(1 - x)$.) ¿Qué se modificaría en la formulación si Evansville o South Bend tuvieran que producir al año por lo menos 800 000 hogazas de pan?

25[‡] Speaker's Clearinghouse tiene que desembolsar los cheques del monto total de las apuestas para los ganadores en cuatro regiones distintas del país: sureste (SE), noreste (NE), lejano oeste (LO) y oeste medio (OM). La cantidad diaria promedio de los cheques extendidos a los ganadores en cada región del país es como se indica: SE, 40 000 dólares; NE, 60 000 dólares; LO, 30 000 dólares; OM, 50 000 dólares. Speaker's tiene que emitir los cheques el día que descubre que ha ganado un cliente. Puede hacer que los ganadores retrasen el cobro de sus cheques si les da un che-

TABLA 21

	Hasta		
Desde	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3
Evansville	16¢	34¢	26¢
Indianápolis	40¢	30¢	35¢
South Bend	45¢	45¢	23¢

[†]Basado en Efroymson y Ray (1966).
[‡]Basado en Shanker y Zoltners (1972).

que girado sobre un banco lejano (esto ocasiona que el cheque sea aprobado con mucha lentitud). Cuatro sitios con bancos están en consideración: Frosbite Falls, Montana (FF), Redville, South Caroline (R), Painted Forest, Arizona (PF) y Beanville, Maine (B). El costo anual por conservar una cuenta en cada banco es como sigue: FF, 50 000 dólares; R, 40 000 dólares; PF, 30 000 dólares; B, 20 000 dólares. Cada banco tiene como requisito que la cantidad promedio diaria de cheques expedidos no puede exceder 90 000 dólares. El número promedio de días que se requiere para que un cheque sea aprobado se proporciona en la tabla 22. Si se supone que el dinero que invierte Speaker's gana 15% anual, ¿dónde debe tener cuentas de banco la compañía, y desde qué banco debe ser emitido el cheque de un cliente dado?

26[†] El gobernador Blue del estado de Berry pretende conseguir la legislatura del estado para dividir injusta y arbitrariamente los distritos electorales de Berry. El estado consiste en 10 ciudades y el número de republicanos y demócratas (en miles) en cada ciudad es el que se presenta en la tabla 23. Berry tiene cinco representantes electorales. Para formar los distritos electorales, las ciudades se tienen que agrupar según las restricciones siguientes:

1 Todos los electores en una ciudad deben estar en el mismo distrito.

2 Cada distrito debe tener entre 150 000 y 250 000 electores (no hay electores independientes).

El gobernador Blue es demócrata. Suponga que cada votante siempre vota por todos los candidatos de un partido. Formule un PE para ayudar al gobernador Blue a maximizar el número de demócratas que ganarán curules en el congreso.

27[‡] La Father Domino Company vende copiadoras. Uno de los principales factores para hacer una venta es el servicio rápido de Domino. Esta compañía vende copiadoras en seis ciudades: Boston, Nueva York, Filadelfia, Washington, Providence y Atlantic City. Las ventas anuales proyectadas de copiadoras dependen de si un representante de servicio se encuentra dentro de 150 millas de una ciudad (véase tabla 24)

La producción de cada copiadora cuesta 500 dólares y se vende una unidad en 1000 dólares. Los costos anuales por representante de servicio son de 80 000 dólares. La compañía debe determinar en cuál de sus mercados fijar un representante del servicio. Sólo Boston, Nueva York, Filadelfia y Washington están dentro de los planes para establecer en ellas un representante. La distancia (en millas) entre las ciudades se proporciona en la tabla 25. Formule un PE que ayude a Domino a maximizar sus utilidades anuales.

28[§] Tailandia admite reclutas navales en tres centros de reclutamiento. Luego, los reclutas tienen que ser enviados a una de tres bases navales para capacitarlos. El costo del transporte de un recluta desde un centro de reclutamiento a una base se presenta en la tabla 26. Todos los años se admiten 1000 hombres en el centro 1; 600 en el centro 2 y 700 en el centro 3. La base 1 puede entrenar 1000 hombres al año; la base 2, 800 hombres y la base 3, 700 hombres. Después que los reclutas son capacitados se envían a la base naval principal de Tailandia (B). Se les puede transportar en un barco pequeño o en uno grande. Cuesta 5000 más 2 dólares por milla usar un barco pequeño. Un barco pequeño es capaz de llevar hasta 200 hombres a la base principal y podría visitar hasta dos bases en su camino a la base principal. Están a disposición siete barcos pequeños y cinco grandes. Cuesta 10 000 más 3 dólares por milla utilizar un barco grande. Un barco grande podría visitar hasta tres bases en

TABLA 22

Región	FF	R	PF	B
SE	7	2	6	5
NE	8	4	5	3
LO	4	8	2	11
OM	5	4	7	5

TABLA 23

Ciudad	Republicanos	Demócratas
1	80	34
2	60	44
3	40	44
4	20	24
5	40	114
6	40	64
7	70	14
8	50	44
9	70	54
10	70	64

TABLA 24

¿Representante dentro de 150 millas?	Ventas					
	Boston	N.Y.	Fil.	Wash.	Prov.	Atl. City
Si	700	1 000	900	800	400	450
No	500	750	700	450	200	300

TABLA 25

	Boston	N.Y.	Fil.	Wash.
Boston	0	222	310	441
Nueva York	222	0	89	241
Filadelfia	310	89	0	146
Washington	441	241	146	0
Providence	47	186	255	376
Atlantic City	350	123	82	178

TABLA 26

	Hasta (dólares)		
Desde	Centro 1	Centro 2	Centro 3
Centro 1	200	200	300
Centro 2	300	400	220
Centro 3	300	400	250

[†]Basado en Garfinkel y Nemhauser (1970).
[‡]Basado en Gelb y Khumawala (1984).

[§]Basado en Choypeng, Puakpong, y Rosenthal (1986).

su camino a la base principal y podría transportar hasta 500 hombres. Los "tours" posibles para cada tipo de embarcación se proporcionan en la tabla 27.

Suponga que la asignación de reclutas a las bases de entrenamiento se efectúa aplicando el método de transporte. Luego formule un PE con la que se minimice el costo total en que se incurre por enviar a los hombres desde las bases de entrenamiento hasta la base principal. (*Sugerencia*: sea y_{ij} = hombres enviados al tour i desde la base j a la base principal (B) en un barco pequeño, sea x_{ij} = hombres enviados al tour i desde la base j a B en un barco grande, S_i = veces que el tour i es usado por un barco pequeño y L_i = ocasiones que el tour i es usado por un barco grande.)

29 Usted fue asignado para acomodar las canciones del último álbum de Madonna en la versión de audiocinta. Una cinta tiene dos lados (1 y 2). Las canciones de cada lado de la cinta deben hacer un total de entre 14 y 16 minutos de duración. La duración y tipo de cada canción se proporcionan en la tabla 28. La asignación de canciones en la cinta debe cumplir con las condiciones siguientes:

1 Cada lado debe llevar dos baladas, exactamente.

2 El lado 1 debe tener por lo menos tres canciones *hit*.

3 La canción 5 o la canción 6 tiene que estar en el lado 1.

4 Si las canciones 2 y 4 están en el lado 1, entonces la canción 5 debe estar en el lado 2.

Explique cómo podría utilizar un planteamiento de programación con enteros para determinar si hay un acomodo de canciones que cumpla con las restricciones.

30 El primo Bruzie de la radiodifusora WABC fija el momento de los radiocomerciales en bloques de 60 segundos. La estación ha vendido tiempo para comerciales de 15, 16, 20, 25, 30, 35, 40 y 50 segundos en esta hora. Plantee un modelo de programación entera que se pueda utilizar para determinar la cantidad mínima de bloques de 60 segundos de comerciales que se debe programar para que se ajuste en todos los comerciales de la hora actual. (*Sugerencia*: con toda certeza no se requieren más de ocho bloques de tiempo. Sea $y_i = 1$ si el bloque i se usa y $y_i = 0$ si no sucede así.)

31[†] Una pipa que entrega petróleo de Sunco tiene cinco compartimientos que transportan hasta 2700, 2800, 1100, 1800 y 3400 galones de combustible, respectivamente. La compañía debe entregar tres tipos de combustible (súper, regular y sin plomo) a un cliente. La demanda, penalización por galones incompletos y el faltante máximo admisible se proporcionan en la tabla 29. Cada compartimiento puede llevar sólo un tipo de gasolina. Formule un PE cuya solución le indique a Sunco cómo cargar la pipa de una manera en que se minimicen los costos por los faltantes.

32[‡] La plaza Simon's tiene 10 000 pies cuadrados de espacio para rentar y desea determinar los tipos de tiendas que deben ocupar dicha plaza. La cantidad mínima y la máxima de cada tipo de tiendas (junto con los pies cuadrados) se dan en la tabla 30. La utilidad anual que obtenga cada tipo de tienda dependerá, naturalmente, de cuántas tiendas de cierto tipo hay en la plaza. Esta relación de dependencia se presenta en la tabla 31 (todas las utilidades están en unidades de 10 000 dólares). Por lo tanto, si hay dos tiendas de departamentos en la plaza, cada una de ellas gana 210 000 dólares al año. Cada tienda paga 5% de su utilidad anual como renta a Simon's. Plantee un PE cuya solución le indique a Simon's de qué manera maximizar el ingreso por la renta.

33[§] La firma financiera Boris Milkem posee seis bienes. El precio de venta esperado (en millones de dólares) por cada bien se presenta en la tabla 32. Si el bien 1 se vende en el año 2, la firma recibe 20 millones de dólares. Para conservar un flujo de efectivo regular, Milkem debe vender por lo menos 20 millones de dólares en el año 1, por lo menos 35 millones de dólares en el año 2 y por lo menos 30 millones en el año 3. Prepare un PE que Milkem pueda usar para de-

TABLA 27

Número de Tour	Lugares visitados	Millas recorridas
1	B–1–B	370
2	B–1–2–B	515
3	B–2–3–B	665
4	B–2–B	460
5	B–3–B	600
6	B–1–3–B	640
7	B–1–2–3–B	720

TABLA 28

Canción	Tipo	Duración (minutos)
1	Balada	4
2	Hit	5
3	Balada	3
4	Hit	2
5	Balada	4
6	Hit	3
7		5
8	Balada y hit	4

TABLA 29

Tipo de gasolina	Demanda	Costo por galones incompletos	Faltante máximo admisible
Súper	2 900	10	500
Regular	4 000	8	500
Sin plomo	4 900	6	500

TABLA 30

Tipo de tienda	Área en pies cuadrados	Mínimo	Máximo
Joyería	500	1	3
Zapatería	600	1	3
Tienda de departamentos	1 500	1	3
Librería	700	0	3
Ropa	900	1	3

[†]Basado en Brown (1987).
[‡]Basado en Bean *et al.* (1988).
[§]Basado en Bean, Noon, y Salton (1987).

TABLA 31

Tipo de tienda	Número de tiendas		
	1	2	3
Joyería	9	8	7
Zapatería	10	9	5
Tienda de departamentos	27	21	20
Librería	16	9	7
Ropa	17	13	10

TABLA 32

Bien	Vendido en		
	Año 1	Año 2	Año 3
1	15	20	24
2	16	18	21
3	22	30	36
4	10	20	30
5	17	19	22
6	19	25	29

terminar cómo maximizar el rendimiento total de los bienes vendidos durante los tres años siguientes. Al poner en marcha este modelo, ¿cómo se podría aplicar el concepto de horizonte de planeación rodante?

34[†] El servicio de bomberos de Smalltown tiene en la actualidad siete equipos con escaleras ordinarias y siete cajas de alarma. Los dos equipos más cercanos con escalera a cada caja de alarma se dan en la tabla 33. Los padres de la ciudad desean maximizar el número de equipos con escalera ordinaria que se puedan reemplazar con equipos con escaleras extensibles. Las consideraciones políticas establecen infortunadamente que es posible reemplazar un equipo ordinaria sólo si, después del reemplazo, por lo menos uno de los equipos más cercanos a cada caja de alarma todavía es un equipo ordinario.

a Formule un PE que se pueda usar para maximizar la cantidad de equipos convencionales que es posible reemplazar por equipos con escaleras extensibles.

b Suponga que $y_k = 1$ si el equipo ordinario k es reemplazado. Demuestre que si $z_k = 1 - y_k$, la respuesta en el inciso (a) es equivalente a un problema de recubrimiento de conjuntos.

35[‡] Una planta de generación de energía eléctrica tiene tres calderas. Si una caldera dada está en operación es posible utilizarla para generar una cierta cantidad de vapor (en toneladas) entre el mínimo y el máximo dado en la tabla 34. Se proporciona también el costo de producción de una tonelada de vapor en cada caldera. El vapor proveniente de las calderas se usa para generar energía eléctrica en las tres turbinas. Si operan, cada turbina procesa una cantidad de vapor (en toneladas) entre el mínimo y el máximo que se da en la tabla 35. Se proporciona, asimismo, el costo por procesar una tonelada de vapor y la energía producida por cada turbina. Plantee un PE con el que se pueda minimizar el costo de producir 8000 kwh de energía eléctrica.

[†]Basado en Walker (1974).

[‡]Basado en Cavalieri, Roversi, y Ruggeri (1971).

TABLA 33

Caja de alarma	Dos equipos más cercanos con escalera ordinaria
1	2, 3
2	3, 4
3	1, 5
4	2, 6
5	3, 6
6	4, 7
7	5, 7

TABLA 34

Caldera	Vapor mínimo	Vapor máximo	Costo/tonelada (dólares)
1	500	1,000	10
2	300	900	8
3	400	800	6

TABLA 35

Turbina	Mínimo	Máximo	Kwh por tonelada de vapor	Costo de proceso por (dólares)
1	300	600	4	2
2	500	800	5	3
3	600	900	6	4

36[§] Una compañía de Ohio, Clevcinn, está constituida por tres subsidiarias. Cada una de ellas tiene su respectiva nómina promedio, fondo de reserva para desempleo y nómina estimada que se da en la tabla 36. (Todos los valores están en millones de dólares.) Cualquier empleador en el estado de Ohio cuya relación nómina de reserva/nómina promedio es menor que 1 debe pagar 20% de su nómina estimada en primas de seguro por desempleo o 10% si la relación es por lo menos 1. Clevcinn puede unir sus subsidiarias y considerarlas como empleadores separados. Por ejemplo, si la subsidiaria 2 y la 3 se unen, deben pagar entonces 20% de su nómina combinada en primas de seguro por desempleo. Formule un PE con el que se pueda determinar qué subsidiarias deben unirse.

37 La escuela de contaduría de la universidad de Indiana tiene dos salones para 50 estudiantes cada uno, un salón para 100 y un salón para 150 estudiantes. Las clases se imparten durante 5 horas diarias. Los cuatro tipos de solicitud para salones se listan en la tabla 37. La escuela de contaduría tiene que decidir cuántas peticiones de cada tipo se deben asignar a cada tipo de salón. Los castigos por cada tipo de asignación se encuentran en la tabla 38. Una X quiere decir que se tiene que cumplir una solicitud con un salón de dimensiones adecuadas. Formule un PE cuya solución indique a la escuela de contaduría cómo asignar clases a los salones de una manera que minimice el total de los castigos.

[§]Basado en Salkin (1979).

TABLA 36

Subsidiaria	Nómina promedio	Reserva	Nómina estimada
1	300	400	350
2	600	510	400
3	800	600	500

TABLA 37

Tipo	Tamaño del salón solicitado (lugares)	Horas solicitadas	Número de solicitudes
1	50	2, 3, 4	3
2	150	1, 2, 3	1
3	100	5	1
4	50	1, 2	2

TABLA 38

Tamaño solicitado	Tamaños usados para cumplir con las solicitudes			Castigos
	50	100	150	
50	0	2	4	100* (Horas solicitadas)
100	X	0	1	100* (Horas solicitadas)
150	X	X	0	100* (Horas solicitadas)

38 Una compañía vende siete tipos de cajas cuyo volumen varía de 17 a 33 pies cúbicos. La demanda y el tamaño de cada caja se proporcionan en la tabla 39. El costo variable (en dólares) de producción de cada caja es igual al volumen de la misma. Se genera un costo fijo de 1 000 dólares para producir cualquier caja en particular. Si la compañía lo quiere así, la demanda de una caja se podría cumplir con una caja de mayor tamaño. Plantee y resuelva (con LINDO, LINGO o el Solver para Excel) un PE cuya solución minimice el costo de cumplir la demanda de cajas.

39 Huntco elabora salsa de tomate en cinco plantas distintas. La capacidad (en toneladas) de cada planta se encuentra en la tabla 40. La salsa de tomate se almacena en una de tres bodegas. El costo por tonelada (en cientos de dólares) por producir salsa de tomate en cada planta y embarcarla a cada bodega se proporciona en la tabla 41. Huntco tiene cuatro clientes. El costo de embarcar una tonelada de salsa desde cada bodega hasta el lugar del cliente es como se indica en la tabla 42. Cada cliente debe recibir la cantidad (en toneladas) de salsa que se presentan en la tabla 43.

TABLA 39

	Caja						
	1	2	3	4	5	6	7
Tamaño	33	30	26	24	19	18	17
Demanda	400	300	500	700	200	400	200

TABLA 40

	Planta				
	1	2	3	4	5
Toneladas	300	200	300	200	400

TABLA 41

Desde	Hasta		
	Bodega 1	Bodega 2	Bodega 3
Planta 1	8	10	12
Planta 2	7	5	7
Planta 3	8	6	5
Planta 4	5	6	7
Planta 5	7	6	5

TABLA 42

Desde	Hasta			
	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	Cliente 4
Bodega 1	40	80	90	50
Bodega 2	70	70	60	80
Bodega 3	80	30	50	60

TABLA 43

	Cliente			
	1	2	3	4
Demanda	200	300	150	250

a Formule un problema de transporte balanceado cuya solución indique la manera de minimizar el costo de cumplir con las demandas de los clientes.

b Modifique este problema si éstas son demandas anuales y hay un costo anual fijo por la operación de cada planta y cada bodega. Estos costos (en miles) se dan en la tabla 44.

40 Con el fin de satisfacer las demandas de las telecomunicaciones en los 20 años siguientes, Telstar Corporation estima que la cantidad de circuitos requeridos entre Estados Unidos y Alemania, Francia, Suiza y Reino Unido será como se indica en la tabla 45.

Se pueden crear dos tipos de circuitos: cable y satélite. Se dispone de dos tipos de circuitos de cable (TA7 y TA8). El costo fijo de construir cada tipo de cable y la capacidad de circuito de cada tipo se dan en la tabla 46.

Los cables TA7 y TA8 van desde Estados Unidos hasta el Canal de la Mancha. Por lo tanto, hay un costo adicional por prolongar estos circuitos hasta otros países europeos. El costo variable anual por circuito se da en la tabla 47.

TABLA 44[†]

Instalación	Costo fijo anual (en miles de dólares)
Planta 1	35
Planta 2	45
Planta 3	40
Planta 4	42
Planta 5	40
Bodega 1	30
Bodega 2	40
Bodega 3	30

[†]Basado en Geoffrion y Graves (1974).

TABLA 45

País	Circuitos necesarios
Francia	20 000
Alemania	60 000
Suiza	16 000
Reino Unido	60 000

TABLA 46

Tipo de cable	Costos fijos de operación (miles millones de dólares)	Capacidad
TA7	1.6	8 500
TA8	2.3	37 800

TABLA 47

País	Costos variables por circuito (dólares)
Francia	0
Alemania	310
Suiza	290
Reino Unido	0

Para crear y usar un circuito por satélite, Telstar debe lanzar un satélite y cada país que lo utiliza debe tener una estación (o estaciones) terrena(s) para recibir la señal. Cuesta 3 mil millones el lanzamiento de un satélite. Cada satélite lanzado es capaz de manejar hasta 140 000 circuitos. Todas las estaciones terrenas tienen una capacidad máxima de 190 circuitos y cuesta 6 000 dólares anuales operarlas. Formule un modelo de programación entera para ayudar a determinar de qué modo suministrar los circuitos necesarios y minimizar el costo total en que se incurra durante los 20 años siguientes.

Luego, mediante LINDO (o LINGO) encuentre una solución cercana a la óptima. Después de 300 pivoteos, ¡LINDO opina que no hay una solución óptima! A propósito, no se requiere que la cantidad de circuitos o de cables en un país sea entera, porque si no, ¡el modelo nunca encontrará solución! Sin embargo, por lo que se refiere a algunas variables, ¡el requisito de ser enteras es vital![†]

41 Una gran compañía de fármacos tiene que determinar cuántos representantes de ventas asignar a cada uno de los cuatro distritos de ventas. El costo de tener n representantes en un distrito es $(88\,000 + 80\,000n)$ al año. Si se fija un representante en un distrito dado, el tiempo que toma para completar una llamada a un médico está indicada en la tabla 48 (los tiempos están en horas).

Cada representante de ventas es capaz de trabajar hasta 160 horas al mes. El número de llamadas que se da en la tabla 49 debe ser hecho cada mes en cada uno de los distritos. No es admisible una cantidad fraccionaria de representantes en un distrito. Determine cuántos representantes se deben asignar a cada distrito.

42[‡] En este problema de asignación se aplica la programación entera y el concepto de duración de bonos para mostrar cómo las compañías de Wall Street son capaces de seleccionar un conjunto óptimo de inversiones en bonos. La *duración* de un bono (o cualquier serie de pagos) se define como sigue: sea $C(t)$ el pago del bono en el tiempo t ($t = 1, 2, \ldots, n$). Sea r = tasa de interés del mercado. Si el promedio ponderado en función del tiempo de los pagos de los bonos está dado por

$$\sum_{t=1}^{t=n} tC(t)/(1 + r)^t$$

y el precio del mercado P del bono está dado por:

$$\sum_{t=1}^{t=n} C(t)/(1 + r)^t$$

entonces, la duración del bono D está dada por:

$$D = (1/P)\sum_{t=1}^{n} \frac{tC(t)}{(1 + r)^t}$$

Por lo tanto, la duración de un bono mide el tiempo "promedio" (en años) en el cual se recibe un dólar elegido al azar de VNA. Suponga que una compañía de seguros necesita hacer un pago de 20 000 dólares cada seis meses durante los siguientes 10 años. Si la tasa de interés del mercado es 10% anual, entonces esta serie de pagos tiene un VNA de 251 789 dóla-

TABLA 48

Distrito de base de un representante	Llamadas de ventas reales del distrito 1	2	3	4
1	1	4	5	7
2	4	1	3	5
3	5	3	1	2
4	7	5	2	1

TABLA 49

Distrito	Número de llamadas
1	50
2	80
3	100
4	60

[†]Basado en Calloway, Cummins, y Freeland (1990).
[‡]Basado en Strong (1989).

res y una duración de 4.47 años. Si se desea minimizar la sensibilidad del conjunto de inversiones en bonos ante el interés de riesgo y, aún así, cumplir con las obligaciones de pago, entonces se ha mostrado que se deben invertir 251 780 dólares al inicio del año 1 en un conjunto de inversiones de bonos cuya duración es igual a la duración de la serie de pagos.

Suponga que el costo único por poseer un conjunto de inversiones en bonos es el costo de la transacción asociado con el costo de compra de bonos. Suponga que están a la disposición seis bonos. Las series de pago para estos seis bonos se proporcionan en la tabla 50. El costo de la transacción de comprar algunas unidades del bono i es igual a 500 + 5 dólares por bono comprado. Por lo tanto, comprar una unidad del bono 1 cuesta 505 dólares y comprar 10 unidades del bono 1 cuesta 550 dólares. Suponga que se permite comprar un número fraccionario de unidades de bonos i, pero para que haya diversificación se pueden comprar, cuando mucho, 100 unidades de cualquier bono. Se podrían comprar también bonos del tesoro (sin costo alguno por la transacción). Un bono del tesoro cuesta 980 dólares y tiene una duración de 0.25 de año (90 días).

Después de calcular el precio y la duración de cada bono, utilice la programación entera para determinar el conjunto protegido de inversiones en bonos que contrae los costos de transacción mínimos. Usted debe suponer que la duración de su conjunto de inversiones es un promedio ponderado de las duraciones de los bonos incluidos en el conjunto de inversiones, donde el peso asociado con cada bono es igual al dinero invertido en ese bono.

43 Ford tiene cuatro plantas para fabricar automóviles. En cada una es posible producir el Taurus, Lincoln o el Escort, pero sólo es posible fabricar uno de ellos. El costo fijo por operar cada planta por un año y los costos variables por producir un automóvil de cada tipo se proporcionan en la tabla 51.

Ford se enfrenta a las restricciones siguientes:

a Se puede producir sólo un tipo de automóvil en cada planta.

b La producción total de cada tipo de automóvil tiene que ser en una sola planta; es decir, si se fabrican algunos Taurus en la planta 1, entonces todos los Taurus se tienen que hacer ahí.

c Si su usan las plantas 3 y 4, la planta 1 se debe utilizar también.

TABLA 50

	Bonos disponibles					
Año	Bono 1	Bono 2	Bono 3	Bono 4	Bono 5	Bono 6
1	50	100	130	20	100	120
2	60	90	130	20	100	100
3	70	80	130	20	100	80
4	80	70	130	20	100	140
5	90	60	130	20	100	100
6	100	50	130	80	100	90
7	110	40	130	40	100	110
8	120	30	130	150	100	130
9	130	20	130	200	100	180
10	1 010	1 040	1 130	1 200	1 100	950

TABLA 51

		Costo variable (dólares)		
Planta	Costo fijo (dólares)	Taurus	Lincoln	Escort
1	7 mil millones	12 000	16 000	9 000
2	6 mil millones	15 000	18 000	11 000
3	4 mil millones	17 000	19 000	12 000
4	2 mil millones	19 000	22 000	14 000

Ford tiene que producir todos los años 500 000 unidades de cada tipo de automóvil. Formule un PE cuya solución le indique a Ford cómo minimizar el costo anual en la producción de automóviles.

44 La firma JD de capital empresario pretende determinar en cuál de 10 proyectos debería invertir. Se sabe cuánto dinero está disponible para invertir en cada uno de los siguientes N años, el VNA de todos los proyectos y el efectivo que requiere cada proyecto durante cada uno de los siguientes N años (véase tabla 52).

a Escriba un programa LINGO para determinar los proyectos en los cuales JD debería invertir.

b Mediante el mismo programa en LINGO, determine cuál de los diez proyectos se debe elegir. Cada proyecto requiere inversión en efectivo durante los tres años siguientes. Durante el año 1, se dispone de 80 millones para invertir. Durante el año 2, están a la disposición 60 millones para invertir. Durante el año 3, están disponibles 70 millones para invertir. (Todos los valores son en millones de dólares.)

45 Escriba un programa LINGO mediante el cual se pueda resolver un problema de cargo fijo del tipo que se explicó en el ejemplo 3. Suponga que hay una demanda limitada de cada producto. Luego resuelva por medio de su programa un problema de cargo fijo, cuatro productos y tres recursos, y cuyos parámetros son los que se muestran en las tablas 53, 54 y 55.

TABLA 52

Inversión (millones de dólares)	Proyecto									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Año 1	6	9	12	15	18	21	24	27	30	35
Año 2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Año 3	5	7	9	12	12	14	16	11	20	24
VNA	20	30	40	50	60	70	80	90	100	130

TABLA 53

Recurso	Disponibilidad del recurso
1	40
2	60
3	80

TABLA 54

Producto	Demanda	Contribución a las utilidades por cada unidad (dólares)	Cargo fijo (dólares)
1	40	2	30
2	60	5	40
3	65	6	50
4	70	7	60

TABLA 55

Uso del recurso	Producto 1	2	3	4
1	1	2	3.5	4
2	5	6	7	9
3	3	4	5	6

9.3 Método de ramificación y acotamiento para resolver problemas de programación pura con enteros

La mayor parte de los PE se resuelven en la práctica mediante la técnica de ramificación y acotamiento. Estos métodos encuentran la solución óptima de un PE mediante la enumeración exhaustiva de los puntos en una región factible de un subproblema. Antes de explicar cómo funciona este método se requiere hacer la siguiente observación elemental pero importante: si usted resuelve la relajación del PL de un PE puro y obtiene una solución en la cual todas las variables son números enteros, entonces la solución óptima para la relajación del PL es también la solución óptima del PE.

Para ver por qué esta observación es verdadera, considere el PE siguiente:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \text{ enteros}$$

La solución óptima para la relajación del PL de este PE puro es $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 12$. Como con esta solución se obtienen valores enteros para todas las variables, de la observación anterior se infiere que $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 12$ también es la solución óptima para el PE. Observe que la región factible para el PE es un subconjunto de los puntos que se encuentran en la región factible para la relajación del PL (véase figura. 10). Por lo tanto, el valor óptimo de z para el PE no puede ser mayor que el valor óptimo de z para la relajación del PL. Esto quiere decir que el valor óptimo de z para el PE tiene que ser ≤ 12. Pero el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 12$ es factible para el PE y tiene $z = 12$. Por lo tanto, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$, $z = 12$ debe ser óptimo para el PE.

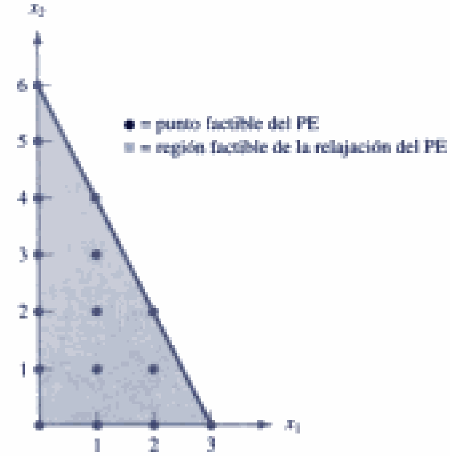


FIGURA 10 Región factible para un PE y su relajación del PL

EJEMPLO 9 Método de ramificación y acotamiento

La Telfa Corporation fabrica mesas y sillas. Una mesa requiere 1 hora de mano de obra y 9 pies tablón de madera, en tanto que para una silla se necesita 1 hora de mano de obra y 5 pies tablón de madera. En la actualidad están a la disposición 6 horas de mano de obra y 45 pies tablón de madera. Cada mesa contribuye con 8 dólares a las utilidades y cada silla, con 5 dólares. Formule y resuelva un PE para maximizar las utilidades de Telfa.

Solución Sea

$$x_1 = \text{número de mesas fabricadas}$$
$$x_2 = \text{número de sillas fabricadas}$$

Puesto que x_1 y x_2 deben ser enteros, Telfa desea resolver el PE siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \qquad \text{(Restricción de la mano de obra)} \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \qquad \text{(Restricción de la madera)} \\ x_1, x_2 &\geq 0;\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned}$$

El método de ramificación y acotamiento empieza con la solución de la relajación del PL del PE. Si todas las variables de decisión asumen valores enteros en la solución óptima de la relajación del PL, entonces, la solución óptima de la relajación del PL será la solución óptima del PE. A éste se le llama subproblema 1 de la relajación del PL. Infortunadamente, la solución óptima de la relajación del PL es $z = \frac{165}{4}$, $x_1 = \frac{15}{4}$, $x_2 = \frac{9}{4}$ (véase figura 11). De acuerdo con la sección 9.1, se sabe que (valor óptimo de z para el PE) $\leq$ (valor z óptimo para la relajación del PL). De aquí se infiere que el valor óptimo de z para el PE no puede ser mayor que $\frac{165}{4}$. Por lo tanto, el valor óptimo de z para la relajación del PL es un **límite o acotamiento superior** para las utilidades de Telfa.

El paso siguiente es dividir la región factible de la relajación del PL en un intento por investigar más acerca de la ubicación de la solución óptima del PE. Se elige de modo arbitrario una variable que es fraccionaria en la solución óptima de la relajación del PL (por ejemplo, x_1). Ahora observe que todos los puntos de la región factible para el PE deben tener $x_1 \leq 3$ o $x_1 \geq 4$. (¿Por qué una solución factible para el PE no puede tener $3 < x_1 < 4$?) Sin perder de vista lo anterior, se "ramifica" sobre la variable x_1 y se originan los dos subproblemas adicionales siguientes:

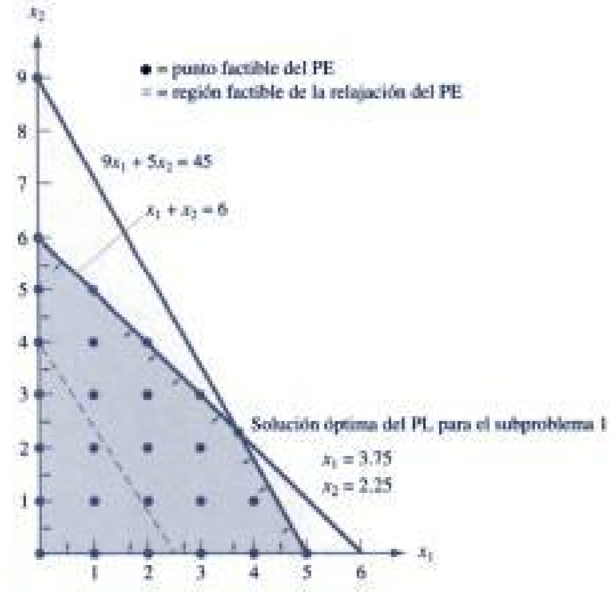


FIGURA 11
Región factible para el problema Telfa

Subproblema 2 Subproblema 1 + restricción $x_1 \geq 4$.

Subproblema 3 Subproblema 1 + restricción $x_1 \leq 3$.

Observe que ni en el subproblema 2 ni en el subproblema 3 hay puntos con $x_1 = \frac{15}{4}$. Esto significa que la solución óptima para la relajación del PL no puede presentarse nuevamente cuando se resuelve el subproblema 2 o el 3.

Se observa en la figura 12 que todos los puntos de la región factible para el PE de Telfa están incluidos en la región factible para el subproblema 2 o el 3. Asimismo, las regiones factibles para los subproblemas 2 y 3 no tienen puntos comunes. Puesto que el subproblema 2 y el 3 se originaron por sumar restricciones que contienen x_1, se dice que dichos subproblemas se crearon por **ramificación** sobre x_1.

Se elige ahora un subproblema que no haya sido resuelto como un PL. Se selecciona en forma arbitraria el subproblema 2 para resolverlo. En la figura 12 se observa que la solución óptima para el subproblema 2 es $z = 41$, $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{9}{5}$ (punto C). Los logros se resumen en la figura 13.

La representación de todos los subproblemas que se originan se llama **árbol.** Cada subproblema recibe el nombre de **nodo** del árbol, y cada línea que une dos nodos del árbol se denomina **arco.** Las restricciones relacionadas con cualquier nodo del árbol son las restricciones para la relajación del PL más las restricciones que tienen que ver con los arcos que van desde el subproblema 1 hasta el nodo. La letra t indica el orden cronológico en el cual se resuelve el subproblema.

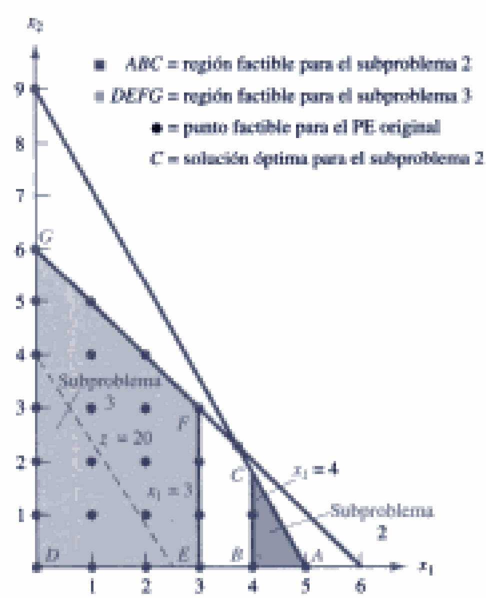


FIGURA 12
Región factible para el subproblema 2 y 3 del problema de Telfa

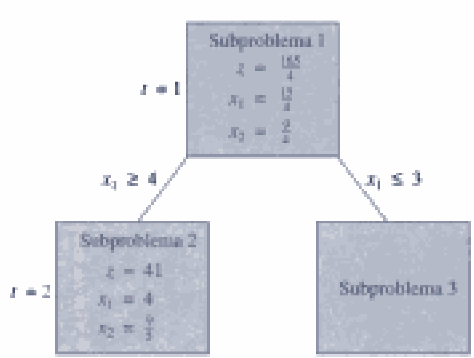


FIGURA 13
Subproblemas 1 y 2 de Telfa resueltos

La solución óptima para el subproblema 2 no dio una solución de puros enteros, por eso se escoge l subproblema 2 para crear dos nuevos subproblemas. Se elige una variable de valor fraccionario en la solución óptima del subproblema 2 y luego se ramifica sobre esa variable. Como x_2 es la única variable fraccionaria en la solución óptima del subproblema 2, se ramifica sobre x_2. Se divide la región factible del subproblema 2 en aquellos puntos que tienen $x_2 \geq 2$ y $x_2 \leq 1$. Así se originan los dos subproblemas siguientes:

Subproblema 4 Subproblema 1 + restricción $x_1 \geq 4$ y $x_2 \geq 2$ = subproblema 2 + restricción $x_2 \geq 2$.

Subproblema 5 Subproblema 1 + restricción $x_1 \geq 4$ y $x_2 \leq 1$ = subproblema 2 + restricción $x_2 \leq 1$.

Las regiones factibles para los subproblemas 4 y 5 se muestran en la figura 14. El conjunto de subproblemas no resueltos consta de los subproblemas 3, 4 y 5. A continuación se elige un subproblema para resolverlo. Por cuestiones que se analizan después, se decide resolver el subproblema recién creado. (A esto se le llama regla LIFO, *last-in-first-out*, que corresponde a último en entrar, primero en salir.). De la regla LIFO se infiere que se debería resolver luego el subproblema 4 o el 5. Se escoge en forma arbitraria resolver el subproblema 4. En la figura 14 es posible observar que el subproblema 4 es no factible. Por consiguiente, el subproblema 4 no puede dar la solución óptima para el PE. Para indicar este hecho, se coloca una $\times$ junto al subproblema 4 (véase figura 15). Como cualquier ramificación que parta del subproblema 4 no dará información útil, es inútil formarlas. Cuando las ramificaciones posteriores de un subproblema no proporcionan información útil, se dice que el subproblema (o nodo) ya está **terminado.** Los resultados se presentan en la figura 15.

Los únicos subproblemas sin resolver son ahora el 3 y el 5. De la regla LIFO se infiere que el subproblema 5 es el que se debería resolver enseguida. En la figura 14 se observa que la solución óptima para el subproblema 5 es el punto I de la figura 14: $z = \frac{365}{9}$, $x_1 = \frac{40}{9}$, $x_2 = 1$. Esta solución no proporciona en forma inmediata información útil, de modo que se elige dividir la región factible del subproblema 5 mediante la ramificación sobre la variable de valor fraccionario x_1. De esta manera se originan dos subproblemas (véase figura 16).

Subproblema 6 Subproblema 5 + restricción $x_1 \geq 5$.

Subproblema 7 Subproblema 5 + restricción $x_1 \leq 4$.

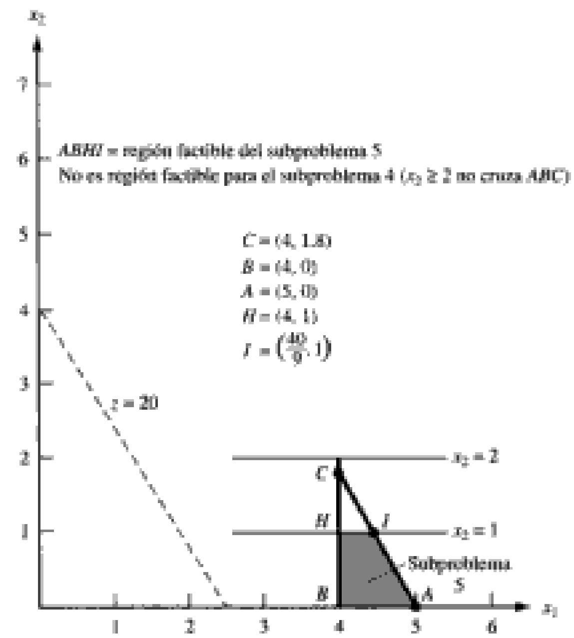


FIGURA 14
Regiones factibles para los subproblemas 4 y 5 del problema de Telfa

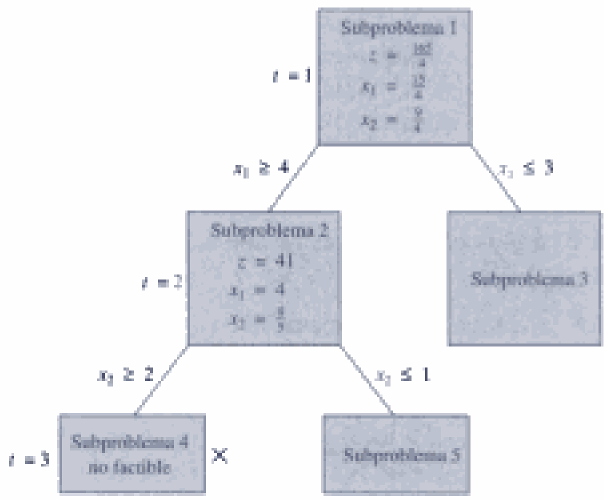


FIGURA 15
Subproblemas 1, 2 y 4 resueltos de Telfa

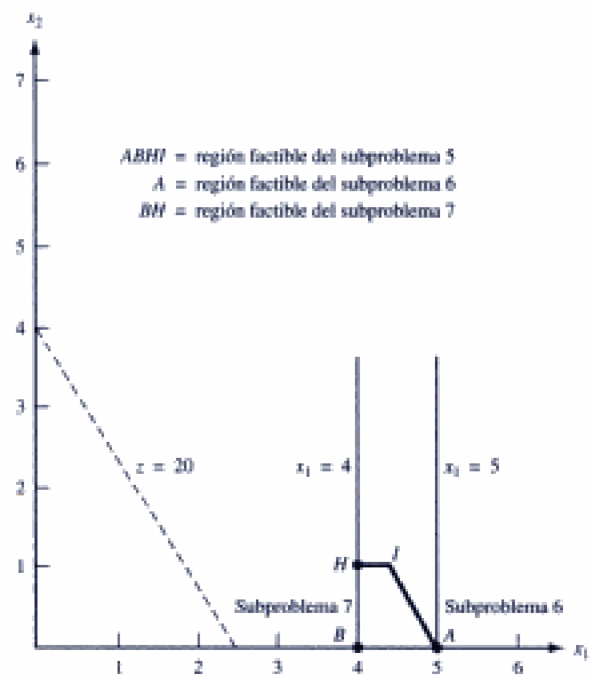


FIGURA 16
Regiones factibles para los subproblemas 6 y 7 del problema de Telfa

Los subproblemas 6 y 7, juntos, comprenden todos los puntos enteros que estaban incluidos en la región factible del subproblema 5. Asimismo, ningún punto con $x_1 = \frac{40}{9}$ puede estar en la región factible del subproblema 6 o del 7. Por lo tanto, la solución óptima para el subproblema 5 no se repite cuando se resuelven los subproblemas 6 y 7. El árbol luce como se muestra en la figura 17.

Ahora son los subproblemas 3, 6 y 7 los que no están resueltos. Según la regla LIFO, los siguientes que se deben resolver son los subproblemas 6 o 7. Se elige de modo arbitrario el subproblema 7 para resolverlo. Según la figura 16, la solución óptima para el subproblema 7 es el punto H: $z = 37$, $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Tanto x_1 como x_2 asumen valores enteros, por eso esta solución es factible para el PE original. Ahora ya se sabe que el subproblema 7 da una solución factible entera con $z = 37$. Se sabe también que el subproblema 7 no puede tener una solución factible con enteros si $z > 37$. Por lo tanto, la ramificación nueva en el subproblema 7 no generará información nueva con respecto a la solución óptima del PE, por lo que el subproblema ha sido terminado. El árbol en este momento se representa en la figura 18.

Una solución que se obtiene al resolver un subproblema en el cual todas las variables tienen valores enteros, se denomina **solución probable.** Como esta solución podría ser óp-

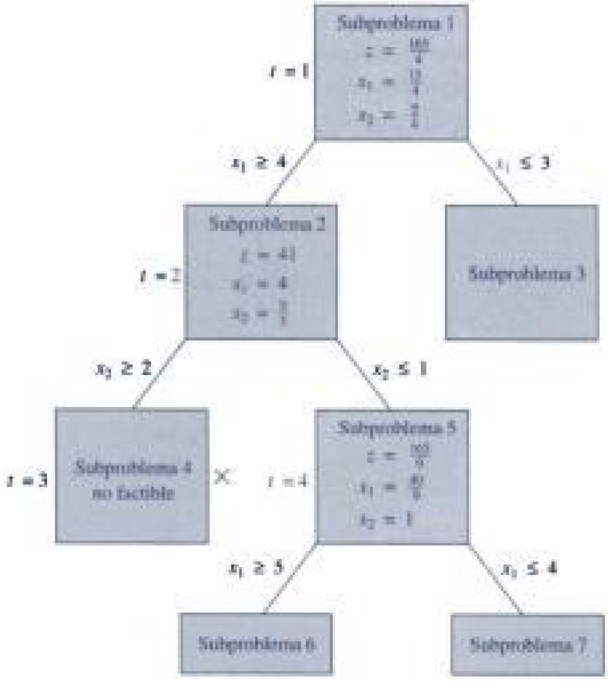


FIGURA 17
Subproblemas 1, 2, 4 y 5 resueltos para el problema de Telfa

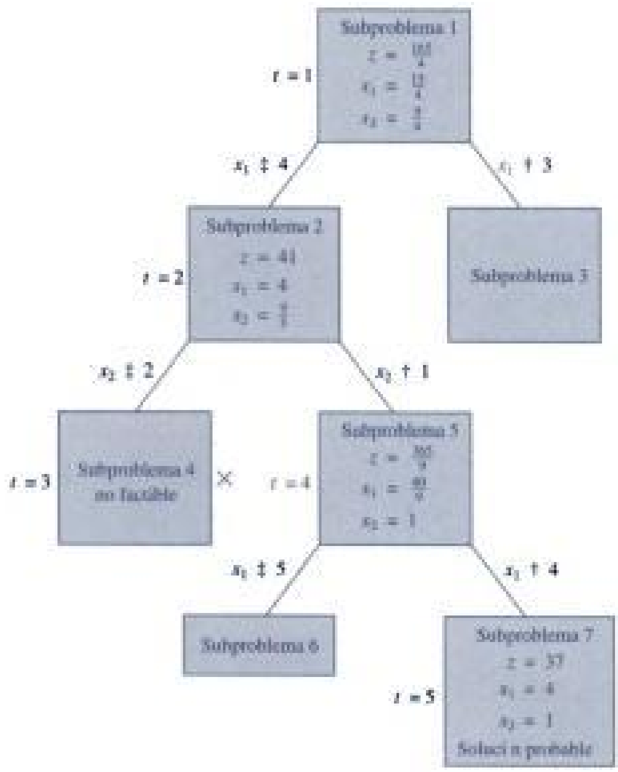


FIGURA 18
Árbol de ramificación y acotamiento después de que cinco subproblemas han sido resueltos

tima, se debe tener una solución probable hasta que no se encuentre una solución factible (si existe) mejor para el PE. Se tiene una solución factible para el PE original con $z = 37$, por eso se podría concluir que el valor óptimo de z para el PE ≥ 37. Por lo tanto, el valor de z para la solución probable es un **acotamiento inferior** (*lower bound, LB*) sobre el valor óptimo de z para el PE original. Se observa lo anterior al colocar la notación LB = 37 en el cuadro correspondiente al *siguiente* subproblema resuelto (véase figura 19).

Los únicos subproblemas que han quedado sin resolver son el 6 y el 3. Si se sigue la regla LIFO, el siguiente problema por resolver es el 6. En la figura 16 se encuentra que la so-

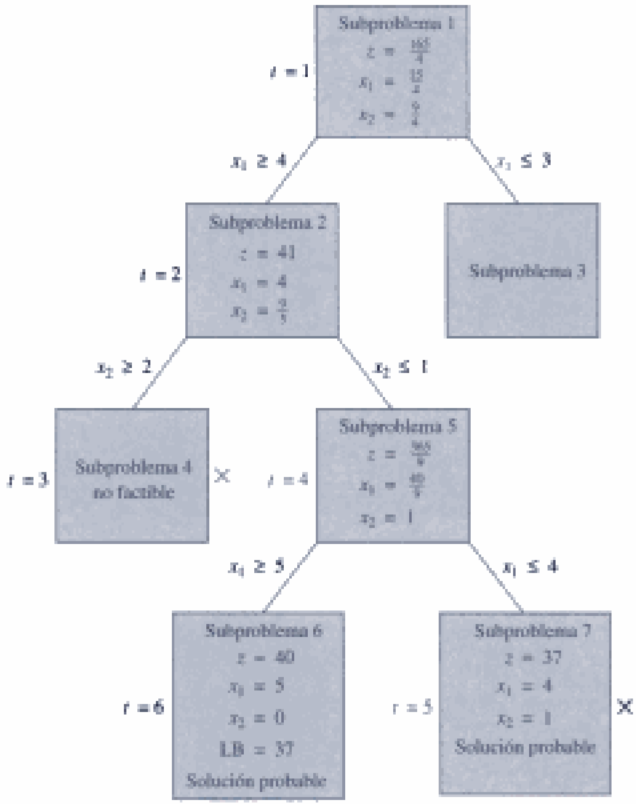


FIGURA 19
Árbol de ramificación y acotamiento después de que se han resuelto seis subproblemas

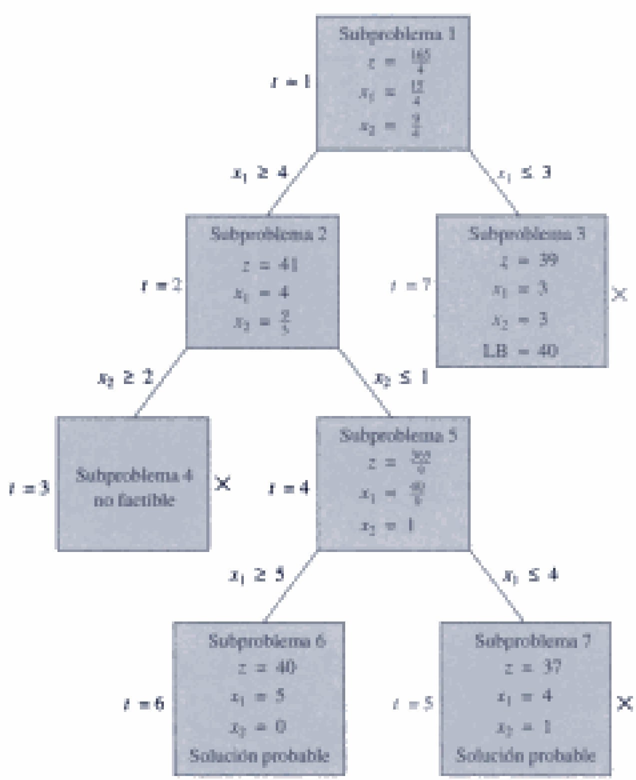


FIGURA 20
Árbol final de ramificación y acotamiento para el problema de Telfa

lución óptima para el subproblema 6 es el punto A: $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$. Todas las variables de decisión tienen valores enteros, de modo que ésta es una solución probable. Su valor de $z = 40$ es mayor que el valor de z de la mejor candidata anterior (solución probable 7 con $z = 37$). Por lo tanto, el subproblema 7 no puede dar la solución óptima del PE (este hecho se denota mediante la colocación de un $\times$ a un lado del subproblema 7). Asimismo, el LB se actualiza a 40. Los avances hasta este momento se resumen en la figura 20.

El subproblema 3 es el único que queda sin resolver. En la figura 12 se observa que la solución óptima para el subproblema es el punto F: $z = 39$, $x_1 = x_2 = 3$. El subproblema 3 no puede generar un valor de z que exceda el acotamiento inferior actual de 40, por eso no puede generar la solución óptima para el PE original. Por lo tanto, se coloca un $\times$ junto a él en la figura 20. En esta misma figura, se observa que no quedan subproblemas sin resolver, y que sólo el subproblema 6 puede generar la solución óptima para el PE. Por lo tanto, la solución óptima del PE es, por lo que toca a Telfa, manufacturar 5 mesas y 0 sillas. Esta solución contribuye con 40 dólares a las utilidades.

Al usar el método de ramificación y acotamiento para resolver el problema de Telfa, se han enumerado implícitamente todos los puntos que se encuentran en la región factible del PE. A la larga, todos estos puntos (excepto los de la solución óptima) se dejan de considerar, y se termina el procedimiento de ramificación y acotamiento. Para mostrar que el procedimiento de ramificación y acotamiento considera en realidad todos los puntos de la región factible del PE, se examinan varias soluciones posibles para el problema de Telfa y se muestra la manera en que dicho procedimiento encontró que estos puntos no eran óptimos. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ no es óptimo? Este punto está en la región factible del subproblema 3, y ya sabemos que todos los puntos en la región factible de este subproblema tienen $z \leq 39$. Por consiguiente, el análisis del subproblema 3 señala que $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ no puede tener $z = 40$ y no puede ser óptimo. Como otro ejemplo, ¿por qué no es óptimo $x_1 = 4$, $x_2 = 2$? Al seguir las ramificaciones del árbol se encuentra que $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ se relaciona con el subproblema 4. Como ningún punto asociado con el subproblema 4 es factible, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$ incumple las restricciones para el PE original y, por consiguiente, no puede ser óptimo para el problema de Telfa. De manera similar, el análisis de ramificación y acotamiento eliminó todos los puntos x_1, x_2 (excepto para la solución óptima) de las consideraciones.

Para el simple problema de Telfa, usar el método de ramificación y acotamiento podría parecer que se utiliza un cañón para matar una mosca, pero para un PE en el cual la región factible contiene un gran número de puntos enteros, el procedimiento es muy eficiente para eliminar los puntos no óptimos. Por ejemplo, suponga que se aplica el método de ramificación y acotamiento y el actual LB $= 42$. Suponga que se resuelve un subproblema que contiene 1 millón de puntos factibles para el PE. Si la solución óptima para este subproblema tiene $z < 42$, entonces, ¡se han eliminado 1 millón de puntos no óptimos al resolver un solo PL!

Los aspectos clave del método de ramificación y acotamiento para resolver PE puros (los PE mezclados se tratan en la sección siguiente) se podrían resumir como sigue:

Paso 1 Si es innecesario ramificar un subproblema, entonces ya está terminado. Las tres situaciones siguientes dan como resultado un subproblema que ya está terminado: (1) el subproblema es no factible; (2) el subproblema da una solución óptima en la cual todas las variables tienen valores enteros, y (3) el valor óptimo de z para el subproblema no excede (en un problema de maximización) el LB actual.

Paso 2 Se puede dejar de considerar un subproblema en las situaciones siguientes: (1) el subproblema es no factible (en el problema de Telfa, el subproblema 4 se eliminó por esta razón); (2) el LB (que representa el valor de z de la mejor solución probable hasta este momento) es por lo menos igual al valor de z para el subproblema (en el problema de Telfa, los subproblemas 3 y 7 se eliminaron por esta razón).

Recuerde que al resolver el problema de Telfa con el método de ramificación y acotamiento, se hicieron muchas elecciones al parecer arbitrarias. Por ejemplo, cuando x_1 y x_2 eran fraccionarias en la solución óptima para el subproblema 1, ¿cómo se determinó la variable de ramificación? O bien, ¿cómo se determinó cuál era el subproblema siguiente por resolver? La manera en la cual estas preguntas se contestan, da como resultado árboles que son muy distintos en cuanto a tamaño y al tiempo de computadora requerido para hallar la solución óptima. Con ayuda de la experiencia y el ingenio, los especialistas en el método han elaborado unos procedimientos acerca de la manera de tomar las decisiones necesarias.

Se utilizan por lo regular dos enfoques generales para determinar cuál subproblema debe ser el siguiente en ser resuelto. El más utilizado es la regla LIFO, la cual escoge al subproblema más recientemente creado para que sea resuelto.[†] LIFO nos guía hacia abajo por un lado del árbol de ramificación y acotamiento (como en el problema de Telfa), y con rapidez determina una solución probable (candidata). Luego regresamos por el camino hasta la parte superior del otro lado del árbol. Por esta razón, el enfoque LIFO recibe con frecuencia el nombre de **aplique el retroceso.**

El segundo método es el **avance a saltos.** Cuando se ramifica en un nodo, este método resuelve todos los problemas que origina la ramificación. Luego vuelve a ramificar sobre el nodo con el mejor valor de z. Con este método se salta a menudo desde un lado del árbol al otro. Por lo regular crea más subproblemas y requiere más espacio de almacenamiento en la computadora que el repliegue o retroceso. La idea sobre la que se sustenta el avance a saltos es que si se mueve uno hacia los subproblemas con buenos valores de z, uno debe llegar más rápido hacia el mejor valor de z.

Si dos o más variables son fraccionarias en una solución óptima del subproblema, entonces, ¿sobre qué variable se debería ramificar? La mejor estrategia es, a menudo, hacer la ramificación sobre la variable de valor fraccionario que posea la mayor importancia económica. En el ejemplo de Nickles, suponga que en la solución óptima para un subproblema y_1 y x_{12} tienen valores fraccionarios. Nuestra regla diría que se ramifique sobre y_1 porque ésta representa la decisión de operar (o no operar) un sistema de percepción de pagos en la ciudad 1, y esto es supuestamente una decisión más importante que si los pagos de la región 1 deben ser enviados a la ciudad 2. Cuando más de una variable es fraccionaria en una solución de un subproblema, muchos códigos de computadora se ramificarán sobre la variable fraccionaria de número más bajo. Por lo tanto, si un código de computadora para la programación de enteros requiere que las variables sean numeradas, se deben numerar según su importancia económica (1 = más importante).

OBSERVACIONES

1 En el caso de algunos PE, la solución óptima para la relajación del PL será también la solución óptima para el PE. Suponga que las restricciones del PE se representan con $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si el determinante[‡] de todas las submatrices cuadradas de A es $+1$, -1, o 0, se dice que la matriz A es **unimodular.** Si A es unimodular y cada elemento de $\mathbf{b}$ es un entero, entonces la solución óptima para la relajación del PL asignará todos los valores enteros de las variables [véase una demostración en Shapiro (1979)] y, por lo tanto, será la solución óptima del PE. Se puede demostrar que la matriz de las restricciones de cualquier MCNFP Minimum-Cost Network Flow Problema es unimodular. Por lo tanto, como se estudió en el capítulo 8, cualquier MCNFP ver pág. 450, sec. 8.5 en el cual cada flujo neto de salida del nodo y cada capacidad de arco son enteros tendrá una solución de valores enteros.

2 Como una regla general, a medida que un PE luce más como un MCNFP, es más fácil de resolver el problema mediante el método de ramificación y acotamiento. Por lo tanto, al formular un PE, es bueno elegir un planteamiento en el cual tantas variables como sea posible tengan coeficientes de $+1$, -1, o 0. Para ilustrar este concepto, recuerde que la formulación del problema de Nickles (sistema de percepción de pagos, sección 9.2) contiene 16 restricciones de la forma siguiente:

Formulación 1 $\quad x_{ij} \le y_j \ (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4)$ **(25)**

Como ya se trató en la sección 9.2, si las 16 restricciones en (25) se reemplazan por las cuatro restricciones siguientes, entonces resulta una formulación equivalente:

[†] Por lo que se refiere a dos subproblemas creados al mismo tiempo, existen varios métodos muy complejos para determinar cuál se debe resolver primero. Véanse detalles en Taha (1975).

[‡] El determinante de una matriz se definió en la sección 2.6.

Formulación 2

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \le 4y_1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \le 4y_2$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \le 4y_3$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \le 4y_4$$

Como la formulación 2 tiene $16 - 4 = 12$ restricciones menos que la formulación 1, uno podría pensar que la formulación 2 requeriría menos tiempo de computadora para encontrar la solución óptima. Resulta que esto no es cierto. Para entender por qué, recuerde que el método de ramificación y acotamiento empieza resolviendo la relajación del PL de PE. La región factible de la relajación del PL de la formulación 2 contiene muchos más puntos no enteros que la región factible de la formulación 1. Por ejemplo, el punto $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = \frac{1}{4}$, $x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 1$ (todas las otras $x_{ij} = 0$) está en la región factible para la relajación del PL de la formulación 2, pero no para la formulación 1. El método de ramificación y acotamiento debe eliminar todos los puntos no enteros antes de obtener la solución óptima del PE, por eso parece razonable que la formulación 2 requiera más tiempo de computadora que la formulación 1. De hecho, cuando se usó el paquete LINDO para determinar la solución óptima de la formulación 1, la relajación del PL generó la solución óptima. Pero se resolvieron 17 subproblemas antes de encontrar la solución óptima para la formulación 2. Observe que la formulación 2 contiene los términos $4y_1$, $4y_2$, $4y_3$ y $4y_4$. Estos términos "trastornan" la estructura similar a una red del problema del sistema de percepción de pagos, y ocasionan que el método de ramificación y acotamiento sea menos eficiente.

3 Cuando se resuelve un PE en el mundo real, estamos felices con una solución cercana a la óptima. Por ejemplo, suponga que está resolviendo un problema de sistemas de percepción de pagos y la relajación del PL da un costo de 200 000 dólares. Esto quiere decir que la solución óptima para el PE del sistema de percepción de pagos tendrá ciertamente un costo de por lo menos 200 000 dólares. Si encuentra una solución probable (candidata) durante el curso del procedimiento de ramificación y acotamiento que tiene un costo de, por decir algo, 205 000 dólares, ¿por qué continuar con el procedimiento? Aun cuando encontrara la solución óptima del PE, no se podrían ahorrar más de 5000 dólares en costos sobre la solución probable con $z = 205\,000$. Podría costar más de 5 000 dólares en tiempo de computadora encontrar la solución óptima del sistema de percepción de pagos. Por esta razón, el procedimiento de ramificación y acotamiento se detiene cuando se encuentra una solución probable (candidata) con un valor de z cercano al valor de z de la relajación del PL.

4 Los subproblemas de los problemas de ramificación y acotamiento se resuelven a menudo usando alguna variante del algoritmo simplex para el dual. Con el fin de ilustrar lo anterior, regresemos al ejemplo de Telfa. El tableau óptimo para la relajación del PL del problema de Telfa es

$$\begin{aligned} z \qquad + 1.25s_1 + 0.75s_2 &= 41.25 \\ x_2 + 2.25s_1 - 0.25s_2 &= 2.25 \\ x_1 \qquad - 1.25s_1 + 0.25s_2 &= 3.75 \end{aligned}$$

Después de resolver la relajación del PL, se resuelve el subproblema 2, el cual es justamente el subproblema 1 más la restricción $x_1 \ge 4$. Recuerde que el simplex dual es un método eficaz para determinar la nueva solución óptima de un PL cuando se conoce el tableau óptimo y se suma una nueva restricción al PL. Se suma la restricción $x_1 \ge 4$ (la cual se podría escribir como $x_1 - e_3 = 4$). Para utilizar el simplex dual, se tiene que eliminar la variable básica x_1 en esta restricción y usar e_3 como una variable básica para $x_1 - e_3 = 4$. Al sumar $-$(segundo renglón del tableau óptimo) a la restricción $x_1 - e_3 = 4$, se obtiene la restricción $1.25s_1 - 0.25s_2 - e_3 = 0.25$. Si se multiplica esta restricción por -1, se llega a $-1.25s_1 + 0.25s_2 + e_3 = -0.25$. Después de sumar esta restricción al tableau óptimo del subproblema 1 se obtiene el tableau de la tabla 56. El método simplex dual establece que se puede introducir una variable del renglón a la base. Como s_1 es la única variable con coeficiente negativo en el renglón 3, entrará a la base en el renglón 3. Después del pivoteo se obtiene el tableau (óptimo) de la tabla 57. Por lo tanto, la solución óptima al subproblema 2 es $z = 41$, $x_2 = 1.8$, $x_1 = 4$, $s_1 = 0.20$.

5 En el problema 8 se mostró que si se crean dos subproblemas sumando las restricciones $x_k \le i$ y $x_k \ge i + 1$, entonces la solución óptima para el primer subproblema tendrá $x_k = i$ y la solución óptima para el segundo subproblema tendrá $x_k = i + 1$. Esta observación es muy útil cuando se re-

TABLA 56

Tableau inicial para resolver el subproblema 2 mediante el simplex dual

	Variable básica
$z \qquad + 1.25s_1 + 0.75s_2 \qquad = 41.25$	$z = 41.25$
$x_2 + 2.25s_1 - 0.25s_2 \qquad = 2.25$	$x_2 = 2.25$
$x_1 \qquad - 1.25s_1 + 0.25s_2 \qquad = 3.75$	$x_1 = 3.75$
$- 1.25s_1 + 0.25s_2 + e_3 = -0.25$	$e_3 = -0.25$

TABLA 57
Tableau óptimo para resolver el subproblema 2 mediante el simplex dual

	Variable básica
$z \qquad + \quad s_2 + \quad e_3 = 41$	$z = 41$
$x_2 \quad + 0.20s_2 + \quad 1.8e_3 = 1.8$	$x_2 = 1.8$
$x_1 \qquad - \quad e_3 = 4$	$x_1 = 4$
$s_1 - 0.20s_2 - 0.80e_3 = 0.20$	$s_1 = 0.20$

suelven en forma gráfica los subproblemas. Por ejemplo, sabemos que la solución óptima para el subproblema 5 del ejemplo 9 tendrá $x_2 = 1$. Entonces es posible determinar el valor de x_1 que soluciona el subproblema 5 eligiendo a x_1 como el entero más grande que cumple con todas las restricciones cuando $x_2 = 1$.

Opción de la tolerancia del Solver al resolver PE

Al resolver problemas de programación con enteros mediante el Solver para Excel, usted puede ir a *Options* y establecer una tolerancia. Un valor de tolerancia, por ejemplo de 0.20 hace que Solver se detenga cuando se encuentra una solución factible cuyo valor de función objetivo está dentro de 20% del valor óptimo de z para la relajación del PL del problema. Como, en el ejemplo 9, el valor óptimo de z para la relajación del PL fue de 41.25. Con una tolerancia de 0.20, el Solver se detendría en el momento en que se encontrara una solución factible con enteros con un valor de z que excediera $(1 - 0.2)(41.25) = 33$. Por lo tanto, si resolviéramos el ejemplo 9 mediante el Solver para Excel y encontráramos una solución factible con enteros que tiene $z = 35$, entonces el Solver se detendría porque esta solución estaria dentro del 20% del límite o acotamiento de relajación del PL.

¿Por qué establecer una tolerancia no cero? Por lo que se refiere a muchos problemas muy grandes de PE, se requeriría mucho tiempo (¡semanas o meses!) para encontrar una solución óptima. Tomaría mucho menos tiempo encontrar una solución cercana a la óptima (por decir algo, dentro del 5% de la relajación óptima del PL). En este caso, estaríamos en mejores condiciones con una solución cercana a la óptima, y usar la opción de la tolerancia sería lo apropiado.

PROBLEMAS

Grupo A

Utilice la ramificación y el acotamiento para resolver los PE siguientes:

1
$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\le 12 \\ x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 &\text{ enteros} \end{aligned}$$

2 El ejemplo de Dorian Auto de la sección 3.2

3
$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 25 \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 &\text{ enteros} \end{aligned}$$

4
$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad 4x_1 + 9x_2 &\le 26 \\ 8x_1 + 5x_2 &\le 17 \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 &\text{ enteros} \end{aligned}$$

5
$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 4x_2 &\ge 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 &\text{ enteros} \end{aligned}$$

6
$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1 + 4x_2 &\le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 &\le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 &\text{ enteros} \end{aligned}$$

7 Aplique el método de ramificación y acotamiento para encontrar la solución óptima del PE siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 &\le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 &\text{ enteros} \end{aligned}$$

Grupo B

8 Suponga que se ha efectuado una ramificación sobre un subproblema (llámesele subproblema 0, con solución óptima SOL 0) y que se han originado los dos subproblemas siguientes:

Subproblema 1 Subproblema 0 + restricción $x_1 \le i$.
Subproblema 2 Subproblema 0 + restricción $x_1 \ge i + 1$ (i es un entero).

Demuestre que habrá por lo menos una solución óptima para el subproblema 1 que tiene $x_1 = i$ y por lo menos una solución óptima para el subproblema 2 que tiene $x_1 = i + 1$. [*Sugerencia*: suponga que una solución óptima para el subproblema 1 (llámela SOL1) tiene $x_1 = \bar{x}_1$, donde $\bar{x}_1 < i$. Para cierto número c ($0 < c < 1$), c(SOL0) + $(1 - c)$SOL1 tendrá las tres propiedades siguientes:

a El valor de x_1 en c(SOL0) + $(1 - c)$SOL1 será igual a i.

b c(SOL0) + $(1 - c)$SOL1 será factible en el subproblema 1.

c El valor z de c(SOL0) + $(1 - c)$SOL1 será por lo menos tan aceptable como el valor de z para SOL1.

Explique la manera en que este resultado ayuda cuando se resuelven en forma gráfica problemas de ramificación y acotamiento.]

9 Durante los cinco periodos siguientes, la demanda de la tabla 58 se tiene que cumplir justo a tiempo. Al principio del periodo 1, el nivel de inventario es 0. Cada periodo en el que hay producción se incurre en un costo de preparación de 250 dólares y en un costo de producción por unidad de 2 dólares. Al final de cada periodo se incurre en un costo de 1 dólar por unidad por almacenamiento.

a Encuentre el plan de fabricación cuyos costos sean mínimos usando las variables de decisión siguientes: x_t = unidades producidas durante el mes t y y_t = 1 si se fabrica cualquier cantidad de unidades durante el periodo t, y_t = 0 si no sucede así.

b Determine el plan de fabricación cuyos costos sean mínimos usando las variables siguientes: y_t definida en el inciso (a) y x_{it} = número de unidades fabricadas durante el periodo i para satisfacer la demanda del periodo t.

c ¿Qué formulación es la que requiere menos tiempo para ser resuelta con LINDO o LINGO?

d Proporcione una explicación intuitiva de por qué la formulación del inciso (b) se resuelve con mayor rapidez que la del inciso (a).

TABLA 58

	Periodo				
	1	2	3	4	5
Demanda	220	280	360	140	270

9.4 Método de ramificación y acotamiento para resolver problemas de programación mezclados con enteros (Programación mixta)

Recuerde que, en un PE mezclado, se requiere que algunas variables sean enteros y se permite que otras sean enteros o no enteros. Para poder resolver un PE mezclado con ayuda del método de ramificación y acotamiento, se modifica el método descrito en la sección 9.3 para ramificar sólo sobre variables que deban asumir necesariamente valores enteros. Asimismo, para resolver un subproblema que sea una solución probable (candidata), se requiere sólo asignar valores enteros a aquellas variables que necesiten ser enteros. Para ilustrar lo anterior, resolvamos el PE mezclado siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad 5x_1 + 2x_2 &\le 8 \\
x_1 + x_2 &\le 3 \\
x_1, x_2 \ge 0&;\ x_1 \text{ enteros}
\end{aligned}
$$

Como antes, se empieza por resolver la relajación del PL del PE. La solución óptima de la relajación del PL es $z = \frac{11}{3}$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{7}{3}$. Como se permite que x_2 sea fraccionaria, no se hace ramificación alguna sobre x_2; si se hiciera, se estarían excluyendo puntos que tienen valores de x_2 entre 2 y 3, y no se quiere hacer eso. Por lo tanto, se tiene que ramificar sobre x_1. Así se originan los subproblemas 2 y 3 de la figura 21.

Enseguida se elige resolver el subproblema 2. La solución óptima para el subproblema 2 es la solución probable $z = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Entonces se resuelve el subproblema 3 y se obtiene la solución probable $z = \frac{7}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$. El valor de z de la solución probable del subproblema 3 excede el valor de z para la solución probable del subproblema 2, por eso el subproblema 2 se puede dejar de considerar, y la solución probable del subproblema 3 ($z = \frac{7}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$) es la solución óptima para el PE mezclado.

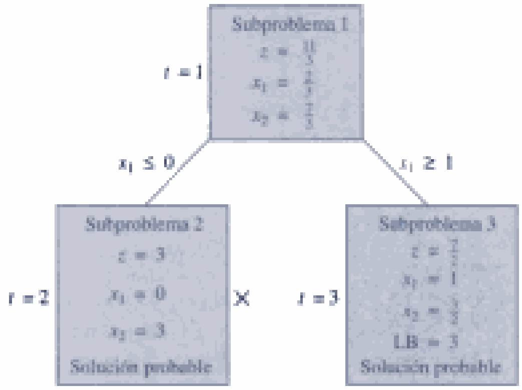


FIGURA 21
Árbol de ramificación y acotamiento para el PE mezclado

PROBLEMAS

Grupo A

Resuelva los PE siguientes mediante el método de ramificación y acotamiento:

1
$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 5x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0&;\ x_2 \text{ entero} \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 5x_2 &\geq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0&;\ x_1 \text{ entero} \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ x_2, x_3 \text{ entero},\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

9.5 Resolución de problemas de la mochila por el método de ramificación y acotamiento

De acuerdo con la sección 9.2, los problemas de la mochila es un PE con un sola restricción. En esta sección se estudian los problemas de la mochila en los cuales cada variable tiene que ser igual a 0 o a 1 (véase problema 1 al final de esta sección, en donde se encuentra una explicación de cómo el problema de la mochila se puede replantear de modo que cada variable debe ser igual a 0 o a 1). Un problema de mochila en el cual cada variable debe ser igual a 0 o a 1 se podría expresar como

$$\begin{aligned} \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.a} \quad a_1x_1 + a_2x_2 &+ \cdots + a_nx_n \leq b \\ x_i = 0 \text{ o } 1 &\quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{38}$$

Recuerde que c_i es el beneficio obtenido si se elige el objeto i, b es la cantidad disponible de un recurso y a_i es la cantidad del recurso disponible que usa el objeto i.

Cuando los problemas de la mochila se resuelven con el método de ramificación y acotamiento, se simplifican de manera importante dos aspectos del método. Puesto que cada variable debe ser igual a 0 o a 1, la ramificación sobre x_i dará una ramificación $x_i = 0$ y una $x_i = 1$. Además, la relajación del PL (y otros subproblemas) se podrían resolver por inspección. Para comprenderlo mejor, observe que $\frac{c_i}{a_i}$ se podría interpretar como el beneficio que el objeto i gana por cada unidad del recurso que utiliza el objeto i. Por lo tanto, los mejores objetos tienen los valores más grandes de $\frac{c_i}{a_i}$, y los peores tienen los valores más pequeños de $\frac{c_i}{a_i}$. Para resolver cualquier subproblema que resulte de un problema de la mochila, calcule todos los cocientes $\frac{c_i}{a_i}$. Luego ponga el mejor objeto en la mochila. Después coloque el siguiente mejor objeto en la mochila. Continúe en este tenor hasta que el mejor objeto restante exceda el cupo de la mochila. Luego llene la mochila con lo más de este objeto como sea posible.

Para ilustrar lo anterior, resolvamos la relajación del PL de

$$\begin{aligned} \max z &= 40x_1 + 80x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 20x_6 + 60x_7 \\ \text{s.a} \quad & 40x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 40x_6 + 30x_7 \leq 100 \\ & x_i = 0 \text{ o } 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, 7) \end{aligned} \tag{39}$$

Se empieza por calcular los cocientes $\frac{c_i}{a_i}$ y ordenar las variables desde la mejor hasta la peor (véase tabla 59). Para resolver la relajación del PL de (39) primero se escoge el objeto 7 ($x_7 = 1$). Entonces quedan $100 - 30 = 70$ unidades del recurso. Enseguida se incluye el siguiente mejor objeto (objeto 2) en la mochila, haciendo $x_2 = 1$. Ahora quedan $70 - 50 = 20$ unidades del recurso. El objeto 4 y el 1 tienen el mismo cociente $\frac{c_i}{a_i}$, de modo que se puede elegir luego alguno de estos objetos. Se escoge de manera arbitraria hacer $x_4 = 1$. Quedan entonces $20 - 10 = 10$ unidades del recurso. El mejor objeto restante es el objeto 1. Ahora se llena la mochila con tanto del objeto 1 como se pueda. Como sólo quedan 10 unidades del recurso, se hace $x_1 = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, una solución óptima para la relajación del PL de (39) es $z = 80 + 60 + 10 + (\frac{1}{4})(40) = 160$, $x_2 = x_7 = x_4 = 1$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_3 = x_5 = x_6 = 0$.

Para mostrar cómo se puede usar el método de ramificación y acotamiento para resolver un problema de la mochila determinemos la solución óptima para el problema de presupuesto de capital de Stockco (ejemplo 1). Recuerde que el problema era

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ & x_j = 0 \text{ o } 1 \end{aligned}$$

El árbol de ramificación y acotamiento se ilustra en la figura 22. En el árbol se observa que la solución óptima para el ejemplo 1 es $z = 42$, $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Por lo tanto, se debe invertir en 2, 3 y 4 y ganar un VNA de 42 000 dólares. Como se estableció en la sección 9.2, la "mejor" inversión no se usa.

OBSERVACIONES El método que se usó para trazar el árbol de la figura 22 es como se indica enseguida:

1 Se usó el enfoque de LIFO para determinar qué subproblema se debería resolver.

2 Se eligió de modo arbitrario el subproblema 3 para resolverlo antes que el subproblema 2. Para resolver el subproblema 3 primero se hace $x_3 = 1$ y luego se resuelve el problema de mochila resultante. Después de establecer $x_3 = 1$, $14 - 4 = 10$ millones de dólares todavía están disponibles para invertir. Al aplicar la técnica utilizada para resolver la relajación del PL de un problema de mochila se obtuvo la solución óptima siguiente para el subproblema 3: $x_3 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_4 = 0$, $z = 16 + (\frac{5}{7})(22) + 12 = \frac{306}{7}$. Otros subproblemas fueron resueltos de manera similar; naturalmente, si un subproblema especificó $x_i = 0$, la solución óptima a ese subproblema puede no usar la inversión i.

TABLA 59
Objetos ordenados desde el mejor hasta el peor en un problema de mochila

Objeto	$\frac{c_i}{a_i}$	Clasificación (1 = el mejor, 7 = el peor)
1	1	3.5 (empate por el tercero o cuarto)
2	$\frac{8}{5}$	2
3	$\frac{1}{3}$	7
4	1	3.5
5	$\frac{4}{10}$	6
6	$\frac{1}{2}$	5
7	2	1

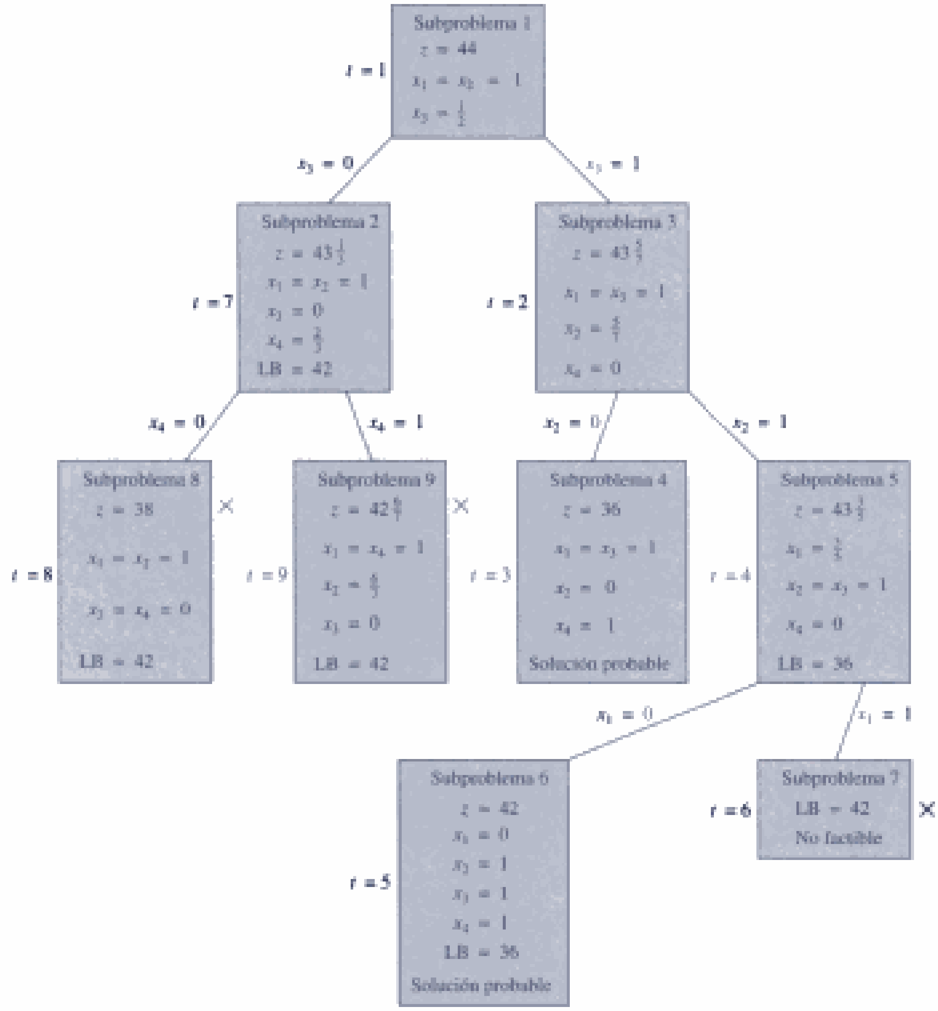


FIGURA 22
Árbol de ramificación y acotamiento para el problema de mochila de Stockco

3 El subproblema 4 genera la solución probable (candidata) $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $z = 36$. Luego se fija LB = 36.
4 El subproblema 6 proporciona una solución probable con $z = 42$. Por lo tanto, el subproblema 4 se dejó de considerar, y el LB se actualizó a 42.
5 El subproblema 7 fue no factible, porque requirió $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, y tal solución necesita por lo menos 16 millones de dólares.
6 El subproblema 8 se eliminó porque su valor de z ($z = 38$) no excedió el LB actual de 42.
7 El subproblema 9 tenía un valor de z de $42\frac{6}{7}$. Puesto que el valor de z para cualquier solución de puros enteros tiene que ser también un entero, esto significaba que la ramificación sobre el subproblema 9 nunca podría dar un valor de z mayor que 42. Por lo tanto, la ramificación posterior sobre el subproblema 9 no podría sobrepasar el LB actual de 42, por lo que se eliminó este subproblema.

En el capítulo 13 se muestra cómo la programación dinámica se usa para resolver problemas de la mochila.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Muestre cómo el problema siguiente se puede expresar como un problema de la mochila en el cual todas las variables deben ser iguales a 0 o a 1. La NASA quiere saber cuántos de los tres tipos de objetos deben ser traídos a bordo del trasbordador espacial. El peso y beneficio de cada uno de los objetos se proporciona en la tabla 60. Si el trasbordador espacial puede llevar un máximo de 26 libras de objetos 1 a 3, ¿qué objetos deben ser transportados por el vehículo?

TABLA 60

Objeto	Beneficio	Peso (libras)
1	10	3
2	15	4
3	17	5

2 Me voy a cambiar de casa desde Nueva Jersey hasta Indiana, y he rentado un camión que puede cargar hasta 1100 pies cúbicos de muebles. El volumen y el valor de cada objeto que estoy pensando en transportar en el camión se proporcionan en la tabla 61. ¿Qué objetos debería llevar a Indiana? Para resolver este problema como un problema de la mochila, ¿qué suposiciones irreales tendría que plantear?

3 Hay cuatro proyectos disponibles para invertir. Los proyectos requieren los flujos de efectivo y producen el valor neto actual (VNA) (en millones) que se proporcionan en la tabla 62. Si están a la disposición 6 millones de dólares para ser invertidos en el tiempo 0, encuentre el plan de inversión que maximiza el VNA.

TABLA 61

Objeto	Valor (dólares)	Volumen (pies cúbicos)
Juego de recámara	60	800
Juego de comedor	48	600
Aparato estereofónico	14	300
Sofá	31	400
Televisor	10	200

TABLA 62

Proyecto	Flujo de efectivo en el tiempo 0 (dólares)	VNA (dólares)
1	3	5
2	5	8
3	2	3
4	4	7

9.6 Solución de problemas de optimización combinatoria mediante el método de ramificación y acotamiento

Sin mucho rigor, un **problema de optimización combinatoria** es cualquier problema de optimización que tiene un número finito de soluciones factibles. Un enfoque de ramificación y acotamiento es, a menudo, el más eficaz para resolverlo. A continuación se presentan tres ejemplos de problemas de optimización combinatoria:

1 Se tienen que procesar diez trabajos en una sola máquina. Usted ya conoce cuál es el tiempo que se requiere para terminar cada trabajo y el tiempo en el cual el trabajo debe ser completado (el plazo del trabajo). ¿Qué orden en los trabajos minimiza el retraso total de los diez trabajos?

2 Un vendedor debe visitar 10 ciudades una vez antes de regresar a su hogar. ¿Qué orden de las ciudades minimiza la distancia total que el vendedor debe recorrer antes de regresar a casa? No es de sorprender que este problema se llame *problema del agente viajero*, PAV (*traveling salesperson problem*, TSP).

3 Determine cómo colocar ocho reinas en un tablero de ajedrez de tal manera que ninguna reina pueda capturar a otra (véase problema 7 al final de esta sección).

En cada uno de estos problemas se tienen que considerar muchas soluciones posibles. Por ejemplo, en el problema 1, el primer trabajo en ser procesado puede ser uno de 10 trabajos, el siguiente trabajo puede ser uno de 9 trabajos, y así sucesivamente. Por consiguiente, hasta este pequeño problema hay $10(9)(8) \cdots (1) = 10! = 3\,628\,000$ maneras posibles de programar los trabajos. Como un problema de optimización combinatoria podría tener muchas soluciones factibles, se requiere una gran cantidad de tiempo de computadora para enumerar en forma explícita todas las soluciones posibles. Por esta razón, los métodos de ramificación y acotamiento se aplican a menudo para la enumeración *implícita* de todas las soluciones posibles en un problema de optimización combinatoria. Como se verá, el método de ramificación y de acotamiento debe aprovechar las ventajas de la estructura del problema particular que se está resolviendo.

Con el objeto de ilustrar cómo los métodos de ramificación y acotamiento se aplican en la resolución de problemas de optimización combinatoria, se muestra cómo se usan en la resolución de los problemas 1 y 2 de la lista anterior.

Enfoque de ramificación y acotamiento para el problema de programar el uso de una máquina

En el ejemplo 10 se ilustra la manera en que un enfoque de ramificación y acotamiento se podría utilizar para programar trabajos en una sola máquina. Véase en Baker (1974) y Hax y Candea (1984) un análisis de otros métodos de ramificación y acotamiento para los problemas de programación del uso de una máquina.

EJEMPLO 10 Programación de una máquina con ramificación y acotamiento

Se tienen que procesar cuatro trabajos en una sola máquina. El tiempo requerido para procesar cada tarea y el plazo para entregarla, se indica en la tabla 63. El retraso de un trabajo es el número de días después del plazo en que un trabajo se termina (si un trabajo se termina a tiempo o antes, el retraso del trabajo es cero). ¿En qué orden se deberían procesar los trabajos para minimizar el retraso total de los cuatro?

Solución Suponga que los trabajos se procesan en el siguiente orden: trabajo 1, trabajo 2, trabajo 3 y trabajo 4. Ocurrirían entonces los retrasos mostrados en la tabla 64. Para esta sucesión, el retraso total $= 0 + 6 + 3 + 7 = 16$ días. Enseguida se explica un método de ramificación y acotamiento para resolver este tipo de problemas para programar el uso de una máquina.

Como una solución posible para el problema, debe especificar el orden en el cual los trabajos se ejecutan, definimos

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo } i \text{ es el } j\text{-ésimo trabajo en ser procesado} \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

El procedimiento de ramificación y acotamiento empieza con la división de todas las soluciones según la tarea que es procesada al *último*. Alguna sucesión de trabajos debe ejecutar un trabajo al último, de modo que cada sucesión de trabajos debe tener $x_{14} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{34} = 1$, o $x_{44} = 1$. Esto genera cuatro ramas con nodos 1 a 4 en la figura 23. Después se crea un nodo por ramificación, se obtiene un acotamiento inferior (*lower bound*, LB) sobre el retraso total (D) asociado con el nodo. Por ejemplo, si $x_{44} = 1$, se sabe que el trabajo 4 es el último en ser procesado. En este caso, el trabajo 4 se completará al final del día $6 + 4 + 5 + 8 = 23$ y estará $23 - 16 = 7$ días retrasado. Por lo tanto, cualquier programa que tenga $x_{44} = 1$ debe tener $D \geq 7$. Por lo tanto, se escribe $D \geq 7$ dentro del nodo 4 de la figura 23.

TABLA 63
Duraciones y plazo de trabajos

Trabajo	Días necesarios para completar el trabajo	Plazo
1	6	Final del día 8
2	4	Final del día 4
3	5	Final del día 12
4	8	Final del día 16

TABLA 64
Retraso si los trabajos se procesan en el orden 1-2-3-4

Trabajo	Tiempo de terminación del trabajo	Retraso del trabajo
1	6	0
2	$6 + 4 = 10$	$10 - 4 = 6$
3	$6 + 4 + 5 = 15$	$15 - 12 = 3$
4	$6 + 4 + 5 + 8 = 23$	$23 - 16 = 7$

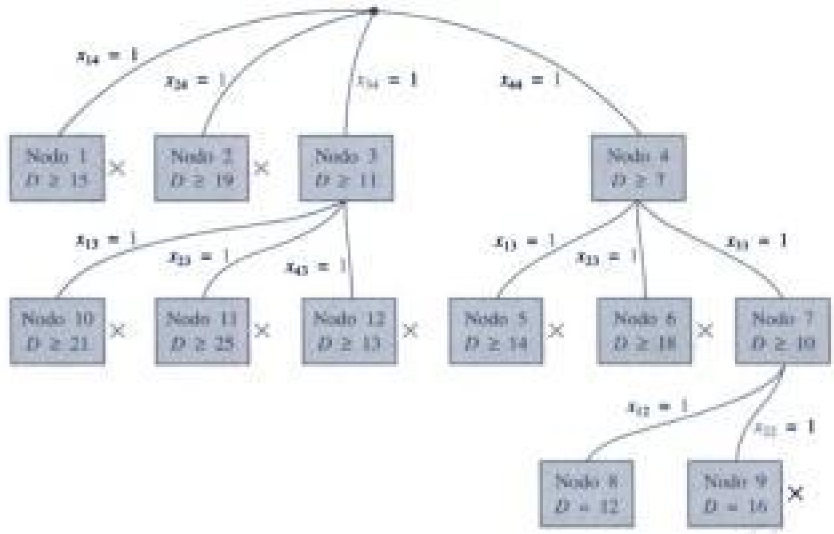


FIGURA 23
Árbol de ramificación y acotamiento para el problema de programar una máquina

Un razonamiento similar muestra que cualquier secuencia de trabajos que tenga $x_{34} = 1$ tendrá $D \geq 11$, $x_{24} = 1$, $D \geq 19$, y $x_{14} = 1$ tendrá $D \geq 15$. No hay razón para eliminar a alguno de los nodos 1 a 4 como parte de la sucesión óptima de trabajo, por eso se elige ramificar sobre un nodo. Se aplica el enfoque del avance a saltos y se ramifica sobre el nodo que tiene el acotamiento más pequeño en D: nodo 4. Cualquier sucesión de trabajos asociada con el nodo 4 debe tener $x_{13} = 1$, $x_{23} = 1$, o $x_{33} = 1$. Al ramificar sobre el nodo 4 se originan los nodos 5 a 7 de la figura 23. Por cada nodo nuevo se necesita un acotamiento inferior para el retraso total. Por ejemplo, en el nodo 7, ya se sabe por el análisis del nodo 1 que el trabajo 4 se procesa al final y que se retrasa 7 días. Por lo que toca al nodo 7, se sabe que el trabajo 3 será el tercer trabajo efectuado. Por lo tanto, el trabajo 3 se completa después de $6 + 4 + 5 = 15$ días y tendrá $15 - 12 = 3$ días de retraso. Cualquier sucesión asociada con el nodo 7 debe tener $D \geq 7 + 3 = 10$ días. Un razonamiento similar muestra que el nodo 5 debe tener $D \geq 14$ y el nodo 6, $D \geq 18$. Todavía no hay razón alguna para eliminar alguno de los nodos 1 a 7, por eso se vuelve a ramificar sobre un nodo. El procedimiento del avance a saltos guía hacia la ramificación sobre el nodo 7. Cualquier secuencia de trabajo asociada con el nodo 7 debe tener el trabajo 1 o el trabajo 2 como el segundo trabajo procesado. Por lo tanto, cualquier sucesión de trabajo relacionada con el nodo 7 debe tener $x_{12} = 1$ o $x_{22} = 1$. La ramificación en el nodo 7 origina los nodos 8 y 9 de la figura 23.

El nodo 9 corresponde al proceso de los trabajos en el orden 1–2–3–4. Esta sucesión origina un retraso total de 7 (para el trabajo 4) + 3 (para el trabajo 3) + (6 + 4 − 4) (para el trabajo 2) + 0 (para el trabajo 1) = 16 días. El nodo 9 es una secuencia factible y se podría considerar una solución probable con $D = 16$. Ahora ya se sabe que puede ser eliminado cualquier nodo que no puede tener un retraso total menor a 16 días.

El nodo 8 corresponde a la sucesión 2–1–3–4. Esta secuencia tiene un retraso total de 7 (para el trabajo 4) + 3 (para el trabajo 3) + (4 + 6 − 8)(para el trabajo 1) + 0 (para el trabajo 2) = 12 días. El nodo 8 es una sucesión factible y se podría considerar como una solución probable con $D = 12$. Como el nodo 8 es mejor que el nodo 9, el nodo 9 se podría eliminar.

Se pueden eliminar, de igual manera, el nodo 5 ($D \geq 14$), nodo 6 ($D \geq 18$), nodo 1 ($D \geq 15$) y el nodo 2 ($D \geq 19$). No se puede eliminar el nodo 3 porque todavía es posible que este nodo genere una secuencia que tenga $D = 11$. Por lo tanto, ahora se ramifica sobre el nodo 3. Cualquier sucesión de trabajos asociada con el nodo 3 debe tener $x_{13} = 1$, $x_{23} = 1$ o $x_{43} = 1$, por eso se obtienen los nodos 10 a 12.

Por lo que se refiere al nodo 10, $D \geq$ (retraso por procesar el trabajo 3 al último) + (retraso por procesar el trabajo 1 en tercer lugar) = 11 + (6 + 4 + 8 − 8) = 21. Como cualquier secuencia asociada con el nodo 10 debe tener $D \geq 21$ y hay una solución probable con $D = 12$, se podría eliminar el nodo 10.

En cuanto al nodo 11, $D \geq$ (retraso por procesar el trabajo 3 al último) + (retraso por procesar el trabajo 2 en tercer lugar) = 11 + (6 + 4 + 8 − 4) = 25. Cualquier secuencia relacionada con el nodo 11 tiene $D \geq 25$, por lo que se podría eliminar este nodo.

Por último, en cuanto al nodo 12, $D \geq$ (retraso por procesar el trabajo 3 al último) + (retraso por procesar el trabajo 4 en tercer lugar) = 11 + (6 + 4 + 8 − 16) = 13. Cualquier secuencia relacionada con el nodo 12 tiene $D \geq 13$, por lo que se podría eliminar este nodo.

Con la excepción del nodo 8, todos los otros nodos de la figura 23 fueron eliminados. El nodo 8 genera la secuencia que minimiza el retraso $x_{44} = x_{33} = x_{12} = x_{21} = 1$. Por lo tanto, los trabajos se deben procesar en el orden 2–1–3–4, con un retraso total de 12 días.

Método de ramificación y acotamiento para el problema del agente viajero

EJEMPLO 11 Problema del agente viajero

Joe State vive en Gary, Indiana. Es dueño de agencias de seguros en Gary, Fort Wayne, Evansville, Terre Haute y South Bend. Todos los meses de diciembre visita cada una de sus agencias. La distancia entre cada agencia (en millas) se indica en la tabla 65. ¿Qué orden debe seguir al visitar sus agencias que minimice la distancia total recorrida?

Solución Joe debe determinar el orden de visitar las cinco ciudades con el cual sea mínima la distancia total recorrida. Por ejemplo, Joe podría escoger visitar las ciudades en el orden 1–3–4–5–2–1. Entonces viajaría un total de 217 + 113 + 196 + 79 + 132 = 737 millas.

Para abordar el problema del agente viajero, definamos

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si Joe sale de la ciudad } i \text{ y viaja luego a la ciudad } j \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

Asimismo, para $i \neq j$,

$$c_{ij} = \text{distancia entre las ciudades } i \text{ y } j$$
$$c_{ii} = M, \text{ donde } M \text{ es un número positivo muy grande}$$

Parece razonable que la respuesta al problema de Joe se pudiera hallar resolviendo un problema de asignación que tiene una matriz de costos cuyo ij-ésimo elemento es c_{ij}. Por ejemplo, suponga que se resuelve este problema de asignación y se llega a la solución $x_{12} = x_{24} = x_{45} = x_{53} = x_{31} = 1$. Entonces, Joe debería ir desde Gary hasta Fort Wayne, de Fort Wayne hasta Terre Haute, desde Terre Haute hasta South Bend, desde South Bend hasta Evansville y desde Evansville hasta Gary. Esta solución se puede escribir como 1–2–4–5–3–1. Un itinerario que empieza y termina en la misma ciudad y pasa una vez por cada ciudad, se llama **tour.**

Si la solución del problema de asignación anterior genera un tour, entonces es la solución óptima para el problema del agente viajero. (¿Por qué?) Infortunadamente, la solución

TABLA 65
Distancia entre ciudades en el problema del agente viajero

Día	Gary	Fort Wayne	Evansville	Terre Haute	South Bend
Ciudad 1 Gary	0	132	217	164	58
Ciudad 2 Fort Wayne	132	0	290	201	79
Ciudad 3 Evansville	217	290	0	113	303
Ciudad 4 Terre Haute	164	201	113	0	196
Ciudad 5 South Bend	58	79	303	196	0

óptima para el problema de asignación no necesita ser un tour. Por ejemplo, la solución óptima para el problema de asignación podría ser $x_{15} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = x_{52} = 1$. Esta solución recomienda ir desde Gary hasta South Bend, luego a Fort Wayne y luego regresar a Gary. Esta solución también recomienda que si Joe está en Evansville debería ir a Terre Haute y luego a Evansville (véase figura 24). Naturalmente, si Joe empieza en Gary, esta solución nunca lo llevará hasta Evansville o Terre Haute. Esto se debe a que la solución óptima para el problema de asignación contiene dos **subtours.** Un subtour es un viaje redondo que no pasa por todas las ciudades. La asignación actual contiene dos subtours: 1–5–2–1 y 3–4–3. Si se pudieran excluir todas las soluciones factibles que contienen subtours y luego resolver el problema de asignación, se podría llegar a la solución óptima del problema del agente viajero. No es fácil de hacer lo anterior. En muchos casos, un método de ramificación y acotamiento es lo más eficaz para resolver el problema del agente viajero.

Varios procedimientos de ramificación y acotamiento se han perfeccionado para resolver problemas de agentes viajeros [véase Wagner (1975)]. Aquí se explica un procedimiento en el cual los subproblemas se reducen a problemas de asignación. Para empezar, se resuelve el problema de asignación anterior, en el cual, para $i \neq j$, el costo c_{ij} es la distancia entre las ciudades i y j y $c_{ii} = M$ (esto evita que una persona que se encuentra en una ciudad sea asignada a visitar esa misma ciudad). Como este problema de asignación no contiene medidas precautorias para evitar subtours, es una relajación (o un problema menos limitado) del problema original del agente viajero. Por lo tanto, si la solución óptima para el problema de asignación es factible por lo que se refiere al problema del agente viajero (es decir, si la solución de la asignación no contiene subtours), entonces también es óptima para el problema del agente viajero. Los resultados del procedimiento de ramificación y acotamiento se proporcionan en la figura 25.

Primero se resuelve el problema de asignación de la tabla 66 (denominado subproblema 1). La solución óptima es $x_{15} = x_{21} = x_{34} = x_{43} = x_{52} = 1$, $z = 495$. Esta solución contiene dos subtours (1–5–2–1 y 3–4–3) y no puede ser la solución óptima para el problema de Joe.

Enseguida se ramifica sobre el subproblema 1 en una manera que evitará que uno de los subtours del subproblema 1 recurra o se repita en las soluciones para los subproblemas posteriores. Se escoge el subtour 3–4–3. para excluirlo. Tome nota de que la solución óptima para el problema de Joe debe tener $x_{34} = 0$ o $x_{43} = 0$ (si $x_{34} = x_{43} = 1$, la solución óptima tendría el subtour 3–4–3). Por lo tanto, es posible ramificar sobre el subproblema 1 al sumar los dos subproblemas siguientes:

Subproblema 2 Subproblema 1 + ($x_{34} = 0$, o $c_{34} = M$).

Subproblema 3 Subproblema 1 + ($x_{43} = 0$, o $c_{43} = M$).

Se elige de modo arbitrario el subproblema 2 para resolverlo, aplicando el método húngaro a la matriz de costo, como se muestra en la tabla 67. La solución óptima para el subproblema 2 es $z = 652$, $x_{14} = x_{25} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1$. Esta solución incluye los subtours 1–4–3–1 y 2–5–2, así que no puede ser la solución óptima para el problema de Joe.

Ahora se ramifica sobre el subproblema 2 en un esfuerzo para excluir el subtour 2–5–2. Tiene que haber la seguridad de que x_{25} o x_{52} sean igual 0. Por lo tanto, se suman los dos subproblemas siguientes:

Subproblema 4 Subproblema 2 + ($x_{25} = 0$, o $c_{25} = M$).

Subproblema 5 Subproblema 2 + ($x_{52} = 0$, o $c_{52} = M$).

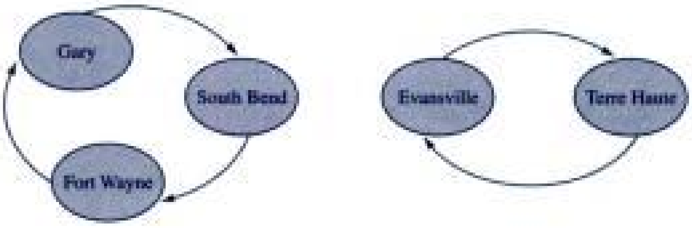


FIGURA 24
Ejemplo de subtours en el problema del agente viajero

FIGURA 25
Árbol de ramificación y acotamiento para el problema del agente viajero

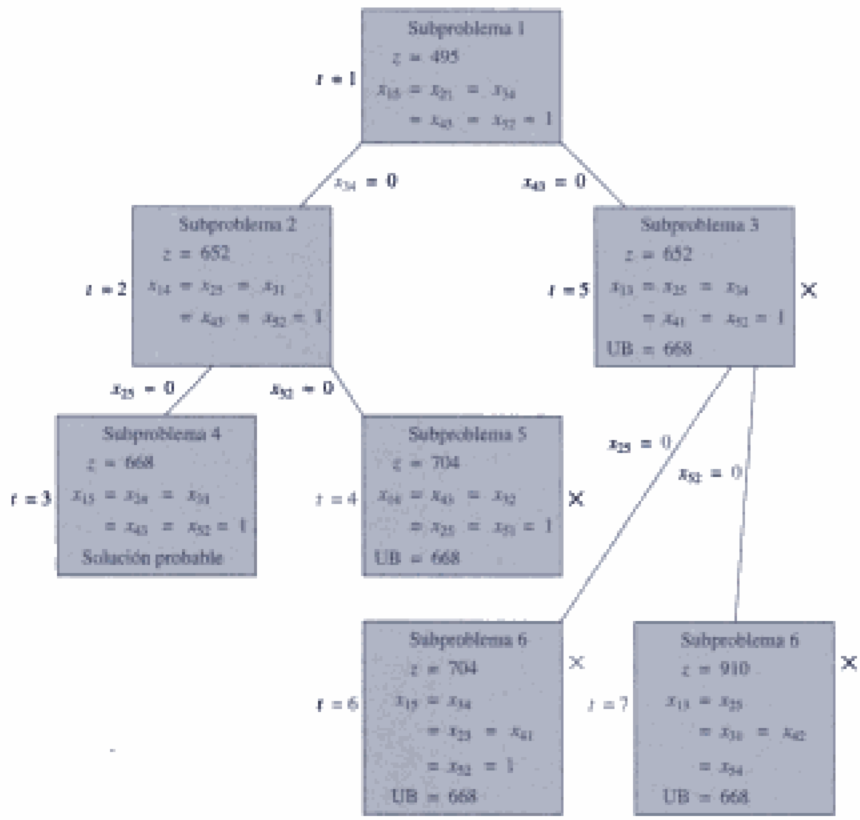


TABLA 66
Matriz de costos para el subproblema 1

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
Ciudad 1	M	132	217	164	58
Ciudad 2	132	M	290	201	79
Ciudad 3	217	290	M	113	303
Ciudad 4	164	201	113	M	196
Ciudad 5	58	79	303	196	M

TABLA 67
Matriz de costos para el subproblema 2

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
Ciudad 1	M	132	217	164	58
Ciudad 2	132	M	290	201	79
Ciudad 3	217	290	M	M	303
Ciudad 4	164	201	113	M	196
Ciudad 5	58	79	303	196	M

Para seguir con el enfoque de LIFO se debe resolver el subproblema 4 o el subproblema 5. En forma arbitraria se escoge el subproblema 4 para resolverlo. Al aplicar el método húngaro a la matriz de costos de la tabla 68, se obtiene la solución óptima $z = 668$, $x_{15} = x_{24} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1$. Esta solución no contiene subtours y da el tour 1–5–2–4–3–1.

Por lo tanto, el subproblema 4 genera una solución probable (candidata) con $z = 668$. Se podría eliminar cualquier nodo que no pueda generar un valor de $z < 668$.

Luego se resuelve el subproblema 5, siguiendo la regla LIFO, al aplicar el método húngaro a la matriz de la tabla 69. La solución óptima para el subproblema 5 es $z = 704$, $x_{14} = x_{43} = x_{32} = x_{25} = x_{51} = 1$. Esta solución es un tour, pero $z = 704$ no es tan buena como la de la solución probable del subproblema 4 de $z = 668$. Por consiguiente, se podría dejar de considerar al subproblema 5.

Sólo queda el subproblema 3. Se encuentra la solución óptima para el problema de asignación en la tabla 70, $x_{13} = x_{25} = x_{34} = x_{41} = x_{52} = 1$, $z = 652$. Esta solución contiene los subtours 1–3–4–1 y 2–5–2. Como $652 < 668$, todavía es posible que el subproblema 3 genere una solución con ningún subtour y que llegue a $z = 668$. Por lo tanto, se ramifica ahora sobre el subproblema 3 en un esfuerzo por excluir los subtours. Cualquier solución factible para el problema del agente viajero que provenga del subproblema 3 debe tener $x_{25} = 0$ o $x_{52} = 0$ (¿por qué?), así que se originan los subproblemas 6 y 7.

Subproblema 6 Subproblema 3 + ($x_{25} = 0$, o $c_{25} = M$).

Subproblema 7 Subproblema 3 + ($x_{52} = 0$, o $c_{52} = M$).

Luego se elige al subproblema 6 para resolverlo. La solución óptima para el subproblema 6 es $x_{15} = x_{34} = x_{23} = x_{41} = x_{52} = 1$, $z = 704$. Esta solución no contiene subtour alguno, pero su valor de z de 704 es mayor al de la solución probable del subproblema 4, por eso el subproblema 6 no puede generar la solución óptima para el problema.

TABLA 68
Matriz de costos para el subproblema 4

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
Ciudad 1	M	132	217	164	58
Ciudad 2	132	M	290	201	M
Ciudad 3	217	290	M	M	303
Ciudad 4	164	201	113	M	196
Ciudad 5	58	79	303	196	M

TABLA 69
Matriz de costos para el subproblema 5

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
Ciudad 1	M	132	217	164	58
Ciudad 2	132	M	290	201	79
Ciudad 3	217	290	M	M	303
Ciudad 4	164	201	113	M	196
Ciudad 5	58	M	303	196	M

TABLA 70
Matriz de costos para el subproblema 3

	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4	Ciudad 5
Ciudad 1	M	132	217	164	58
Ciudad 2	132	M	290	201	79
Ciudad 3	217	290	M	113	303
Ciudad 4	164	201	M	M	196
Ciudad 5	58	79	303	196	M

El único subproblema que queda por resolver es el 7. La solución óptima para el subproblema 7 es $x_{13} = x_{25} = x_{31} = x_{42} = x_{54} = 1$, $z = 910$. Una vez más, $z = 910$ es mayor a $z = 668$, así que el subproblema 7 no puede dar la solución óptima.

Por lo tanto, el subproblema 4 genera la solución óptima: Joe debe viajar desde Gary hasta South Bend, de South Bend a Fort Wayne, de Fort Wayne a Terre Haute, de Terre Haute a Evansville y de Evansville a Gary. Joe viajará una distancia total de 668 millas.

Heurística para los problemas del agente viajero

Se requiere mucho tiempo de computadora cuando se usan los métodos de ramificación y acotamiento para resolver problemas de agentes viajeros. Por esta razón, se usan con frecuencia los **métodos heurísticos** o **heurística,** los cuales llevan con rapidez a una buena (aunque no necesariamente óptima) solución para un problema de agente viajero. Un método heurístico es uno que se utiliza para resolver un problema por ensayo y error cuando un procedimiento algorítmico es impráctico. Dichos métodos tienen a menudo una justificación intuitiva. Se analizan a continuación dos métodos para el problema del agente viajero: el vecino más cercano y la inserción más barata.

Para aplicar el método heurístico del vecino más cercano, MHVMC (*nearest-neighbor heuristic*, NNH), uno empieza en cualquier ciudad y, luego, "visita" la ciudad más cercana. Luego uno se dirige a la ciudad más cercana a la ciudad que visitó recientemente, pero que no ha sido visitada. Continuamos así hasta que se obtiene un tour. Ahora se aplica el MHVMC al ejemplo 11. Se elige de manera arbitraria para empezar la ciudad 1. La ciudad 5 es la ciudad más cercana a la ciudad 1, de este modo se genera ahora el arco 1 − 5. De las ciudades 2, 3 y 4, la ciudad 2 es la más cercana a la ciudad 5, de modo que hemos generado los arcos 1–5–2. De las ciudades 3 y 4, la ciudad 4 es la más cercana a la 2. Entonces, ya hemos generado los arcos 1–5–2–4–3–1. En este caso, el MHVMC genera un tour óptimo. Si hubiéramos empezado en la ciudad 3, el estudiante debería comprobar que se obtendría el tour 3–4–1–5–2–3. Este tour tiene 113 + 164 + 58 + 79 + 290 = 704 millas y no es óptimo. Por lo tanto, el MHVMC no necesita generar un tour óptimo. Un método heurístico popular es aplicar el MHVMC empezando en cada ciudad y luego tomar el mejor tour logrado.

En el método heurístico de la inserción más barata, MHIMB (*cheapest-insertion heuristic*, CIH) se empieza en cualquier ciudad y se determina su vecina más cercana. Luego se forma un subtour uniendo las dos ciudades. Después se reemplaza un arco en el subtour [por ejemplo, arco (i, j)] por la combinación de dos arcos: (i, k) y (k, j), donde k no está en el subtour actual, que incrementará la distancia del subtour en la cantidad más pequeña (o la más barata). Sea c_{ij} la longitud del arco (i, j). Observe que si el arco (i, j) se reemplaza con los arcos (i, k) y (k, j), entonces se suma una distancia $c_{ik} + c_{kj} + c_{ij}$ al subtour. Continuamos con este procedimiento hasta que no se obtiene un tour. Suponga que se inicia el MHIMB en la ciudad 1. La ciudad 5 es la más cercana a la ciudad 1, de modo que se empieza (1, 5)–(5, 1). Luego se podría reemplazar (1, 5) por (1, 2)–(2, 5), (1, 3)–(3, 5), o (1, 4)–(4, 5). Asimismo, se podría reemplazar el arco (5, 1) por (5, 2)–(2, 1), (5, 3)–(3, 1), o (5, 4)–(4, 1). Los cálculos efectuados para determinar qué arco de (1, 5)-(5, 1) se debe reemplazar se dan en la tabla 71 (* indica el reemplazo correcto). Según se observa en la tabla, se podría reemplazar (1, 5) o (5, 1). Se eligió de manera arbitraria reemplazar el arco (1, 5) por los arcos (1, 2) y (2, 5). Por ahora se tiene el subtour (1, 2)–(2, 5)–(5, 1). Se tiene que reemplazar ahora un arco (i, j) de este subtour por los arcos (i, k) y (k, j), donde $k = 3$ o 4. Los cálculos pertinentes se muestran en la tabla 72.

Enseguida se reemplaza (1, 2) por los arcos (1, 4) y (4, 2). Esto genera el subtour (1, 4)–(4, 2)–(2, 5)–(5, 1). Un arco (i, j) en este subtour se debe reemplazar por los arcos $(i, 3)$ y $(3, j)$. Los cálculos pertinentes se muestran en la tabla 73. A continuación se reemplaza el arco (1, 4) por los arcos (1, 3) y (3, 4). Esto produce el tour (1, 3)–(3, 4)–(4, 2)–(2, 5)–(5, 1). En este ejemplo, el MHIMB produce un tour óptimo (aunque, en general, este método no necesariamente lo hace).

TABLA 71
Determinación de qué arco (1, 5)-(5, 1) es el que se reemplaza

Arco reemplazado	Arcos sumados al subtour	Distancia sumada
(1, 5)*	(1, 2)-(2, 5)	$c_{12} + c_{25} - c_{15} = 153$
(1, 5)	(1, 3)-(3, 5)	$c_{13} + c_{35} - c_{15} = 462$
(1, 5)	(1, 4)-(4, 5)	$c_{14} + c_{45} - c_{15} = 302$
(5, 1)*	(5, 2)-(2, 1)	$c_{52} + c_{21} - c_{51} = 153$
(5, 1)	(5, 3)-(3, 1)	$c_{53} + c_{31} - c_{51} = 462$
(5, 1)	(5, 4)-(4, 1)	$c_{54} + c_{41} - c_{51} = 302$

TABLA 72
Determinación de qué arco (1, 2)-(2, 5)-(5, 1) es el que se reemplaza

Arco reemplazado	Arcos sumados	Distancia sumada
(1, 2)	(1, 3)-(3, 2)	$c_{13} + c_{32} - c_{12} = 375$
(1, 2)*	(1, 4)-(4, 2)	$c_{14} + c_{42} - c_{12} = 233$
(2, 5)	(2, 3)-(3, 5)	$c_{23} + c_{35} - c_{25} = 514$
(2, 5)	(2, 4)-(4, 5)	$c_{24} + c_{45} - c_{25} = 318$
(5, 1)	(5, 3)-(3, 1)	$c_{53} + c_{31} - c_{51} = 462$
(5, 1)	(5, 4)-(4, 1)	$c_{54} + c_{41} - c_{51} = 302$

TABLA 73
Determinación de qué arco (1, 4)-(4, 2)-(2, 5)-(5, 1) es el que se reemplaza

Arco reemplazado	Arcos sumados	Distancia sumada
(1, 4)*	(1, 3)-(3, 4)	$c_{13} + c_{34} - c_{14} = 166$
(4, 2)	(4, 3)-(3, 2)	$c_{43} + c_{32} - c_{42} = 202$
(2, 5)	(2, 3)-(3, 5)	$c_{23} + c_{35} - c_{25} = 514$
(5, 1)	(5, 3)-(3, 1)	$c_{53} + c_{31} - c_{51} = 462$

Evaluación de los métodos heurísticos

Se recomiendan tres maneras de evaluar los métodos heurísticos:

1 Garantías de rendimiento.
2 Análisis probabilístico.
3 Análisis empírico.

Una garantía de desempeño en el caso de un método heurístico brinda un límite del peor caso de qué tan lejos de la optimalidad puede estar un tour generado por el método heurístico. Por lo que se refiere al MHVMC, es posible demostrar que para cualquier número r se puede plantear un problema del agente viajero tal que el MHVMC proporcione un tour que es r veces tan largo como el tour óptimo. Por lo tanto, en un escenario de la peor posibilidad, el MHVMC se desempeña mal. Por lo que se refiere a un problema simétrico del agente viajero que cumple con la desigualdad del triángulo (es decir, para el cual $c_{ij} = c_{ji}$ y $c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}$ para toda i, j y k), se ha demostrado que la distancia del tour obtenido mediante el MEIMB no puede exceder el doble de la distancia del tour óptimo.

En el análisis probabilístico, un método heurístico se valora suponiendo que la ubicación de las ciudades sigue alguna distribución de probabilidades conocida. Por ejemplo, podríamos suponer que las ciudades son variables aleatorias independientes que están distribuidas uniformemente sobre un cubo cuyas tres dimensiones son iguales a la unidad. Entonces, para cada método heurístico, se calcularía la siguiente relación.

$$\frac{\text{Distancia esperada de la trayectoria encontrada por el método heurístico}}{\text{Distancia esperada para un tour óptimo}}$$

En la medida en que el cociente se acerque a 1, es mejor el método heurístico.

En cuanto al análisis empírico, los métodos heurísticos se comparan con la solución óptima de un número de problemas para los cuales se conoce el tour óptimo. Como ejemplo, para cinco problemas del agente viajero con 100 ciudades, Golden, Bodin, Doyle y Stewart (1980) encontraron que cuando el MHVMC, tomando la mejor de todas las soluciones encontradas cuando el MHVMC se aplicaba al inicio de cada ciudad, producía tours que promediaban 15% más distancia que el tour óptimo. Para el mismo conjunto de problemas, se encontró que el MHIMB (de nuevo aplicando la mejor solución obtenida al aplicar el MHIMB a todas las ciudades) producía tours que también promediaban 15% más distancia que el tour óptimo.

OBSERVACIONES

1 Golden, Bodin, Doyle y Stewart (1980) describen un método heurístico que por lo regular queda dentro de 2 a 3% del tour óptimo.

2 Es importante también comparar los métodos heurísticos con respecto al tiempo de computadora que requieren y la facilidad de ponerlos en marcha.

3 Un excelente análisis de los métodos heurísticos se encuentra en los capítulo 5 a 7 de Lawler (1985).

Una formulación del problema del agente viajero mediante programación entera

Enseguida se analiza cómo plantear un PE cuya solución resuelva el problema del agente viajero (PAV). Pero la formulación de esta sección se vuelve difícil de manejar e inefectiva con los PAV grandes. Suponga que el problema consiste en las ciudades $1, 2, 3, \ldots, N$. Para $i \neq j$ let c_{ij} = distancia desde la ciudad i hasta la ciudad j y sea $c_{ii} = M$, donde M es un número muy grande (en relación con las distancias reales del problema). Al hacer $c_{ii} = M$ se asegura que no habrá viaje a la ciudad i inmediatamente después de dejar la ciudad i. Se define también

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la solución al PVA va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \\ 0 & \text{si no sucede así} \end{cases}$$

Entonces, la solución al problema se encuentra al resolver

$$\min z = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} \tag{40}$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{i=N} x_{ij} = 1 \quad (\text{para } j = 1, 2, \ldots, N) \tag{41}$$

$$\sum_{j=1}^{j=N} x_{ij} = 1 \quad (\text{para } i = 1, 2, \ldots, N) \tag{42}$$

$$u_i - u_j + Nx_{ij} \le N - 1 \quad (\text{para } i \neq j;\ i = 2, 3, \ldots, N;\ j = 2, 3, \ldots, N) \tag{43}$$

$$\text{Toda } x_{ij} = 0 \text{ o } 1, \text{ toda } u_j \ge 0$$

La función objetivo (40) proporciona la distancia total de los arcos incluidos en un tour. Las restricciones en (41) dan la certeza de que uno llega una vez a cada ciudad. Las restricciones en (42) aseguran que uno abandona cada ciudad una vez. Las restricciones en (43) son la clave del planteamiento. Ellas aseguran lo siguiente:

1 Cualquier conjunto de x_{ij} que contiene un subtour será no factible [es decir, se incumple (43)].

2 Cualquier conjunto de x_{ij} que forma un tour será factible [habrá un conjunto de u_j que satisfaga (43)].

Para ilustrar que cualquier conjunto de x_{ij} que contiene un subtour incumplirá (43), considere el ejemplo de subtour dado en la figura 24. Aquí $x_{15} = x_{21} = x_{43} = x_{43} = x_{52} = 1$. Esta asignación contiene los dos subconjuntos 1–5–2–1 y 3–4–3. Se selecciona el subtour que *no* contenga la ciudad 1 (3–4–3) y se escriben las restricciones en (43) que correspondan a los arcos en este subtour. Se obtiene $u_3 - u_4 + 5x_{34} \leq 4$ y $u_4 - u_3 + 5x_{43} \leq 4$. La suma de estas restricciones produce $5(x_{34} + x_{43}) \leq 8$. Es evidente que esto excluye la posibilidad de que $x_{43} = x_{34} = 1$, de modo que el subtour 3–4–3 (¡y cualquier otro subtour!) está excluido por las restricciones en (43).

Ahora se muestra que para cualquier conjunto de x_{ij} que no contenga un subtour existen valores de u_j que cumplirán con todas las restricciones en (43). Suponga que la ciudad 1 es la primera ciudad que se visita (como se visitan a la larga todas las ciudades, no hay problema). Sea t_i = la posición en el tour donde la ciudad i es visitada. Al hacer $u_i = t_i$ se cumplen todas las restricciones en (43). Para ejemplificar lo anterior, considere el tour 1–3–4–5–2–1. Luego se elige $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 4$. Ahora se muestra que con esta elección de las u_i se cumplen todas las restricciones en (43). Primero considere cualquier restricción correspondiente a un arco que tiene $x_{ij} = 1$. Por ejemplo, la restricción correspondiente a x_{52} es $u_5 - u_2 + 5x_{52} \leq 4$. Como la ciudad 2 sigue inmediatamente a la ciudad 5, $u_5 - u_2 = -1$. Entonces la restricción para x_{52} en (43) se reduce a $-1 + 5 \leq 4$, lo cual es cierto. Enseguida considere una restricción correspondiente a una x_{ij} (por decir algo, x_{32}) que satisface $x_{ij} = 0$. Para x_{32}, se obtiene la restricción $u_3 - u_2 + 5x_{32} \leq 4$. Esto se reduce a $u_3 - u_2 \leq 4$. Como $u_3 \leq 5$ y $u_2 > 1$, $u_3 - u_2$ no puede exceder $5 - 2$.

Esto demuestra que la formulación definida por (40) a (43) elimina de toda consideración todas las secuencias de N ciudades que empiecen en la ciudad 1 e incluyan un subtour. Se ha demostrado también que esta formulación no elimina sucesión alguna de N ciudades que empiece en la ciudad 1 y que no incluya un subtour. Por lo tanto, (40) a (43) producirá (si se resuelve) la solución óptima del problema del agente viajero.

Resolución del problema del agente viajero mediante LINGO

TSP.lng

Es posible efectuar con facilidad el PE descrito en (40) a (43) mediante el programa siguiente de LINGO (archivo TSP.lng).

```
MODEL:
  1]SETS:
  2]CITY/1..5/:U;
  3]LINK(CITY,CITY):DIST,X;
  4]ENDSETS
  5]DATA:
  6]DIST= 50000 132 217 164 58
  7]132 50000 290 201 79
  8]217 290 50000 113 303
  9]164 201 113 50000 196
 10]58 79 303 196 5000;
 11]ENDDATA
 12]N=@SIZE(CITY);
 13]MIN=@SUM(LINK:DIST*X);
 14]@FOR(CITY(K):@SUM(CITY(I):X(I,K))=1;);
 15]@FOR(CITY(K):@SUM(CITY(J):X(K,J))=1;);
 16]@FOR(CITY(K):@FOR(CITY(J)|J#GT#1#AND#K#GT#1:
 17]U(J)-U(K)+N*X(J,K)<N-1;););
 18]@FOR(LINK:@BIN(X););
END
```

En el renglón 2 se definen las cinco ciudades y se asocia una U(J) con la ciudad J. En el renglón 3 se crean los arcos que unen cada combinación de ciudades. Con el arco desde la ciudad I a la ciudad J se asocia la distancia entre la ciudad I y J y una variable 0−1 X(I,J), la cual es igual a 1 si la ciudad J sigue inmediatamente a la ciudad I en un tour.

En los renglones 6 a 10 se introduce la distancia entre las ciudades dadas en el ejemplo 11. Obsérvese que la distancia entre la ciudad I y la misma ciudad se asigna un número muy grande para asegurar que la ciudad I no está después de sí misma.

En el renglón 12 se usa **@SIZE** para calcular el número de ciudades (se usa en el renglón 17). En el renglón 13 se crea la función objetivo al sumar a cada eslabón (I,J) el producto de la distancia entre las ciudades I y J y X(I,J). El renglón 14 asegura que, por cada ciudad, entramos a la ciudad exactamente una vez. El renglón 15 da certeza de que, por cada ciudad, uno deja la ciudad exactamente una vez. Los renglones 16 y 17 crean las restricciones en (43). Observe que sólo creamos estas restricciones para combinaciones J,K donde J > 1 y K > 1. Lo anterior concuerda con (43). Note que cuando J = K, el renglón 17 genera restricciones de la forma N*X(J,J) ≤ N − 1, de lo cual se infiere que cualquier X(J,J) = 0. Con el renglón 18 se asegura que toda X(I,J) = 0 o 1. No es necesario limitar las U(J) porque LINGO supone que son no negativas. *Nota*: incluso para problemas pequeños del agente viajero esta formulación excederá la capacidad de LINGO versión estudiantil.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Se deben procesar cuatro trabajos en una sola máquina. El tiempo necesario para ejecutar cada trabajo y el plazo para cada uno de ellos, se señala en la tabla 74. Utilice el método de ramificación y acotamiento para determinar el orden en que se tienen que efectuar los trabajos de tal manera que se minimice el tiempo total de retraso.

2 Sunco produce todos los días cuatro tipos de gasolina: premium sin plomo (PSP), regular sin plomo (RSP), premium con plomo (PP) y regular con plomo (RP). Debido a la limpieza y puesta a punto de la maquinaria, el tiempo requerido para producir un lote de gasolina depende del tipo de gasolina que se elaboró al último. Por ejemplo, toma más tiempo pasar de una gasolina sin plomo a una gasolina con plomo que cambiar entre dos gasolinas sin plomo. El tiempo (en minutos) requerido para producir la cantidad necesaria de gasolina diaria se muestra en la tabla 75. Utilice el enfoque de ramificación y acotamiento para determinar el orden en el cual las gasolinas se deben producir todos los días.

3 Una trayectoria hamiltoniana en una red es una trayectoria cerrada que pasa exactamente una vez por cada nodo en la red antes de regresar a su punto de partida. Si se toma un problema del agente viajero con cuatro ciudades como un ejemplo, explique por qué resolver un PAV equivale a determinar la trayectoria hamiltoniana más corta en la red.

TABLA 74

Trabajo	Tiempo para ejecutar cada trabajo (min)	Plazo del trabajo
1	7	Final del minuto 14
2	5	Final del minuto 13
3	9	Final del minuto 18
4	11	Final del minuto 15

TABLA 75

Última gasolina producida	Siguiente gasolina que se elaborará			
	RSP	PSP	RP	PP
RSP	—	50	120	140
PSP	60	—	140	110
RP	90	130	—	60
PP	130	120	80	—

Nota: Suponga que la última gasolina que se produjo ayer precede la primera gasolina elaborada hoy.

4 Hay cuatro patitas en un circuito impreso. La distancia entre cada par de patitas (en pulgadas) se indica en la tabla 76.

a Suponga que se desea colocar tres alambres entre las patitas, de tal manera que se conecten todos los alambres y se use la cantidad mínima de alambre. Resuelva este problema mediante una de las técnicas tratadas en el capítulo 8.

b Suponga que queremos colocar una vez más tres alambres entre las patitas, de un modo tal que se conecten todos los alambres y se utilice la cantidad mínima de alambre. También suponga que si más de dos alambres tocan una patita habrá un cortocircuito. Enseguida plantee un problema del agente viajero que sea posible utilizar para resolver este problema. (*Sugerencia*: añada una patita 0 tal que la distancia entre la patita 0 y cualquier otra sea 0.)

5 **a** Utilice el MHVMC para encontrar una solución al problema del agente viajero en el problema 2. Empiece con RSP.

b Con ayuda del MHIMB encuentre una solución al problema del agente viajero del problema 2. Empiece con el subtour RSP-PSP-RSP.

6 LL Pea almacena ropa en cinco lugares distintos. Varias veces al día se envía a un "tomador de pedidos" a cada lugar para tomar los pedidos. Luego debe regresar al área de empaque. Describa un problema del agente viajero que minimice el tiempo necesario para levantar los pedidos y regresar al área de empaque.

Grupo B

7 Utilice la ramificación y el acotamiento para determinar una manera (si acaso existe) de colocar cuatro reinas en un tablero de ajedrez de 4 × 4, de tal modo que ninguna reina pueda capturar a otra. (*Sugerencia*: sea $x_{ij} = 1$ si una reina es colocada en el renglón 1 columna j del tablero y $x_{ij} = 0$ si no sucede así. Luego ramifique como en el problema de retraso

TABLA 76

[illegible]	1	2	3	4
1	0	1	2	2
2	1	0	3	2.9
3	2	3	0	3
4	2	2.9	3	0

de la máquina. Muchos nodos se podrían dejar de considerar porque son no factibles. Por ejemplo, el nodo relacionado con los arcos $x_{11} = x_{22} = 1$ es no factible porque las dos reinas se capturan una a la otra.

8 Aunque el método húngaro es una manera eficaz para resolver un problema de asignaciones, también se puede aplicar el método de ramificación y acotamiento. Suponga que una compañía tiene cinco fábricas y cinco bodegas. Una sola bodega debe cumplir las condiciones de cada una de las fábricas, y sólo es posible asignar una bodega a una fábrica. Los costos de asignación de una bodega para que cumpla con la demanda de una fábrica (en miles) se indican en la tabla 77.

Sea $x_{ij} = 1$ si la bodega i es asignada a la fábrica j y 0 si sucede otra cosa. Empiece por ramificar sobre la bodega asignada a la fábrica 1. Así se originan las cinco ramas siguientes: $x_{11} = 1, x_{21} = 1, x_{31} = 1, x_{41} = 1$, y $x_{51} = 1$. ¿Cómo se puede obtener un acotamiento inferior para el costo total asociado con una ramificación? Examine la ramificación $x_{21} = 1$. Si $x_{21} = 1$, ninguna asignación puede provenir del renglón 2 o de la columna de la matriz de costos. Al determinar la fábrica a la cual se asigna cada bodega no asignada (1, 3, 4 y 5), no podemos hacer más que asignar cada una al costo más pequeño en el renglón de las bodegas (excluyendo la columna de la fábrica 1). Por lo tanto, la asignación de costo mínimo que tiene $x_{21} = 1$ debe tener un costo total de por lo menos $10 + 10 + 9 + 5 + 5 = 39$.

De manera similar, al determinar la bodega a la cual se asigna una de las fábricas no asignadas (2, 3, 4 y 5), no podemos hacer más que asignar cada una al costo mínimo en la columna de las fábricas (sin incluir el renglón de la bodega 2). Por lo tanto, la asignación de costo mínimo que tiene $x_{21} = 1$ debe tener un costo total de por lo menos $10 + 9 + 5 + 5 + 7 = 36$. Por consiguiente, el costo total de cualquier asignación que tiene $x_{21} = 1$ debe ser por lo menos max (36, 39) = 39. Entonces, si al ramificar se llega a una solución probable que tiene un costo total de 39 o menos, la rama $x_{21} = 1$ podría dejar de considerarse. Apóyese en este concepto para resolver el problema mediante ramificación y acotamiento.

9[†] Considere un rollo largo de papel tapiz que repite su diseño cada yarda. Se tienen que cortar cuatro hojas del rollo de papel tapiz. En relación con el inicio (punto 0) del papel tapiz, el principio y el final de cada hoja se localiza como se señala en la tabla 78. Por lo tanto, la hoja 1 inicia en 0.3 yardas a partir del inicio del rollo (y 1.3 yardas del principio del rollo), y la hoja 1 termina en 0.7 yardas del inicio del rollo (y 1.7 yardas del principio del rollo). Suponga que estamos al inicio del rollo. ¿En qué orden se tienen que cortar las hojas para minimizar la cantidad total de papel desperdiciado? Suponga que se practica un corte final para que quede de nuevo el rollo al principio del diseño.

TABLA 78

Hoja	Principio (yardas)	Final (yardas)
1	0.3	0.7
2	0.4	0.8
3	0.2	0.5
4	0.7	0.9

10[‡] Un fabricante de tarjetas con circuitos impresos utiliza taladros programables para hacer seis orificios en cada tarjeta. Las coordenadas x y y de cada orificio se proporcionan en la tabla 79. El tiempo en segundos que requiere el taladro para pasar de un orificio al siguiente, es igual a la distancia entre los puntos. ¿Qué orden en el taladrado minimiza el tiempo total que el taladro gasta desplazándose entre los orificios?

11 Se tienen que procesar cuatro trabajos en una sola máquina. El tiempo necesario para ejecutar cada trabajo, el plazo y la penalización (en dólares) por día que el trabajo se atrase, se dan en la tabla 80.

Utilice la ramificación y el acotamiento para determinar el orden de ejecución de los trabajos con el que se minimiza el costo de la penalización total debido a los trabajos atrasados.

TABLA 79

x	y	Orificio
1	2	1
3	1	2
5	3	3
7	2	4
8	3	5

TABLA 77

Bodega	Fábrica (dólares)				
	1	2	3	4	5
1	5	15	20	25	10
2	10	12	5	15	19
3	5	17	18	9	11
4	8	9	10	5	12
5	9	10	5	11	7

TABLA 80

Trabajo	Tiempo (días)	Plazo	Penalización
1	4	Día 4	4
2	5	Día 2	5
3	2	Día 13	7
4	3	Día 8	2

[†]Basado en Garfinkle (1977).

[‡]Basado en Magirou (1986).

9.7 Enumeración implícita

Este método se utiliza con frecuencia para resolver los PE 0-1. La enumeración implícita se apoya en el hecho de que todas las variables tienen que ser iguales a 0 o a 1 para simplificar tanto la ramificación como los elementos del acotamiento del proceso de ramificación y acotamiento y para determinar de manera eficiente cuándo es no factible un nodo.

Antes de analizar la enumeración implícita, se muestra cómo se podría expresar cualquier PE puro como un PE $0-1$: simplemente se expresa cada variable del PE original como la suma de potencias de 2. Por ejemplo, suponga que se requiere que la variable x_i sea un entero. Sea n el entero más pequeño tal que podemos estar seguros de que $x_i < 2^{n+1}$. Entonces x_i podría ser expresada (extraordinariamente) como la suma de $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}, 2^n$, y

$$x_i = u_n 2^n + u_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + u_2 2^2 + 2u_1 + u_0 \tag{44}$$

donde $u_i = 0$ o 1 $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Para convertir el PE original en un PE $0-1$, cada vez que se presente x_i reemplácela por el lado derecho de (44). Por ejemplo, suponga que sabemos que $x_i \le 100$. Entonces $x_i < 2^{6+1} = 128$. Entonces (44) produce

$$x_i = 64u_6 + 32u_5 + 16u_4 + 8u_3 + 4u_2 + 2u_1 + u_0 \tag{45}$$

donde $u_i = 0$ o 1 $(i = 0, 1, \ldots, 6)$. Luego sustituya x_i por el lado derecho de (45). ¿Cómo es posible encontrar los valores de las u que corresponden a un valor dado de x_i? Suponga que $x_i = 93$. Entonces u_6 será el múltiplo más grande de $2^6 = 64$ que está contenido en 93. Así se obtiene $u_6 = 1$; entonces el resto del lado derecho de (45) debe ser igual a $93 - 64 = 29$. Entonces u_5 será el múltiplo más grande de $2^5 = 32$ contenido en 29. Esto genera $u_5 = 0$. Entonces u_4 será el múltiplo más grande de $2^4 = 16$ contenido en 29. Esto da $u_4 = 1$. Al proseguir de este modo se llega a $u_3 = 1$, $u_2 = 1$, $u_1 = 0$, y $u_0 = 1$. Por lo tanto $93 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0$.

Pronto se descubre que, por lo regular, los PE $0-1$ se resuelven con mayor facilidad que los otros PE puros. Entonces, ¿por qué no transformamos cada PE puro en un PE $0-1$? Simplemente porque transformar un PE puro en un PE $0-1$ incrementa en gran medida la cantidad de variables. No obstante, muchas situaciones generan de manera natural (como los problemas de sistemas de percepción de pagos o de la mochila) problemas $0-1$. Por lo tanto, vale la pena ciertamente aprender cómo resolver los PE $0-1$.

El árbol que se usa en el método de la enumeración implícita es similar a los utilizados para resolver problemas de la mochila $0-1$ de la sección 9.5. Cada rama del árbol especifica, para alguna variable x_i, que $x_i = 1$. Los valores de algunas de las variables se especifican en cada nodo. Por ejemplo, suponga que un problema $0-1$ tiene variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, y que parte del árbol se ve como el de la figura 26. En el nodo 4 se especifican los valores de x_3, x_4 y x_2. Estas variables se denominan **variables fijas.** Todas las variables cuyos valores no están especificados en un nodo, se llaman **variables libres.** Por lo tanto, en el nodo 4, x_1, x_5 y x_6 son variables libres. Para cualquier nodo, la especificación de los

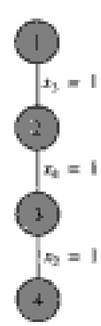


FIGURA 26
Ilustración de variables libres y fijas

valores de todas las variables libres se denomina **terminación** del nodo. Por lo tanto, $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ es una terminación del nodo 4.

Entonces ya estamos listos para esbozar las tres ideas principales usadas en la enumeración implícita.

1 Suponga que estamos en cualquier nodo. Dados los valores de las variables fijas en ese nodo, ¿hay una manera fácil de llegar a una buena terminación de ese nodo que es factible en el PE original 0−1? Para poder contestar esta pregunta, terminamos el nodo haciendo cada variable libre igual al valor (0 o 1) que maximiza a la función objetivo (en un problema de maximización) o que la minimiza (en un problema de minimización). Si esta terminación del nodo es factible, entonces es ciertamente la mejor terminación factible del nodo, y ya es innecesaria la mayor ramificación del mismo. Suponga que estamos resolviendo

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ & x_i = 0 \text{ o } 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

Si estamos en un nodo (llamémosle nodo 4) donde $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ son fijos, entonces lo mejor que podemos hacer es establecer $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$. Como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$ es factible en el problema original, hemos encontrado la mejor terminación factible del nodo 4. Por lo tanto, el nodo 4 ya está terminado, y $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ (junto con su valor de z de 4) se podría considerar una solución probable (candidata).

2 Incluso si la mejor terminación de un nodo no es factible, la mejor terminación proporciona una cota sobre el mejor valor de la función objetivo que se puede obtener por medio de una terminación factible del nodo. Es posible utilizar con frecuencia esta cota para eliminar un nodo. Por ejemplo, suponga que encontramos previamente una solución probable con $z = 6$, y el objetivo es maximizar

$$z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5$$

También suponga que estamos en un nodo donde las variables fijas son $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 1$. Entonces la mejor terminación del nodo es $x_4 = 0$ y $x_5 = 1$. Esto produce un valor de z de $2 + 1 + 2 = 5$. Como $z = 5$ no puede sobrepasar la solución probable con $z = 6$, eliminamos de modo inmediato este nodo (pasa a segundo término si la terminación es factible o no).

3 ¿Hay una manera fácil de determinar en cualquier nodo si todas las terminaciones del nodo son no factibles? Suponga que estamos en el nodo 4 de la figura 26 y una de las restricciones es

$$-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 + 2x_6 \leq -5 \tag{46}$$

¿Hay alguna terminación del nodo 4 que pueda satisfacer esta restricción? Asignamos valores a las variables libres que hacen el lado izquierdo de (46) tan pequeño como es posible. Si esta terminación del nodo 4 no cumpliera con (46), entonces, ciertamente, ninguna terminación del nodo 4 lo haría. Por lo tanto, se fija $x_1 = 1$, $x_5 = 1$ y $x_6 = 0$. Al sustituir estos valores y los valores de las variables fijas se obtiene $-2 + 3 + 2 - 3 - 1 \leq -5$. Esta desigualdad no se cumple, de modo que ninguna terminación del nodo 4 puede satisfacer (46). Ninguna terminación del nodo 4 puede ser factible para el problema original, por lo que el nodo 4 se podría eliminar.

En general, se comprueba si un nodo tiene una terminación factible examinando cada restricción y asignando a cada variable libre el mejor valor (según se señala en la tabla 81) para satisfacer la restricción.† Aunque sólo sea una de las restricciones la que no se cumpla con la terminación más factible, se sabe entonces que el nodo no tiene terminación factible. En este caso, el nodo no puede generar la solución óptima para el PE original.

†Cada restricción de igualdad debe ser reemplazada por una restricción $\leq$ y una restricción $\geq$.

TABLA 81
Modo de determinar si un nodo tiene una terminación que satisfaga una restricción dada

Tipo de restricción	Signo del coeficiente de la variable libre en la restricción	Valor asignado a la variable libre en la verificación de la factibilidad
$\leq$	+	0
$\leq$	−	1
$\geq$	+	1
$\geq$	−	0

Se observa, no obstante, que hasta si un nodo no tiene terminación factible, la verificación burda de infactibilidad no podría revelar que el nodo no tiene terminación factible mientras no se descienda más por el árbol hasta un nodo donde hay más variables fijas. Si se ha fracasado en la obtención de información con respecto a un nodo, se ramifica sobre una variable libre x_i y se suman dos nodos nuevos: uno con $x_i = 1$ y otro con $x_i = 0$.

EJEMPLO 12 Enumeración implícita

Aplique la enumeración implícita para resolver el PE 0−1 siguiente:

$$\max z = -7x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5$$
$$\text{s.a} \quad -4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq -3 \quad (47)$$
$$-4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 \leq -7 \quad (48)$$
$$x_i = 0 \text{ o } 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Solución Al principio (nodo 1), todas las variables son libres. Se comprueba primero si la mejor terminación del nodo 1 es factible. La mejor terminación del nodo 1 es $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, la cual no es factible (incumple ambas restricciones. Luego se verifica si el nodo 1 no tiene terminación factible. Para verificar la factibilidad de (47) se establece $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$. Así se satisface (47) (da $-9 \leq -3$). Enseguida se comprueba la factibilidad de (48) haciendo $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$. Mediante esta terminación del nodo 1 se satisface (48) (se obtiene $-10 \leq -7$). Por consiguiente, el nodo 1 tiene una terminación factible que satisface (48). Por lo tanto, la comprobación de infactibilidad no permite afirmar que el nodo 1 no tiene terminación factible. Luego se elige ramificar sobre una variable libre: en forma arbitraria, x_1. Esto origina dos nuevos nodos: el nodo 2 con la restricción $x_1 = 1$ y el nodo 3 con la restricción $x_1 = 0$ (véase figura 27).

Ahora se escoge al nodo 2 para analizarlo. La mejor terminación del nodo 2 es $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ y $x_5 = 0$. Esta terminación no es factible, infortunadamente. Ahora se pretende determinar si el nodo 2 tiene una terminación factible. Se verifica si $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$ satisface (47) (lo cual da $-9 \leq -3$). Luego se verifica si $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ satisface (48) (con lo cual se obtiene $-10 \leq -7$). Por lo tanto, la verificación de infactibilidad no ha proporcionado información acerca de si el nodo 2 tiene terminación factible.

El siguiente paso es ramificar en forma arbitraria sobre el nodo 2 en la variable libre x_2. Así se originan los nodos 4 y 5 de la figura 28. Se aplica la regla LIFO, y se elige al nodo 5 para analizarlo. La mejor terminación del nodo 5 es $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Una vez más se observa que esta terminación es no factible. Enseguida se comprueba la factibilidad del nodo 5. Se determina si $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$ satisface (47) (esto genera $-7 \leq -3$). Entonces, se verifica si $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ cumple con (48) (se obtiene $-8 \leq -7$). Una vez más la verificación de la factibilidad no proporciona información. Por lo tanto, se ramifica en el nodo 5, para lo cual se elige en forma arbitraria la variable libre x_3. Con esto se suman los nodos 6 y 7 que se ven en la figura 29.

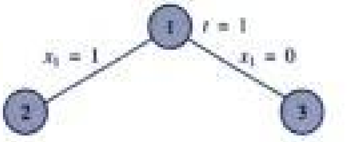


FIGURA 27
Ramificación en el nodo 1

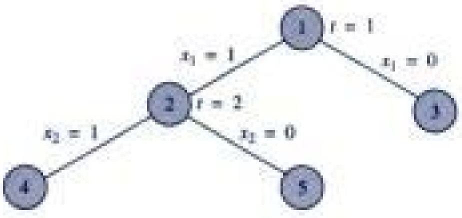


FIGURA 28
Ramificación en el nodo 2

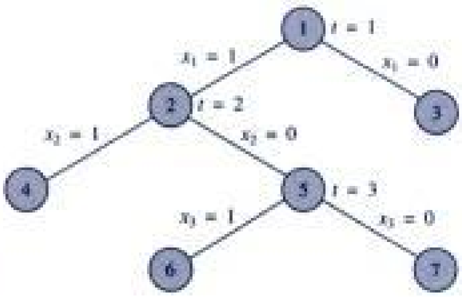


FIGURA 29
Ramificación en el nodo 5

Se aplica la regla LIFO, por lo que se escoge para analizar al nodo 6. La mejor terminación del nodo 6 es $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, z = -9$. Este punto es factible, de modo que se ha encontrado una solución probable con $z = -9$. A partir de la regla LIFO, el siguiente por ser analizado es el nodo 7. La mejor terminación del nodo 7 es $x_1 = 1$, $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, z = -7$. Puesto que $z = -7$ es mejor que $z = -9$, es posible, en el caso del nodo 7, sobrepasar la solución probable actual. Por lo tanto, se tiene que verificar el nodo 7 para ver si tiene una terminación factible. Se observa si $x_1 = 1, x_2 = 0$, $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1$ satisface (47) (se obtiene $-7 \leq -3$). Luego se ve si $x_1 = 1, x_2 = 0$, $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ satisface (48) (lo cual da $-4 \leq -7$). Esto quiere decir que ninguna terminación del nodo 7 puede satisfacer (48). Por lo tanto, el nodo 7 no tiene terminación factible, y se podría dejar de considerar (lo cual se indica por $\times$ en la figura 30).

Ahora, según la regla LIFO, se debe analizar el nodo 4. La mejor terminación del nodo 4 es $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Esta solución tiene $z = -10$. Por lo tanto, el nodo 4 no puede sobrepasar a la solución probable previa del nodo 6 (que tiene $z = -9$), por lo que el nodo 4 se podría eliminar.

Ahora se tiene el árbol de la figura 31, donde sólo el nodo 3 queda por analizar. La mejor terminación del nodo 3 es $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Este punto es no factible. Este punto tiene $z = 0$, de modo que es posible que el nodo 3 dé una solución factible que sea mejor que la solución probable actual (con $z = -9$). Ahora se verifica si el nodo 3 tiene una terminación factible: ¿satisface $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1$ a (47)? Esto da $-5 \leq -3$, de modo que el nodo 3 sí tiene una terminación que satisface (47). Luego se investiga si el nodo 3 tiene alguna terminación que satisfaga (48): ¿$x_1 = 0$, $x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ satisface (48)? Esto da $-6 \leq -7$, lo cual no es cierto. Por lo tanto, el nodo 3 no tiene terminación que satisfaga (48), por lo que el nodo 3 se podría eliminar. Ahora se tiene el árbol de la figura 32.

Como ya no hay nodos por analizar, la solución probable (candidata) del nodo 6 con $z = -9$ debe ser óptima. Por lo tanto, $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, z = -9$ es la solución óptima para el PE 0−1. Observe que cada punto posible $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ donde $x_i = 0$ o 1 se ha considerado en forma implícita, y todos, menos la solución óptima, se

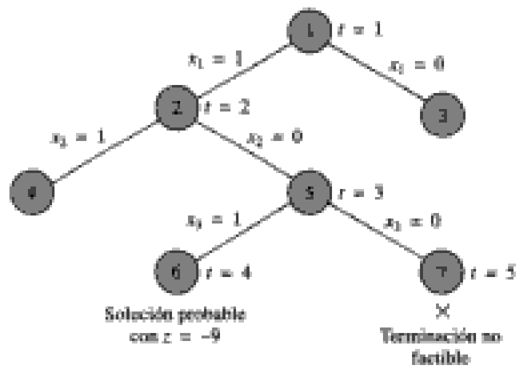


FIGURA 30
El nodo 6 genera una solución probable, y el nodo 7 no tiene terminación factible

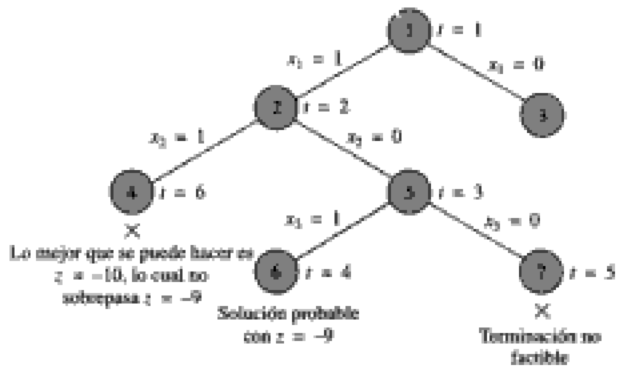


FIGURA 31
El nodo 4 no puede sobrepasar la solución probable del nodo 6

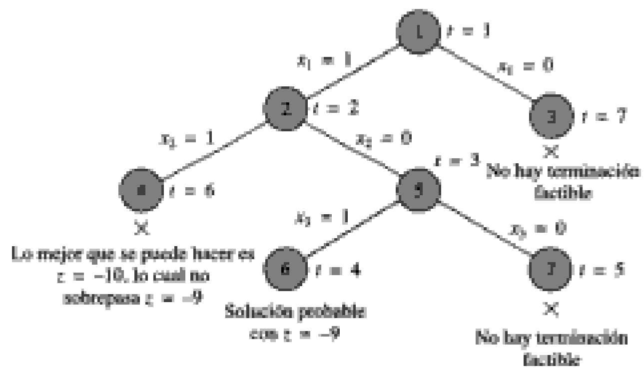


FIGURA 32
El nodo 3 no tiene terminación factible

eliminaron. Por ejemplo, para el punto $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0$, el análisis del nodo 4 muestra que este punto no puede ser óptimo porque no puede tener un valor de z mejor que -9. Otro ejemplo es el punto $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1$ el cual no puede ser óptimo porque al analizar el nodo 3 se determinó que ninguna terminación puede ser factible.

El uso de pruebas de infactibilidad más sutiles (denominadas **restricciones subrogadas o sustitutas**) disminuye muchas veces la cantidad de nodos que se tienen que examinar antes de que se encuentre una solución óptima. Por ejemplo, considere un PE 0-1 con las restricciones siguientes:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2 \tag{49}$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 1 \tag{50}$$

Suponga que estamos en el nodo donde $x_1 = x_2 = 1$. Para comprobar si este nodo tiene una terminación factible, investigaríamos si $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$ satisface (49) (sí lo hace). Luego podríamos ver si $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$ (50) (sí lo es). En esta situación, las pruebas de infactibilidad burdas nos indican que este nodo es no factible. No obstante, observe que como $x_1 = x_2 = 1$, la única manera de satisfacer (49) es seleccionando $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, pero esta terminación del nodo $x_1 = x_2 = 1$ no satisface (50). Por lo tanto, el nodo con $x_1 = x_2 = 1$ no tendrá terminación factible. Con el tiempo, nuestra prueba burda de infactibilidad habría indicado este hecho, pero habríamos estado obligados a examinar muchos más nodos antes de encontrar que el nodo con $x_1 = x_2 = 1$ no tenía terminación factible. En un problema más complejo, una prueba más sutil de infactibilidad que combinara información de ambas restricciones, nos podría haber posibilitado examinar menos nodos. Naturalmente, una prueba más sutil de infactibilidad requeriría más cálculos, así que a lo mejor no vale la pena. Un análisis de restricciones subrogadas se encuentra en Salkin (1975), Taha (1975) y Nemhauser y Wolsey (1988).

Al igual que con el algoritmo de ramificación y acotamiento, muchas elecciones arbitrarias determinan la eficacia del algoritmo de enumeración implícita. Véase Salkin, Taha y Nemhauser y Wolsey si desea ver un análisis más profundo de las técnicas de la enumeración implícita.

PROBLEMAS

Grupo A

Resuelva los siguientes PE 0−1 mediante enumeración implícita:

1
$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \\ \text{s.a.}\quad & 2x_1 + x_2 - 3x_4 \le 1 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 \ge 2 \\ & x_i = 0 \text{ o } 1 \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s.a.}\quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_i = 0 \text{ o } 1 \end{aligned}$$

3 Finco planea invertir en cinco proyectos. Cada uno de ellos requiere una salida de efectivo en el tiempo 0 y rinde un VNA según se describe en la tabla 82 (todo en millones de dólares). En el tiempo 0, 10 millones de dólares están disponibles para invertir. Los proyectos 1 y 2 son mutuamente exclusivos (es decir, Finco no puede emprender ambos). También los proyectos 3 y 4 son mutuamente exclusivos. Además, el proyecto 2 no puede emprenderse a menos que también se inicie el proyecto 5. Aplique la enumeración implícita para determinar cuáles proyectos deberían emprenderse para maximizar el VNA.

TABLA 82

Proyecto	Salida de efectivo en el tiempo 0 (dólares)	VNA (dólares)
1	4	5
2	6	9
3	5	6
4	4	3
5	3	2

4 Aplique la enumeración implícita para encontrar la solución óptima para el ejemplo 5 (el problema de recubrimiento de conjuntos).

5 Aplique le enumeración implícita para resolver el problema 1 de la sección 9.2.

Grupo B

6 ¿Por qué son únicos los valores de $u_0, u_1, \ldots, u_n$ en (44)?

9.8 El algoritmo del plano de corte†

En la parte anterior de este capítulo se describió con algunos detalles cómo se pueden aplicar los métodos de ramificación y acotamiento para resolver PE. En esta sección se trata otro método, el **algoritmo del plano de corte.** Este algoritmo se ilustra mediante la resolución del problema de Telfa Corporation (ejemplo 9). Según la sección 9.3, el problema era

†En esta sección se tratan temas que se podrían omitir sin perder la continuidad.

TABLA 83
Tableau óptimo para la relajación del PL de Telfa

z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
1	0	0	1.25	0.75	41.25
0	0	1	2.25	−0.25	2.25
0	1	0	−1.25	0.25	3.75

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 5x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0; &\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned} \tag{51}$$

Después de sumar las variables de holgura s_1 y s_2, se encuentra que el tableau óptimo para la relajación del PL del ejemplo de Telfa es como el que se muestra en la tabla 83.

Para aplicar el método del plano de corte, se empieza por elegir cualquier restricción en el tableau óptimo de la relajación del PL en la cual una variable básica es fraccionaria. Se elige de modo arbitrario la segunda restricción, que es

$$x_1 - 1.25s_1 + 0.25s_2 = 3.75 \tag{52}$$

Enseguida se define que $[x]$ sea el entero más grande que o igual a x. Por ejemplo, $[3.75] = 3$ y $[-1.25] = -2$. Cualquier número x se puede escribir en la forma $[x] + f$, donde $0 \leq f < 1$. Se considera que f es la parte fraccionaria de x. Por ejemplo, $3.75 = 3 + 0.75$, y $-1.25 = -2 + 0.75$. En el tableau óptimo de (51) se escriben ahora los coeficientes de las variables y el lado derecho de las restricciones en la forma $[x] + f$, donde $0 \leq f < 1$. Ahora (52) se podría expresar como sigue

$$x_1 - 2s_1 + 0.75s_1 + 0s_2 + 0.25s_2 = 3 + 0.75 \tag{53}$$

Si todos los términos con coeficientes enteros se acomodan en el lado izquierdo y todos los términos con coeficientes fraccionarios en el lado derecho se tiene

$$x_1 - 2s_1 + 0s_2 - 3 = 0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \tag{54}$$

El algoritmo del plano de corte recomienda entonces sumar las restricciones siguientes al tableau óptimo de la relajación del PL:

$$\text{Lado derecho de (54)} \leq 0$$

o bien,

$$0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \leq 0 \tag{55}$$

Esta restricción se llama (por razones que pronto se comprenderán) un **corte.** Enseguida se demuestra que un corte generado por este método tiene dos propiedades.

1 Cualquier punto factible para el PE satisface el corte.

2 La solución óptima actual para la relajación del PL, no satisface el corte.

Por lo tanto, un corte "limita" la solución actual óptima para la relajación del PL, pero no a las soluciones factibles para el PE. Cuando se suma el corte para la relajación del PL, hay la esperanza de obtener una solución donde todas las variables sean valores enteros. Si es así, se ha encontrado la solución óptima para el PE original. Si la nueva solución óptima (para la relajación del PL más el corte) tiene algunas variables con valores fraccionarios, entonces se ejecuta otro corte y continúa el proceso. Gomory (1958) demostró que este proceso generará una solución óptima para el PE después de un número finito de cortes. Antes de encontrar la solución óptima para el PE (51) se demuestra por qué el corte (55) satisface las propiedades 1 y 2.

Ahora se demuestra que cualquier solución factible para el PE (51) cumplirá con el corte (55). Considere cualquier punto que es factible para el PE. Para tal punto, x_1 y x_2 asumen valores enteros, y el punto debe ser factible en la relajación del PL de (51). Como (54) es justo un reacomodo de la segunda restricción del tableau óptimo, cualquier punto factible para el PE debe satisfacer (54). Cualquier solución factible para el PE debe tener $s_1 \geq 0$ y $s_2 \geq 0$. Puesto que $0.75 < 1$, cualquier solución factible para el PE hará que el lado derecho de (54) sea menor que 1. También observe que para cualquier punto que es factible para el PE, el lado izquierdo de (54) será un entero. Por lo tanto, para cualquier punto factible para el PE, el lado derecho debe ser un entero menor que 1. De aquí se infiere que cualquier punto que es factible para el PE satisface (55), ¡por eso el corte no deja fuera de consideración ningún punto entero factible!

En seguida se muestra que la solución óptima actual para la relajación del PL no puede satisfacer el corte (55). La solución óptima actual para la relajación del PL tiene $s_1 = s_2 = 0$. Por lo tanto, no puede satisfacer (55). Este razonamiento funciona porque 0.75 (la parte fraccionaria del lado derecho de la segunda restricción) es mayor que 0. Por consiguiente, si escogiéramos cualquier restricción cuyo lado derecho en el tableau óptimo es fraccionario, podríamos limitar la solución óptima de la relajación del PL.

El efecto del corte (55) se puede ver en la figura 33; todos los puntos factibles para el PE (51) satisfacen el corte (55), pero no la solución óptima actual para la relajación del PL ($x_1 = 3.75$ y $x_2 = 2.25$). Para obtener la gráfica del corte, se reemplaza s_1 por $6 - x_1 - x_2$ y s_2 por $45 - 9x_1 - 5x_2$. Esto nos posibilita a reescribir el corte como $3x_1 + 2x_2 \leq 15$.

Ahora se suma (55) al tableau óptimo de la relajación del PL, y mediante el simplex para el dual se resuelve el PL resultante. El corte (55) se podría escribir como $-0.75s_1 - 0.25s_2 \leq -0.75$. Después de sumar una variable de holgura s_3 a esta restricción, se obtiene el tableau de la figura 84.

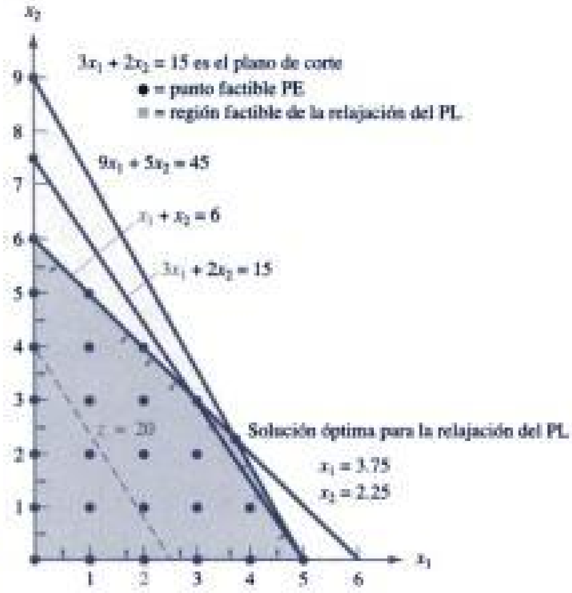


FIGURA 33
Ejemplo de plano de corte

TABLA 84
Tableau del plano de corte después de sumar el corte (55)

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ld
1	0	0	1.25	0.75	0	41.25
0	0	1	2.25	−0.25	0	2.25
0	1	0	−1.25	0.25	0	3.75
0	0	0	−0.75	−0.25	1	−0.75

TABLA 85

Tableau óptimo para el plano de corte

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	ld
1	0	0	0	0.33	1.67	40
0	0	1	0	−1	3	0
0	1	0	0	0.67	−1.67	5
0	0	0	1	0.33	−1.33	1

La prueba del cociente del simplex dual indica que s_1 debe entrar a la base en la tercera restricción. El tableau resultante se proporciona en la tabla 85, el cual genera la solución óptima $z = 40$, $x_1 = 5$, $x_2 = 0$.

Recuerde que un corte no elimina ningún punto que sea factible para el PE. Esto quiere decir que en cualquier momento que se resuelva la relajación del PL para un PE con varios cortes como restricciones adicionales y se encuentre una solución óptima en la cual todas las variables son enteros, se soluciona el PE original. Como x_1 y x_2 son enteros en la solución óptima actual, este punto debe ser óptimo para (51). Naturalmente, si el primer corte no proporcionó la solución óptima para el PE, dejaríamos de sumar cortes hasta que obtengamos un tableau óptimo en el cual todas las variables sean enteros.

OBSERVACIONES

1 Para el algoritmo se requiere que sean enteros todos los coeficientes de las variables en las restricciones y todos los lados derechos de las restricciones. Lo anterior es para asegurar que si las variables de decisión originales son enteros, entonces las variables de holgura y de excedente serán también enteros. Por lo tanto, una restricción como $x_1 + 0.5x_2 \leq 3.6$ debe ser reemplazada por $10x_1 + 5x_2 \leq 36$.

2 Si dos o más restricciones tienen lados derechos fraccionarios en algún paso del algoritmo, entonces los mejores resultados se obtienen a menudo si el corte siguiente se genera usando la restricción cuyo lado derecho tiene la parte fraccionaria más cercana a $\frac{1}{2}$.

Resumen del algoritmo del plano de corte

Paso 1 Encuentre el tableau óptimo para la relajación de la programación lineal. Si todas las variables de la solución óptima asumen valores enteros, entonces ha encontrado una solución óptima para el PE; en caso contrario, siga con el paso 2.

Paso 2 Elija una restricción en el tableau óptimo de la relajación del PL cuyo lado derecho tiene la parte fraccionaria más cercana a $\frac{1}{2}$. Esta restricción se usa para generar un corte.

Paso 2a En el caso de la restricción identificada en el paso 2, escriba su lado derecho y cada coeficiente de las variables en la forma $[x] + f$, donde $0 \leq f < 1$.

Paso 2b Vuelva a escribir la restricción usada para generar el corte como:

Todos los términos con coeficiente entero = todos los términos con coeficiente fraccionario

Entonces el corte es

$$\text{Todos los términos con coeficiente fraccionario} \leq 0$$

Paso 3 Encuentre la solución óptima para la relajación del PL, con el corte como una restricción adicional, mediante el algoritmo simplex dual. Si todas las variables asumen valores enteros en la solución óptima, ha encontrado una solución óptima para el PE. En caso contrario, escoja la restricción cuyo lado derecho tenga la fracción mayor cercana a $\frac{1}{2}$ y úsela para generar otro corte, el cual se suma al tableau. Continúe con este proceso hasta que obtenga una solución en la cual todas las variables sean enteros. Ésta será una solución óptima para el PE.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Considere el PE siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 14x_1 + 18x_2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & 7x_1 + x_2 \le 35 \\ & x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \text{ entero} \end{aligned}$$

El tableau óptimo para esta relajación de la programación lineal del PE se proporciona en la tabla 86. Utilice el algoritmo del plano de corte para resolver este PE.

2 Considere el PE siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned}$$

El tableau óptimo para esta relajación de la programación lineal del PE se proporciona en la tabla 87. Utilice el algoritmo del plano de corte para encontrar la solución óptima.

TABLA 86

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{30}{11}$	126
0	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
0	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

TABLA 87

z	x_1	x_2	e_1	e_2	rhs
1	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{18}{5}$	$\frac{88}{5}$
0	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{8}{5}$

3 Considere el PE siguiente:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & -4x_1 + 4x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0;\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned}$$

El tableau óptimo para esta relajación de la programación lineal del PE se proporciona en la tabla 88. Utilice el algoritmo del plano de corte para encontrar la solución óptima

TABLA 88

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{15}{2}$
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{4}$
0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{2}$

RESUMEN

Los problemas de programación entera (PE) son por lo regular mucho más difíciles de resolver que los problemas de programación lineal.

Formulaciones de programación entera

En la mayor parte de las formulaciones hay **variables 0–1 (binarias).**

Problemas de cargo fijo

Suponga que la actividad i incurre en un cargo fijo si se emprende en cualquier nivel positivo. Sea

$$x_i = \text{nivel de actividad } i$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la actividad } i \text{ se emprende en el nivel positivo } (x_i > 0) \\ 0 & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$$

Entonces una restricción de la forma $x_i \le M_i y_i$ se debe sumar a la formulación. Aquí, M_i debe ser muy grande para asegurar que x_i será menor o igual que M_i.

Restricciones inclusivas o distributivas

Suponga que desea asegurar que por lo menos una de las dos restricciones siguientes (y posiblemente ambas) se cumpla:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \tag{26}$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \tag{27}$$

Al sumar las dos restricciones siguientes a la formulación, se asegura que se satisface por lo menos una de las dos ((26) y (27)):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My \tag{26'}$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1 - y) \tag{27'}$$

En (26′) y (27′), y es una variable 0–1 y M es un número que se escogió a propósito muy grande para tener la seguridad de que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M$ y $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M$ se cumplen para todos los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen las otras restricciones del problema.

Restricciones si... entonces

Suponga que queremos asegurar que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ implica $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$. Entonces incluimos las restricciones siguientes en la formulación:

$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq My \tag{28'}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq M(1 - y) \tag{28}$$

$$y = 0 \text{ o } 1$$

Aquí, M es un número positivo grande, escogido así a propósito para que $f \leq M$ y $-g \leq M$ se cumplen para todos los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen las otras restricciones del problema.

Cómo modelar una función lineal por segmentos *f*(*x*) con variables 0–1

Suponga que la función lineal por segmentos $f(x)$ tiene puntos de quiebre $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Paso 1 Cada vez que se presente $f(x)$ en el problema de optimización, reemplácela por $z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \cdots + z_n f(b_n)$.

Paso 2 Sume las restricciones siguientes al problema:

$$z_1 \leq y_1, z_2 \leq y_1 + y_2, z_3 \leq y_2 + y_3, \ldots, z_{n-1} \leq y_{n-2} + y_{n-1}, z_n \leq y_{n-1}$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = 1$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1$$

$$x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \cdots + z_n b_n$$

$$y_i = 0 \text{ o } 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n-1);\ z_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Método de ramificación y acotamiento

Por lo general, los PE se resuelven mediante alguna versión del procedimiento de **ramificación y acotamiento.** Los métodos de ramificación y acotamiento enumeran implícitamente todas las soluciones posibles para una PE. Algunas veces, al resolver un solo subproblema se dejan de considerar varias soluciones posibles.

Ramificación y acotamiento los PE puros

Los subproblemas se generan al ramificar sobre una variable x_i, apropiadamente seleccionada, de valor fraccionario. Suponga que en un subproblema dado (denominado subproblema antiguo), x_i asume un valor fraccionario entre los enteros i e $i + 1$. Entonces los dos subproblemas recién generados son

Subproblema nuevo 1 Subproblema antiguo + restricción $x_i \leq i$.

Subproblema nuevo 2 Subproblema antiguo + restricción $x_i \geq i + 1$.

Si es innecesario ramificar sobre un subproblema, entonces se dice que ya está **terminado.** Las siguientes tres situaciones surgen (en un problema de maximización) en un subproblema terminado: (1) el subproblema es no factible, por lo tanto no puede generar la solución óptima para el PE. (2) El subproblema da una solución óptima en la cual todas las variables tienen valores enteros. Si esta solución óptima tiene un valor de z mejor que el de cualquier solución obtenida antes y que es factible en el PE, entonces se vuelve una **solución probable** (candidata), y su valor de z se convierte en el acotamiento inferior (*lower bond*, LB) del valor óptimo de z para el PE. En este caso, el subproblema actual podría dar la solución óptima para la PE. (3) El valor óptimo de z para el subproblema no excede (en un problema de maximización) el LB actual, por eso podría dejar de ser tomado en cuenta.

Ramificación y acotamiento para el PE mezclado

Cuando se ramifica sobre una variable fraccionaria, sólo se hace sobre las que se requiere que sean enteras.

Ramificación y acotamiento para problemas de la mochila

Se podrían resolver con facilidad los subproblemas poniendo primero el mejor objeto (en términos de beneficio por unidad de peso) en la mochila, luego el siguiente mejor, y así sucesivamente, hasta que una fracción de un objeto se usa para llenar por completo la mochila.

Ramificación y acotamiento para minimizar el retraso en una sola máquina

Se empieza por ramificar y determinar cuál trabajo se debe procesar al último. Suponga que hay n trabajos. En un nodo donde son fijos el j-ésimo trabajo por ser procesado, el $(j + 1)$-ésimo trabajo por ser procesado, ..., el n-ésimo trabajo por ser procesado, un acotamiento inferior para el retraso total está dado por (retraso del j-ésimo trabajo por ser procesado) + (retraso del $(j + 1)$-ésimo trabajo por ser procesado) + $\cdots$ + (retraso del n-ésimo trabajo por ser procesado).

Ramificación y acotamiento para el problema del agente viajero

Los subproblemas son problemas de asignación. Si la solución óptima para un subproblema no contiene subtours, entonces es una solución factible para el problema del agente viajero. Luego se generan nuevos subproblemas mediante ramificación para excluir un subtour. Se elimina un subproblema si su valor óptimo de z es inferior al de la mejor solución factible determinada antes.

Métodos heurísticos para el problema del agente viajero

Para aplicar el método heurístico del vecino más cercano (MHVMC) se empieza en cualquier ciudad y luego "se visita" la ciudad más cercana. Luego se dirige uno a la ciudad que aún no se ha visitado, pero que sea la más cercana a la ciudad que recién se ha abandonado. Se continúa de este modo hasta que se obtiene un tour. Después de aplicar este procedimiento, empezando en cada ciudad, se elige el mejor tour encontrado.

En el método heurístico de la inserción más barata (MHIMB), se empieza en cualquier ciudad y se determina el vecino más cercano. Luego se crea un subtour uniendo estas dos ciudades. Después se reemplaza un arco en el subtour [por ejemplo, el arco (i, j)] por la combinación de dos arcos: (i, k) y (k, j), donde k no está en el subtour actual, que incrementará la distancia del subtour en la cantidad más pequeña (o más barata). Se continúa con este procedimiento hasta no obtener un tour. Después de aplicar este procedimiento empezando en cada ciudad, se toma el mejor tour encontrado.

Enumeración implícita

Se podría aplicar la enumeración implícita para determinar una solución óptima en un PE $0-1$. Cuando se ramifica en un nodo se crean dos subproblemas nuevos (en el caso de algunas variables libres x_i) al sumar las restricciones $x_i = 0$ y $x_i = 1$. Si la mejor terminación de un nodo es factible, entonces no se requiere ramificar en el nodo. Si la mejor terminación es factible y mejor que la solución probable actual (candidata), entonces el nodo actual genera un nuevo acotamiento inferior (LB) (en un problema de maximización) y podría ser óptimo. Si la mejor terminación es factible y no es mejor que la solución probable actual, entonces el nodo actual se podría dejar fuera. Si hay por lo menos una restricción en un nodo, dado que no es satisfecha por alguna terminación del nodo, entonces el nodo no puede generar una solución factible, ni una solución óptima para el PE.

Algoritmo del plano de corte

Paso 1 Determine el tableau óptimo para la relajación de la programación lineal del PE. Si todas las variables en la solución óptima asumen valores enteros, entonces ha encontrado una solución óptima para el PE; si no sucede así, prosiga con el paso 2.

Paso 2 Escoja una restricción en el tableau óptimo de la relajación del PL cuyo lado derecho tenga la parte fraccionaria más cercana a $\frac{1}{2}$. Esta restricción se usa para generar un corte.

Paso 2a En lo que se refiere a la restricción identificada en el paso 2, escriba su lado derecho y cada coeficiente de las variables en la forma $[x] + f$, donde $0 \leq f < 1$.

Paso 2b Vuelva a escribir la restricción que se usó para generar el corte como:

Todos los términos con coeficiente entero = todos los términos con coeficiente fraccionario

Entonces el corte es

$$\text{Todos los términos con coeficiente fraccionario} \leq 0$$

Paso 3 Utilice el simplex dual con el objeto de determinar la solución óptima para la relajación del PL, con el corte como una restricción adicional. Si todas las variables asumen valores enteros en la solución óptima, entonces ha encontrado una solución óptima para el PE. En caso contrario, elija la restricción con el lado derecho que tenga la fracción más cercana a un medio y con ella genere otro corte, el cual se suma al tableau. Continúe con este proceso hasta obtener una solución en la cual todas las variables sean enteros. Ésta será una solución óptima para el PE.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 En el problema de Sailco de la sección 3.10 suponga que se contrae un costo fijo de 200 dólares durante cada trimestre en que tiene lugar la producción. Formule un PE para minimizar el costo total de Sailco al cumplir con la demanda de los cuatro trimestres.

2 Explique cómo podría utilizar la programación entera y las funciones lineales por segmentos para resolver el problema siguiente de optimización. (*Sugerencia*: aproxime x^2 y y^2 mediante funciones lineales por segmentos.)

$$\begin{aligned} \max z &= 3x^2 + y^2 \\ \text{s.a} \quad x + y &\leq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

3[†] El equipo de gimnasia olímpica de Transilvania consta de 6 personas. Transilvania tiene que seleccionar tres personas para viga de equilibrio y ejercicios de piso. También tiene que presentar un total de cuatro personas por cada evento. La calificación que cada gimnasta puede obtener en cada evento se muestra en la tabla 89. Plantee un PE con el que se maximice la calificación total que obtengan los gimnastas de Transilvania.

4[‡] La decisión de una corte estableció que la matrícula de cada escuela de bachillerato en Metropolis debe tener por lo menos 20% de negros. El número de estudiantes de bachillerato, blancos y negros, en cada uno de los cinco distritos escolares de la ciudad se muestra en la tabla 90. La distancia (en millas) que un estudiante debe viajar a cada escuela de bachillerato en cada distrito, se proporciona en la tabla 91. La política escolar establece que todos los estudiantes en un distrito dado asistan a la misma escuela. Si se supone que cada escuela debe tener una matrícula de por lo menos 150 estudiantes, formula un PE con el cual se pueda minimizar la distancia total que los estudiantes de Metropolis tienen que recorrer hasta la escuela.

5 Los Cubs pretenden determinar cuál de los pitchers siguientes, que son agentes libres, deben contratar: Rick Sutcliffe (RS), Bruce Sutter (BS), Dennis Eckersley (DE), Steve Trout (ST), Tim Stoddard (TS). El costo de la contratación de cada pitcher y el número de victorias que cada pitcher sumará a los Cubs se muestra en la tabla 92. Los Cubs quieren contratar a los pitchers que sumarán el número más alto de victorias al equipo, sujeto a las restricciones siguientes:

a Se pueden gastar cuando mucho 12 millones de dólares.

TABLA 89

Gimnasta	Viga de equilibrio	Ejercicios de piso
1	8.8	7.9
2	9.4	8.3
3	9.2	8.5
4	7.5	8.7
5	8.7	8.1
6	9.1	8.6

TABLA 90

Distrito	Blancos	Negros
1	80	30
2	70	5
3	90	10
4	50	40
5	60	30

[†]Basado en Ellis y Corn (1984).
[‡]Basado en Liggett (1973).

TABLA 91

Distrito	Escuela de bachillerato 1	Escuela de bachillerato 2
1	1	2
2	0.5	1.7
3	0.8	0.8
4	1.3	0.4
5	1.5	0.6

TABLA 92

Pitcher	Costo en millones de dólares de la contratación	Victorias sumadas a los Cubs
RS	6	6 (derecho)
BS	4	5 (derecho)
DE	3	3 (derecho)
ST	2	3 (izquierdo)
TS	2	2 (derecho)

b Si se contratan a DE y ST, entonces BS no puede ser contratado.

c Se pueden contratar cuando mucho dos pitchers derechos.

d Los Cubs no pueden contratar a BS y RS juntos.

Formule un PE que ayude a los Cubs a determinar a quién contratar.

6 La universidad estatal tiene que comprar 1 100 computadoras de tres vendedores. El vendedor 1 carga 500 dólares por computadora más un cargo por la entrega de 5 000 dólares. El vendedor 2 carga 350 dólares por computadora más un cargo por la entrega de 4 000 dólares. El vendedor 3 carga 250 dólares por computadora más un cargo por la entrega de 6 000 dólares. El vendedor 1 venderá a la universidad a lo más 500 computadoras; el vendedor 2, cuando mucho 900, y el vendedor 3, cuando más, 400. Plantee un PE para minimizar el costo de la compra de las computadoras necesarias.

7 Resuelva el PE siguiente mediante el método de ramificación y acotamiento

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 5x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0&;\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned}$$

8 Resuelva el PE siguiente mediante el método de ramificación y acotamiento

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 - x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0&;\ x_1 \text{ enteros} \end{aligned}$$

9 Resuelva el PE siguiente mediante el método de ramificación y acotamiento

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0&;\ x_1, x_2 \text{ enteros} \end{aligned}$$

10 Imagine un condado donde hay monedas de 1, 5, 10, 20, 25 y 50 centavos. Usted trabaja en el centro comercial Two-Twelve y tiene que dar a un cliente 91 centavos de cambio. Formule un PE con el que minimice el número de monedas necesarias para dar el cambio correcto. Aplique lo que sabe acerca de los problemas de la mochila para resolver el PE por medio del método de ramificación y acotamiento. (*Sugerencia*: sólo necesita resolver un problema de 90 centavos.)

11 Mediante el método de ramificación y acotamiento encuentre la solución óptima para el problema del agente viajero de la tabla 93.

12 Aplique el método de la enumeración implícita para determinar la solución óptima del problema 5.

13 Determine la solución óptima del PE 0−1 siguiente mediante el método de la enumeración implícita:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 - 7x_2 + 10x_3 + 3x_4 - x_5 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 \le 0 \\ & 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 \le 3 \\ & \quad - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \ge 2 \end{aligned}$$

Todas las variables son 0 o 1

14 Un camión que entrega bebidas refrescantes inicia en la localidad 1 y tiene que entregar mercancía en las localidades 2, 3, 4 y 5 antes de regresar al lugar 1. La distancia entre estos lugares se proporciona en la tabla 94. Se desea minimizar la distancia total que recorre el camión de bebidas. ¿En qué orden debería hacer sus entregas el camión?

15 En el Hospital General Blair se ejecutan seis tipos de operaciones quirúrgicas. Los tipos de operaciones que cada cirujano está calificado para practicar (señaladas por una X) se proporcionan en la tabla 95. Suponga que el cirujano 1 y el cirujano 2 no simpatizan entre sí, y no pueden estar al mismo tiempo de servicio. Formule un PE cuya solución determine la cantidad mínima de cirujanos necesarios para que el hospital pueda desarrollar todos los tipos de operaciones.

TABLA 93

	Ciudad				
Ciudad	1	2	3	4	5
1	—	3	1	7	2
2	3	—	4	4	2
3	1	4	—	4	2
4	7	4	4	—	7
5	2	2	2	7	—

TABLA 94

	Localidad				
Localidad	1	2	3	4	5
1	0	20	4	10	25
2	20	0	5	30	10
3	4	5	0	6	6
4	10	25	6	0	20
5	35	10	6	20	0

TABLA 95

	Operación					
Cirujano	1	2	3	4	5	6
1	x	x		x		
2			x		x	x
3			x		x	
4	x					x
5		x				
6				x	x	

16 Eastinghouse embarca 12 000 capacitores por mes para sus clientes. Se podrían producir los capacitores en tres plantas distintas. La capacidad de producción, costos fijos mensuales de operación y costos variables por la producción de un capacitor en cada planta se proporcionan en la tabla 96. El costo fijo en una planta se contrae sólo si la planta se usa para hacer capacitores. Desarrolle un modelo de programación con enteros cuya solución le indique a Eastinghouse cómo minimizar sus costos mensuales por cumplir con la demanda de sus clientes.

17[†] La acerera de Newcor recibió un pedido de 25 toneladas de acero. El acero debe tener 5% de carbono y 5% de molibdeno por peso. El acero es el resultado de combinar tres tipos de metales: lingotes de acero, acero de desperdicio y aleaciones. Están disponibles para la compra cuatro lingotes de acero. El peso (en toneladas), costo por tonelada, contenido de carbono y molibdeno de cada lingote se proporcionan en la tabla 97.

Se pueden comprar tres tipos de aleaciones. El costo por tonelada y composición química de cada aleación se dan en la tabla 98.

El desperdicio de acero se compra a un costo de 100 dólares por tonelada, y contiene 3% de carbono y 9% de mo-

TABLA 96

Planta	Costos fijos (en miles de dólares)	Costos variables (dólares)	Capacidad de producción
1	80	20	6 000
2	40	25	7 000
3	30	30	6 000

TABLA 97

Lingote	Peso	Costo por tonelada (dólares)	% de carbono	% de molibdeno
1	5	350	5	3
2	3	330	4	3
3	4	310	5	4
4	6	280	3	4

[†]Basado en Westerberg, Bjorklund, y Hultman (1977).

TABLA 98

Aleación	Costo por tonelada (dólares)	Carbono %	Molibdeno (%)
1	500	8	6
2	450	7	7
3	400	6	

libdeno. Plantee un problema de programación entera, mezclada con cuya solución indique a Newcor cómo minimizar el costo de cumplir con el pedido.

18[†] Monsanto produce anualmente 359 millones de libras de anhidrido maleico. Dispone de un total de cuatro reactores para elaborar este producto. Cada reactor tiene la aptitud de funcionar en uno de tres regimenes. El costo (en miles de dólares) y libras producidas (en millones) anuales para cada reactor y cada régimen se proporcionan en la tabla 99. Un reactor sólo puede funcionar a un régimen el año completo. Prepare un PE cuya solución indique a Monsanto el método de costo mínimo para cumplir con su demanda anual de anhidrido maleico.

19[‡] Hallco tiene un turno diurno y un turno nocturno. No importa cuántas unidades se producen; el único costo de producción durante un turno es un costo de preparación. Cuesta 8 000 dólares la corrida del día y 4 500 dólares la corrida de la noche. La demanda para los dos días siguientes es como se indica: día 1, 2 000; noche 1, 3 000; día 2, 2 000; noche 2, 3 000. Cuesta un dólar por unidad conservar una unidad en inventario durante un turno. Determine un programa de producción que minimice la suma de los costos de preparación y de inventario. Se debe cumplir con la demanda justo a tiempo.

20[‡] Después de escuchar en un seminario las virtudes de la teoría japonesa de producción, Hallco redujo su costo de preparación del turno diurno a 1000 dólares por turno y el del turno nocturno a 3 500 por turno. Determine un programa de producción que minimice la suma de costos de preparación y de inventario. Toda la demanda se debe cumplir justo a tiempo. Demuestre que la disminución en los costos de preparación ¡en realidad ha *elevado* el nivel promedio de inventario!

TABLA 99

Reactor	Régimen	Costo (miles de dólares)	Libras
1	1	50	80
1	2	80	140
1	3	100	170
2	1	65	100
2	2	90	140
2	3	120	215
3	1	70	112
3	2	90	153
3	3	110	195
4	1	40	65
4	2	60	105
4	3	70	130

[†]Basado en Boykin (1985).
[‡]Basado en Zangwill (1992).

Grupo B

21[§] Gotham City fue dividida en ocho distritos. El tiempo que tarda una ambulancia en llegar de un distrito a otro se muestra en la tabla 100. La población de cada distrito (en miles) es como se indica: distrito 1, 40; distrito 2, 30; distrito 3, 35; distrito 4, 20; distrito 5, 15; distrito 6, 50; distrito 71, 45; distrito 8, 60. La ciudad sólo tiene dos ambulancias y desea ubicarlas en tales lugares que se maximice el número de personas que viven a dos minutos de una ambulancia. Plantee una PE para alcanzar este objetivo.

22 Una compañía debe terminar tres trabajos. El tiempo de proceso (en minutos) requerido se muestra en la tabla 101. Un trabajo no se puede procesar en la máquina j a menos que para toda $i < j$ el trabajo ha completado su proceso en la máquina i. Una vez que un trabajo empieza su proceso en la máquina j, dicho trabajo debe continuar en la máquina j. El tiempo de flujo para un trabajo es la diferencia entre su tiempo de terminación y el tiempo en el cual el trabajo empieza su primera etapa de proceso. Plantee un PE cuya solución se pueda usar para minimizar el tiempo de flujo promedio de los tres trabajos. (*Sugerencia*: se requieren dos tipos de restricciones; la restricción tipo 1 asegura que un trabajo no puede empezar a ser procesado en una máquina hasta que todas las partes preliminares del trabajo se hayan terminado. Usted necesita cinco restricciones de este tipo. La restricción tipo 2 da la certeza de que sólo un trabajo ocupará una máquina en cualquier tiempo dado. Por ejemplo, en la máquina 1, el trabajo 1 es terminado antes que empiece el trabajo 2, o el trabajo 2 se termina antes que el trabajo 1 empiece.)

TABLA 100

	Distrito							
Distrito	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	3	4	6	8	9	8	10
2	3	0	5	4	8	6	12	9
3	4	5	0	2	2	3	5	7
4	6	4	2	0	3	2	5	4
5	8	8	2	3	0	2	2	4
6	9	6	3	2	2	0	3	2
7	8	12	5	5	2	3	0	2
8	10	9	7	4	4	2	2	0

TABLA 101

	Máquina			
Trabajo	1	2	3	4
1	20	—	25	30
2	15	20	—	18
3	—	35	28	—

[§]Basado en Eaton *et al.* (1985).

23 Arthur Ross, Inc., debe completar muchos ingresos de impuestos corporativos durante el periodo del 15 de febrero al 15 de abril. Este año, la compañía debe empezar y terminar los cinco trabajos mostrados en la tabla 102 durante este periodo de ocho semanas. Arthur Ross emplea cuatro contadores de tiempo completo quienes trabajan normalmente 40 horas a la semana. Si es necesario, trabajan hasta 20 horas de tiempo extra por semana, por lo cual reciben 100 dólares la hora. Aplique la programación entera para determinar cómo Arthur Ross podrá minimizar el costo del tiempo extra en que se incurre para terminar todos los trabajos el 15 de abril.

24† PSI opina que se necesitará la capacidad de generación mostrada en la tabla 103 durante los cinco años siguientes. La compañía tiene la oportunidad de construir (y luego operar) plantas generadoras de energía eléctrica con las especificaciones que se proporcionan en la tabla 104. Formule un PE con el cual se minimice el costo total de cumplir con la capacidad necesaria de generación de los cinco años siguientes.

25† Reconsidere el problema 24. Suponga que, al principio del año 1, las plantas generadoras 1 a 4 ya se construyeron y están en operación. Al inicio de cada año, PSI podría parar una planta que está operando o reabrir una planta parada. Los costos asociados con la reapertura o el paro de una planta se muestran en la tabla 105. Plantee un PE para minimizar el costo total por el cumplimiento de la demanda de los cinco años venideros. (*Sugerencia*: sea

X_{it} = 1 si la planta i opera durante el año t

Y_{it} = 1 si la planta i para al finalizar el año t

Z_{it} = 1 si la planta i es reabierta al inicio del año t

Usted debe asegurar que si $X_{it} = 1$ y $X_{i,t+1} = 0$, entonces $Y_{it} = 1$. También debe tener la certeza de que si $X_{i,t-1} = 0$ si $X_{it} = 1$, entonces $Z_{it} = 1$.)

26‡ Houseco Developers planean construir tres edificios de oficinas. El tiempo requerido para terminar cada uno de ellos y la cantidad de trabajadores necesarios para ejecutar la obra en todos los tiempos se proporcionan en la tabla 106. Una vez que se termina un edificio se renta por la siguiente cantidad anual: edificio 1, 50 000 dólares; edificio 2, 30 000 dólares; edificio 3, 40 000 dólares. Houseco afronta las restricciones siguientes:

a Durante cada año se dispone de 60 trabajadores.

b Se puede iniciar cuando mucho un edificio durante cualquier año.

c El edificio 2 se debe terminar al final del año 4.

Formule un PE que maximice la renta total que gana Houseco al final del año 4.

27 Hay cuatro camiones disponibles para entregar leche a cinco tiendas. La capacidad y los costos de operación diarios de cada camión se muestran en la tabla 107. La demanda de cada tienda puede ser surtida por sólo un camión, pero un camión podría entregar a más de una tienda. La demanda diaria de cada tienda es como se indica: tienda 1, 100 galones; tienda 2, 200 galones; tienda 3, 300 galones; tienda 4, 500 galones; tienda 5, 800 galones. Formule un PE con el que se pueda minimizar el costo diario de cumplir con la demanda.

TABLA 102

Trabajo	Duración (semanas)	Horas de contador necesarias por semana
1	3	120
2	4	160
3	3	80
4	2	80
5	4	100

TABLA 103

Año	Capacidad de generación (millones de kwh)
1	80
2	100
3	120
4	140
5	160

TABLA 104

Planta	Capacidad de generación (millones de kwh)	Costo de construcción (millones de dólares)	Costo de operación anual (millones de dólares)
1	70	20	1.5
2	50	16	0.8
3	60	18	1.3
4	40	14	0.6

TABLA 105

Planta	Costo de reapertura (millones de dólares)	Costo por parar (millones de dólares)
1	1.9	1.7
2	1.5	1.2
3	1.6	1.3
4	1.1	0.8

TABLA 106

Edificio	Duración del proyecto (años)	Número de trabajadores necesarios
1	2	30
2	2	20
3	3	20

†Basado en Muckstadt y Wilson (1968).

‡Basado en Peiser y Andrus (1983).

TABLA 107

Camión	Capacidad (galones)	Costos de operación diarios (dólares)
1	400	45
2	500	50
3	600	55
4	1 100	60

TABLA 108

	Costo del auditor (dólares)			
	Noreste	Oeste medio	Oeste	Sur
Nueva York	1 100	1 400	1 900	1 400
Chicago	1 200	1 000	1 500	1 200
Los Angeles	1 900	1 700	1 100	1 400
Atlanta	1 300	1 400	1 500	1 050

TABLA 109

Proyecto	Trabajadores necesarios	Rendimiento (dólares)
1	1,4,5,8	10 000
2	2,3,7,10	15 000
3	1,6,8,9	6 000
4	2,3,5,10	8 000
5	1,6,7,9	12 000
6	2,4,8,10	9 000

28[†] El estado de Texas efectúa con frecuencia auditorías a compañías que tienen negocios en Texas. Las oficinas centrales de estas compañías están ubicadas a menudo fuera del estado, de modo que los auditores tienen que viajar a lugares fuera del estado. Los auditores tienen que hacer al año 500 viajes a ciudades en el noreste, 400 viajes a ciudades en el oeste medio, 300 viajes a ciudades en el oeste y 400 viajes a ciudades en el sur. Texas está proyectando ubicar a sus auditores en Chicago, Nueva York, Atlanta y Los Ángeles. El costo anual por ubicar auditores en cualquier ciudad es 100 000. El costo por enviar un auditor desde cualquiera de estas ciudades a una región dada del país, se muestra en la tabla 108.

TABLA 111

	Proyecto					
	1	2	3	4	5	6
Tarifa (dólares)	250	300	250	300	175	180

TABLA 112

Distrito	Coordenadas x	Coordenadas y	Toneladas	Costo (millones de dólares) Fijo	Costo (millones de dólares) Variable
1	4	3	49	2	310
2	2	5	874	1	40
3	10	8	555	1	51
4	2	8	352	1	341
5	5	3	381	3	131
6	4	5	428	2	182
7	10	5	985	1	20
8	5	1	105	2	40
9	5	8	258	4	177
10	1	7	210	2	75

Plantee un PE cuya solución minimice el costo anual que se genera por enviar a los auditores fuera del estado.

29 Una compañía de consultoría tiene 10 empleados, cada uno de los cuales puede trabajar cuando mucho en dos proyectos de grupo. Hay seis proyectos en planes. Cada proyecto requiere cuatro de nuestros 10 trabajadores. Los trabajadores necesarios y las ganancias generadas en cada proyecto se muestran en la tabla 109.

A cada trabajador que interviene en *cualquier proyecto,* se debe pagar el anticipo de la tabla 110.

Por último, cada trabajador que interviene en un proyecto se le paga la tarifa del proyecto que se muestra en la tabla 111.

¿Cómo se puede maximizar la ganancia?

30 La ciudad de Nueva York tiene 10 distritos de recolección de basura y pretende determinar cuál de los distritos debería ser un tiradero. Cuesta 1 000 dólares acarrear una tonelada de basura un tramo de una milla. La ubicación de cada distrito, la cantidad de toneladas de basura producidas en un año por el distrito, el costo fijo anual (en millones de dólares) por operar un tiradero, y el costo variable (por tonelada) por procesar una tonelada de basura en un tiradero, se muestran en la tabla 112.

TABLA 110

	Trabajador									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anticipo (dólares)	800	500	600	700	800	600	400	500	400	500

[†]Basado en Fitzsimmons y Allen (1983).

TABLA 113

Ciudad	Llamadas necesarias
San Antonio	2
Phoenix	3
Los Ángeles	6
Seattle	3
Detroit	4
Minneapolis	2
Chicago	7
Atlanta	5
Nueva York	9
Boston	5
Filadelfia	4

Por ejemplo, el distrito 3 se localiza en las coordenadas (10, 8). El distrito 3 produce 555 toneladas de basura al año, y cuesta un millón de dólares al año en costos fijos operar un tiradero en el distrito 3. Cada tonelada de basura procesada en el sitio 3 incurre en un costo variable de 51 dólares. Cada tiradero puede procesar cuando mucho 1 500 toneladas de basura. Cada distrito debe enviar toda su basura a un solo sitio. Determine dónde localizar los tiraderos de tal manera que se minimice el costo total por año.

31 Usted es el gerente de ventas de Eli Lilly. Usted desea ubicar oficinas centrales de ventas en cuatro de las ciudades de la tabla 113. La cantidad de llamadas telefónicas de ventas (en miles) que se deben hacer en cada ciudad se da en la tabla 113. Por ejemplo, San Antonio requiere 2000 llamadas y está a 602 millas de Phoenix. La distancia entre cada par de ciudades se da en la tabla 114 y en el archivo Test1.xls. ¿En dónde se deben ubicar las oficinas centrales con el objeto de minimizar la distancia total que se debe recorrer para hacer las llamadas necesarias?

32 Alcoa produce lingotes de 110, 200 y 300 pies de largo para sus clientes. La demanda de lingotes de esta semana se muestra en la tabla 115.

Alcoa tiene cuatro hornos en los cuales se pueden producir los lingotes. Cada horno puede funcionar 50 horas durante una semana. Como los lingotes se fabrican al cortar tiras largas de aluminio, los lingotes más largos requieren menos tiempo de producción que los más pequeños. Si un horno se destina por completo a producir un tipo de lingote, la cantidad que puede producir en una semana se señala en la tabla 116.

Por ejemplo, el horno 1 tendría la capacidad de producir 350 lingotes de 300 pies por semana. El material de un lingote cuesta 10 dólares por pie. Si un cliente quiere un lingote de 100 o 200 pies, entonces aceptará un lingote de dicha medida o más grande. ¿Cómo minimizaría Alcoa los costos de material generados en el cumplimiento de la demanda semanal?

33[‡] Al tratar un tumor en el cerebro mediante radiaciones, los médicos quieren la cantidad máxima de radiación posible para bombardear el tejido en donde se localiza el tumor. Pero la restricción es que hay una cantidad máxima de radiación que el tejido normal puede tolerar sin sufrir daño. Por lo tanto, los médicos deben decidir cómo dirigir la radiación de tal manera que sea máxima la radiación que llegue al tumor sujeta a la restricción de no dañar el tejido sano. Como un ejemplo simple de esta situación, suponga que se pueden dirigir seis tipos de haces de radiación (los haces difieren en dirección e intensidad) a un tumor. La región en donde se localiza el tumor se dividió en seis regiones: tres regiones contienen tumores y tres están sanas. La cantidad de radiación dirigida a cada región por cada tipo de haz se muestra en la tabla 117.

Si cada región de tejido normal tolera a lo más 40 unidades de radiación, entonces ¿qué haces se deberían usar para maximizar la cantidad total de radiación recibida por el tumor?

34 Acaba de empezar el 2003. Gotham City está tratando de vender bonos municipales para apoyar las mejoras en las instalaciones recreativas y en las carreteras. El valor nominal y la fecha de vencimiento en la que el capital alcanza al vencimiento de los bonos están en la tabla 118.

Gold and Silver (GS) quiere suscribirse a los bonos de Gotham City. Una propuesta de Gotham para suscribirse a esta emisión, consiste en lo siguiente:

- Una tasa de interés (3, 4, 5, 6, o 7%) por cada bono. Los cupones se pagan anualmente.
- Una prima pagada por adelantado por GS a Gotham City.

GS ha determinado los precios razonables (en miles) para bonos posibles, como se muestra en la tabla 119.

Por ejemplo, si GS se suscribe en el bono al 5% que vence en el 2006, entonces cargaría a Gotham City 444 000 dólares por ese bono. GS está limitada a usar cuando mucho tres tasas de interés distintas. GS quiere una ganancia de por lo menos 46 000 dólares. La ganancia de GS está dada por (Precio de venta de los bonos) −

(Valor nominal de los bonos) − (Prima)

Para maximizar las oportunidades que GS obtendrá de los negocios de Gotham City, GS quiere minimizar el costo total de la emisión de bonos de Gotham City. El costo total de la emisión de bonos de Gotham City está dado por

(Interés total sobre los bonos) − (Prima)

Por ejemplo, si el bono del año 2005 es emitido a una tasa de 4%, entonces Gotham City debe pagar dos años de interés del cupón, es decir, 2*(0.04)*(700 000 dólares) = 56 000 dólares de interés.

¿Qué asignación de tasas de interés para cada bono y primas por adelantado aseguran que GS obtiene la ganancia deseada (si consigue el contrato) y maximiza las oportunidades de GS de lograr el negocio de Gotham City?

35 Cuando usted solicita números telefónicos 800 a AT&T para telemercadeo, AT&T utiliza un modelo de Solver para indicar a usted dónde debe ubicar su centro de llamadas a fin de minimizar sus costos de operación sobre un horizonte de 10 años. Con el objeto de ilustrar el modelo, suponga que usted está considerando siete ubicaciones para centros de llamadas: Boston, Nueva York, Charlotte, Dallas, Chicago, L.A. y Omaha. Ya conocemos el costo promedio (en dólares) en que se incurre si una llamada de telemercadeo es hecha desde cualquiera de estas ciudades a cualquier región del país. También sabemos los salarios por hora que debemos pagar a los trabajadores en cada ciudad (véase tabla 120).

Suponga que una llamada promedio requiere 4 minutos. Hacemos llamadas 250 días al año, y el número promedio

[‡]Basado en "Radiotherapy Design Using Mathematical Programming Models", D. Sonderman y P. Abrahamson, *Operations Research*, Vol. 33, No. 4 (1985):705-725.

TABLA 114

	San Antonio	Phoenix	Los Ángeles	Seattle	Detroit	Minneapolis	Chicago	Atlanta	Nueva York	Boston	Filadelfia
San Antonio	—	602	1 376	1 780	1 262	1 140	1 060	935	1 848	2 000	1 668
Phoenix	602	—	851	1 193	1 321	1 026	1 127	1 290	2 065	2 201	1 891
Los Ángeles	1 376	851	—	971	2 088	1 727	1 914	2 140	2 870	2 995	2 702
Seattle	1 780	1 193	971	—	1 834	1 432	1 734	2 178	2 620	2 707	2 486
Detroit	1 262	1 321	2 088	1 834	—	403	205	655	801	912	654
Minneapolis	1 140	1 026	1 727	1 432	403	—	328	876	1 200	1 304	1 057
Chicago	1 060	1 127	1 914	1 734	205	328	—	564	957	1 082	794
Atlanta	935	1 290	2 140	2 178	655	876	564	—	940	1 096	765
Nueva York	1 848	2 065	2 870	2 620	801	1 200	957	940	—	156	180
Boston	2 000	2 201	2 995	2 707	912	1 304	1 082	1 096	156	—	333
Filadelfia	1 668	1 891	2 702	2 486	654	1 057	794	765	180	333	—

TABLA 115

Lingote (pies)	Demanda
100	700
200	300
300	150

TABLA 116

	Longitud del lingote		
Horno	100'	200'	300'
1	230	340	350
2	230	260	280
3	240	300	310
4	200	280	300

TABLA 117

Normal			Tumor			
1	2	3	1	2	3	Haz
16	12	8	20	12	6	1
12	10	6	18	15	8	2
9	8	13	13	10	17	3
4	12	12	6	18	16	4
9	4	11	13	5	14	5
8	7	7	10	10	10	6

TABLA 118

Fecha de vencimiento	Capital (miles de dólares)
2005	700
2006	450
2007	250
2008	600
2009	300

TABLA 119

	Cantidad al vencimiento (miles de dólares)				
Tasa de interés (%)	2005	2006	2007	2008	2009
3	695	427	233	504	248
4	701	433	235	522	256
5	715	444	247	548	268
6	731	460	255	575	288
7	750	478	269	605	307

de llamadas por día a cada región del país, se proporciona en la tabla 121.

El costo de la construcción de un centro de llamadas en cada localidad posible, está en la tabla 122.

Cada centro de llamadas puede efectuar al menos 5 000 llamadas por día. Con esta información, ¿cómo se puede minimizar el costo descontado (a 10% por año) de echar a andar la operación de telemercadeo durante 10 años? Suponga que todos los salarios y los costos de las llamadas se pagan al final de cada año.

36 El condado de Cook necesita construir dos hospitales. Hay nueve ciudades donde se podrían construir estas instalaciones. La cantidad de visitas al hospital que hacen cada año los habitantes de cada ciudad y las coordenadas x y y de cada ciudad se proporcionan en la tabla 123.

Para minimizar la distancia total que los pacientes tienen que recorrer hasta los hospitales, ¿dónde se deberían ubicar los hospitales? (*Sugerencia*: utilice las funciones *Lookup* (Búsqueda) para generar las distancias entre cada par de ciudades).

TABLA 120

Costo de la llamada	Nueva Inglaterra	Atlántico medio	Sureste	Suroeste	Grandes Lagos	Planicies	Montañas Rocosas	Pacífico	Salario por hora (dólares)
Boston	1.2	1.4	1.1	2.6	2	2.2	2.8	2.2	14
Nueva York	1.3	1	1.3	2.2	1.8	1.9	2.5	2.8	16
Charlotte	1.5	1.4	0.9	1.9	2.1	2.3	2.6	3.3	11
Dallas	2	1.8	1.2	1	1.7	2.2	1.8	2.7	12
Chicago	2.1	1.9	2.3	1.5	0.9	1.3	1.2	2.2	13
Los Ángeles	2.5	2.1	1.9	1.2	1.7	1.5	1.4	1	18
Omaha	2.2	2.1	2	1.3	1.4	0.6	0.9	1.5	10

TABLA 121

Región	Llamadas diarias
Nueva Inglaterra	1 000
Atlántico medio	2 000
Sureste	2 000
Suroeste	2 000
Grandes Lagos	3 000
Planicies	1 000
Montañas Rocosas	2 000
Pacífico	4 000

TABLA 122†

Ciudad	Costo de construcción (millones de dólares)
Boston	2.7
Nueva York	3
Charlotte	2.1
Dallas	2.1
Chicago	2.4
Los Ángeles	3.6
Omaha	2.1

†Basado en Spencer, T., Brigandi, A., Dargon D. y Sheehan, M., "AT&T's Telemarketing Site Selection System Offers Customer Support", *Interfaces*, Vol. 20, No. 1, 1990.

TABLA 123

Ciudad	x	y	Visitas
1	0	0	3 000
2	10	3	4 000
3	12	15	5 000
4	14	13	6 000
5	16	9	4 000
6	18	6	3 000
7	8	12	2 000
8	6	10	4 000
9	4	8	1 200

BIBLIOGRAFÍA

En los ocho textos siguientes se encuentra un análisis más avanzado de programación entera:

Garfinkel, R. y G. Nemhauser. *Integer Programming*. Nueva York: Wiley, 1972.

Nemhauser, G. y L. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. Nueva York: Wiley, 1999.

Parker, G. y R. Rardin. *Discrete Optimization*. San Diego: Academic Press, 1988.

Salkin, H. *Integer Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1975.

Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming*. Nueva York: Wiley, 1998.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. Nueva York: Wiley, 1979.

Taha, H. *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations*. Orlando, Fla.: Academic Press, 1975. También ofrece detalles sobre los métodos de ramificación y acotamiento para el problema del agente viajero.

Wolsey, L. *Integer Programming*. Nueva York: Wiley, 1998.

En las tres obras siguientes se analiza ampliamente el arte de la formulación de problemas de programación entera:

Plane, D., y C. McMillan. *Discrete Optimization: Integer Programming and Network Analysis for Management Decisions*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1971.

Wagner, H. *Principles of Operations Research*, 2a. ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1975. También da detalles del método de ramificación y acotamiento para el problema del agente viajero.

Williams, H. *Model Building in Mathematical Programming*, 4a. ed. Nueva York: Wiley, 1999.

Las técnicas de la relajación de Lagrange y la descomposición de Benders se han aplicado recientemente para resolver muchos problemas grandes de programación entera. El análisis de estas técnicas está fuera del alcance de este libro. El estudiante aventajado e interesado en la relajación de Lagrange debe referirse a Shapiro (1979), Nemhauser y Wolsey (1988), o bien, a

Fisher, M. "An Applications-Oriented Guide to Lagrangian Relaxation", *Interfaces* 15(No. 2, 1985):10-21.

Geoffrion, A. "Lagrangian Relaxation for Integer Programming", en *Mathematical Programming Study 2: Approaches to Integer Programming*, ed. M. Balinski. Nueva York: North-Holland, 1974, pp. 82-114.

El lector interesado en la descomposición de Benders debe consultar a Shapiro (1979), Taha (1975), Nemhauser y Wolsey (1988), o las referencias siguientes:

Geoffrion, A. y G. Graves. "Multicommodity Distribution System Design by Benders' Decomposition", Management Science 20(1974):822-844.

Baker, K. *Introduction to Sequencing and Scheduling*. Nueva York: Wiley, 1974. Analiza el método de ramificación y acotamiento para los problemas del agente viajero y la programación de una máquina.

Bean, J., C. Noon y J. Salton. "Asset Divestiture at Homart Development Company", *Interfaces* 17(No. 1, 1987): 48-65.

Bean, J., y col. "Selecting Tenants in a Shopping Mall", *Interfaces* 18(No. 2, 1988):1-10.

Boykin, R. "Optimizing Chemical Production at Monsanto", *Interfaces* 15(No. 1, 1985):88-95.

Brown, G . y col. "Real-Time Wide Area Dispatch of Mobil Tank Trucks", *Interfaces* 17(No. 1, 1987):107-120.

Calloway, R., M. Cummins y J. Freeland, "Solving Spreadsheet-Based Integer Programming Models: An Example from International Telecommunications", *Decision Sciences* 21(1990):808-824.

Cavalieri, F., A. Roversi y R. Ruggeri. "Use of Mixed Integer Programming to Investigate Optimal Planning Policy for a Thermal Power Station and Extension to Capacity", *Operational Research Quarterly* 22(1971): 221-236.

Choypeng, P., P. Puakpong y R. Rosenthal. "Optimal Ship Routing and Personnel Assigment for Naval Recruitment in Thailand", *Interfaces* 16(No. 4, 1986):47-52.

Day, R. "On Optimal Extracting from a Multiple File Data Storage System: An Application of Integer Programming", *Operations Research* 13(1965):482-494.

Eaton, D., *et al.* "Determining Emergency Medical Service Vehicle Deployment in Austin, Texas", *Interfaces* 15(1985):96-108.

Efroymson, M. y T. Ray. "A Branch-Bound Algorithm for Plant Location", *Operations Research* 14(1966):361-368.

Ellis, P. y R. Corn, "Using Bivalent Integer Programming to Select Teams for Intercollegiate Women's Gymnastics Competition", *Interfaces* 14(1984):41-46.

Fitzsimmons, J. y L. Allen. "A Warehouse Location Model Helps Texas Comptroller Select Out-of-State Audit Offices", *Interfaces* 13 (No. 5, 1983):40-46.

Garfinkel, R. "Minimizing Wallpaper Waste I: A Class of Traveling Salesperson Problems", *Operations Research* 25(1977):741–751.

Garfinkel, R. y G. Nemhauser. "Optimal Political Districting by Implicit Enumeration Techniques", *Management Science* 16(1970):B495-B508.

Gelb, B. y B. Khumawala. "Reconfiguration of an Insurance Company's Sales Regions", *Interfaces* 14(1984):87-94.

Golden, B., L. Bodin, T. Doyle y W. Stewart. "Approximate Traveling Salesmen Algorithms", *Operations Research* 28(1980):694-712. Contiene un excelente análisis de los métodos heurísticos para el problema del agente viajero.

Gomory, R. "Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs", *Bulletin of the American Mathematical Society* 64(1958):275-278.

Hax, A. y D. Candea. *Production and Inventory Management*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984. Métodos de ramificación y acotamiento para problemas de programación de máquinas.

Lawler, L. *et al. The Traveling Salesman Problem*. Nueva York: Wiley, 1985. Todo lo que usted siempre quiso saber acerca de este problema.

Liggett, R. "The Application of an Implicit Enumeration Algorithm to the School Desegregation Problem", *Management Science* 20(1973):159-168.

Magirou, V.F. "The Efficient Drilling of Printed Circuit Boards", *Interfaces* 16(No. 4, 1984):13-23.

Muckstadt, J. y R. Wilson. "An Application of Mixed Integer Programming Duality to Scheduling Thermal Generating Systems", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* (1968):1968-1978.

Peiser, R. y S. Andrus. "Phasing of Income-Producing Real Estate", *Interfaces* 13(1983):1-11.

Salkin, H. y C. Lin. "Aggregation of Subsidiary Firms for Minimal Unemployment Compensation Payments via Integer Programming", *Management Science* 25(1979): 405-408.

Shanker, R. y A. Zoltners. "The Corporate Payments Problem", *Journal of Bank Research* (1972):47-53.

Strong, R. "LP Solves Problem: Eases Duration Matching Process", *Pension and Investment Age* 17(No. 26, 1989): 21.

Walker, W: "Using the Set Covering Problem to Assign Fire Companies to Firehouses", *Operations Research* 22(1974):275-277.

Westerberg, C., B. Bjorklund y E. Hultman. "An Application of Mixed Integer Programming in a Swedish Steel Mill", *Interfaces* 7(No. 2, 1977):39-43.

Zangwill, W. "The Limits of Japanese Production Theory," *Interfaces* 22(No. 5, 1992):14-25.

10

Temas avanzados de programación lineal[†]

Seis temas avanzados de programación lineal se tratan en este capítulo: método simplex revisado, la forma producto de la inversa, generación de columnas, algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe, método simplex para las variables con acotamiento superior y método de Karmarkar para resolver PL. Las técnicas estudiadas se utilizan con frecuencia para resolver problemas grandes de programación lineal. Los resultados de la sección 6.2 tienen un papel muy importante en todo el capítulo.

10.1 Algoritmo del método simplex revisado

La forma de crear un tableau óptimo a partir de un tableau inicial, dando un conjunto óptimo de variables básicas se mostró en la sección 6.2. En realidad, los resultados de la sección 6.2 se usan para elaborar un tableau correspondiente a *cualquier conjunto de variables básicas*. Con el objeto de crear un tableau para cualquier conjunto de variables básicas BV se explica primero la notación siguiente (suponga que el PL tiene m restricciones):

BV = cualquier conjunto de variables básicas (el primer elemento de BV es la variable básica en la primera restricción, la segunda variable en BV es la variable básica en la restricción segunda, y así sucesivamente por consiguiente, BV_j es la variable básica de la restricción j en el tableau deseado).

$\mathbf{b}$ = vector del lado derecho de las restricciones del tableau original.

$\mathbf{a}_j$ = columna para x_j en las restricciones del problema original.

B = matriz $m \times m$ cuya j-ésima columna es la columna para BV_j en las restricciones originales.

c_j = coeficiente de x_j en la función objetivo.

$\mathbf{c}_{\text{BV}}$ = vector renglón $1 \times m$ cuyo j-ésimo elemento es el coeficiente de la función objetivo para BV_j.

$\mathbf{u}_i$ = vector columna $m \times 1$ con j-ésimo elemento igual a 1 y todos los otros elementos iguales a cero.

En resumen, las fórmulas de la sección 6.2 se pueden escribir:

$$B^{-1}\mathbf{a}_j = \text{columna para } x_j \text{ en el tableau BV} \tag{1}$$

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = \text{coeficiente de } x_j \text{ en el renglón 0} \tag{2}$$

$$B^{-1}\mathbf{b} = \text{lado derecho de las restricciones en el tableau BV} \tag{3}$$

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}\mathbf{u}_i = \text{coeficiente de la variable de holgura } s_i \text{ en BV en el renglón 0} \tag{4}$$

[†]En este capítulo se tratan temas que se podrían omitir sin que se pierda la continuidad.

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}(-\mathbf{u}_i) = \text{coeficiente de la variable de excedente } e_i \text{ en el renglón 0 de BV} \quad (5)$$

$$M + \mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{u}_i = \text{coeficiente de la variable artificial } a_i \text{ en el renglón 0 de BV (en un problema de max)} \quad (6)$$

$$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b} = \text{lado derecho del renglón 0 de BV} \quad (7)$$

Si conocemos BV, B^{-1}, y el tableau original, las fórmulas (1) a (7) nos permiten calcular cualquier parte del tableau del simplex para cualquier conjunto de variables básicas BV. Esto significa que si una computadora está programada para ejecutar el algoritmo simplex, entonces todo lo que necesita almacenar la computadora sobre cualquier pivote es el conjunto actual de variables básicas, B^{-1}, y el tableau inicial. Luego se pueden utilizar (1) a (7) para generar cualquier parte del tableau del simplex. Esta idea es la base del algoritmo simplex revisado.

El problema de Dakota del capítulo 6 sirve para ilustrar el algoritmo simplex revisado. Recuerde que después de sumar las variables de holgura s_1, s_2 y s_3, el tableau inicial (tableau 0) para el problema de Dakota es

$$\begin{aligned} \max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s.a} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48 \\ & 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + s_2 = 20 \\ & 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + s_3 = 8 \end{aligned}$$

No importa cuántos pivoteos se hayan completado, B^{-1} para el tableau actual será simplemente la matriz 3×3 cuya j-ésima columna es la columna para s_j en el tableau actual. Por lo tanto, en el caso del tableau original BV(0), el conjunto de variables básicas está dado por

$$\text{BV}(0) = \{s_1, s_2, s_3\}$$
$$\text{NBV}(0) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Hacemos que B_i sean las columnas en el PL original que corresponden a las variables básicas del tableau i. Entonces,

$$B_0^{-1} = B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora ya podemos determinar qué variable no básica debe entrar a la base calculando el coeficiente de cada variable no básica en el renglón 0 actual. Este procedimiento se conoce como una **valoración** de la variable no básica. Según (2) a (5) vemos que no es posible valorar las variables básicas hasta no determinar $\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1}$. Como $\mathbf{c}_{BV} = [0 \quad 0 \quad 0]$, entonces,

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Ahora, mediante (2) valoramos cada variable no básica:

$$\bar{c}_1 = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 60 = -60$$

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = -30$$

$$\bar{c}_3 = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - 20 = -20$$

Como x_1 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0 actual, x_1 debe entrar a la base. Con el fin de continuar con el simplex, todo lo que necesitamos saber con respecto al tableau nuevo es el conjunto nuevo de variables básicas, BV(1), y el correspondiente B_1^{-1}. Para determinar BV(1) buscamos el renglón en el cual x_1 entra a la base. Calculamos la columna para x_1 en el tableau actual y el lado derecho del mismo.

A partir de (1),

$$\text{Columna para } x_1 \text{ en el tableau actual} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De (3),

$$\text{Lado derecho del tableau actual} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Enseguida usamos la prueba del cociente para determinar el renglón en el cual x_1 entra a la base. Los cocientes, o razones, apropiados son para el renglón 1, $\frac{48}{8} = 6$; renglón 2, $\frac{20}{4} = 5$; y renglón 3, $\frac{8}{2} = 4$. Por consiguiente, x_1 debe entrar a la base en el renglón 3. Esto quiere decir que los tableau nuevos (tableau 1) tendrá $\text{BV}(1) = \{s_1, s_2, x_1\}$ y $\text{NBV}(1) = \{s_3, x_2, x_3\}$.

La nueva B^{-1} serán las columnas de s_1, s_2 y s_3 en el tableau nuevo. Con el objeto de determinar la nueva B^{-1}, examinemos la columna en el tableau 0 para la entrada de la variable x_1. De esta columna vemos que al pasar del tableau 0 al tableau 1, tenemos que efectuar las OER siguientes:

1 Multiplicar el renglón 3 del tableau 0 por $\frac{1}{2}$.

2 Reemplazar el renglón 1 del tableau 0 por -4(renglón 3 del tableau 0) + renglón 1 del tableau 0.

3 Sustituir el renglón 2 del tableau 0 por -2(renglón 3 del tableau 0) + renglón 2 del tableau 0.

Al aplicar estas OER a B_0^{-1} se obtiene

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ya podemos valorar todas las variables no básicas para el nuevo tableau. Primero calculamos

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B_1^{-1} = [0 \quad 0 \quad 60]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 30]$$

Luego usamos (2) y (4) para valorar las variables no básicas del tableau 1:

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 0 \quad 30]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 15$$

$$\bar{c}_3 = [0 \quad 0 \quad 30] \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - 20 = -5$$

$$\text{Coeficiente de } s_3 \text{ en el renglón } 0 = [0 \quad 0 \quad 30] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 30$$

Como x_3 es la única variable con un coeficiente negativo en el renglón 0 del tableau 1, introducimos x_3 a la base. Para determinar el nuevo conjunto de variables básicas, BV(2), y la correspondiente B_2^{-1}, determinamos el renglón en el cual entra x_3 a la base y calculamos

$$\text{columna } x_3 \text{ en el tableau } 1 = B_1^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\text{Lado derecho del tableau } 1 = B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Los cocientes apropiados para determinar dónde x_3 debe entrar a la base son renglón 1, ninguno; renglón 2, $\frac{4}{0.5} = 8$; y renglón 3, $\frac{4}{0.25} = 16$. Por lo tanto, x_3 entra a la base en el renglón 2. Luego el tableau 2 tendrá BV(2) $= \{s_1, x_3, x_1\}$ y NBV(2) $= \{s_2, s_3, x_2\}$.

Para calcular B_2^{-1}, obsérvese que para hacer de x_3 una variable básica en el renglón 2, se tienen que ejecutar las OER siguientes en el tableau 1:

1 Reemplazar el renglón 2 del tableau 1 por 2(renglón 2 del tableau 1).

2 Sustituir el renglón 1 del tableau 1 por 2(renglón 2 del tableau 1) + renglón 1 del tableau 1.

3 Reemplazar el renglón 3 del tableau 1 por $-\frac{1}{2}$(renglón 2 del tableau 1) + renglón 3 del tableau 1.

Al aplicar estas operaciones en B_1^{-1}, se tiene

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Ahora se valoran las variables no básicas en el tableau 2. Primero calculamos

$$\mathbf{c}_{BV}B_2^{-1} = [0 \quad 20 \quad 60] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} = [0 \quad 10 \quad 10]$$

Luego se evalúan las variables no básicas x_2, s_2 y s_3:

$$\bar{c}_2 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} - 30 = 5$$

$$\text{Coeficiente de } s_2 \text{ en el renglón } 0 = [0 \quad 10 \quad 10] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

$$\text{Coeficiente de } s_3 \text{ en el renglón } 0 = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 10$$

Cada variable no básica tiene un coeficiente no negativo en el reglón 0, por lo que el tableau 2 es un tableau óptimo. Para hallar la solución óptima se determina el lado derecho del tableau 2. De (3), obtenemos

$$\text{Lado derecho del tableau } 2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como BV(2) = $\{s_1, x_3, x_1\}$, la solución óptima para el problema de Dakota es

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

o bien, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$, $x_2 = s_2 = s_3 = 0$. El valor óptimo de z se podría encontrar a partir de (7):

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B_2^{-1}\mathbf{b} = [0 \quad 10 \quad 10]\begin{bmatrix} 48 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = 280$$

A continuación se presenta un resumen del método simplex revisado (para el caso de un problema de maximización):

Paso 0 Observe las columnas a partir de las cuales se tomará B^{-1} actual. Al principio, $B^{-1} = I$.

Paso 1 Para el tableau actual, calcule $\mathbf{c}_{\text{BV}}B^{-1}$.

Paso 2 Valore todas las variables no básicas del tableau actual. Si cada variable no básica resulta no negativa, entonces la base actual es óptima. Si la base actual no es óptima, entonces introduzca en la base la variable no básica cuyo coeficiente sea el más negativo en el renglón 0. Llame a esta variable x_k.

Paso 3 Para determinar el renglón en el cual x_k entra a la base, calcule la columna de x_k en el tableau actual ($B^{-1}\mathbf{a}_k$) y calcule el lado derecho del tableau actual ($B^{-1}\mathbf{b}$). Luego aplique la prueba del cociente a fin de determinar el renglón en el cual x_k debe ingresar a la base. Ahora ya conoce el conjunto de variables básicas (BV) para el nuevo tableau.

Paso 4 Utilice la columna para x_k en el tableau actual con el fin de determinar las OER necesarias para introducir a x_k en la base. Efectúe estas operaciones en la B^{-1} actual. Así se genera la nueva B^{-1}. Regrese al paso 1.

La mayor parte de los códigos que se usan en computadora para programación lineal se apoya en alguna versión del simplex revisado para resolver un PL. Conocer la B^{-1} del tableau actual y el tableau inicial es todo lo que se requiere para obtener el tableau siguiente; de modo que el esfuerzo computacional requerido para resolver un PL con ayuda del simplex revisado depende principalmente del tamaño de B^{-1}. Suponga que el PL por ser resuelto tiene m restricciones y n variables. Entonces, cada B^{-1} será una matriz $m \times m$ y el esfuerzo necesario para resolver un PL depende en esencia de la cantidad de restricciones (y no de la cantidad de variables). Este hecho tiene consecuencias importantes relacionadas con el cálculo. Por ejemplo, si vamos a resolver un PL que tiene 500 restricciones y 10 variables, el dual para el PL tendrá 10 restricciones y 500 variables. Entonces todas las B^{-1} para el dual serán matrices de 10×10 y todas las B^{-1} para el primal serán 500×500. Por lo tanto, será mucho más fácil resolver el dual que resolver el primal. En esta situación, los cálculos se pueden reducir notablemente si se resuelve el dual y se lee la solución óptima del primal a partir de la sección del PRECIO SOMBRA o VARIABLE DUAL de un resultado proporcionado por la computadora.

PROBLEMAS

Grupo A

Aplique el método simplex revisado para resolver los PL siguientes:

1

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 6 \\ 2x_1 \qquad - x_3 &\le 4 \\ x_2 + x_3 &\le 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 &\ge 6 \\ 3x_2 &\ge 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Recuerde que B^{-1} siempre se localiza abajo de las columnas correspondientes a la base inicial.

3

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 + x_3 &\le 4 \\ x_1 \qquad + x_3 &\le 6 \\ 2x_2 - x_3 &\le 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

10.2 La forma producto de la inversa

Gran parte de los cálculos en el algoritmo del simplex revisado se relaciona con la actualización de B^{-1} de un tableau al siguiente. En esta sección se desarrolla un método eficaz para actualizar B^{-1}.

Suponga que estamos por resolver un PL con m restricciones. Suponga, además, que hemos encontrado que x_k debería entrar a la base en el renglón r. Sea la columna para x_k en el tableau actual

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \bar{a}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{bmatrix}$$

Definamos la matriz E $m \times m$:

$$\begin{array}{ccc} & \text{(columna } r) & \\ E = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{(renglón } r) \end{array}$$

En pocas palabras, E es simplemente I_m con la columna r reemplazada por el vector columna

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} \\ -\dfrac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\bar{a}_{rk}} \\ \vdots \\ -\dfrac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} \\ -\dfrac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN ■ Una matriz (tal como E) que difiere de la matriz identidad en sólo una columna se llama **matriz elemental**. ■

Ahora se demuestra que

$$B^{-1} \text{ para el tableau nuevo} = E(B^{-1} \text{ para el tableau actual}) \tag{8}$$

Para ver por qué esto es cierto, observe que las OER usadas para pasar del tableau actual al nuevo tableau quedan reducidas a

$$\text{Renglón } r \text{ de la } B^{-1}\text{nueva} = \left(\frac{1}{\bar{a}_{rk}}\right)(\text{renglón } r \text{ de la } B^{-1}\text{actual}) \tag{9}$$

y para $i \neq r$,

$$\begin{aligned} &\text{Renglón } i \text{ de la } B^{-1} \text{ nueva} \\ &= (\text{renglón } i \text{ de la } B^{-1} \text{ actual}) - \left(\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}}\right)(\text{renglón } r \text{ de la } B^{-1} \text{ actual}) \end{aligned} \tag{10}$$

Recuerde que según la sección 2.1,

$$\text{Renglón } i \text{ de } E(B^{-1} \text{ actual}) = (\text{renglón } i \text{ de } E)(B^{-1} \text{ actual}) \tag{11}$$

Al combinar (11) con la definición de E, se tiene

$$\text{Renglón } r \text{ de } E(B^{-1} \text{ actual}) = \left(\frac{1}{\bar{a}_{rk}}\right)(\text{renglón } r \text{ de } B^{-1} \text{ actual})$$

y para $i \neq r$,

$$\begin{aligned} &\text{Renglón } i \text{ de } E(B^{-1} \text{ actual}) \\ &= (\text{renglón } i \text{ de la } B^{-1} \text{ actual}) - \left(\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{a}_{rk}}\right)(\text{renglón } r \text{ de la } B^{-1} \text{ actual}) \end{aligned}$$

De donde, (8) está de acuerdo con (9) y (10). Por lo tanto, se puede usar (8) para encontrar la B^{-1} a partir de la B^{-1} actual.

Definamos al tableau inicial como tableau 0, y sea E_i la matriz E elemental asociada con el tableau i-ésimo del simplex. Recuerde que $B_0^{-1} = I_m$. Ahora escribimos

$$B_1^{-1} = E_0 B_0^{-1} = E_0$$

Entonces

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = E_1 E_0$$

y, en general

$$B_k^{-1} = E_{k-1} E_{k-2} \cdots E_1 E_0 \tag{12}$$

La ecuación (12) se llama la **forma producto de la inversa.** La mayor parte de los códigos que se usan en las computadoras para programación lineal recurren al método simplex revisado y calculan B^{-1} sucesivas mediante la forma producto de la inversa.

EJEMPLO 1 La forma producto de la inversa

Utilice la forma producto de la inversa para calcular B_1^{-1} y B_2^{-1} para el problema de Dakota que se resolvió con el simplex revisado en la sección 10.1

Solución Recuerde que en el tableau 0, x_1 entró a la base en el renglón 3. De aquí, para el tableau 0, $r = 3$ y $k = 1$. Para el tableau 0,

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{8}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Cuando pasamos del tableau 1 al tableau 2, x_3 entró a la base en el renglón 2. Entonces, al calcular E_1, hacemos $r = 2$ y $k = 3$. Para calcular E_1, necesitamos encontrar la columna para la variable entrante (x_3) en el tableau 1:

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{33} \end{bmatrix} = B_1^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Como antes x_3 entra en la base en el renglón 2. Entonces,

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -(-\frac{1}{0.5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.5} & 0 \\ 0 & -\frac{0.25}{0.50} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

y (como antes)

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

En las dos secciones siguientes se aplica la forma producto de la inversa para estudiar la generación de columnas y el algoritmo de la descomposición de Dantzig-Wolfe.

PROBLEMA

Grupo A

Para el caso de los problemas de la sección 10.1, utilice la forma producto de la inversa para ejecutar el método simplex revisado.

10.3 Uso de la generación de columnas para resolver PLs de gran escala

Ya se mencionó que el algoritmo del simplex revisado requiere menos cálculos que el algoritmo simplex del capítulo 4. En esta sección se estudia el método de generación de columnas, desarrollado por Gilmore y Gomory (1961). Por lo que se refiere a los PL con muchas variables, la generación de columnas se puede usar para incrementar la efectividad del algoritmo simplex revisado. La generación de columnas es también una parte muy importante del algoritmo de la descomposición de Dantzig-Wolfe, el cual se trata en la sección 10.4. Se resuelve enseguida una versión sencilla del *problema clásico del corte de material* para explicar la idea de la generación de columnas.

EJEMPLO 2 Probabilidades y eventos

Woodco vende maderos de 3, 5 y 9 pies. Los clientes de Woodco requieren 25 tablones de 3 pies, 20 tablones de 5 pies y 15 de 9 pies. Woodco, que debe cumplir con su demanda recortando tablones de 17 pies, quiere reducir al mínimo el desperdicio. Plantee un PL para ayudar a Woodco a lograr su objetivo, y resuelva el PL mediante la generación de columnas.

Solución Woodco debe decidir cómo cortar cada tablón de 17 pies. Por lo tanto, cada decisión corresponde a un modo en que se puede cortar un tablón de 17 pies. Por ejemplo, una variable de decisión correspondería a un tablón que se corta en tres tablones de 5 pies, lo cual generaría un desperdicio de $17 - 15 = 2$ pies. Hay muchas formas posibles de cortar un tablón que no se tienen que considerar. Por ejemplo, sería una tontería cortar un tablón en una pieza de 9 pies y una de 5 pies; podríamos tan fácilmente cortar el tablón en una pieza de 9 pies, una pieza de 5 pies *y* una pieza de 3 pies. En general, no se tienen que considerar los patrones de corte que dejen 3 pies o más de desperdicio, porque podríamos usarlo para obtener un tablón o más de 3 pies. En la tabla 1 se proporcionan las maneras de cortar un tablón de 17 pies.

TABLA 1
Maneras de cortar un tablón en el problema del corte de material

Combinación	Número de: Tablones de 3 pies	Tablones de 5 pies	Tablones de 9 pies	Desperdicio (pies)
1	5	0	0	2
2	4	1	0	0
3	2	2	0	1
4	2	0	1	2
5	1	1	1	0
6	0	3	0	2

Ahora definamos

x_i = número de tablones de 17 pies cortados de acuerdo con la combinación i

y formule el PL de Woodco:

Desperdicio de Woodco + demanda total = longitud total de tablón cortado

puesto que

$$\text{Demanda total} = 25(3) + 20(5) + 15(9) = 310 \text{ pies}$$
$$\text{Longitud total de tablones cortados} = 17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

escribimos

$$\text{Desperdicio de Woodco (en pies)} = 17x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 17x_5 + 17x_6 - 310$$

Entonces, la función objetivo de Woodco es minimizar

$$\min z = 17x_1 + 17x_2 + 17x_3 + 17x_4 + 17x_5 + 17x_6 - 310$$

Esto equivale a minimizar

$$17(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

lo cual equivale a minimizar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Por lo tanto, la función objetivo de Woodco es

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \tag{13}$$

Esto quiere decir que Woodco puede minimizar su desperdicio total minimizando el número de tablones de 17 pies que se cortan.

Woodco se enfrenta a las tres restricciones siguientes:

Restricción 1 Se tienen que cortar por lo menos 25 tablones de 3 pies.

Restricción 2 Se tienen que cortar por lo menos 20 tablones de 5 pies.

Restricción 3 Se tienen que cortar por lo menos 15 tablones de 9 pies.

Como el número total de tablones de 3 pies que se cortan está dado por $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5$, la restricción 1 se vuelve

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 \tag{14}$$

Del mismo modo, la restricción 2 se convierte en

$$x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \tag{15}$$

y la restricción 3 se transforma en

$$x_4 + x_5 \geq 15 \tag{16}$$

Observe que el coeficiente de x_i en la restricción para tablones de k pies es justamente el número de tablones de k pies obtenidos si se corta un tablón según la combinación i.

Es evidente que se requiere que las x_i sean valores enteros. A pesar de este hecho, en problemas con grandes demandas, se puede obtener una solución cercana a la óptima resolviendo el problema del corte de material como un PL y luego redondeando todas las variables fraccionarias al valor entero superior. Quizá este procedimiento no proporcione la mejor solución posible con enteros, pero casi siempre da una solución cercana a la óptima.

Por esta razón nos concentramos en la versión del PL del problema del corte de material. Al combinar las restricciones de signo con (13) a (16) se obtiene el PL siguiente:

$$
\begin{array}{llr}
\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & & \\
\text{s.a} \quad 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 25 & \text{(restricción de los 3 pies)} & \\
x_2 + 2x_3 + x_5 + 3x_6 \geq 20 & \text{(restricción de los 5 pies)} & \textbf{(17)} \\
x_4 + x_5 \geq 15 & \text{(restricción de los 9 pies)} & \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Observe que x_1 sólo se presenta en la restricción de los 3 pies (porque la combinación 1 genera sólo tablones de 3 pies), y x_6 se presenta en la restricción de los 5 pies (porque con la combinación 6 sólo se obtienen tablones de 5 pies). Esto quiere decir que x_1 y x_6 se pueden utilizar como variables básicas de inicio para las restricciones de los 3 pies y de los 5 pies. Pero ninguna de las combinaciones 1 a 6 proporciona, infortunadamente, sólo tablones de 9 pies, por eso la restricción de los 9 pies no tiene variable básica obvia. Con el fin de evitar tener que sumar una variable artificial a la restricción de los 9 pies, definimos la combinación 7 como la combinación de corte que origina sólo un tablón de 9 pies. Definimos, asimismo, x_7 como el número de tablones cortados según la combinación 7. Evidentemente, x_7 será igual a cero en la solución óptima, pero si se inserta x_7 en la base inicial nos evitamos tener que recurrir al método de la Gran M o al método simplex de las dos fases. Obsérvese que la columna para x_7 en las restricciones del PL es

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

y se añade un término x_7 a la función objetivo. Ahora podemos usar BV = $\{x_1, x_6, x_7\}$ como una base de inicio para el PL (17). Si hacemos que el tableau para esta base sea el tableau 0, entonces tenemos

$$
B_0 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
B_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Entonces,

$$
\mathbf{c}_{\mathrm{BV}} B_0^{-1} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\tfrac{1}{5} \quad \tfrac{1}{3} \quad 1]
$$

Si ahora evaluáramos cada variable no básica sabríamos qué variable debe entrar a la base. Pero en un problema a gran escala de corte de material habrá miles de variables, así que valorar cada variable no básica sería en extremo tedioso. En este tipo de situaciones es cuando interviene la generación de columnas. Como estamos resolviendo un problema de minimización, queremos encontrar una columna que tenga un valor positivo (que tenga un coeficiente positivo en el renglón 0). En el problema del corte de material, cada columna, o variable, representa una combinación para recortar un tablón: una variable está especificada por tres números: a_3, a_5 y a_9, donde a_i es el número de tablones de i pies obtenido al cortar tablones de 17 pies según la combinación dada. Por ejemplo, la variable x_2 está especificada por $a_3 = 4$, $a_5 = 1$ y $a_9 = 0$. La idea de la generación de columnas es buscar en forma eficiente una columna que tenga un valor favorable (positivo en un problema de minimización y negativo en un problema de maximización). En cuanto a la base actual, una combinación especificada por a_3, a_5 y a_9 tendrá un valor de

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1}\begin{bmatrix} a_3 \\ a_5 \\ a_9 \end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + a_9 - 1$$

Obsérvese que a_3, a_5 y a_9 se deben escoger de tal manera que no utilicen más de 17 pies de madera. Sabemos también que a_3, a_5 y a_9 tienen que ser enteros no negativos. En resumen, para cualquier combinación, a_3, a_5 y a_9 tienen que cumplir

$$3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17 \quad (a_3 \geq 0,\ a_5 \geq 0,\ a_9 \geq 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ enteros}) \tag{18}$$

Ahora ya podemos buscar la combinación que tenga el valor más favorable resolviendo el problema siguiente de la mochila:

$$\begin{aligned} \max z &= \tfrac{1}{5}a_3 + \tfrac{1}{3}a_5 + a_9 - 1 \\ \text{s.a} \quad & 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \leq 17 \\ a_3, a_5, a_9 &\geq 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ enteros} \end{aligned} \tag{19}$$

Como (19) es un problema de la mochila (sin restricciones 0−1 en las variables), se puede resolver con facilidad aplicando el procedimiento de ramificación y acotamiento explicado en la sección 9.5.

El árbol de ramificación y acotamiento resultante es el que se muestra en la figura 1. Por ejemplo, para resolver el problema 6 de la figura 1, hacemos primero $a_5 = 1$ (porque $a_5 \geq 1$ es necesario). Entonces tenemos 12 pies que se quedaron en la mochila, y elegimos hacer a_9 (el mejor objeto) tan grande como es posible. Puesto que $a_9 \geq 1$, dejamos que $a_9 = 1$. Esto deja 3 pies, de modo que $a_3 = 1$ para llenar la mochila. En la figura 1 observamos que la solución óptima del PL (19) es $z = \frac{8}{15}$, $a_3 = a_5 = a_9 = 1$. Lo anterior corresponde a la combinación 5 y la variable x_5. Por lo tanto, x_5 se evalua en $\frac{8}{15}$, y al entrar x_5 a la base disminuirá el desperdicio de Woodco. Para que x_5 pueda entrar a la base generamos el lado derecho del tableau actual y la columna de x_5 del mismo.

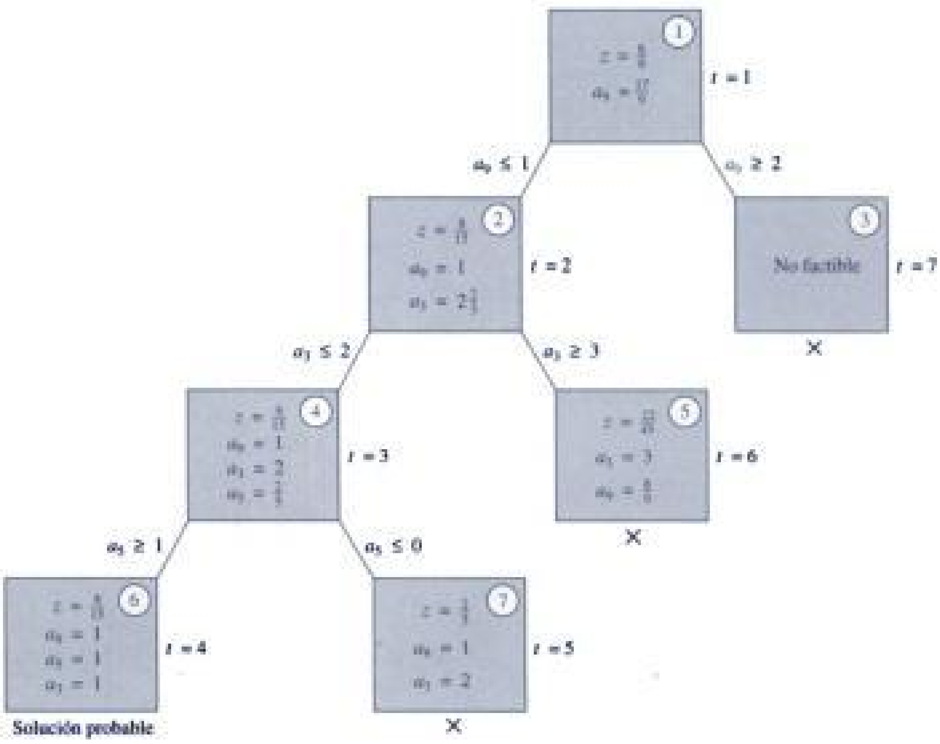


FIGURA 1
Árbol de ramificación y acotamiento para el PE (19)

$$\text{columna de } x_5 \text{ en el tableau actual} = B_0^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5}\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\text{Lado derecho del tableau actual} = B_0^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25\\20\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ \frac{20}{3}\\ 15\end{bmatrix}$$

La prueba del cociente indica que x_5 debería entrar a la base en el renglón 3. Esto origina $\text{BV}(1) = \{x_1, x_6, x_5\}$. Si se usa la forma producto de la inversa se tiene

$$B_1^{-1} = E_0B_0^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ahora

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B_1^{-1} = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [\tfrac{1}{5} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{7}{15}]$$

Con el nuevo conjunto de precios sombra ($\mathbf{c}_{\text{BV}}B_1^{-1}$) es posible aplicar la generación de columnas para determinar si hay alguna combinación que deba entrar a la base. En cuanto al conjunto actual de precios sombra, una combinación especificada por a_3, a_5 y a_9 se estima en

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{7}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3\\a_5\\a_9\end{bmatrix} - 1 = \frac{1}{5}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{7}{15}a_9 - 1$$

Por lo que toca al tableau actual, la generación de columnas da el problema siguiente

$$\begin{aligned} \max z &= \tfrac{1}{5}a_3 + \tfrac{1}{3}a_5 + \tfrac{7}{15}a_9 - 1\\ \text{s.a} \quad & 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17\\ & a_3, a_5, a_9 \ge 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ enteros} \end{aligned} \tag{20}$$

El árbol de ramificación y acotamiento para (20) se ilustra en la figura 2. Vemos que la combinación con $a_3 = 4$, $a_5 = 1$ y $a_9 = 0$ (combinación 2) sobresale mejor que cualquier otra (tendrá un coeficiente de $\frac{2}{15}$ en el renglón 0). La combinación 2 es la más favorable, de modo que introducimos a x_2 a la base. La columna para x_2 en el tableau actual es

$$B_1^{-1}\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}$$

El lado derecho del tableau actual es

$$B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}25\\20\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ \frac{5}{3}\\ 15\end{bmatrix}$$

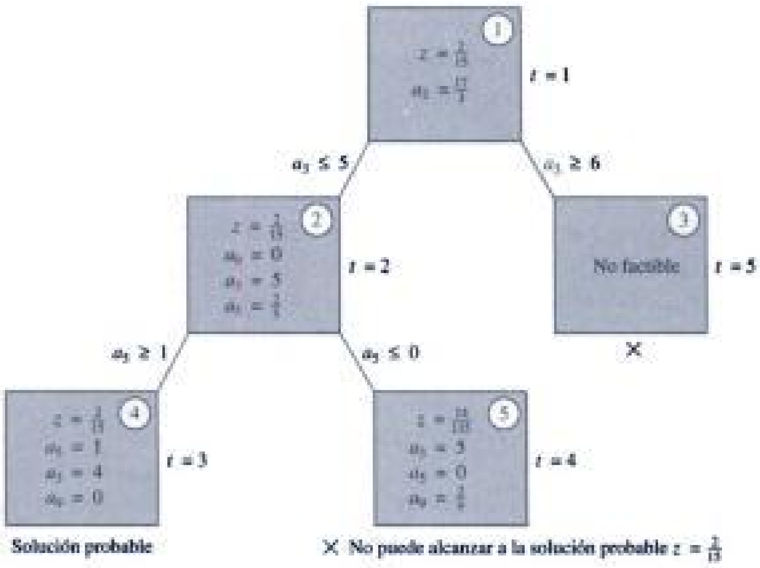


FIGURA 2
Árbol de ramificación y acotamiento

La prueba del cociente indica que x_2 debe entrar a la base en el renglón 1. Por lo tanto, $\text{BV}(2) = \{x_2, x_6, x_5\}$. Al utilizar la forma producto de la inversa tenemos

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto nuevo de precios sombra está dado por

$$\mathbf{c}_{\text{BV}} B_2^{-1} = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\tfrac{1}{6} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{2}]$$

Para este conjunto de precios sombra, una combinación especificada por a_3, a_5 y a_9 dará por resultado $\frac{1}{6}a_3 + \frac{1}{3}a_5 + \frac{1}{2}a_9 - 1$. Por lo tanto, el procedimiento de generación de columnas requiere que resolvamos el problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\max z = \tfrac{1}{6}a_3 + \tfrac{1}{3}a_5 + \tfrac{1}{2}a_9 - 1 \\ &\text{s.a} \qquad 3a_3 + 5a_5 + 9a_9 \le 17 \\ &a_3, a_5, a_9 \ge 0;\ a_3, a_5, a_9 \text{ enteros} \end{aligned} \tag{21}$$

El árbol de ramificación y acotamiento para el PE (21) se deja como ejercicio (véase problema 1 al final de esta sección). El valor óptimo de z para (21) quedó en $z = 0$. Esto significa que ninguna combinación sobresale por favorable. Por lo tanto, la solución básica actual tiene que ser una solución óptima. Para determinar los valores de las variables básicas en la solución óptima, se busca el lado derecho del tableau actual:

$$B_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{6} \\ 15 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución óptima para el problema de Woodco de corte de material es $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_6 = \frac{5}{6}$, $x_5 = 15$. Si se deseara, se podría obtener una solución con enteros "razonable" redondeando x_2 y x_6 al entero superior. Lo anterior da la solución con enteros de $x_2 = 3$, $x_6 = 1$, $x_5 = 15$.

Si se cuenta con una sfb inicial para un problema de corte de material, no se requiere una lista de todas las maneras posibles en las cuales se puede recortar un tablón. Una buena combinación (una que mejore el valor de z cuando entre a la base) se genera, en cada iteración, al resolver un problema por ramificación y acotamiento. Es muy útil el hecho de no tener que listar todas las maneras en que se puede cortar un tablón. En un problema de corte de material que resolvieron Gilmore y Gomory (1961), en el cual los clientes demandaban tablones de 40 longitudes distintas, había más de 100 millones de maneras posibles de cortar un tablón. En la última etapa del procedimiento de generación de columnas para este problema, al resolver un solo problema de ramificación y acotamiento se encontraba que ninguna de las 100 millones de maneras (no básicas) sobresalía por favorable. Este método es, ciertamente, más grato que usar $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ para evaluar ¡100 millones de variables!

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que la solución óptima para el PE (21) tiene $z = 0$.

2 Aplique la generación de columnas para resolver un problema de corte de material en el cual se tienen que cortar tablones de 15 pies para satisfacer las siguientes condiciones: 10 tablones de 3 pies, 20 tablones de 5 pies y 15 de 8 pies.

3 Resuelva mediante la generación de columnas un problema de corte de material en el cual se tienen que cortar tablones de 15 pies para cumplir con la siguiente demanda: 80 tablones de 4 pies, 50 tablones de 6 pies y 100 de 7 pies.

10.4 Algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe

Las restricciones y variables de muchos PL se podrían descomponer en la siguiente forma:

Las restricciones en el conjunto 1 sólo tienen variables en el conjunto 1 de variables.
Las restricciones en el conjunto 2 sólo tienen variables en el conjunto 2 de variables.

⋮

Las restricciones en el conjunto k sólo tienen variables en el conjunto k de variables.

Las restricciones en el conjunto $k + 1$ podrían tener alguna variable. Las restricciones en el conjunto $k + 1$ se denominan **restricciones centrales.** Los PL que son susceptibles de descomponerse de este modo se resuelven a menudo de modo eficaz con ayuda de la descomposición de Dantzig-Wolfe.

EJEMPLO 3 Descomposición

Steelco fabrica dos tipos de acero (acero 1 y acero 2) en dos sitios (plantas 1 y 2). Se requieren tres recursos para elaborar una tonelada de acero: hierro, carbón y tiempo de alto horno. Las dos plantas tienen tipos distintos de hornos, por lo que los recursos necesarios para producir una tonelada de acero dependen del lugar (véase tabla 2). Cada planta tiene su propia mina de carbón. Se dispone, todos los días, de 12 toneladas de carbón en la planta 1 y de 15 toneladas en la planta 2. El carbón no se puede enviar de una planta a otra. La planta 1 dispone diariamente de 10 h de tiempo de alto horno, y la planta 2, de 4 h. El mineral de hierro se extrae de una mina ubicada a medio camino entre las dos plantas. Hay disponibles 80 toneladas de hierro, cada día. La tonelada de acero 1 se puede vender en 170 dólares, y la

TABLA 2
Recursos necesarios para Steelco

Producto (1 tonelada)	Hierro requerido (toneladas)	Carbón requerido (toneladas)	Tiempo de alto horno necesario (h)
Acero 1 en la planta 1	8	3	2
Acero 2 en la planta 1	6	1	1
Acero 1 en la planta 2	7	3	1
Acero 2 en la planta 2	5	2	1

de acero 2 en 160 dólares. Todo el acero vendido se envía a un solo cliente. Cuesta 80 dólares enviar una tonelada de acero desde la planta 1, y 100 dólares enviar una tonelada desde la planta 2. Si se supone que el único costo variable es el costo del embarque, plantee y resuelva un PL que maximice los ingresos menos los costos de envío de Steelco.

Solución Definamos

x_1 = toneladas de acero 1 producido diariamente en la planta 1
x_2 = toneladas de acero 2 producido diariamente en la planta 1
x_3 = toneladas de acero 1 producido diariamente en la planta 2
x_4 = toneladas de acero 2 producido diariamente en la planta 2

Los ingresos de Steelco están dados por $170(x_1 + x_3) + 160(x_2 + x_4)$, y los costos de envío por $80(x_1 + x_2) + 100(x_3 + x_4)$. Por lo tanto, Steelco desea maximizar

$$\begin{aligned} z &= (170 - 80)x_1 + (160 - 80)x_2 + (170 - 100)x_3 + (160 - 100)x_4 \\ &= 90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 \end{aligned}$$

Steelco tiene que considerar las restricciones siguientes:

Restricción 1 Al día se pueden usar no más de 12 toneladas de carbón en la planta 1.

Restricción 2 No hay más de 10 horas de tiempo de alto horno en la planta 1, al día.

Restricción 3 Se pueden usar al día no más de 15 toneladas de carbón en la planta 2.

Restricción 4 No hay más de 4 horas de tiempo de alto horno al día en la planta 2.

Restricción 5 Se pueden usar diariamente cuando mucho 80 toneladas de carbón.

Las restricciones 1 a 5 generan las cinco siguientes restricciones del PL:

$$3x_1 + x_2 \leq 12 \quad \text{(Restricción del carbón en la planta 1)} \tag{23}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad \text{(Restricción del horno en la planta 1)} \tag{24}$$
$$3x_3 + 2x_4 \leq 15 \quad \text{(Restricción del carbón en la planta 2)} \tag{25}$$
$$x_3 + x_4 \leq 4 \quad \text{(Restricción del horno en la planta 2)} \tag{26}$$
$$8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_4 \leq 80 \quad \text{(Restricción del mineral de hierro)} \tag{27}$$

Se requieren también las restricciones de signo $x_i \geq 0$. Al juntar todo, el PL de Steelco se puede escribir como

$$\max z = 90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4$$
$$\text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 \leq 12 \quad \text{(Restricción del carbón en la planta 1)} \tag{22}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad \text{(Restricción del horno en la planta 1)} \tag{23}$$
$$3x_3 + 2x_4 \leq 15 \quad \text{(Restricción del carbón en la planta 2)} \tag{24}$$
$$x_3 + x_4 \leq 4 \quad \text{(Restricción del horno en la planta 2)} \tag{25}$$
$$8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_4 \leq 80 \quad \text{(Restricción del mineral de hierro)} \tag{26}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

El PL de Steelco se podría descomponer de la manera siguiente, usando la definición de descomposición:

Conjunto 1 de variables x_1 y x_2 (variables de la planta 1).

Conjunto 2 de variables x_3 y x_4 (variables de la planta 2).

Restricción 1 (22) y (23) (restricciones de la planta 1).

Restricción 2 (24) y (25) (restricciones de la planta 2).

Restricción 3 (26).

El conjunto 1 de restricciones y el conjunto 1 de variables se relacionan con actividades en la planta 1, pero no con x_3 y x_4 (las cuales representan actividades en la planta 2). El conjunto 2 de restricciones y el conjunto 2 de variables tienen que ver con actividades en la planta 2, pero no con x_1 y x_2 (actividades en la planta 1). Se podría pensar que el conjunto 3 de restricciones es una restricción centralizada que interrelaciona con los dos conjuntos de variables. (La obtención de la solución continuará.)

Los problemas en los cuales varias plantas producen varios productos se pueden descomponer con facilidad en conformidad con el ejemplo 3.

Para resolver en forma eficiente los PL que se descomponen según el ejemplo 3, Dantzig y Wolfe desarrollaron el algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe. Con el fin de simplificar el análisis de este algoritmo, supongamos que estamos resolviendo un PL en el cual cada subproblema tiene una región factible acotada.† El algoritmo de descomposición depende del resultado del teorema 1.

TEOREMA 1

Suponga que la región factible de un PL es acotada y que los puntos extremos (o soluciones factibles básicas) de la región factible del PL son $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$. Entonces cualquier punto x en la región factible del PL se podría representar como una combinación lineal de $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$. En otras palabras, existen pesos o ponderaciónes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ que satisfacen

$$\mathbf{x} = \mu_1\mathbf{P}_1 + \mu_2\mathbf{P}_2 + \cdots + \mu_k\mathbf{P}_k \tag{27}$$

Además, los pesos (ponderaciones) $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ de (27) se podrían escoger de tal manera que

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1 \quad \text{y} \quad \mu_i \geq 0 \quad \text{para} \quad = 1, 2, \ldots, k \tag{28}$$

Cualquier combinación lineal de vectores para la cual los pesos (ponderaciones) satisfacen (28) recibe el nombre de **combinación convexa.** Por lo tanto, el teorema 1 establece que si una región factible de un PL es acotada, entonces cualquier punto que se encuentre adentro se podría escribir como una combinación convexa de los puntos extremos de la región factible del PL.

El teorema 1 se ilustra mostrando cómo se aplica a los PL definidos por el conjunto 1 de restricciones y el conjunto 2 de restricciones del ejemplo 3. Para empezar se examina la región factible definida por las restricciones de signo $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ y el conjunto 1 de restricciones (que consiste en (22) y (23)). Esta región factible es el interior y el límite del cuadrilátero sombreado $P_1P_2P_3P_4$ en la figura 3. Los puntos extremos son $\mathbf{P}_1 = [0 \quad 0]$, $\mathbf{P}_2 = [4 \quad 0]$, $\mathbf{P}_3 = [2 \quad 6]$, y $\mathbf{P}_4 = [0 \quad 10]$. En el caso de esta región factible, el teorema 1 establece que cualquier punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

†Véase en Bradley, Hax y Magnanti (1977) un análisis de la descomposición que comprende el caso donde por lo menos un subproblema tiene una región factible no acotada.

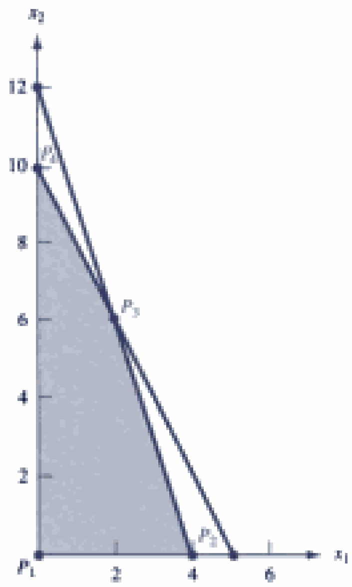


FIGURA 3
Región factible para el conjunto 1 de restricciones

en la región factible para el conjunto 1 de restricciones se podría escribir como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mu_2 + 2\mu_3 \\ 6\mu_3 + 10\mu_4 \end{bmatrix}$$

donde $\mu_i \geq 0 (i = 1, 2, 3,4)$ y $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$. Por ejemplo, el punto

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

se encuentra en la región factible $P_1P_2P_3P_4$. Al inspeccionar la figura 3 se ve que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

se podría escribir como una combinación lineal de $\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$. Con algunas operaciones algebraicas se llega a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Otro ejemplo del teorema 1 es el siguiente. Considere la región factible definida por las restricciones de signo $x_3 \geq 0$ y $x_4 \geq 0$ y el conjunto 2 de restricciones [(24) y (25)]. La región factible para este PL es el área sombreada $Q_1Q_2Q_3$ en la figura 4. Los puntos extremos son $\mathbf{Q}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{Q}_2 = (4, 0)$ y $\mathbf{Q}_3 = (0, 4)$. El teorema 1 establece que cualquier punto

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

que se encuentra en la región factible para el conjunto 2 de restricciones se podría escribir como

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

donde $\mu_i \geq 0$ y $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Por ejemplo, el punto factible

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

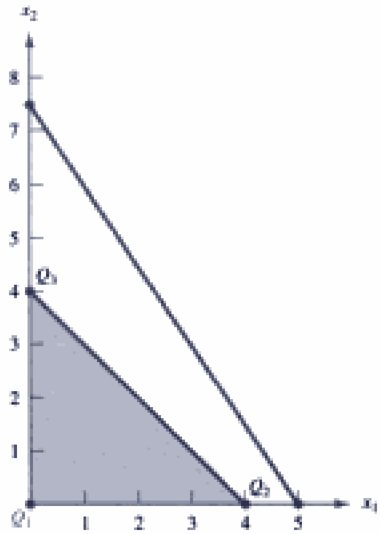


FIGURA 4
Región factible para el conjunto 2 de restricciones

se podría escribir como

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Para los fines que perseguimos, poco importa saber cómo determinar el conjunto de pesos (ponderaciones) que corresponde a un punto factible particular. El algoritmo de descomposición no requiere que seamos capaces de encontrar los pesos (ponderaciones) para un punto arbitrario.

Con el objeto de explicar las ideas básicas del algoritmo de descomposición suponga que el conjunto de variables se ha descompuesto en el conjunto 1 y en el conjunto 2. Usted no debe tener problemas para generalizar a una situación donde el conjunto de variables se descompone en más de dos conjuntos de variables.

El algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe procede como se indica:

Paso 1 Sean las variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$, el conjunto 1 de las variables. Exprese las variables como una combinación convexa (véase el teorema 1) de los puntos extremos de la región factible para el conjunto 1 de las restricciones (las restricciones que sólo tienen que ver con las variables del conjunto 1 de variables). Si hacemos $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$ los puntos extremos de esta región factible, entonces cualquier punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix}$$

dentro de la región factible para el conjunto 1 de restricciones se podría escribir como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix} = \mu_1\mathbf{P}_1 + \mu_2\mathbf{P}_2 + \cdots + \mu_k\mathbf{P}_k \tag{29}$$

donde $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ y $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Paso 2 Exprese las variables del conjunto 2 de variables, $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_n$, como una combinación convexa de los puntos extremos de la región factible del conjunto 2 de las restricciones. Si hacemos que los puntos extremos de la región factible sean $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots,$

$\mathbf{Q}_m$, entonces cualquier punto en la región factible del conjunto 2 de las restricciones se podría escribir como

$$\begin{bmatrix} x_{n_1+1} \\ x_{n_1+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1\mathbf{Q}_1 + \lambda_2\mathbf{Q}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{Q}_m \tag{30}$$

donde $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$.

Paso 3 Exprese la función objetivo del PL y las restricciones centralizadas en términos de las μ_i y las λ_i usando (29) y (30). Después de sumar las restricciones (denominadas restricciones de convexidad) $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$ y las restricciones de signo $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ y $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, se obtiene el PL siguiente, que recibe el nombre de **maestra restringida:**

máximo (o mínimo) [función objetivo en términos de las μ_i y λ_i]

s.a [restricciones centrales en términos de las μ_i y λ_i]

$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ (restricciones de convexidad)

$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$

$\mu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ (restricciones de signo)

$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$

La maestra restringida podría tener millones de variables (que corresponden a las diversas soluciones factibles básicas de puntos extremos para cada conjunto de restricciones) en muchos PL grandes. No obstante, pocas veces se tiene que escribir la maestra restringida completa; todo lo que se requiere es generar la columna en la maestra restringida que corresponda a la μ_i o λ_i específica.

Paso 4 Suponga que una solución factible básica para la maestra restringida se consigue con facilidad.† Entonces utilice el método de la generación de columnas de la sección 10.3 para resolver la maestra restringida.

Paso 5 Sustituya en (29) y (30) los valores óptimos de las μ_i y λ_i que se determinaron en el paso 4. De esta manera se obtienen los valores óptimos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Solución **Ejemplo 3 (Continuación)** Por lo que toca al ejemplo 3, ya se vio que

$$\text{Conjunto 1 de variables} = \{x_1, x_2\} \tag{22}$$

$$\text{Conjunto 1 de restricciones} = \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases} \tag{23}$$

También ya se determinó que la región factible para el conjunto 1 de restricciones tiene cuatro puntos extremos, y que cualquier punto factible

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

se podría escribir, para el conjunto 1 de restricciones, como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \mu_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mu_2 + 2\mu_3 \\ 6\mu_3 + 10\mu_4 \end{bmatrix} \tag{29'}$$

†Si no es así, entonces se tiene que usar el método simplex de dos fases. Los detalles se encuentran en Bradley, Hax y Magnanti (1977).

donde $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$ y $\mu_i \geq 0$.

$$\text{Conjunto 2 de variables} = x_3 \text{ y } x_4 \tag{24}$$

$$\text{Conjunto 2 de restricciones} = \begin{cases} 3x_3 + 2x_4 \leq 15 \\ x_3 + \quad x_4 \leq 4 \end{cases} \tag{25}$$

Cualquier punto

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

en la región factible para el conjunto 2 de restricciones se podría escribir como

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 4\lambda_3 \end{bmatrix} \tag{30´}$$

donde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Enseguida se obtiene la maestra restringida al sustituir (29´) y (30´) en la función objetivo y la restricción centralizada. La función objetivo para (21) se vuelve

$$\begin{aligned} 90x_1 + 80x_2 + 70x_3 + 60x_4 &= 90(4\mu_2 + 2\mu_3) + 80(6\mu_3 + 10\mu_4) + 70(4\lambda_2) + 60(4\lambda_3) \\ &= 360\mu_2 + 660\mu_3 + 800\mu_4 + 280\lambda_2 + 240\lambda_3 \end{aligned}$$

La restricción centralizada se vuelve

$$8(4\mu_2 + 2\mu_3) + 6(6\mu_3 + 10\mu_4) + 7(4\lambda_2) + 5(4\lambda_3) \leq 80$$

o bien,

$$32\mu_2 + 52\mu_3 + 60\mu_4 + 28\lambda_2 + 20\lambda_3 \leq 80$$

Después de sumar una variable de holgura s_1 a esta restricción y escribir las restricciones de convexidad y las restricciones de signo se obtiene el programa siguiente de la maestra restringida

$$\begin{aligned} \max z &= 360\mu_2 + 660\mu_3 + 800\mu_4 + 280\lambda_2 + 240\lambda_3 \\ \text{s.a} \quad & 32\mu_2 + 52\mu_3 + 60\mu_4 + 28\lambda_2 + 20\lambda_3 + s_1 = 80 \\ & \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1 \\ & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ & \mu_i, \lambda_i \geq 0 \end{aligned}$$

Hay una manera más ingeniosa de obtener la columna para una variable de la maestra restringida. Recuerde que cada variable, en la maestra restringida corresponde a un punto extremo para la región factible del conjunto 1 de restricciones o el conjunto 2 de restricciones. Como ejemplo, enfóquese en el modo de encontrar la columna en la maestra restringida para una variable μ_i, que corresponde a un punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

para el conjunto 1 de restricciones. Como x_1 y x_2 corresponden a una actividad en la planta 1, podríamos considerar cualquier especificación de x_1 y x_2 como una "propuesta" de la planta 1. Por ejemplo, el punto

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

corresponde a que la planta 1 propusiera producir 2 toneladas de acero tipo 1 y 6 toneladas de acero tipo 2. Entonces, se podría pensar del peso μ_i que es una fracción de la propuesta correspondiente al punto extremo $\mathbf{P}_i$ que está incluido en el programa de producción real. Por ejemplo, puesto que

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{P}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{P}_3$$

se podría pensar que

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

consiste en un tercio de la propuesta $\mathbf{P}_1$, de la planta 1, un tercio de la propuesta $\mathbf{P}_2$, de la planta 1 y un tercio de la propuesta $\mathbf{P}_3$ de la planta 1.

Ya podemos explicar entonces un método sencillo para determinar la columna para cualquier variable en la maestra restringida. Suponga que deseamos determinar la columna para el punto extremo

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

que corresponde al peso μ_i. Si incluimos una fracción μ_i del punto extremo

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

¿contribuirá en algo con la función objetivo? Si $\mu_i = 1$, entonces

$$\mu_i\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

contribuye con $90x_1 + 80x_2$ a la función objetivo. Por la suposición de proporcionalidad, si usamos una fracción μ_i del punto extremo

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

entonces ésta contribuye con $\mu_i(90x_1 + 80x_2)$ a la función objetivo. De igual manera, si $\mu_i = 1$, entonces

$$\mu_i\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

contribuye con $8x_1 + 6x_2$ de uso de hierro. Por lo tanto, para un valor arbitrario de μ_i,

$$\mu_i\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

contribuye con una cantidad $\mu_i(8x_1+6x_2)$ para el lado izquierdo de la restricción por el uso del mineral de hierro.

Para ser más específico, utilicemos el razonamiento ya explicado para determinar la columna en la maestra restringida para el peso μ_3 que corresponde al punto extremo

$$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

El razonamiento indica que el lado izquierdo de la función objetivo con μ_3 es μ_3 $[90(2) + 80(6)] = 660\mu_3$. En forma similar, el término que se relaciona con μ_3 en lado izquierdo de la restricción del mineral de hierro será $\mu_3[8(2) + 6(6)] = 52\mu_3$. Asimismo, el coeficiente de μ_3 será 1 en la primera restricción de convexidad y 0 en la otra restricción de convexidad. (Si el lector entendió cómo se obtuvo la columna de μ_3 entonces debe tener pocos problemas para entender lo que sigue; los lectores que se hayan confundido deben leer de nuevo las últimas dos páginas antes de continuar.)

A continuación se resuelve la maestra restringida mediante el método simplex revisado y la generación de columnas. El tableau inicial será el tableau 0. Entonces BV(0) = $\{s_1, \mu_1, \lambda_1\}$. Asimismo,

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{de modo que} \qquad B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que s_1, μ_1 y λ_1 no aparecen en la función objetivo de la maestra restringida, se tiene que $\mathbf{c}_{BV} = [0 \quad 0 \quad 0]$, y los precios sombra del tableau 0 se obtienen con

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Se aplica ahora el concepto de generación de columnas en dos etapas. Primero se determina si hay algún peso μ_i relacionado con el conjunto 1 de restricciones que sea evaluada favorablemente (como estamos resolviendo un problema de maximización, es favorable un coeficiente negativo en el renglón 0). Un peso (ponderación) μ_i asociado con un punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

del conjunto 1 de restricciones tendrá la columna siguiente en la maestra restringida:

$$\text{Coeficiente de la función objetivo para } \mu_i = 90x_1 + 80x_2$$

$$\text{Columna en las restricciones para } \mu_i = \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir de esta información se tiene que en el tableau 0, la columna para el peso μ_i que corresponde a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

se evaluará para

$$\mathbf{c}_{BV}B_0^{-1} \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) = -90x_1 - 80x_2$$

Como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

debe cumplir con el conjunto 1 de restricciones (es decir, las restricciones de la planta 1), el peso μ_i que se muestra más negativo es el peso asociado con el punto extremo que es la solución óptima para el PL siguiente:

Tableau 0
Subproblema de la planta 1

$$\begin{aligned} \min z &= -90x_1 - 80x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Luego de resolver en forma gráfica el subproblema de la planta 1, se obtiene la solución $z = -800$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$. Esto quiere decir que el peso μ_i asociado con el punto extremo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

tendrá el valor más negativo. Recuerde que

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Esto significa que μ_4 sobresaldrá con un coeficiente de –800 en la maestra restringida.

Examinemos los pesos relacionados con el conjunto 2 de restricciones e intentemos determinar el peso λ_i que será más negativo. La λ_i que corresponde a un punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

del conjunto 2 de restricciones tendrá la columna siguiente en la maestra restringida:

$$\text{Coeficiente de la función objetivo para } \lambda_i = 70x_3 + 60x_4$$

$$\text{Columna en las restricciones de } \lambda_i = \begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto significa que la λ_i que corresponde al punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

será evaluada en:

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}} B_0^{-1} \begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (70x_3 + 60x_4) = -70x_3 - 60x_4$$

Obsérvese que

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

debe satisfacer el conjunto 2 de restricciones. Por lo tanto, el punto extremo cuyo peso λ_i se muestra más favorable será la solución al PL siguiente:

Tableau 0
Subproblema de la planta 2

$$\begin{aligned} \min z &= -70x_3 - 60x_4 \\ \text{s.a} \quad 3x_3 + 2x_4 &\le 15 \\ x_3 + x_4 &\le 4 \\ x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $z = -280$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$. Como

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_2$$

λ_2 es la más negativa de todas las λ_i. Pero μ_4 es más negativa que λ_2, razón por la cual μ_4 entra a la base (mediante la aplicación del procedimiento del simplex revisado). Para hacerlo se requiere determinar la columna para μ_4 en el tableau 0 y también el lado derecho del mismo tableau. La columna para μ_4 en el tableau 0 es

$$B_0^{-1} \begin{bmatrix} 8(0) + 6(10) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y el lado derecho del tableau 0 es

$$B_0^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La prueba del cociente indica ahora que μ_4 debe entrar a la base en la segunda restricción. Entonces $\text{BV}(1) = \{s_1, \mu_4, \lambda_1\}$. Como

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1} = E_0 B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El coeficiente de la función objetivo para μ_4 es $90(0) + 80(10) = 800$, por lo que el nuevo conjunto de precios sombra se podría determinar a partir de

$$\mathbf{c}_{\text{BV}} B_1^{-1} = [0 \quad 800 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 800 \quad 0]$$

Ahora intentaremos determinar el peso más negativo en el tableau actual. Igual que como se hizo antes, resolvemos los subproblemas de la planta 1 y de la planta 2 del tableau actual. Además, igual que antes, un peso μ_i que corresponde a un punto extremo de la restricción 1

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

será

$$\mathbf{c}_{\text{BV}} B_1^{-1} \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2)$$

$$= [0 \quad 800 \quad 0] \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) = 800 - 90x_1 - 80x_2$$

Como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tiene que satisfacer el conjunto 1 de restricciones, la μ_i que tenga un valor más favorable corresponderá al punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que resuelve el PL siguiente

Tableau 1
Subproblema de la planta 1

$$\begin{aligned} \min z &= 800 - 90x_1 - 80x_2 \\ \text{s.a} \quad & 3x_1 + x_2 \le 12 \\ & 2x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $z = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$. Esto quiere decir que ninguna μ_i puede tener un valor favorable. Ahora resolvemos el subproblema de la planta 2 con el objeto de encontrar una λ_i que tenga un valor favorable. Una λ_i que corresponda a un punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

del conjunto 2 de restricciones es

$$\mathbf{c}_{BV}B_1^{-1}\begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (70x_3 + 60x_4) = -70x_3 - 60x_4$$

Como

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

debe satisfacer las restricciones de la planta 2, la λ_i que tendrá el valor más negativo corresponderá al punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

que resuelve el subproblema de la planta 2 del tableau 1:

Tableau 1
Subproblema de la planta 2

$$\begin{aligned} \min z &= -70x_3 - 60x_4 \\ \text{s.a} \quad 3x_3 + 2x_4 &\leq 15 \\ x_3 + x_4 &\leq 4 \\ x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, $z = -280$. Esto quiere decir que la λ_i que corresponde a

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

un valor de -280. Puesto que

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_2$$

λ_2 se evalúa en -280. Ninguna μ_i tiene un valor negativo, de modo que lo mejor que podemos hacer es introducir a λ_2 a la base. Para hacerlo se necesita la columna de λ_2 en el tableau 1 y el lado derecho del mismo. La columna para λ_2 en el tableau 1 se obtiene con

$$B_1^{-1}\begin{bmatrix} 7(4) + 5(0) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y el lado derecho del tableau 1 es

$$B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La prueba del cociente indica que λ_2 debería entrar a la base en el renglón 1. Por lo tanto, $BV(2) = \{\lambda_2, \mu_4, \lambda_1\}$. Como

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1} = E_1 B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -60 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que el coeficiente de λ_2 es $70x_3 + 60x_4 = 70(4) + 60(0) = 280$ en la función objetivo de la maestra restringida para calcular $\mathbf{c}_{\text{BV}}B_2^{-1}$. Recuerde que μ_4 tiene un coeficiente de 800 en la función objetivo de la maestra restringida, y que el coeficiente de la función objetivo de λ_1 es de 0 en la maestra restringida. Entonces, el conjunto nuevo de precios sombra es

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B_2^{-1} = [280 \quad 800 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix} = [10 \quad 200 \quad 0]$$

Tras resolver el subproblema de la planta 1 para el tableau 2 podemos determinar si cualquier μ_i tiene un valor favorable. La μ_i correspondiente a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

es

$$\mathbf{c}_{\text{BV}}B_2^{-1} \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2)$$

$$= [10 \quad 200 \quad 0] \begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) = 200 - 10x_1 - 20x_2$$

Por lo tanto, tenemos

Tableau 2
Subproblema de la planta 1

$$\begin{aligned} \min z &= 200 - 10x_1 - 20x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $z = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 10$. De la misma manera que antes, esto quiere decir que ninguna μ_i puede tener un valor favorable.

Para determinar si la λ_i que corresponde al punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

debería entrar a la base, observe que su valor es de

$$[10 \quad 200 \quad 0] \begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (70x_3 + 60x_4) = -10x_4$$

Como

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

debe cumplir con el conjunto 2 de restricciones, la λ_i que muestra un valor más favorable es la λ_i asociada con el punto

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

que resuelve el PL siguiente:

Tableau 2
Subproblema de la planta 2

$$\begin{aligned} \min z &= -10x_4 \\ \text{s.a} \quad 3x_3 + 2x_4 &\le 15 \\ x_3 + x_4 &\le 4 \\ x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

La solución de este PL es $z = -40$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$. Por lo tanto, la λ_i que corresponde a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_3$$

debe entrar a la base, y λ_3 debe entrar a la base. La columna de λ_3 en el tableau 2 es

$$B_2^{-1}\begin{bmatrix} 7(0) + 5(4) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{28} \\ 0 \\ \frac{8}{28} \end{bmatrix}$$

en el tableau 2 es

$$B_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{28} \\ 1 \\ \frac{8}{28} \end{bmatrix}$$

La prueba del cociente indica que λ_3 debe ingresar a la base en la restricción 1 o en la restricción 3; y se elige en forma arbitraria la restricción 1. Por lo tanto, BV(3) = $\{\lambda_3, \mu_4, \lambda_1\}$. Puesto que

$$E_2 = \begin{bmatrix} \frac{28}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3^{-1} = E_2B_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{28}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{28} & -\frac{60}{28} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{28} & \frac{60}{28} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

λ_3 corresponde a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de modo que el coeficiente de λ_3 en la función objetivo de la maestra restringida es $70x_3 + 60x_4 = 70(0) + 60(4) = 240$. Ya se determinó que los coeficientes de μ_4 y λ_1 en la función objetivo son 800 y 0, respectivamente, de modo que tenemos $\mathbf{c}_{\mathrm{BV}} = [240 \quad 800 \quad 0]$, y el nuevo conjunto de precios sombra se obtiene con:

$$\mathbf{c}_{\mathrm{BV}}B_3^{-1} = [240 \quad 800 \quad 0]\begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 3 & 1 \end{bmatrix} = [12 \quad 80 \quad 0]$$

Con estos precios sombra, la μ_i que corresponde al punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tendrá el valor de

$$[12 \quad 80 \quad 0]\begin{bmatrix} 8x_1 + 6x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (90x_1 + 80x_2) = 80 + 6x_1 - 8x_2$$

Entonces tenemos

Tableau 3
Subproblema de la planta 1

$$\begin{aligned} \min z &= 80 + 6x_1 - 8x_2 \\ \text{s.a} \quad 3x_1 + x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $z = 0, x_1 = 0, x_2 = 10$. Esto quiere decir, una vez más, que ninguna μ_i tiene un valor favorable.

Ahora determinaremos, mediante los nuevos precios sombra, si cualquier λ_i tiene un valor favorable. Si ninguna λ_i sobresale favorablemente, entonces tendremos que determinar un tableau óptimo. La λ_i que corresponde a

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

tiene un valor de

$$[12 \quad 80 \quad 0]\begin{bmatrix} 7x_3 + 5x_4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - (70x_3 + 60x_4) = 14x_3$$

Entonces, se tiene

Tableau 3
Subproblema de la planta 2

$$\begin{aligned} \min z &= 14x_3 \\ \text{s.a} \quad 3x_3 + 2x_4 &\le 15 \\ x_3 + x_4 &\le 4 \\ x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

La solución para este PL es $z = 0, x_3 = x_4 = 0$. Lo anterior significa que ninguna λ_i tiene un valor favorable. Puesto que ninguna μ_i o λ_i tiene un valor favorable para el tableau 3, éste debe ser un tableau óptimo para la maestra restringida. Recuerde que BV(3) = $\{\lambda_3, \mu_4, \lambda_1\}$. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 \\ \mu_4 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = B_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{20} & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 80 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la solución óptima para la maestra restringida es $\lambda_3 = 1, \mu_4 = 1, \lambda_1 = 0$, y todos los otros pesos son iguales a cero.

Ahora podemos utilizar la representación de la región factible del conjunto 1 de restricciones como una combinación convexa de sus puntos extremos para determinar que el valor óptimo de

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

está dado por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\mathbf{P}_1 + 0\mathbf{P}_2 + 0\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Podemos utilizar, de manera similar, la representación de la región factible del conjunto 2 de restricciones como una combinación convexa de sus puntos extremos para determinar que el valor óptimo de

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

está dado por

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0\mathbf{Q}_1 + 0\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Entonces, la solución óptima para el problema de Steelco es $x_2 = 10$, $x_4 = 4$, $x_1 = x_3 = 0$, $z = 1040$. Por lo tanto, Steelco puede maximizar sus ganancias si produce 10 toneladas de acero 2 en la planta 1 y 4 toneladas de acero 2 en la planta 2.

OBSERVACIONES

1 Si hay k conjuntos de variables, entonces la maestra restringida contendrá las restricciones centrales y k restricciones de convexidad (una restricción de convexidad por cada conjunto de variables). Por lo que toca a cada tableau, habrá también k subproblemas que se tienen que resolver (uno para los pesos asociados con los puntos extremos del conjunto de restricciones que corresponde a cada conjunto de variables). Después de resolver estos subproblemas aplique el algoritmo del simplex revisado para introducir en la base el peso resulta más favorable.

2 Una de las principales bondades de la descomposición es que resolver varios PL relativamente pequeños, es mucho más fácil que resolver un PL grande. En otras palabras, considere un ejemplo análogo al número 3, en el cual hay 5 plantas, y cada una tiene 50 restricciones. Suponga también que hay 40 restricciones centrales. Entonces el problema maestro requiere una B^{-1} de 45×45, y cada subproblema representa una B^{-1} de 50×50. Resolver el PL original significaría una B^{-1} de 290×290. Evidentemente, almacenar una matriz de 290×290 requiere más memoria de computadora que almacenar cinco matrices de 50×50. y una matriz de 45×45. Lo anterior ilustra el modo en que la descomposición reduce en gran medida la capacidad de almacenamiento.

3 La descomposición tiene una interpretación económica interesante. ¿Cuál es el significado de los precios sombra para la maestra restringida del ejemplo 3? Por cada tableau, el precio sombra para la restricción central (que refleja la cantidad limitada del mineral de hierro) es la cantidad en que aumentarían las ganancias con una unidad adicional de hierro. Se puede demostrar que, para cualquier tableau, el precio sombra para la restricción de convexidad de la planta i ($i = 1, 2$) es la utilidad obtenida a partir de la mezcla actual de los puntos extremos que se están usando en la planta i menos el valor del recurso centralizado (calculado por medio del precio sombra centralizado) que requiere la mezcla actual de puntos extremos que se está usando en la planta i. Por ejemplo, en el tableau 3, el precio sombra para la restricción de convexidad de la planta 1 es 80. En la actualidad, la planta 1 utiliza la mezcla $x_1 = 0$ y $x_2 = 10$. Esta mezcla proporciona una ganancia de $80(10) = 800$ dólares y utiliza $6(10) = 60$ toneladas de hierro con valor de $60(12) = 720$ dólares. Por lo tanto, la restricción de convexidad de la planta 1 tiene un precio sombra de $800 - 720 = 80$ dólares. Esto significa que si el Δ del peso de la planta 1 se retirara, la ganancia se reduciría en 80Δ.

Ya podemos dar una interpretación económica del procedimiento de valoración que se usa para generar los subproblemas. Si estamos en el tableau 3, ¿cuáles son los beneficios y los costos si pretendemos introducir la μ_j asociada con el punto extremo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

en la base? Recuerde que para el tableau 3, el precio sombra del hierro es 12 y la restricción de convexidad de la planta 1 tiene un precio sombra de 80. Para determinar si μ_i debe entrar a la base se tiene que balancear

$$\text{Ganancias incrementadas en el caso de } \mu_i = \text{ganancias ganadas por } \mu_i \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 90(\mu_i x_1) + 80(\mu_i x_2)$$

contra los costos en que se incurre si μ_i entra a la base.

Si μ_i entra a la base, se generan dos costos: primero, 12 dólares por cada tonelada de hierro usado. Esto asciende a un costo de $12[8(\mu_i x_1) + 6(\mu_i x_2)]$. Al introducir a μ_i en la base, también se desvía una fracción μ_i de los pesos disponibles de la planta 1 de la mezcla actual. Esto genera un costo de oportunidad de 80 μ_i. Por lo tanto,

$$\text{Incremento en costo por la introducción de } \mu_i \text{ en la base} = 96\mu_i x_1 + 72\mu_i x_2 + 80\mu_i$$

Esto quiere decir que la entrada de μ_i en la base puede incrementar las utilidades si y sólo si

$$90\mu_i x_1 + 80\mu_i x_2 > 96\mu_i x_1 + 72\mu_i x_2 + 80\mu_i$$

Al cancelar μ_i de ambos miembros se observa que μ_i tiene un valor favorable si

$$90x_1 + 80x_2 > 96x_1 + 72x_2 + 80, \text{ o bien, } 0 > 80 + 6x_1 - 8x_2$$

Por lo tanto, la mejor μ_i de ambos miembros se observa que μ_i tiene un valor favorable si

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, que minimiza $80 + 6x_1 - 8x_2$. Ésta es de hecho la función objetivo para el subproblema del tableau 3 de la planta 1.

Este análisis muestra que el algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe combina información centralizada (de los precios sombra de las restricciones centralizadas) con información local (los precios sombra de la restricción de convexidad de cada planta) con el objeto de determinar qué pesos deben entrar en la base (o, que es lo mismo, qué puntos extremos de cada planta se deben usar).

PROBLEMAS

Grupo A

Resuelva los problemas siguientes mediante el algoritmo de la descomposición de Dantzig-Wolfe.

1

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 10 \\ x_2 + x_3 &\le 5 \\ x_1 &\le 3 \\ 2x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 8 \\ x_4 + x_5 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(*Sugerencia*: no hay ninguna ley en contra de tener un solo conjunto de variables y un subproblema.)

4 Proporcione una interpretación económica que explique por qué λ_3 tiene un valor favorable en el subproblema del tableau 2 de la planta 2.

5 Dé un ejemplo que ilustre por qué el teorema 1 no se cumple para un PL con una región factible no acotada.

10.5 Método simplex para variables acotadas superiormente

Los PLs contienen, a menudo, muchas restricciones de la forma $x_i \leq u_i$ (donde u_i es una constante). Por ejemplo, en un problema de programación de la producción, podría haber muchas restricciones del tipo $x_i \leq u_i$, donde

$$x_i = \text{producción del periodo } i$$
$$u_i = \text{capacidad de producción del periodo } i$$

Como una restricción de la forma $x_i \leq u_i$ proporciona un acotamiento superior en x_i recibe el nombre de **restricción del acotamiento superior.** Puesto que $x_i \leq u_i$ es una restricción legal del PL podemos usar evidentemente el método simplex ordinario para resolver un PL que tiene restricciones de acotamiento superior. Como quiera que sea, si un PL contiene varias restricciones del acotamiento superior, entonces el procedimiento descrito en esta sección (denominado método simplex para variables con acotamiento superior) es mucho más eficiente que el algoritmo simplex ordinario.

Para resolver en forma eficiente un PL con restricciones del acotamiento superior, dejamos que la variable x_i sea no básica si $x_i = 0$ (el criterio común para una variable no básica) o si $x_i = u_i$. Para lograrlo usamos la estrategia siguiente: por cada variable x_i que tiene una restricción de acotamiento superior $x_i \leq u_i$, definimos una variable nueva x_i' por la relación $x_i + x_i' = u_i$, o bien, $x_i = u_i - x_i'$. Observe que si $x_i = 0$, entonces $x_i' = u_i$, en tanto que si $x_i = u_i$, entonces $x_i' = 0$. Siempre que queramos que x_i iguale al acotamiento superior de u_i, simplemente reemplazamos x_i por $u_i - x_i'$. Esto recibe el nombre de **sustitución del acotamiento superior.**

Ahora ya estamos listos para explicar el método simplex para variables con acotamiento superior. Suponemos que está a la mano una solución básica, y que estamos resolviendo un problema de maximización. Como es costumbre, en cada iteración elegimos incrementar la variable x_i cuyo coeficiente es el más negativo en el renglón 0. Hay tres situaciones posibles, u obstáculos, que pueden limitar la cantidad en que incrementamos x_i:

Obstáculo 1 x_i no puede sobrepasar el acotamiento superior de u_i.

Obstáculo 2 x_i se incrementa hasta un punto donde ocasiona que una de las variables básicas actuales se vuelva negativa. El valor mínimo de x_i que ocasiona que una de las variables básicas se vuelva negativa se podría encontrar si expresamos cada variable básica en términos de x_i (recuerde que se aplicó este concepto en el capítulo 4 al tratar el algoritmo simplex).

Obstáculo 3 x_i aumenta hasta un punto donde causa que una de las variables básicas actuales sobrepase el acotamiento superior. Al igual que en el obstáculo 2, el valor mínimo de x_i para el cual este obstáculo se presenta se puede encontrar al expresar cada variable básica en términos de x_i.

Sea BN_k ($k = 1, 2, 3$) el valor de x_i donde se presenta el obstáculo k. Entonces x_i puede aumentar sólo hasta un valor de min $\{BN_1, BN_2, BN_3\}$. El más pequeño de BN_1, BN_2 y BN_3 se denomina obstáculo ganador. Si el obstáculo ganador es BN_1, entonces hacemos una sustitución de acotamiento superior sobre x_i por $u_i - x_i'$. Si el obstáculo ganador es BN_2, entonces introducimos a x_i en la base en el renglón correspondiente a la variable básica que ocasionó que BN_2 ocurriera. Y si el ganador es BN_3, entonces efectuamos una sustitución del acotamiento superior de la variable x_j (reemplazando x_j por $u_j - x_j'$) que alcanza su acotamiento superior cuando $x_i = BN_3$. Luego se introduce x_i en la base en el renglón para el cual x_j era una variable básica.

Después de seguir este procedimiento, inspeccionamos en nuevo renglón 0. Si cada variable tiene un coeficiente no negativo en el rengón 0, entonces hemos obtenido un tableau óptimo. En caso contrario, tratamos de aumentar la variable cuyo coeficiente es el más negativo en el renglón 0. Este procedimiento ofrece la certeza (mediante BN_1 y BN_3) que ninguna restricción con acotamiento superior se incumple y (por medio de BN_2) que se satisfacen todas las restricciones no negativas.

EJEMPLO 4 Simplex con acotamientos superiores 1

Resuelva el PL siguiente

$$
\begin{aligned}
\max z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \\
\text{s.a} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 10 \\
x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &\le 6 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 20 \\
x_1 &\le 4 \\
x_2 &\le 3 \\
x_3 &\le 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Solución El tableau inicial de este problema se da en la tabla 3. Puesto que el coeficiente de x_1 es el más negativo en el renglón 0, intentamos aumentar x_1 tanto como sea posible. Los tres obstáculos para x_1 se calculan como se indica: x_1 no puede ser mayor que su acotamiento superior de 4, de modo que $BN_1 = 4$. Para calcular BN_2, se determina el conjunto actual de variables básicas en términos de x_1:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 10 - 2x_1 && (s_1 \ge 0 \text{ sólo si } x_1 \le 5) \\
s_2 &= 6 - x_1 && (s_2 \ge 0 \text{ sólo si } x_1 \le 6) \\
s_3 &= 20 - 2x_1 && (s_3 \ge 0 \text{ sólo si } x_1 \le 10)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $BN_2 = \min\{5, 6, 10\} = 5$. Las variables básicas actuales ($\{s_1, s_2, s_3\}$) no tienen acotamiento superior, por lo cual no hay valor de BN_3. Entonces, el obstáculo ganador es $\min\{4, 5\} = 4 = BN_1$. Debemos efectuar, por lo tanto, una sustitución de acotamiento superior sobre x_1 reemplazándo a x_1 por $4 - x_1'$. El tableau resultante se presenta en la tabla 4.

Como x_3 tiene el coeficiente más negativo en el renglón 0, tratamos de incrementar x_3 tanto como sea posible. Los obstáculos de x_3 se calculan como se indica a continuación: x_3 no puede exceder su acotamiento superior de 1, de modo que $BN_1 = 1$. Por lo que toca a BN_2, determinamos el conjunto actual de variables básicas en términos de x_3:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 2 - x_3 && (s_1 \ge 0 \text{ sólo si } x_3 \le 2) \\
s_2 &= 2 - \tfrac{1}{2}x_3 && (s_2 \ge 0 \text{ sólo si } x_3 \le 4) \\
s_3 &= 12 - 4x_3 && (s_3 \ge 0 \text{ sólo si } x_3 \le 3)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $BN_2 = \min\{2, 4, 3\} = 2$. Como s_1, s_2 y s_3 no tienen un acotamiento superior, no hay BN_3. El obstáculo ganador es $\min\{1, 2\} = BN_1 = 1$, por lo que efectuamos una sustitución de acotamiento superior sobre x_3 reemplazando a ésta por $1 - x_3'$. El tableau resultante es el de la tabla 5.

Puesto que ahora el coeficiente más negativo en el renglón 0 es el de x_2 tratamos de incrementarlo. El cálculo de los obstáculos es como se indica: para BN_1, x_2 no puede exceder su acotamiento superior de 3, así que $BN_1 = 3$. Por lo que toca a BN_2,

TABLA 3
Tableau inicial del ejemplo 5

	Variable básica
$z - 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$	$z = 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 10$	$s_1 = 10$
$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + s_2 = 6$	$s_2 = 6$
$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_3 = 20$	$s_3 = 20$

TABLA 4
Reemplazo de x_1 por $4 - x'_1$

	Variable básica
$z + 4x'_1 - 2x_2 - 3x_3 = 16$	$z = 16$
$-2x'_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$	$s_1 = 2$
$-x'_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + s_2 = 2$	$s_2 = 2$
$-2x'_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_3 = 12$	$s_3 = 12$

TABLA 5
Reemplazo de x_3 por $1 - x'_3$

	Variable básica
$z + 4x'_1 - 2x_2 + 3x'_3 = 19$	$z = 19$
$-2x'_1 + x_2 - x'_3 + s_1 = 1$	$s_1 = 1$
$-x'_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x'_3 + s_2 = \frac{3}{2}$	$s_2 = \frac{3}{2}$
$-2x'_1 + 2x_2 - 4x'_3 + s_3 = 8$	$s_3 = 8$

TABLA 6
Tableau inicial para el ejemplo 4

	Variable básica
$z + x'_3 + 2s_1 = 21$	$z = 21$
$-2x'_1 + x_2 - x'_3 + s_1 = 1$	$x_2 = 1$
$-\frac{1}{2}s_1 + s_2 = 1$	$s_2 = 1$
$2x'_1 - 2x'_3 - 2s_1 + s_3 = 6$	$s_3 = 6$

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 1 - x_2 && (s_1 \geq 0 \text{ sólo si } x_2 \leq 1)\\
s_2 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x_2 && (s_2 \geq 0 \text{ sólo si } x_2 \leq 3)\\
s_3 &= 8 - 2x_2 && (s_3 \geq 0 \text{ sólo si } x_2 \leq 4)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $BN_2 = \min\{1, 3, 4\} = 1$. Observe que se presenta BN_2 porque s_1 está obligada a ser 0. Ninguna de las variables básicas del conjunto actual tiene una restricción de acotamiento superior, de modo que no hay BN_3. El obstáculo ganador es $\min\{3, 1\} = 1 = BN_2$, así que x_2 entra a la base en el renglón en el cual s_1 era una variable básica (renglón 1). Después de ejecutar el pivoteo, el nuevo tableau es el de la tabla 6. Puesto que el coeficiente de cada variable en el renglón 0 es no negativo, es un tableau óptimo. Por lo tanto, la solución óptima para el PL es $z = 21, s_2 = 1, x_2 = 1, s_3 = 6, x'_1 = 0, s_1 = 0, x'_3 = 0$. Como $x'_1 = 4 - x_1$ y $x'_3 = 1 - x_3$, también se tiene $x_1 = 4$ y $x_3 = 1$.

EJEMPLO 5 Simplex con acotamientos superiores 2

Resuelva el PL siguiente

$$
\begin{aligned}
\max z &= 6x_3\\
\text{s.a} \quad x_1 - x_3 &= 6\\
x_2 + 2x_3 &= 8\\
x_1 \leq 8, x_2 \leq 10, x_3 \leq 5&; x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

TABLA 7
Tableau inicial para el ejemplo 6

	Variable básica
$z \qquad - 6x_3 = 0$	$z = 0$
$x_1 \quad - \quad x_3 = 6$	$x_1 = 6$
$x_2 + 2x_3 = 8$	$x_2 = 8$

TABLA 8
Reemplazo de x_1 por $8 - x_1'$

	Variable básica
$z \qquad - 6x_3 = 0$	$z = 0$
$x_1' \quad + \quad x_3 = 2$	$x_1' = 6$
$x_2 + 2x_3 = 8$	$x_2 = 8$

TABLA 9
Tableau óptimo para el ejemplo 5

	Variable básica
$z + 6x_1' \qquad = 12$	$z = 12$
$x_1' \quad + x_3 = 2$	$x_3 = 2$
$-2x_1' + x_2 \qquad = 4$	$x_2 = 4$

Solución Después de poner la función objetivo en el formato estándar del renglón 0 se obtiene el tableau de la tabla 7. Por fortuna, la solución factible básica $z = 0, x_1 = 6, x_2 = 8, x_3 = 0$ es evidente. Entonces es posible proseguir con el método simplex para variables con acotamiento superior. Puesto que el coeficiente de x_3 es el más negativo en el renglón 0, se intenta incrementar a x_3. Como ésta no puede exceder su acotamiento superior de 5, $BN_1 = 5$. Para calcular BN_2,

$$x_1 = 6 + x_3 \qquad (x_1 \geq 0 \text{ sólo si } x_3 \geq -6)$$
$$x_2 = 8 - 2x_3 \qquad (x_2 \geq 0 \text{ sólo si } x_3 \leq 4)$$

Por lo tanto, todas las variables actuales básicas seguirán siendo no negativas siempre que $x_3 \leq 4$. entonces, $BN_2 = 4$. Por lo que se refiere a BN_3, observe que $x_1 \leq 8$ se cumple si y sólo si $6 + x_3 \leq 8$, es decir, $x_3 \leq 2$. Asimismo, $x_2 \leq 10$ se cumple si y sólo si $8 - 2x_3 \leq 10$, es decir, $x_3 \geq -1$. Por lo tanto, para $x_3 \leq 2$, cada variable básica sigue siendo menor o igual que su acotamiento superior, por eso $BN_3 = 2$. Obsérvese que BN_3 se presenta cuando la variable básica x_1 alcanza su acotamiento superior. El obstáculo ganador es $\min\{5, 4, 2\} = 2 = BN_3$, de modo que el valor más grande que puede tener x_3 es 2, y el obstáculo se presenta cuando x_1 alcanza su acotamiento superior de 8. Por lo tanto, se efectúa una sustitución del acotamiento superior sobre x_1 mediante el reemplazo de ésta por x_1 por $8 - x_1'$. El tableau resultante es

$$\begin{aligned} z \qquad\qquad &- 6x_3 = 0 \\ -x_1' \qquad &- \quad x_3 = -2 \\ x_2 &+ 2x_3 = 8 \end{aligned}$$

Después de reescribir $-x_1' - x_3 = -2$ como $x_1' + x_3 = 2$, se obtiene el tableau de la tabla 8.

Como x_1, la variable que generó BN_3, era básica en el renglón 1, se hace x_3 a una variable básica en el renglón 1. Después del pivoteo se obtiene el tableau que se ilustra en la tabla 9, el cual es óptimo. Por lo tanto, la solución óptima para el PL es $z = 12, x_3 = 2, x_2 = 4, x_1' = 0$. Puesto que $x_1' = 0, x_1 = 8 - x_1' = 8$.

Con el objeto de ilustrar las eficiencias conseguidas al aplicar el algoritmo simplex con acotamientos superiores, suponga que estamos resolviendo un PL (llámelo PL 1) con 100 variables, donde cada una de dichas variables tiene una restricción de acotamiento superior y otras cinco restricciones. Si resolviéramos el PL 1 mediante el método simplex revisado, la B^{-1} para cada tableau sería una matriz de 105×105. Si utilizáramos en cambio el método simplex para variables con acotamiento superior, la B^{-1} para cada tableau sería sólo una matriz de 5 × 5. Aunque los cálculos del obstáculo ganador en cada iteración son más complicados que la prueba ordinaria del cociente, sería mucho más efectivo resolver el PL 1 mediante el método simplex para variables con acotamiento superior que por el simplex revisado común.

PROBLEMAS

Resuelva los PL siguientes mediante el algoritmo simplex con acotamiento superior:

Grupo A

1

$$\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
\text{s.a}\quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 9 \\
& 4x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \le 6 \\
& 2x_2 + x_3 \le 5 \\
& x_1 \le 2 \\
& x_2 \le 3 \\
& x_3 \le 4 \\
& x_4 \le 5 \\
& x_5 \le 7 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\min z &= -4x_1 - 9x_2 \\
\text{s.a}\quad & 3x_1 + 5x_2 \le 6 \\
& 5x_1 + 6x_2 \le 10 \\
& 2x_1 - 3x_2 \le 4 \\
& x_1 \le 2 \\
& x_2 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a}\quad & 2x_1 - x_2 \le 1 \\
& x_1 + 6x_2 \le 6 \\
& x_2 \le 5 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

4 Suponga un PL que contenga restricciones con acotamiento inferior de la manera siguiente: $x_j \ge L_j$. Recomiende un algoritmo que se pueda aplicar para resolver dicho problema de manera eficiente.

10.6 Método de Karmarkar para resolver PLs

Ya se mencionó en la sección 4.13 que el método de Karmarkar para resolver PL es un algoritmo polinomial de tiempo. Difiere del algoritmo simplex, ya que éste es un algoritmo exponencial de tiempo. A diferencia del método del elipsoide, otro algoritmo polinomial de tiempo, el método de Karmarkar resuelve, al parecer, muchos PLs mucho más rápido que el algoritmo simplex. En esta sección se presenta una descripción de los conceptos básicos que sustentan al método de Karmarkar. Obsérvese que varias versiones del método de Karmarkar son más eficientes, desde el punto de vista de los cálculos, que la versión que aquí se describe. El objetivo es presentar simplemente al lector las ideas incitantes que se usaron en el método de Karmarkar. Una descripción más detallada de este método se encuentra en Hooker (1986), Parker y Rardin (1988) y Murty (1989).

El método de Karmarkar se aplica en un PL de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\min z &= \mathbf{cx} \\
\text{s.a}\quad & A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\
& x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\
& \mathbf{x} \ge 0
\end{aligned} \tag{31}$$

En (31), $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$, A es una matriz $m \times n$ matrix, $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$ y $\mathbf{0}$ es un vector columna n-dimensional de ceros. El PL debe satisfacer también

$$[\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{1}{n} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{n}]^T \qquad \text{es factible} \tag{32}$$

$$\text{valor óptmo de } z = 0 \tag{33}$$

Aunque podría parecer poco usual que un PL tenga la forma (31) y satisfaga (32) y (33), es fácil mostrar que cualquier PL se podría poner en una forma tal que se cumplan (31) a (33). Lo anterior se demuestra al final de esta sección.

Los tres conceptos siguientes tienen un papel clave en el método de Karmarkar:

1 Proyección de un vector sobre el conjunto de $\mathbf{x}$ que satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2 Transformación centradora de Karmarkar.

3 Función potencial de Karmarkar.

Enseguida se analizan los primeros dos conceptos, y se deja para el final de la sección el estudio de la función potencial de Karmarkar. Pero antes de estudiar las ideas mencionadas, se requiere una definición.

DEFINICIÓN ■ El **simplex unitario n-dimensional** S es el conjunto de puntos $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ que satisface $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ y $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. ■

Proyección

Suponga que nos dan un punto $\mathbf{x}^0$ que es factible para (31), y que queremos pasar desde $\mathbf{x}^0$ hasta otro punto factible (llámelo $\mathbf{x}^1$) que, para algún vector fijo $\mathbf{v}$, tendrá un valor $\mathbf{vx}$ más grande. Suponga que encontramos a $\mathbf{x}^1$ al alejarse de $\mathbf{x}^0$ en dirección $\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n]$. Para que $\mathbf{x}^1$ sea factible, $\mathbf{d}$ tiene que satisfacer $A\mathbf{d} = \mathbf{0}$ y $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0$. Si escogemos la dirección $\mathbf{d}$ que resuelve el problema de optimización

$$\begin{aligned} \max\ & \mathbf{vd} \\ \text{s.a}\quad & A\mathbf{d} = \mathbf{0} \\ & d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0 \\ & \|\mathbf{d}\| = 1 \end{aligned}$$

entonces estaremos moviéndonos en la dirección "factible" que maximiza el incremento en $\mathbf{vx}$ por unidad de longitud desplazada. La dirección $\mathbf{d}$ que resuelve este problema de optimización está dada por la **proyección** de $\mathbf{v}$ sobre el conjunto de $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ que satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. La proyección de $\mathbf{v}$ sobre el conjunto de $\mathbf{x}$ que satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ está dado por $[I - B^T(BB^T)^{-1}B]\mathbf{v}$, donde B es la matriz $(m + 1) \times n$ cuyos primeros renglones m son A y cuyo último renglón es un vector de unos.

Desde el punto de vista geométrico, ¿qué significa proyectar un vector $\mathbf{v}$ sobre el conjunto de $\mathbf{x}$ que satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$? Se puede demostrar que cualquier vector $\mathbf{v}$ se podría escribir (únicamente) en la forma $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{w}$, donde $\mathbf{p}$ satisface $A\mathbf{p} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{w}$ es perpendicular a todos los vectores $\mathbf{x}$ que satisfacen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{p}$ es la proyección de $\mathbf{v}$ sobre el conjunto de $\mathbf{x}$ que satisfacen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esta idea se ilustra en el ejemplo de la figura 5, donde $\mathbf{v} = [-2 \quad -1 \quad 7]$ se proyecta sobre el conjunto de vectores tridimensionales que satisfacen $x_3 = 0$ (el plano $x_1 - x_2$). En este caso descomponemos $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v} = [-2 \quad -1 \quad 0] + [0 \quad 0 \quad 7]$. Por lo tanto, $\mathbf{p} = [-2 \quad -1 \quad 0]$. Es fácil demostrar que $\mathbf{p}$ es el vector del conjunto de $\mathbf{x}$ que satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ que está "más cercano" a $\mathbf{v}$. Esto es evidente en la figura 5.

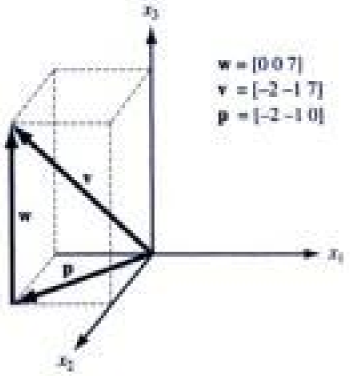


FIGURA 5
Proyección de
$[-2 \quad -1 \quad 7]$
sobre $x_3 = 0$

Transformación centradora de Karmarkar

Dado un punto factible (en (31)) $\mathbf{x}^k = [x_1^k \quad x_2^k \quad \cdots \quad x_n^k]$ en S que tiene $x_j^k > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, escribimos la **transformación centradora** asociada con el punto $\mathbf{x}^k$, como $f([x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \| \mathbf{x}^k)$. Si $\mathbf{x}^k$ es un punto en S, entonces $f([x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \| \mathbf{x}^k)$ transforma un punto $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ en S en un punto $[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T$ en S, donde

$$y_j = \frac{\dfrac{x_j}{x_j^k}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{r=n} \frac{x_r}{x_r^k}} \tag{34}$$

Sea $\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)$ la matriz $n \times n$ en la cual todos los elementos fuera de la diagonal son iguales a 0 y $\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)_{ii} = x_i^k$. Se puede demostrar que la transformación centradora que se especifica en (34) tiene las propiedades que se listan en el lema 1.

LEMA 1

La tranformación centradora del método de Karmarkar tiene las siguientes propiedades

$$f(\mathbf{x}^k \mid \mathbf{x}^k) = [\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{1}{n} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{n}]^T \tag{35}$$

$$\text{Para } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}', \qquad f(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^k) \neq f(\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}^k) \tag{36}$$

$$f(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^k) \in S \tag{37}$$

Para cualquier punto $[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T$ en S, hay un punto único $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ en S que satisface **(38)**

$$f([x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T \mid \mathbf{x}^k) = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T \tag{38'}$$

El punto $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ se obtienen con

$$x_j = \frac{x_j^k y_j}{\displaystyle\sum_{r=1}^{r=n} x_r^k y_r}$$

Si $[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ y $[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T$ satisfacer (38′), escribimos $f^{-1}([y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]^T \mid \mathbf{x}^k) = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$.

Un punto $\mathbf{x}$ en S satisfará $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si $A[\mathrm{Diag}(\mathbf{x}^k)]f(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^k) = 0$ **(39)**

(Véase una demostración del lema 1 en el problema 5.)

Con el objeto de ilustrar la transformación centradora, considere el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_2 - x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{40}$$

Este PL es de la forma (31); el punto $[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}]^T$ es factible, y el valor óptimo de z del PL es 0. El punto factible $[\frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8}]$ origina la transformación siguiente:

$$f([x_1 \quad x_2 \quad x_3] \mid [\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{3}{8} \quad \tfrac{3}{8}]) = \left[\frac{4x_1}{4x_1 + \frac{8x_2}{3} + \frac{8x_3}{3}} \quad \frac{\frac{8x_2}{3}}{4x_1 + \frac{8x_2}{3} + \frac{8x_3}{3}} \quad \frac{\frac{8x_3}{3}}{4x_1 + \frac{8x_2}{3} + \frac{8x_3}{3}} \right]$$

Por ejemplo,

$$f([\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}] \mid [\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{3}{8} \quad \tfrac{3}{8}]) = [\tfrac{12}{28} \quad \tfrac{8}{28} \quad \tfrac{8}{28}]$$

Ahora designaremos a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como espacio *original* y a las variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ como el espacio *transformado*. El simplex unitario que tiene que ver con variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lo denominamos simplex unitario transformado. Ahora analizamos el significado intuitivo de (35) a (39). La ecuación (35) implica que $f(\cdot \mid \mathbf{x}^k)$ mapea $\mathbf{x}^k$ en el "centro" del simplex unitario transformado. Con las ecuaciones (36) y (37) se quiere dar a entender que cualquier punto en S es transformado en un punto en el simplex unitario transformado, y que no hay dos puntos en S que puedan originar el mismo punto en el simplex unitario transformado (es decir, f es un mapeo uno a uno). La ecuación (38) significa que para cualquier punto $\mathbf{y}$ en el simplex unitario transformado hay un punto $\mathbf{x}$ en S que es transformado en $\mathbf{y}$. Se da también la fórmula para la $\mathbf{x}$ que es transformada en $\mathbf{y}$. Por lo tanto, (36) a (38) implican que f es un uno y un mapeo biyectivo de S a S. Por último, (39) establece que puntos factibles en el problema original corresponden a puntos $\mathbf{y}$ en el simplex unitario transformado que satisface $A[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{y} = 0$.

Descripción y ejemplo del método de Karmarkar

Supongamos que estaremos satisfechos con un punto factible que tenga un valor óptimo de $z < \epsilon$ (para alguna ϵ pequeña). El método de Karmarkar procede como se indica a continuación:

Paso 1 Empiece en el punto factible $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \cdots \quad \frac{1}{n}]^T$ y haga $k = 0$.

Paso 2 Deténgase si $\mathbf{c}\mathbf{x}^k < \epsilon$. Si no es así, continúe con el paso 3.

Paso 3 Determine el nuevo punto $\mathbf{y}^{k+1} = [y_1^{k+1} \quad y_2^{k+1} \quad \cdots \quad y_n^{k+1}]^T$ en el simplex unitario transformado dado por

$$\mathbf{y}^{k+1} = [\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{1}{n} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{n}]^T - \frac{\theta(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T}{\|\mathbf{c}_p\|\sqrt{n(n-1)}}$$

Aquí, $\|\mathbf{c}_p\|$ = la longitud de $(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$, P es la matriz $(m + 1) \times n$ cuyos primeros m renglones son $A[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]$ y cuyo último renglón es un vector de unos, y se elige $0 < \theta < 1$ para asegurar la convergencia del algoritmo. Se sabe que $\theta = \frac{1}{4}$ asegura la convergencia.

Ahora obtenga un nuevo punto $\mathbf{x}^{k+1}$ en el espacio original por medio de la transformación centradora para determinar el punto que corresponde a $\mathbf{y}^{k+1}$. Es decir, $\mathbf{x}^{k+1} = f^{-1}(\mathbf{y}^{k+1} \mid \mathbf{x}^k)$. Incremente k en 1 y vuelva al paso 2.

OBSERVACIONES **1** En el paso 3 nos movemos desde el "centro" del simplex unitario transformado en una dirección opuesta a la proyección de $\text{Diag}(\mathbf{x}^k)\mathbf{c}^T$ sobre la transformación de la región factible (el conjunto de y que satisface $A[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{y} = \mathbf{0}$). De acuerdo con el análisis de la proyección, esto da la certeza de que mantenemos la factibilidad (en el espacio transformado) y nos movemos en una dirección que maximiza la tasa de decremento de $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$.

2 Al desplazarse una distancia

$$\frac{\theta}{\sqrt{n(n-1)}}$$

desde el centro del simplex unitario transformado, se asegura que $\mathbf{y}^{k+1}$ permanecerá en el interior del simplex unitario transformado.

3 Cuando usamos la inversa de la transformación centradora de Karmarkar para convertir $\mathbf{y}^{k+1}$ de nuevo en $\mathbf{x}^{k+1}$, la definición de proyección y (39) implican que $\mathbf{x}^{k+1}$ será factible para el PL original (véase problema 6).

4 ¿Por qué proyectamos $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ y no $\mathbf{c}^T$ sobre la región factible transformada? La respuesta a esta pregunta debe esperar al análisis de la función potencial de Karmarkar. En el problema 7 se proporciona otra explicación de por qué proyectamos $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ y no $\mathbf{c}^T$.

Ahora elaboraremos la primera iteración del método de Karmarkar cuando se aplicó a (40), y se eligió $\epsilon = 0.10$.

Primera iteración del método de Karmarkar

Paso 1 $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}]^T$ y $k = 0$.

Paso 2 $\mathbf{x}^0$ genera $z = \frac{1}{3} > 0.10$, de modo que tenemos que proseguir con el paso 3.

Paso 3

$$A = [0 \quad 1 \quad -1], \qquad \text{Diag}(\mathbf{x}^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)] = [0 \quad \tfrac{1}{3} \quad -\tfrac{1}{3}], \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PP^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad (PP^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$(I - P^T(PP^T)^{-1}P) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = [1 \quad 3 \quad -3]$$

$$[\text{Diag}\ \mathbf{x}^k]\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\text{Diag}\ \mathbf{x}^k]\mathbf{c}^T = [\tfrac{2}{9} \quad -\tfrac{1}{9} \quad -\tfrac{1}{9}]$$

Ahora (usando $\theta = 0.25$), obtenemos

$$\mathbf{y}^1 = [\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}]^T - \frac{0.25[\frac{2}{9} \quad -\frac{1}{9} \quad -\frac{1}{9}]^T}{\sqrt{3(2)}\|[\frac{2}{9} \quad -\frac{1}{9} \quad -\frac{1}{9}]\|}$$

Puesto que

$$\|[\tfrac{2}{9} \quad -\tfrac{1}{9} \quad -\tfrac{1}{9}]\|^T = \sqrt{(\tfrac{2}{9})^2 + (-\tfrac{1}{9})^2 + (-\tfrac{1}{9})^2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{9}$$

obtenemos

$$\mathbf{y}^1 = [\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}]^T - [\tfrac{6}{72} \quad -\tfrac{3}{72} \quad -\tfrac{3}{72}]^T = [\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{3}{8} \quad \tfrac{3}{8}]^T$$

Con ayuda de (38′) tenemos $\mathbf{x}^1 = [x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_3^1]^T$ a partir de

$$x_1^1 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{4})}{\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8})} = \frac{1}{4}$$

$$x_2^1 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{3}{8})}{\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8})} = \frac{3}{8}$$

$$x_3^1 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{3}{8})}{\frac{1}{3}(\frac{1}{4}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8}) + \frac{1}{3}(\frac{3}{8})} = \frac{3}{8}$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}^1 = [\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{3}{8} \quad \tfrac{3}{8}]^T$. Siempre sucederá (véase problema 3) que $\mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1$, pero para $k > 1$, $\mathbf{x}^k$ no necesita ser igual a $\mathbf{y}^k$. Obsérvese que para $\mathbf{x}^1$, se tiene $z = \frac{1}{4} + 3(\frac{3}{8}) - 3(\frac{3}{8}) = \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ (el valor de z para $\mathbf{x}^0$).

Función potencial

Como estamos proyectando $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ y no $\mathbf{c}^T$, no es posible estar seguros de que cada iteración del método de Karmarkar disminuirá z. En efecto, es posible que esto suceda para $\mathbf{cx}^{k+1} > \mathbf{cx}^k$ Para explicar por qué Karmarkar proyecta $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$, necesitamos analizar la función potencial de Karmarkar. Para $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$, definimos la función potencial $f(\mathbf{x})$ mediante.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{j=n} \ln\left(\frac{\mathbf{cx}^T}{x_j}\right)$$

Karmarkar demostró que si proyectamos $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ (no $\mathbf{c}^T$) sobre la región factible en el espacio transformado, entonces para alguna $\delta > 0$, será cierto que para $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k+1}) \geq \delta \tag{41}$$

La desigualdad (41) plantea que cada iteración del método de Karmarkar decrece la función potencial en una cantidad limitada lejos de cero. Karmarkar demuestra que si la función potencial evaluada en $\mathbf{x}^k$ es lo suficientemente pequeña, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{cx}^k$ estará cerca de 0. Puesto que $f(\mathbf{x}^k)$ disminuye por lo menos δ por iteración, se infiere que al escoger k suficientemente grande podemos asegurar que el valor de z para $\mathbf{x}^k$ es menor que ϵ.

Cómo escribir una PL en la forma estándar para el método de Karmarkar

Enseguida se ilustra la manera de convertir un PL en la forma definida por (31) a (33). Como ejemplo se transformará el PL siguiente

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{42}$$

en la forma definida por (31) a (33)

Se empieza por determinar el dual de (42).

$$\begin{aligned} \min w &= 2y_1 + 5y_2 \\ \text{s.a} \quad 2y_1 + y_2 &\geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{42'}$$

De acuerdo con el teorema del dual (teorema 1 del capítulo 6), se sabe que si (x_1, x_2) es factible en (42), (y_1, y_2) será factible en (42′), y el valor de z para (x_1, x_2) es igual al valor de w para (y_1, y_2) en (42′), entonces (x_1, x_2) es óptimo para (42). Esto quiere decir que cualquier solución factible del conjunto siguiente de restricciones genera la solución óptima de (42):

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2y_1 - 5y_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &\leq 5 \\ 2y_1 + y_2 &\geq 3 \\ -y_1 + 2y_2 &\geq 1 \\ \text{Todas variables} &\geq 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Al insertar variables de holgura y de excedente en (43) se obtiene

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2y_1 - 5y_2 \qquad &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + s_1 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + s_2 &= 5 \\ 2y_1 + y_2 - e_1 &= 3 \\ -y_1 + 2y_2 - e_2 &= 1 \\ \text{Todas variables} &\geq 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Ahora buscaremos un número M tal que cualquier solución factible de (44) satisfará

$$\text{suma de todas las variables en (44)} \leq M \tag{45}$$

y sumamos la restricción (45) a (44). Siendo razonables, nos es posible ver que cualquier valor de las variables que genere una solución óptima del primal de (42) y una solución óptima para el dual de (42′) no tendrá variable que exceda 10. Esto daría $M = 10(8) = 80$. Entonces sumamos una variable de holgura (variable ficticia d_1) a (45). El nuevo objetivo es encontrar una solución factible para

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2y_1 - 5y_2 \qquad &= 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + s_1 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + s_2 &= 5 \\ 2y_1 + y_2 - e_1 &= 3 \\ -y_1 + 2y_2 - e_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + s_1 + s_2 + e_1 + e_2 + d_1 &= 80 \\ \text{Todas las variables} &\geq 0 \end{aligned} \tag{46}$$

Ahora se define un nueva variable ficticia d_2; $d_2 = 1$. Se puede usar esta nueva variable para "homogeneizar" las restricciones en (46), las cuales tienen lados derechos no cero. Para hacerlo se suma el múltiplo apropiado de la restricción $d_2 = 1$ para cada restricción en (46) (excepto la última restricción) que tiene un lado derecho no cero. Por ejemplo, se suma $-2(d_2 = 1)$ a la restricción $2x_1 - x_2 + s_1 = 2$. Se reemplaza también la última restricción en (46) por las dos restricciones siguientes:

(a) Se suma $d_2 = 1$ a la última restricción.

(b) Se resta M veces $(d_2 = 1)$ de (46).

Juntas, (a) y (b), son equivalentes a $d_2 = 1$ y la última restricción en (46).

Ahora se busca una solución factible para

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - 2y_1 - 5y_2 &= 0 \\
2x_1 - x_2 + s_1 - 2d_2 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + s_2 - 5d_2 &= 0 \\
2y_1 + y_2 - e_1 - 3d_2 &= 0 \\
-y_1 + 2y_2 - e_2 - d_2 &= 0 \\
x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + s_1 + s_2 + e_1 + e_2 + d_1 - 80d_2 &= 0 \\
x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + s_1 + s_2 + e_1 + e_2 + d_1 + d_2 &= 81 \\
\text{Todas las variables } &\geq 0
\end{aligned} \tag{47}$$

Luego se hacen los cambios de variables siguientes en (47):

$$x_j = (M+1)x_j', y_j = (M+1)y_j', s_j = (M+1)s_j', e_j = (M+1)e_j',$$
$$d_j = (M+1)d_j' \ (j = 1, 2)$$

Con esto se obtiene

$$\begin{aligned}
3x_1' + x_2' - 2y_1' - 5y_2' &= 0 \\
2x_1' - x_2' + s_1' - 2d_2' &= 0 \\
x_1' + 2x_2' + s_2' - 5d_2' &= 0 \\
2y_1' + y_2' - e_1' - 3d_2' &= 0 \\
-y_1' + 2y_2' - e_2' - d_2' &= 0 \\
x_1' + x_2' + y_1' + y_2' + s_1' + s_2' + e_1' + e_2' + d_1' - 80d_2' &= 0 \\
x_1' + x_2' + y_1' + y_2' + s_1' + s_2' + e_1' + e_2' + d_1' + d_2' &= 1 \\
\text{Todas las variables } &\geq 0
\end{aligned} \tag{48}$$

Ahora hay que asegurar de que un punto que iguala a todas las variables es factible en (48). (Recuerde que éste es el requisito (33) para el método de Karmarkar.) Para conseguirlo, primero se suma una variable ficticia d_3' a la última restricción en (48) y luego se suma un múltiplo de d_3' a cada una de las otras restricciones. Este múltiplo se elige de tal manera que la suma de los coeficientes de todas las variables en cada restricción (excepto la última) sea igual a 0. Esto genera el PL (49).

$$\begin{aligned}
&\min z = d_3' \\
&\text{s.a} \quad 3x_1' + x_2' - 2y_1' - 5y_2' + 3d_3' = 0 \\
&2x_1' - x_2' + s_1' - 2d_2' + d_3' = 0 \\
&x_1' + 2x_2' + s_2' - 5d_2' + d_3' = 0 \\
&2y_1' + y_2' - e_1' - 3d_2' + d_3' = 0 \\
&-y_1' + 2y_2' - e_2' - d_2' + d_3' = 0 \\
&x_1' + x_2' + y_1' + y_2' + s_1' + s_2' + e_1' + e_2' + d_1' - 80d_2' + 71d_3' = 0 \\
&x_1' + x_2' + y_1' + y_2' + s_1' + s_2' + e_1' + e_2' + d_1' + d_2' + d_3' = 1 \\
&\text{Todas las variables } \geq 0
\end{aligned} \tag{49}$$

El punto $x_1' = x_2' = y_1' = y_2' = s_1' = s_2' = e_1' = e_2' = d_1' = d_2' = d_3' = 1/11$ de (49) es factible. Puesto que d_3' debe ser igual a 0 en una solución factible de (48), se requiere que con (49) minimice d_3'. Si (48) es factible, entonces el valor mínimo de d_3', en (49), será igual a 0, y los valores de las variables restantes en una solución óptima de (49) generan una solución factible para (48). Los valores de x_1 y x_2 en la solución óptima de (49) proporcionan una solución óptima para el PL (42) original. El PL en (49) satisface (31) a (33) y está listo para la solución con el método de Karmarkar.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Ejecute una iteración del método de Karmarkar para el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2 Ejecute una iteración del método de Karmarkar para el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 - x_2 \quad\quad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3 Demuestre que en el método de Karmarkar, $\mathbf{x}^1 = \mathbf{y}^1$.

4 Ejecute dos iteraciones del método de Karmarkar para el PL siguiente:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Grupo B

5 Demuestre el lema 1.

6 Demuestre que el punto $\mathbf{x}^k$ en el método de Karmarkar es factible para el PL original.

7 Dado un punto $\mathbf{y}^k$ en el método de Karmarkar, exprese la función objetivo original del PL como una función de $\mathbf{y}^k$. Utilice la respuesta a esta pregunta para dar una razón de por qué se proyecta $[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$ y no $\mathbf{c}^T$.

RESUMEN

Método simplex revisado y la forma producto de la inversa

Paso 0 Examine las columnas de donde se leerá la B^{-1} Al principio $B^{-1} = I$.

Paso 1 Calcule $\mathbf{c}_{BV}B^{-1}$ para el tableau actual.

Paso 2 Valore todas las variables no básicas del tableau actual. Si (en el caso de un problema de maximización) cada variable no básica resulta no negativa, la base actual es óptima. Si la base actual no es óptima, introduzca la variable no básica cuyo coeficiente sea el más negativo, en el renglón 0, a la base. Esta variable se llamará x_k.

Paso 3 Para determinar el renglón en el cual x_k entra a la base, calcule la columna de x_k en el tableau actual ($B^{-1}\mathbf{a}_k$) y calcule el lado derecho del tableau actual ($B^{-1}\mathbf{b}$). Luego recurra a la prueba del cociente para determinar el renglón en el cual x_k debe entrar a la base. Ahora conocemos el conjunto de las variables básicas (BV) para el nuevo tableau.

Paso 4 Utilice la columna de x_k en el tableau actual para determinar las OER necesarias a fin de introducir x_k a la base. Efectúe estas OER en la B^{-1} actual para generar la nueva B^{-1}. Regrese al paso 1.

Se podría utilizar la forma producto de la inversa como otra opción para actualizar B^{-1}. Suponga que encontramos que x_k debe entrar a la base en el renglón r. Sea la columna para x_k en el tableau actual

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{1k} \\ \bar{a}_{2k} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mk} \end{bmatrix}$$

Definamos la matriz E ($m \times m$) con

$$
E = \begin{array}{c} \text{(columna } r\text{)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{1k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{2k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{m-1,k}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{\bar{a}_{mk}}{\bar{a}_{rk}} & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{(renglón } r\text{)}
$$

Entonces,

$$B^{-1} \text{ para el nuevo tableau} = E(B^{-1} \text{ para el tableau actual})$$

Vuelva al paso 1.

Generación de columnas

Cuando un PL tiene muchas variables, se requiere mucho tiempo para valorar una por una cada variable no básica. El procedimiento de la generación de columnas permite determinar la variable no básica de valor más favorable mediante la resolución de un subproblema (tal como en los problemas de ramificación y acotamiento en el problema de corte de un material).

Método de descomposición de Dantzig-Wolfe

Las restricciones y las variables se pueden descomponer de la manera siguiente en muchos PL:

Las restricciones del conjunto 1 tienen sólo variables del conjunto 1 de variables.
Las restricciones del conjunto 2 tienen sólo variables del conjunto 2 de variables.

$$\vdots$$

Las restricciones del conjunto k tienen sólo variables del conjunto k de variables.

Las restricciones en el conjunto $k + 1$ pueden contener cualquier variable. Las restricciones en el conjunto $k + 1$ reciben el nombre de **restricciones centrales.**

Los PL que son susceptibles de descomponerse de este modo se resuelven, a menudo de manera eficiente, por medio del algoritmo de descomposición de Dantzig-Wolfe. En la explicación siguiente se supone que $k = 2$.

Paso 1 Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ las variables del conjunto 1 de variables. Exprese las variables del conjunto 1 de variables como una combinación convexa de los puntos extremos de la región factible en el caso del conjunto 1 de restricciones (las restricciones que tienen que ver sólo con las variables del conjunto 1 de variables). Si $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k$ son los puntos extremos de esta región factible, entonces cualquier punto

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix}$$

que se encuentre en la región factible para el conjunto 1 de restricciones se podría escribir en la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n_1} \end{bmatrix} = \mu_1\mathbf{P}_1 + \mu_2\mathbf{P}_2 + \cdots + \mu_k\mathbf{P}_k \tag{29}$$

donde $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ y $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Paso 2 Exprese las variables del conjunto 2 de variables, $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots, x_n$, como una combinación convexa de los puntos extremos de la región factible del conjunto 2 de restricciones. Si los puntos extremos de la región factible son $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m$, entonces cualquier punto de la región factible del conjunto 2 de restricciones se podría escribir como

$$\begin{bmatrix} x_{n_1+1} \\ x_{n_1+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda_1\mathbf{Q}_1 + \lambda_2\mathbf{Q}_2 + \cdots + \lambda_m\mathbf{Q}_m \tag{30}$$

donde $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$.

Paso 3 Exprese, con ayuda de (29) y (30), la función objetivo del PL y las restricciones centralizadas en términos de las μ_i y las λ_i. Después de sumar las restricciones (denominadas restricciones de convexidad), $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$ y las restricciones de signo $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ y $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, se obtiene el PL siguiente, el cual se conoce como **maestra restringida:**

max (o min) [función objetivo en términos de μ_i y λ_i]

s.a [restricciones centrales en términos de las μ_i y λ_i]

$$\begin{aligned} &\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1 \qquad \text{(Restricciones de convexidad)} \\ &\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1 \\ &\mu_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad \text{(Restricciones de signo)} \\ &\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

Paso 4 Suponga que es evidente una solución factible básica para la maestra restringida. Entonces se aplica el método de la generación de columnas de la sección 10.3 para determinar si hay alguna μ_i o λ_i que pueda mejorar el valor de z para la maestra restringida. Si es así, se usa el método simplex revisado para introducir la variable en la base. Si no, el tableau actual es óptimo para la maestra restringida. Si el tableau actual no es óptimo, se continúa con la generación de columnas hasta que se encuentra una solución óptima.

Paso 5 Sustituya los valores óptimos de las μ_i y λ_i determinadas en el paso 4 en (29) y (30). De esta manera se obtienen los valores óptimos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Método simplex revisado para variables con acotamiento superior

Para toda variable x_i que tiene una restricción acotada superiormente $x_i \leq u_i$, se define una nueva variable x_i' mediante la relación $x_i + x_i' = u_i$, o bien, $x_i = u_i - x_i'$.

En cada iteración se elige (en el caso de un problema de maximización) incrementar la variable x_i cuyo coeficiente sea el más negativo en el renglón 0. Tres situaciones posibles, llamados obstáculos, son capaces de limitar la cantidad en que aumenta x_i:

Obstáculo 1 x_i no puede sobrepasar su acotamiento superior de u_i.

Obstáculo 2 x_i se incrementa hasta un punto donde ocasiona que una de las variables básicas actuales se vuelva negativa.

Obstáculo 3 x_i aumenta hasta un punto donde causa que una de las variables básicas actuales sobrepase el acotamiento superior.

Sea BN_k ($k = 1, 2, 3$) el valor de x_i donde se presenta su obstáculo k. Entonces x_i sólo puede aumentar hasta alcanzar un valor de $\min\{BN_1, BN_2, BN_3\}$, el obstáculo ganador. Si el obstáculo ganador es BN_1, entonces se practica una sustitución del acotamiento superior sobre x_i reemplazando x_i por $u_i - x_i'$. Si el obstáculo ganador es BN_2, entonces se introduce x_i a la base en el renglón que corresponde a la variable básica que ocasionó que se presentara BN_2. Si el obstáculo ganador es BN_3 se efectúa una sustitución del acotamiento superior sobre la variable x_j (mediante el reemplazo de x_j por $u_j - x_j'$) que alcanza su acotamiento superior cuando $x_i = BN_3$. Entonces se introduce x_i en la base en el renglón para el cual x_j era una variable básica.

Después de seguir este procedimiento, se examina el nuevo renglón 0. Si todas las variables tienen coeficiente no negativo, se ha conseguido un tableau óptimo. Si no es así, se intenta incrementar la variable cuyo coeficiente es el más negativo del renglón 0.

Método de Karmarkar

Paso 1 Empiece en el punto factible $\mathbf{x}^0 = [\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \cdots \quad \frac{1}{n}]^T$ y haga $k = 0$.

Paso 2 Deténgase si $\mathbf{cx}^k < \epsilon$. Si no es así, prosiga con el paso 3.

Paso 3 Determine el nuevo punto $\mathbf{y}^{k+1} = [y_1^{k+1} \quad y_2^{k+1} \quad \cdots \quad y_n^{k+1}]^T$ en el simplex unitario transformado dado por

$$\mathbf{y}^{k+1} = [\tfrac{1}{n} \quad \tfrac{1}{n} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{n}]^T - \frac{\theta(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T}{\|\mathbf{c}_p\|\sqrt{n(n-1)}}$$

Aquí, $\|\mathbf{c}_p\|$ = la longitud de $(I - P^T(PP^T)^{-1}P)[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]\mathbf{c}^T$, P es la matriz $(m + 1) \times n$ cuyos primeros m renglones son $A[\text{Diag}(\mathbf{x}^k)]$ y cuyo último renglón es un vector de unos y se elige $0 < \theta < 1$ para asegurar la convergencia del algoritmo. Se sabe que $\theta = \frac{1}{4}$ asegura la convergencia.

Ahora obtenga un nuevo punto $\mathbf{x}^{k+1}$ en el espacio original por medio de la transformación centradora para determinar el punto que corresponde a $\mathbf{y}^{k+1}$. Es decir, $\mathbf{x}^{k+1} = f^{-1}(\mathbf{y}^{k+1}|\mathbf{x}^k)$. Aumente k en una unidad y vuelva al paso 2.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Resuelva el PL siguiente mediante el simplex revisado con la forma producto de la inversa:

$$\begin{aligned}\max z &= 4x_1 + 3x_2 + x_3\\ \text{s.a} \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 6\\ x_2 + x_3 &\le 3\\ x_1 \qquad + x_3 &\le 2\\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0\end{aligned}$$

2 Aplique la técnica de la generación de columnas para resolver un problema de corte de material en el cual un cliente desea 20 tablones de 3 pies, 25 tablones de 4 pies y 30 tablones de 5 pies. La demanda se tiene que cumplir cortando tablones de 14 pies.

3 Utilice el método de la descomposición de Dantzig-Wolfe para resolver el PL siguiente:

$$\begin{aligned}\min z &= 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4\\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 \qquad\qquad &\le 4\end{aligned}$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_3 - 3x_4 \leq 7$$
$$2x_3 + x_4 \leq 10$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \leq 10$$
$$x_i \geq 0\ (i = 1, 2, 3, 4)$$

4 Considere la situación siguiente:

a Se fabrican dos tipos de automóviles en tres plantas de producción, y la demanda proviene de tres clientes.

b Se le entrega a usted el costo de producción para cada tipo de automóvil en cada planta y el costo de embarque de cada tipo de automóvil desde cada planta a cada cliente.

c También se le proporciona la capacidad de producción de cada planta (por cada tipo de automóvil).

d Se le indica asimismo que, cuando mucho, la mitad de la cantidad total de automóviles que demanda el cliente 1 puede ser surtida de la producción de la planta 1.

Explique cómo usaría la descomposición para minimizar el costo al cumplir las demandas de los clientes.

5 Una compañía manufactura los productos 1 y 2. Dispone de un total de 100 horas de producción en cada planta. Los tiempos necesarios para elaborar una unidad de cada producto en cada planta se proporcionan en la tabla 10, y las utilidades obtenidas por una unidad de cada producto manufacturado en cada planta se presenta en la tabla 11. Es posible vender a lo más 35 unidades de cada producto. Determine mediante la descomposición cómo la compañía puede maximizar las ganancias.

TABLA 10

	Horas	
Planta	Producto 1	Producto 2
1	2	3
2	3	4

TABLA 11

	Ganancia por producto (dólares)	
Planta	Producto 1	Producto 2
1	8	6
2	10	8

BIBLIOGRAFÍA

Las tres referencias siguientes son obras clásicas en las que se explican detalladamente los métodos para resolver PL grandes:

Beale, E. *Mathematical Programming in Practice*. Pittman, 1968.

Lasdon, L. *Optimization Theory for Large Systems*. Nueva York: Macmilan, 1970.

Orchard-Hays, W. *Advanced LP Computing Techniques*. Nueva York: McGraw-Hill. 1968.

En los tres libros siguientes se encuentran análisis excelentes de la descomposición de Dantzig-Wolfe:

Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti. *Applied Mathematical Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977.

Chvátal, V. *Linear Programming*. San Francisco: Freeman, 1983.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. Nueva York: Wiley, 1979.

La generación de columnas y el problema de corte de material se analizan en las dos obras siguientes:

Gilmore, P. y R. Gomory. "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem", *Operations Research* 9(1961):849-859.

———. "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem: Part II", *Operations Research* 11(1963):863-888.

Las tres obras siguientes contienen estudios claros del método de Karmarkar:

Hooker, J. N. "Karmarkar's Linear Programming Algorithm", *Interfaces* 16(No. 4, 1986)75-90.

Murty, K. G. *Linear Complementarity. Linear and Nonlinear Programming*. Berlín, Alemania: Heldermann Verlag, 1989.

Parker, G. y R. Rardin. *Discrete Optimization*. San Diego: Academic Press, 1988.

11

Programación no lineal

En los capítulos anteriores estudiamos problemas de programación lineal. Para un PL, el objetivo era maximizar o minimizar una función lineal sujeta a restricciones lineales. Pero en muchos problemas interesantes de maximización y minimización, la función objetivo es una función lineal, o bien, es posible que algunas de las restricciones no sean lineales. A este tipo de problema de optimización se le llama problema de *programación no lineal* (PNL). En este capítulo se analizan técnicas utilizadas para resolver PNL.

Se empieza con un repaso del material de cálculo diferencial, que será necesario para el estudio de la programación no lineal.

11.1 Repaso de cálculo diferencial

Límites

El concepto de límite es una de las ideas más básicas del cálculo.

DEFINICIÓN ■ La ecuación

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

significa que cuando x tiende a un valor a (pero no igual a a), el valor de $f(x)$ se aproxima de manera arbitraria a c. ■

También es posible que no exista el $\lim_{x \to a} f(x)$.

EJEMPLO 1 **Límites**

1 Demuestre que el $\lim_{x \to 2} x^2 - 2x = 2^2 - 2(2) = 0$.

2 Demuestre que el $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Solución **1** Para comprobar este resultado, evalúe $x^2 - 2x$ para valores de x cercanos a, pero no iguales a 2.

2 Para comprobar este resultado, observe que cuando x tiende a cero, $\frac{1}{x}$ se convierte en un número positivo muy grande o un número negativo muy grande. Por consiguiente, cuando x se aproxima a 0, $\frac{1}{x}$ no se aproxima a ningún solo número.

Continuidad

DEFINICIÓN ■ Una función $f(x)$ es **continua** en un punto a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Si $f(x)$ no es continua en $x = a$, se dice que $f(x)$ es **discontinua** (o bien, tiene una discontinuidad) en a. ■

EJEMPLO 2 Funciones continuas

Bakeco ordena azúcar de Sugarco. El precio de compra por libra de azúcar depende del tamaño de la orden (véase la tabla 1). Sea

$$x = \text{número de libras de azúcar que compra Bakeco}$$
$$f(x) = \text{costo de ordenar } x \text{ libras de azúcar}$$

Entonces

$$f(x) = 25x \text{ para } 0 \le x < 100$$
$$f(x) = 20x \text{ para } 100 \le x \le 200$$
$$f(x) = 15x \text{ para } x > 200$$

Para los valores de x, determine si x es continua o discontinua.

Solución De la figura 1, resulta evidente que

$$\lim_{x \to 100} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 200} f(x)$$

no existen. Así, $f(x)$ es discontinua en $x = 100$ y $x = 200$ y es continua para los demás valores de x que satisfacen $x \ge 0$.

TABLA 1
Precio del azúcar que paga Bakeco

Tamaño a la orden	Precio por libra (¢)
$0 \le x < 100$	25
$100 \le x \le 200$	20
$x > 200$	15

FIGURA 1
Costo de compra de azúcar por Bakeco

TABLA 2
Reglas para hallar la derivada de una función

Función	Derivada de una función
a	0
x	1
$af(x)$	$af'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}f'(x)\ln a$
$\ln f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{fx}$
$f(x)g(x)$	$f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Diferenciación

DEFINICIÓN ■ La **derivada** de una función $f(x)$ en $x = a$ [simbolizada por $f'(a)$] se define como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad ■$$

Si no existe el límite, entonces $f(x)$ no tiene derivada en $x = a$.

Se puede considerar a $f'(a)$ como la pendiente de $f(x)$ en $x = a$. Así, si empezamos en $x = a$ y se incrementa el valor de x por una pequeña cantidad Δ (Δ podría ser positiva o negativa), entonces $f(x)$ aumenta por una cantidad aproximadamente igual a $\Delta f'(a)$. Si $f'(a) > 0$, entonces $f(x)$ se incrementa a $x = a$, en tanto que si $f'(a) < 0$, entonces $f(x)$ disminuye a $x = a$. Las derivadas de muchas funciones se obtienen mediante la aplicación de las reglas de la tabla 2 (a representa una constante arbitraria). El uso e interpretación de la derivada se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Rentabilidad de producto

Si una compañía carga un precio p por un producto, entonces puede vender $3e^{-p}$ miles de unidades del producto. Entonces, $f(p) = 3\,000pe^{-p}$ es el ingreso de la compañía si carga un precio p.

1 ¿Para qué valores de p disminuye $f(p)$? ¿Para qué valores de p aumenta $f(p)$?

2 Suponga que el precio actual es $4 y que la compañía aumenta el precio en 5¢. ¿Por cuánto cambiaría aproximadamente el ingreso de la compañía?

Solución Se tiene

$$f'(p) = -3\,000pe^{-p} + 3\,000e^{-p} = 3\,000e^{-p}(1 - p)$$

1 Para $p < 1, f'(p) > 0$ y aumenta $f(p)$, en tanto que para $p > 1, f'(p) < 0$ y disminuye $f(p)$.

2 Por medio de la interpretación de que $f'(4)$ es la pendiente de $f(p)$ en $p = 4$ (con $\Delta p = 0.05$), se ve que el ingreso de la compañía aumentaría en alrededor de

$$0.05(3\,000e^{-4})(1 - 4) = -8.24$$

En realidad, por supuesto, el ingreso de la compañía se incrementaría en

$$\begin{aligned} f(4.05) - f(4) &= 3\,000(4.05)e^{-4.05} - 3\,000(4)e^{-4} \\ &= 211.68 - 219.79 = -8.11 \end{aligned}$$

Derivadas superiores

Se define $f^{(2)}(a) = f''(a)$ como la derivada de la función $f'(x)$ en $x = a$. De manera similar, se puede definir (si existe) $f^{(n)}(a)$ como la derivada de $f^{(n-1)}(x)$ en $x = a$. Así, para el ejemplo 3,

$$f''(p) = 3\,000e^{-p}(-1) - 3\,000e^{-p}(1 - p)$$

Desarrollo en serie de Taylor

En el desarrollo en serie de Taylor de una función $f(x)$, dado que $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo punto del intervalo $[a, b]$, se puede escribir para cualquier h que satisfaga $0 \leq h \leq b - a$,

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + \frac{f^{(n+1)}(p)}{(n + 1)!} h^{n+1} \tag{1}$$

donde (1) se cumple para algún número p entre a y $a + h$. La ecuación (1) es el **desarrollo en serie de Taylor de n-ésimo orden** de $f(x)$ respecto a a.

EJEMPLO 4 Desarrollo en serie de Taylor

Encuentre el desarrollo en serie de Taylor de primer orden de e^{-x} respecto a $x = 0$.

Solución Debido a que $f'(x) = -e^{-x}$ y $f''(x) = e^{-x}$, se sabe que (1) se cumple en cualquier intervalo $[0, b]$. También, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, y $f''(x) = e^{-x}$. Entonces (1) produce el siguiente desarrollo en serie de Taylor de primer orden para e^{-x} respecto a $x = 0$:

$$e^{-h} = f(h) = 1 - h + \frac{h^2 e^{-p}}{2}$$

Esta ecuación se cumple para alguna p entre 0 y h.

Derivadas parciales

Ahora se considera una función f de $n > 1$ variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, usando la notación $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ para denotar la función.

DEFINICIÓN ■ La **derivada parcial** de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con respecto a la variable x_i se escribe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, donde

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\Delta x_i}$$ ■

Intuitivamente, si x_i se incrementa por Δ (y las demás variables se mantienen constantes), entonces para valores pequeños de Δ, el valor de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se incrementa por aproximadamente $\Delta \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Se encuentra $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ al tratar como constantes a las variables distintas a x_i y encontrar las derivadas de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De manera más general, suponga que para cada i, x_i se incrementa por una pequeña cantidad Δx_i. Entonces el valor de f se incrementa por aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

EJEMPLO 5 **¿Cuándo una función es creciente?**

La demanda $f(p, a) = 30\,000p^{-2}a^{1/6}$ para un producto depende de p = precio del producto (en dólares) y a = dólares gastados en anunciar el producto. ¿La demanda es una función creciente o decreciente del precio? ¿La demanda es una función creciente o decreciente del gasto de publicidad? Si $p = 10$ y $a = 1\,000\,000$, entonces ¿cuánto se incrementa la demanda (más o menos) si se recorta \$1 el precio?

Solución

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 30\,000(-2p^{-3})a^{1/6} = -60\,000p^{-3}a^{1/6} < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 30\,000p^{-2}\left(\frac{a^{-5/6}}{6}\right) = 5\,000p^{-2}a^{-5/6} > 0$$

Así, un incremento en el precio (manteniendo constante la publicidad) disminuye la demanda, en tanto que un incremento en la publicidad (con el precio constante) aumenta la demanda. Debido a que

$$\frac{\partial f}{\partial p}(10, 1\,000\,000) = -60\,000\left(\frac{1}{1\,000}\right)(1\,000\,000)^{1/6} = -600$$

un recorte de 1\$ en el precio aumenta la demanda en alrededor de $(-1)(-600)$, o bien, 600 unidades.

También se utilizarán en gran medida las *derivadas parciales de segundo orden*. Se usa la notación $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ para denotar una derivada parcial de segundo orden. Para hallar $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, primero se obtiene $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y luego se lleva a cabo una derivación parcial con respecto a x_j. Si existen las parciales de segundo orden y son continuas en todas partes, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

EJEMPLO 6 **Derivadas parciales de segundo orden**

Para $f(p, a) = 30\,000p^{-2}a^{1/6}$, obtenga las derivadas parciales de segundo orden.

Solución

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = -60\,000(-3p^{-4})a^{1/6} = \frac{180\,000a^{1/6}}{p^4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 5\,000p^{-2}\left(\frac{-5a^{-11/6}}{6}\right) = -\frac{25\,000p^{-2}a^{-11/6}}{6}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial p} = 5\,000(-2p^{-3})a^{-5/6} = -10\,000p^{-3}a^{-5/6}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial a} = -60\,000p^{-3}\left(\frac{a^{-5/6}}{6}\right) = -10\,000p^{-3}a^{-5/6}$$

Observe que para $p \neq 0$ y a $\neq 0$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial p} = \frac{\partial^2 f}{\partial p\partial a}$$

PROBLEMAS

Grupo A

1 Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{3h + h^2}{h}$.

2 A Sugarco le cuesta 25¢/libra comprar las primeras 100 libras de azúcar, 20¢/libra comprar las siguientes 100 libras y 15¢ comprar cada libra adicional. Sea $f(x)$ el costo de comprar x libras de azúcar. ¿$f(x)$ es continua en todos los puntos? ¿Hay algunos puntos donde $f(x)$ no tiene derivada?

3 Encuentre $f'(x)$ para cada una de las funciones siguientes:

a xe^{-x}

b $\dfrac{x^2}{x^2+1}$

c e^{3x}

d $(3x + 2)^{-2}$

e $\ln x^3$

4 Encuentre las derivadas parciales de primer y segundo orden para $f(x_1, x_2) = x_1^2 e^{x_2}$.

5 Encuentre el desarrollo en serie de Taylor de segundo orden de $\ln x$ respecto a $x = 1$.

Grupo B

6 Sea $q = f(p)$ la demanda de un producto cuando el precio es p. Para un precio particular p, la elasticidad del precio E del producto se define mediante

$$E = \frac{\text{Cambio porcentual en la demanda}}{\text{Cambio porcentual en el precio}}$$

Si el cambio en el precio (Δp) es pequeño, esta fórmula se reduce a

$$E = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{dq}{dp}\right)$$

a ¿Esperaría que $f(p)$ fuera positiva o negativa?

b Muestre que si $E < -1$, una pequeña reducción en el precio incremente el ingreso total de la empresa (en este caso, se dice que la demanda es *elástica*).

c Muestre que si $-1 < E < 0$, una pequeña disminución en el precio disminuye el ingreso total (en este caso, se dice que la demanda es *inelástica*).

7 Suponga que si se gastan en publicidad x dólares durante un año, $k(1 - e^{-cx})$ clientes comprarán un producto ($c > 0$).

a A medida que x aumenta, el número de clientes que compran el producto se aproxima al límite. Determine este límite.

b ¿Puede dar una interpretación para k?

c Muestre que la respuesta ventas por un dólar de publicidad es proporcional al número de clientes potenciales que en el presente no compran el producto.

8 Sea $c(x) = kx^{1-b}$ ($0 < b < 1$) el costo total de producir x unidades, $c(x)$. Esta curva de costos se llama *curva de costos por experiencia o aprendizaje*.

a Muestre que el costo de producir una unidad es una función decreciente del número de unidades producidas.

b Suponga que cada vez se duplica el número de unidades producidas, el costo de producto por unidad disminuye a r% de su valor previo (debido a que los trabajadores aprenden cómo desempeñar mejor su trabajo). Muestre que $r = 100(2^{-b})$.

9 Si una compañía tiene m horas de tiempo de máquina y w horas de trabajo, puede producir $3m^{1/3}w^{2/3}$ unidades de producto. En la actualidad, la compañía tiene 216 horas de tiempo de máquina y 1 000 horas de trabajo. Una hora extra de tiempo de máquina cuesta \$100 y una hora extra de trabajo cuesta \$50. Si la compañía tiene \$100 para invertir en la compra de más mano de obra y tiempo de máquina, ¿sería mejor comprar 1 hora de tiempo de máquina o 2 horas de trabajo?

11.2 Conceptos preliminares

DEFINICIÓN ■ Un **problema de programación no lineal** (PNL) general se expresa como sigue: Encuentre los valores de las variables de decisión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que

$$\begin{array}{ll} \max & (\text{o min})\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{s.a} & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (\leq, =, \text{o} \geq)\ b_1 \\ \text{s.a} & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (\leq, =, \text{o} \geq)\ b_2 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (\leq, =, \text{o} \geq)\ b_m \end{array} \tag{2}$$ ■

Como en la programación lineal, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la **función objetivo** del PNL, y $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(\leq, =, \text{o} \geq)$ $b_1, \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(\leq, =, \text{o} \geq)$ b_m son las **restricciones** del PNL. Un PNL sin restricciones es un **PNL irrestricto.**

El conjunto de los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que x_i es un número real es R^n. Así, R^1 es el conjunto de los números reales. Los siguientes subconjuntos de R^1 (llamados intervalos) serán de interés particular:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \text{todas las } x \text{ que satisfacen } a \leq x \leq b \\ [a, b) &= \text{todas las } x \text{ que satisfacen } a \leq x < b \\ (a, b] &= \text{todas las } x \text{ que satisfacen } a < x \leq b \\ (a, b) &= \text{todas las } x \text{ que satisfacen } a < x < b \\ [a, \infty) &= \text{todas las } x \text{ que satisfacen } x \geq a \\ (-\infty, b] &= \text{todas las } x \text{ que satisfacen } x \leq b \end{aligned}$$

Las definiciones siguientes son análogas a las definiciones que corresponden a los PL dados en la sección 3.1.

DEFINICIÓN ■ La **región factible** para el PNL (2) es el conjunto de puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfacen las m restricciones en (2). Un punto en la región factible es un *punto factible*, y el punto que no está en la región factible es un *punto no factible*. ■

Suponga que (2) es un problema de maximización.

DEFINICIÓN ■ Cualquier punto $\bar{x}$ en la región factible para la cual $f(\bar{x}) \geq f(x)$ se cumple para todos los puntos x en la región factible es una **solución óptima** del PNL. [Para un problema de minimización, $\bar{x}$ es la solución óptima si $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para toda x factible x.] ■

Por supuesto, si $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ son funciones lineales, entonces (2) es un problema de programación lineal y se podría resolver mediante el algoritmo simplex.

Ejemplos de PNL

EJEMPLO 7 Maximización de la ganancia

A una compañía le cuesta c dólares por unidad fabricar un producto. Si la compañía carga p dólares por unidad para el producto, los clientes demandan $D(p)$ unidades. Para maximizar las ganancias, ¿qué precio debe cargar la empresa?

Solución La variable de decisión de la empresa es p. Puesto que la ganancia de la empresa es $(p - c)D(p)$, la empresa quiere resolver el siguiente problema de maximización irrestricto: $\max(p - c)D(p)$.

EJEMPLO 8 Maximización de la producción

Si se utilizan K unidades de capital y L unidades de trabajo, una compañía puede producir KL unidades de un bien manufacturado. El capital se puede comprar a \$4/unidad y la mano de obra a \$1/unidad. Se dispone de un total de \$8 para comprar capital y mano de obra. ¿De qué manera la empresa puede maximizar la cantidad del bien que se puede fabricar?

Solución Sea K = unidades de capital compradas y L = unidades de mano de obra compradas. Entonces K y L deben satisfacer $4K + L \leq 8$, $K \geq 0$, y $L \geq 0$. Así, la empresa quiere resolver el siguiente problema de maximización restringido:

$$\begin{aligned} \max z &= KL \\ \text{s.a} \quad 4K + L &\leq 8 \\ K, L &\geq 0 \end{aligned}$$

Como resolver PNL con LINGO

Cap.lng

LINGO se podría usar para resolver PNL en una PC. La figura 2 (archivo Cap.lng) contiene la formulación de LINGO y el resultado para el ejemplo 8. De la columna Value, se ve que LINGO obtuvo la solución K = 1 y L = 4, la cual tiene un valor de función objetivo de 4. Como se verá pronto, ésta es de hecho la solución óptima para el ejemplo 8. Sin embargo, en general, no hay garantía de que la solución obtenida mediante LINGO sea una solución óptima. En este capítulo, se detallan las circunstancias en las que se puede asegurar que LINGO determina la solución óptima para una PNL.

Observe que el símbolo ^ se utiliza para indicar que se eleva a alguna potencia y * indica multiplicación. LINGO tiene varias funciones integradas, como

- ABS(X) = valor absoluto de X
- EXP(X) = e^x
- LOG(X) = logaritmo natural de X

En las secciones 11.9 y 11.10, se analiza la columna Price del resultado de LINGO. No se estudia la columna Reduced Cost.

Diferencias entre PNL y PL

Recuerde del capítulo 3 que la región factible para cualquier PL es un conjunto convexo (es decir, si A y B son factibles para un PL, entonces el segmento de línea que une A y B también es factible). Asimismo, recuerde que si un PL tiene una solución óptima, entonces hay un punto extremo de la región factible que es óptimo. Sin embargo, pronto se verá que aun cuando la región factible para un PNL es un conjunto convexo, la solución óptima (a diferencia de la solución óptima para un PL) no necesita ser un punto extremo de la región factible del PNL. El ejemplo previo ilustra esta idea. En la figura 3 se muestra en forma gráfica la región factible (acotada por el triángulo ABC) para el ejemplo y las curvas de isoutilidad $KL = 1$, $KL = 2$ y $KL = 4$. Se ve que la solución óptima para el ejemplo ocurre donde una curva de isoutilidad es tangente a la frontera de la región factible. Así, la solución óptima para el ejemplo es $z = 4$, $K = 1$, $L = 4$ (punto D). Por supuesto, el punto D no es un punto extremo de la región factible del PNL. Para este ejemplo (y muchos otros

FIGURA 2

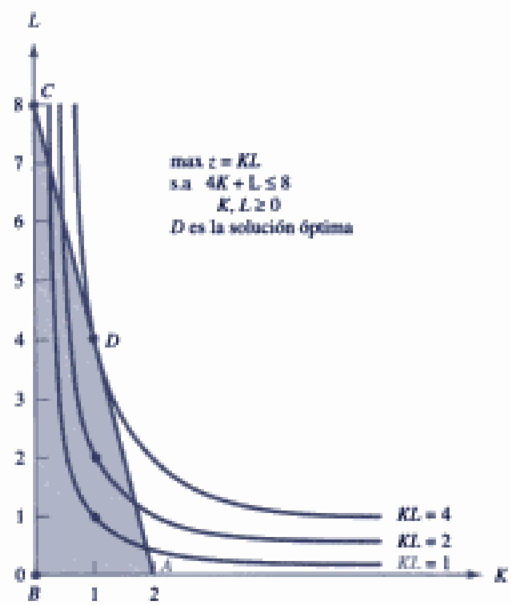


FIGURA 3
Un PNL cuya solución óptima no es un punto extremo

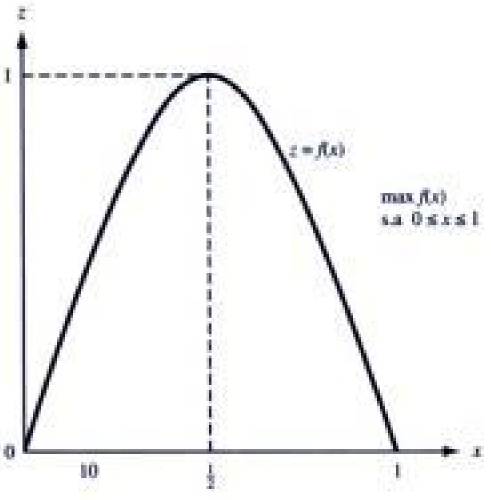


FIGURA 4
Un PNL cuya solución óptima no está sobre la frontera de la región factible

PNL con restricciones lineales), la solución óptima no es un punto extremo de la región factible debido a que las curvas de isoutilidad no son líneas rectas. De hecho, es posible que la solución óptima para un PNL no esté sobre la frontera de la región factible. Por ejemplo, considere el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} &\max z = f(x) \\ &\text{s.a} \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned}$$

donde $f(x)$ se ilustra en la figura 4. La solución óptima para este PNL es $z = 1$, $x = \frac{1}{2}$. Por supuesto, $x = \frac{1}{2}$ no está sobre la frontera de la región factible.

Extremo local

DEFINICIÓN ■ Para cualquier PNL (maximización), un punto factible $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es un **máximo local** si para ϵ suficientemente pequeña, cualquier punto factible $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ con $|x_i - x'_i| < \epsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ satisface $f(x) \ge f(x')$. ■

En resumen, un punto x es un máximo local si $f(x) \ge f(x')$ para las x' factibles que estén cercanas a x. De manera análoga, para un problema de minimización, un punto x es un mínimo local si $f(x) \le f(x')$ se cumple para las x' factibles que están cerca de x. Un punto que es un máximo local o un mínimo local se llama **extremo local** o **relativo.**

Para un PL (problema de max), cualquier máximo local es una solución óptima para el PL. (¿Por qué?) No obstante, para un PNL general, esto podría no ser cierto. Por ejemplo, considere el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} &\max z = f(x) \\ &\text{s.a} \quad 0 \le x \le 10 \end{aligned}$$

donde $f(x)$ está dada en la figura 5. Los puntos A, B y C son los máximos locales, pero el punto X es la solución óptima única para el PNL.

A diferencia de un PL, un PNL podría no satisfacer las suposiciones de proporcionalidad y aditividad. Por ejemplo, en el ejemplo 8, incrementar L en 1 hace que z se incremente en K. Así, el efecto en z de incrementar L en 1 depende de K. Esto significa que el ejemplo no satisface la suposición de aditividad.

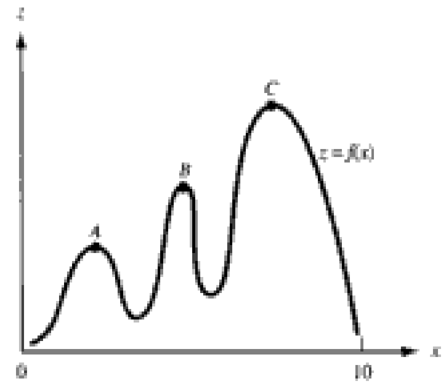


FIGURA 5
Es posible que un máximo local no sea la solución óptima para un PNL

El PNL

$$\begin{aligned} \max z &= x^{1/3} + y^{1/3} \\ \text{s.a} \quad x + y &= 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

no satisface la suposición de proporcionalidad, debido a que duplicar el valor de x no duplica la contribución de x a la función objetivo.

Más ejemplos de formulaciones de PNL

A continuación se presentan tres ejemplos más de problemas de programación no lineal.

EJEMPLO 9 PNL de Oilco

Oilco produce tres tipos de gasolina: regular, sin plomo y premium. Los tres se producen combinando plomo y petróleo crudo traído de Alaska y Texas. El contenido de azufre, niveles de octano, demanda diaria mínima (en galones), y el precio de ventas por galón de cada tipo de gasolina aparece en la tabla 3. El crudo traído de Alaska se hace mezclando dos tipos de crudo: Alaska 1 y Alaska 2. El crudo de Alaska se mezcla en ese lugar y se envía por tubería a la refinería de Texas de Oilco. A lo sumo, se envían 10 000 galones de crudo por día de Alaska. El contenido de azufre, nivel de octano, cantidad disponible máxima diaria (en galones) y costo de compra (por galón) para cada tipo de crudo de Alaska, crudo de Texas y plomo se dan en la tabla 4. Por supuesto, la gasolina sin plomo no contiene este elemento. Formule un PNL para ayudar a Oilco a maximizar la ganancia diaria obtenida por vender gasolina.†

Solución Después de definir las variables de decisión siguientes:

R = galones de gasolina regular producida diario
U = galones de gasolina sin plomo producida diario
P = producción diaria de galones de gasolina premium
$A1$ = galones de crudo de Alaska 1 comprados diariamente
$A2$ = compra diaria de galones de crudo de Alaska 2
T = galones de crudo de Texas comprados diariamente
L = compra diaria de galones de plomo

†Basado en Haverly (1978).

TABLA 3

Tipo de gasolina	Contenido de azufre(%)	Nivel de octano	Demanda diaria mínima (galones)	Precio de ventas ($)
Regular	≤ 3	≥ 90	5 000	.86
Sin plomo	≤ 3	≥ 88	5 000	.93
Premium	≤ 2.8	≥ 94	5 000	1.06

TABLA 4

Tipo de insumo	Contenido de azufre (%)	Nivel de octano	Disponibilidad máxima (galones)	Costo (por galón) ($)
Alaska 1	4	91	0	.78
Alaska 2	1	97	0	.88
Texas	2	83	11 000	.75
Plomo	0	800	6 000	1.30

SA = contenido de azufre de crudo comprado de Alaska
OA = nivel de octano de crudo comprado de Alaska
A = galones totales de crudo comprado de Alaska
LP = galones de plomo que se usa diario para hacer gasolina premium
TP = galones de crudo de Texas usados para hacer gasolina premium
AP = galones de crudo de Alaska usados para hacer gasolina premium
TU = crudo de Texas utilizado diario para hacer gasolina sin plomo
AU = crudo de Alaska que se emplea diario para hacer gasolina sin plomo
AR = crudo de Alaska usado diario para hacer gasolina regular
TR = crudo de Texas usado diariamente para hacer gasolina regular
LR = galones de plomo que se utilizan diario para hacer gasolina regular

Alas.lng

se encuentra la formulación apropiada en la impresión de LINGO dada en la figura 6 (archivo Alas.lng).

La función objetivo maximiza los ingresos diarios (86 * R + 93 * U + 106 * P) menos los costos diarios de comprar crudo (78 * A1 + 88 * A2 + 75 * T + 130 * L). Los renglones 2 a 4 especifican que la cantidad de cada insumo no puede exceder su disponibilidad diaria. Los renglones 5 a 7 aseguran que se satisfacen los requerimientos de demanda mínima para cada gasolina.

El contenido porcentual de azufre (como un decimal) del crudo de Alaska en términos de la cantidad de cada tipo de crudo de Alaska comprado se define en el renglón 8. De manera similar, el nivel de octano del crudo de Alaska en términos de la cantidad de cada tipo de crudo de Alaska se define en el renglón 9. El renglón 10 define la cantidad total comprada de crudo de Alaska como la suma de la cantidad comprada de Alaska 1 y Alaska 2. De manera similar, el renglón 11 expresa la cantidad de gasolina premium producida como la suma de sus insumos de plomo, crudo de Texas y crudo de Alaska, y el renglón 12 expresa la cantidad de gasolina sin plomo producida como la suma de sus insumos. En los renglones 13 a 15 se indica que los insumos se consumen por completo en la producción: todo el plomo se usa para producir gasolina premium o regular; todo el crudo de Alaska se utilizó para producir gasolina premium, sin plomo o regular, y todo el crudo de Texas se usó para hacer gasolina premium, sin plomo o regular.

El renglón 16 requiere que el nivel de octano promedio de los insumos utilizados para producir gasolina regular sea por lo menos 90. Observe que ésta no es una restricción lineal debido a la presencia del término AR * OA. De manera similar, el renglón 17 (de nuevo no es una restricción lineal) asegura que el nivel de octano promedio de los insumos se

```
MODEL:
   1) MAX= 86 * R + 93 * U + 106 * P - 78 * A1 - 88 * A2 - 75 * T - 130 *
      L ;
   2) A < 10000 ;
   3) T < 11000 ;
   4) L < 6000 ;
   5) R > 5000 ;
   6) U > 5000 ;
   7) P > 5000 ;
   8) SA = ( .04 * A1 + .01 * A2 ) / A ;
   9) OA = ( 91 * A1 + 97 * A2 ) / A ;
  10) A = A1 + A2 ;
  11) P = LP + TP + AP ;
  12) U = TU + AU ;
  13) L = LP + LR ;
  14) A = AP + AU + AR ;
  15) T = TP + TU + TR ;
  16) ( AR * OA + 83 * TR + 800 * LR ) / R > 90 ;
  17) ( AP * OA + 83 * TP + 800 * LP ) / P > 94 ;
  18) ( AU * OA + TU * 83 ) / U > 88 ;
  19) ( SA * AR + .02 * TR ) / R < .03 ;
  20) ( SA * AP + .02 * TP ) / P < .028 ;
  21) ( SA * AU + .02 * TU ) / U < .03 ;
  22) LP > 0 ;
  23) TP > 0 ;
  24) AP > 0 ;
  25) TU > 0 ;
  26) AU > 0 ;
  27) LR > 0 ;
  28) TR > 0 ;
  29) AR > 0 ;
  30) R = TR + AR + LR ;
END


SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  SATISFIED.

            OBJECTIVE FUNCTION VALUE

         1)    443237.052541

   VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
          R      5000.000000          .000000
          U      5000.000000          .000000
          P     11134.965633          .000000
         A1      9047.622772          .000000
         A2       952.377228          .000000
          T     11000.000000          .000000
          L       134.965633          .000000
          A     10000.000000          .000000
         SA          .037143          .000000
         OA        91.571426          .000000
         LP       121.210474          .000000
         TP      6863.136139          .000000
         AP      4150.619020          .000000
         TU      2083.333333          .000000
         AU      2916.666667          .000000
         LR        13.755159          .000000
         AR      2932.714313          .000000
         TR      2053.530528          .000000


ROW   SLACK OR SURPLUS          PRICE
 2)           .000000       26.965066
 3)           .000000       30.626062
 4)       5865.034367         .000000
 5)           .000000      -19.864023
 6)           .000000      -12.796034
 7)       6134.965633         .000000
 8)           .000000  -2332388.904850
 9)           .000000     5004.725331
10)           .000000       41.786554
11)           .000000      102.804532
12)           .000000      -13.948311
13)           .000000     -130.000000
14)           .000000     -105.917442
15)           .000000     -105.626062
```

FIGURA 6
Problema de Oilco y solución

(continúa)

```
16)        -.000001      -169.971719
17)         .000001      -378.525763
18)        -.000001     -8166.740734
19)         .000000          .000000
20)         .001828          .000000
21)         .000000   3998380.979742
22)      121.210474          .000000
23)     6863.136139          .000000
24)     4150.619020          .000000
25)     2083.333333          .000000
26)     2916.666667          .000000
27)       13.755159          .000000
28)     2053.530528          .000000
29)     2932.714313          .000000
30)         .000000       102.804532
```

FIGURA 6
(Continuación)

utiliza para producir gasolina premium es por lo menos 94, y el renglón 18 (de nuevo, no una restricción lineal) que el nivel de octano de los insumos de gasolina sin plomo sea por lo menos 88.

El renglón 19 (de nuevo una restricción no lineal debido a la presencia del término SA * AR) asegura que la gasolina regular contiene a lo sumo 3% de azufre; el renglón 20, que la gasolina premium contiene a lo sumo 2.8% de azufre, y el renglón 21, que la gasolina sin plomo contiene a lo sumo 3% de azufre.

La cantidad de cada insumo utilizado para producir cada producto debe ser no negativa, requerida por los renglones 22 a 29. El renglón 30 especifica que la cantidad de gasolina regular vendida debe ser igual a la suma de los insumos utilizados para producir gasolina regular.

Cuando se resuelve en LINGO, se obtiene una solución con una ganancia de $4 432.37 (recuerde que la función objetivo está en centavos) ganada al producir 5 000 galones de gasolina regular (con 13.76 galones de plomo, 2 932.71 galones de crudo de Alaska y 2 053.53 galones de crudo de Texas); 5 000 galones de gasolina sin plomo (con 2 916.67 galones de crudo de Alaska y 2 083.33 galones de crudo de Texas), y 11 134.97 galones de gasolina premium (con 121.21 galones de de plomo, 6 863.14 galones de crudo de Texas y 4 150.62 galones de crudo de Alaska). La mezcla de 10 000 galones de crudo de Alaska fue 90.48% Alaska 1 y 9.52% Alaska 2.

En la sección 11.10, se estudia cómo se puede asegurar que la solución obtenida mediante LINGO sea óptima.

OBSERVACIÓN Con un modelo de mezclado no lineal para optimizar la producción de sus productos de gasolina Texaco ahorra por lo menos $30 millones por año. Véanse los detalles en Dewitt y cols. (1989).

EJEMPLO 10 Ubicación del almacén

Truckco intenta determinar dónde debe ubicar un solo almacén. Las posiciones en el plano x–y (en millas) de cuatro clientes y el número de envíos que se hacen al año a cada cliente se muestran en la tabla 5. Truckco quiere ubicar un almacén para minimizar la distancia total que deben recorrer los camiones al año desde el almacén a la ubicación de los cuatro clientes.

Solución Defina

$$X = \text{coordenada } x \text{ del almacén}$$
$$Y = \text{coordenada } y \text{ del almacén}$$
$$Di = \text{distancia del cliente } i \text{ al almacén}$$

Ware.lng

El PNL apropiado se da en la impresión de LINGO en la figura 7 (archivo Ware.lng). La función objetivo minimiza la distancia total que deben viajar los camiones cada año del almacén hasta el lugar donde se ubican los cuatro clientes. Los renglones 2 a 5 definen la

TABLA 5

Cliente	Coordenada x	y	Número de envíos
1	5	10	200
2	10	5	150
3	0	12	200
4	12	0	300

```
MODEL:
   1] MIN= 200 * D1 + 150 * D2 + 200 * D3 + 300 * D4 ;
   2] D1 = ( ( X - 5 ) ^ 2 + ( Y - 10 ) ^ 2 ) ^ .5 ;
   3] D2 = ( ( X - 10 ) ^ 2 + ( Y - 5 ) ^ 2 ) ^ .5 ;
   4] D3 = ( X ^ 2 + ( Y - 12 ) ^ 2 ) ^ .5 ;
   5] D4 = ( ( X - 12 ) ^ 2 + Y ^ 2 ) ^ .5 ;
END

SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  UNSATISFIED.

                OBJECTIVE FUNCTION VALUE

            1)      5456.539688

     VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
           D1         6.582238          .000000
           D2          .686433          .000000
           D3        11.634119          .000000
           D4         5.701011          .000000
            X         9.314167          .000176
            Y         5.028701          .000167

          ROW   SLACK OR SURPLUS         PRICE
           2)          .000000     -200.000000
           3)          .000000     -150.000000
           4)          .000000     -200.000000
           5)          .000000     -300.000000
```

FIGURA 7
Problema de Truckco y solución

distancia de cada cliente al almacén en términos de la ubicación del almacén. LINGO ubicó el almacén en $X = 9.31$ y $Y = 5.03$. Cada año el camión recorre un total de 5 456.54 millas del almacén a la ubicación de los clientes.

EJEMPLO 11 Producción de llantas

Firerock produce hule que se utiliza para la fabricación de llantas combinando tres ingredientes: hule, aceite y negro de humo. El costo en centavos por libra de cada ingrediente se da en la tabla 6.

El hule utilizado en las llantas de automóviles debe tener una dureza de entre 25 y 35, una elasticidad de por lo menos 16 y una resistencia a la tensión de por lo menos 12. Para fabricar un conjunto de cuatro llantas de automóvil, se necesitan 100 libras de producto. El hule utilizado para hacer un conjunto de cuatro llantas debe contener entre 25 y 60 libras de hule y por lo menos 50 libras de negro de humo. Si se define

R = libras de hule en la mezcla utilizada para producir cuatro llantas

O = libras de aceite en la mezcla usadas para producir cuatro llantas

C = libras de negro de humo utilizadas para producir cuatro llantas

entonces el análisis estadístico muestra que la dureza, elasticidad y resistencia a la tensión de una mezcla de 100 libras de hule, aceite y negro de humo es como sigue:

$$\text{Resistencia a la tensión} = 12.5 - .10(O) - .001\,(O)^2$$
$$\text{Elasticidad} = 17 + .35R - .04(O) - .002(R)^2$$
$$\text{Dureza} = 34 + .10R + .06(O) - .3(C) + .001(R)(O) + .005(O)^2 + .001C^2$$

TABLA 6

Producto	Costo (centavos/libra)
Hule	4
Aceite	1
Negro de humo	7

Formule un PNL cuya solución permitirá a Firerock minimizar el costo de producir el hule necesario para fabricar un conjunto de llantas para automóvil.†

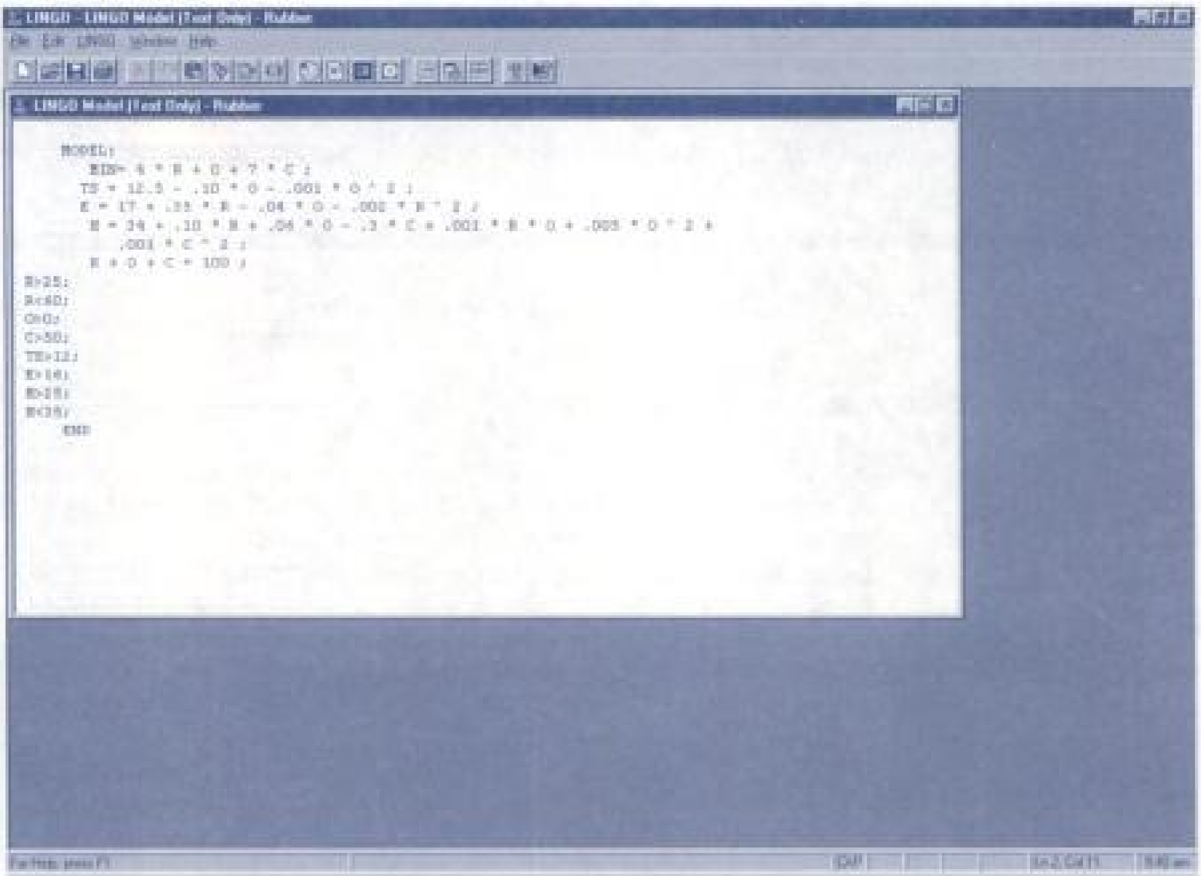
Solución Después de definir

$$TS = \text{resistencia de la mezcla a la tensión}$$
$$E = \text{Elasticidad de la mezcla}$$
$$H = \text{Dureza de la mezcla}$$

Rubber.lng

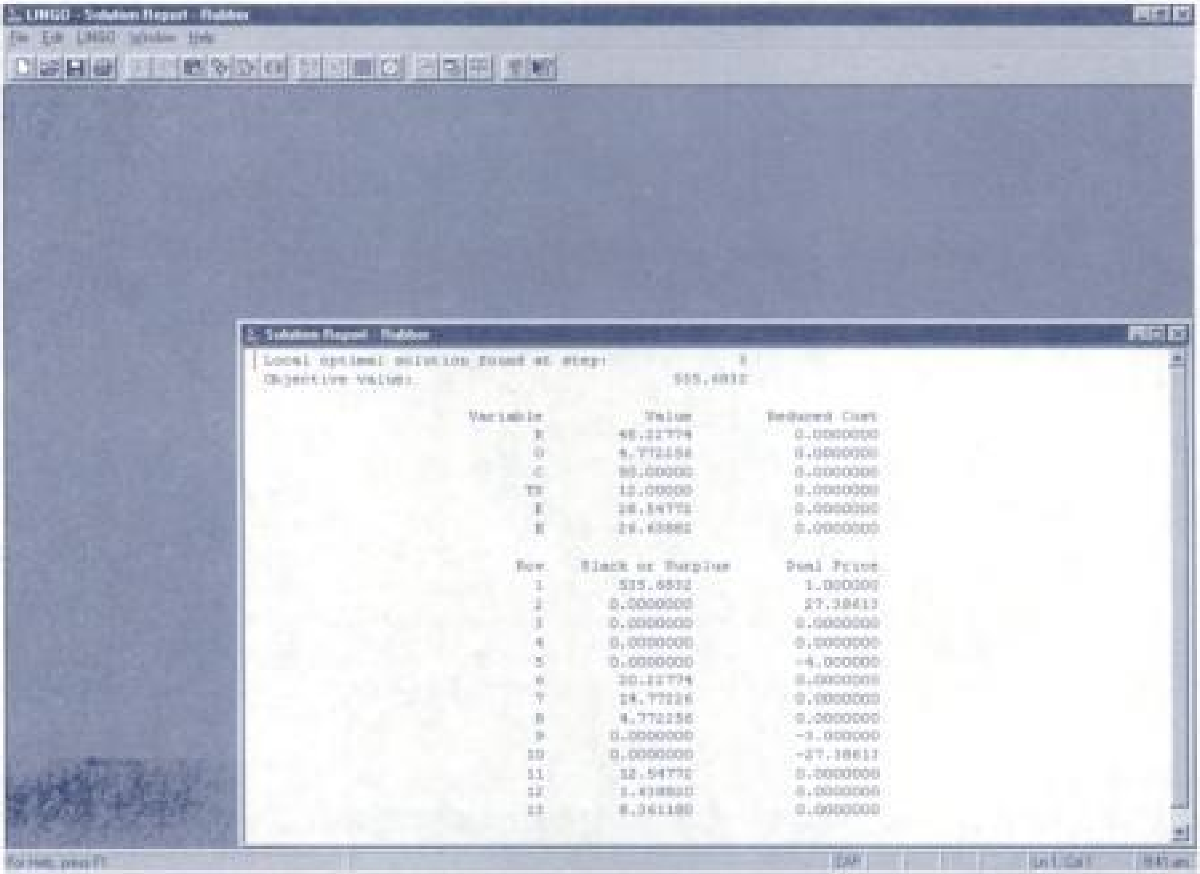
el programa LINGO de la figura 8 (archivo Rubber.lng) da la formulación correcta. El renglón 1 minimiza el costo de producir el hule necesario. Los renglones 2 a 4 expresan la resistencia a la tensión, elasticidad y dureza, respectivamente, de la mezcla en términos de sus componentes. Observe que la resistencia a la tensión, elasticidad y dureza son funciones no lineales de R, O y C. El renglón 5 requiere que se combinen 100 libras de insumos para producir el producto de hule final. La solución encontrada mediante LINGO

FIGURA 8



†Basado en Nicholson (1971).

FIGURA 9



(figura 9) es 45.23 libras de hule, 4.77 libras de aceite y 50 libras de negro de humo. El costo total de 100 libras de mezcla es de $5.36.

En la sección 11.9, se analiza si esta solución es óptima o no.

Cómo resolver PNL con Excel

Caplabor.xls

Es fácil usar el Solver de Excel para resolver PNL. Proceda como lo haría con un modelo lineal pero no seleccione la opción Lineal Model (Modelo lineal). Como ilustración, se resuelve el ejemplo 8 en el archivo Caplabor.xls (véase la figura 10).

Las celdas cambiantes son el capital y el trabajo comprados (celdas C5 y D5, respectivamente). La celda objetivo es el número total de unidades producidas (calculadas en la celda C8). La restricción es que el total gastado (en la celda B11) es menor que o igual a $8. Por supuesto, la cantidad de capital y trabajo comprada debe ser no negativa. La ventana Solver se muestra en la figura 11. Se encuentra que la solución óptima es $K = 1$, $L = 4$ y $z = 8$.

Para los PNL con varias soluciones óptimas locales, es posible que el Solver de Excel no determine la solución óptima, debido a que podría seleccionar un extremo local que no es un extremo global. Como ilustración, considere el siguiente PNL:

	A	B	C	D
3				
4			Capital	Trabajo
5		Comprado	1	4
6		Costo	$ 4.00	$ 1.00
7				
8		Unidades producidas	4	
9				
10		Total gastado		Disponible
11		$ 8.00	<=	$ 8.00

FIGURA 10

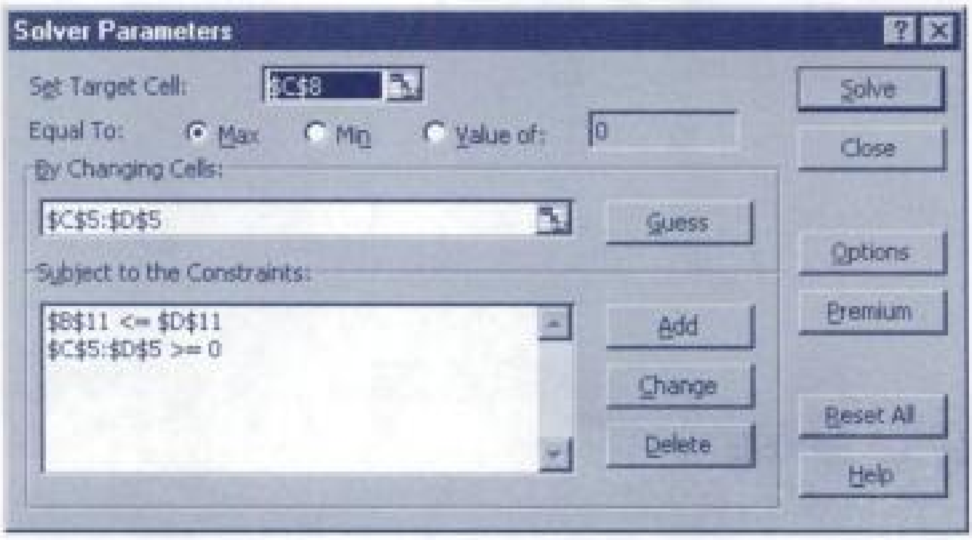


FIGURA 11

$$\begin{aligned} \max z &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \\ \text{s.a} \quad & x \geq 1 \\ & x \leq 5 \end{aligned}$$

Multiple.xls

La gráfica de esta función se muestra en la figura 12. Observe que hay dos máximos locales para este problema. En el archivo Multiple.xls, se resuelve este problema dos veces. La primera vez, se empieza con $x = 2$ y se encuentra la solución óptima, que es $x = 1.36$ y $z = 3.63$ (véase la figura 13).

La segunda vez, se empieza con $x = 3.5$ y se encuentra el otro máximo local, $x = 3.54$ y $z = 1.42$ (véase la figura 14). La razón de esto es que cuando se empieza con $x = 3.5$, el Solver pronto llega a $x = 3.54$ y encuentra que la función objetivo no se puede mejorar mediante movimientos pequeños en ninguna dirección. Tanto LINGO como Solver utilizan métodos basados en el cálculo (que se describen después en este capítulo) para resolver PNL. Cualquier método basado en el cálculo para resolver PNL corre el riesgo de determinar un extremo local que no sea un extremo global. Los algoritmos evolutivos no tienen esta desventaja; véanse en los capítulos 14 y 15 de *Mathematical Programming: Applications and Algorithms* una explicación de los algoritmos evolutivos.

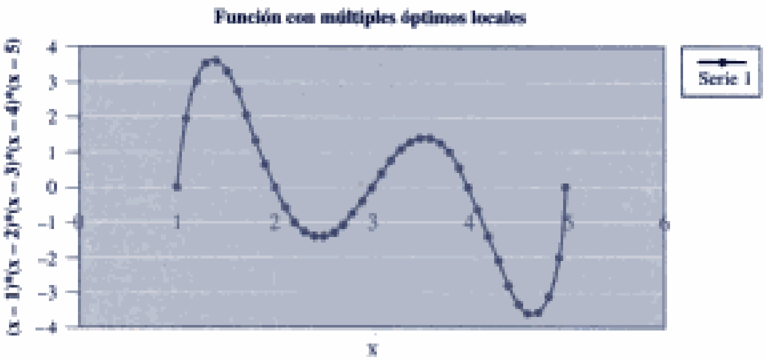


FIGURA 12

	C	D
1		
2		
3		
4	**Empezar x =2 con**	¡Respuesta correcta!
5		
6		
7	x	f(x)
8	1.355567	3.631432208

FIGURA 13

	C	D
4	**Empezar con x =3.5**	¡Respuesta errónea!
5		
6		
7	x	f(x)
8	3.543912	1.418696626

FIGURA 14

PROBLEMAS

Grupo A

1 Q & H Company se anuncia en las comedias y juegos de futbol. Cada anuncio en una comedia cuesta $50 000, y cada anuncio en un juego de futbol cuesta $100 000. Con las cifras en millones de espectadores, si se compran S anuncios de comedia, serán vistos por $5\sqrt{S}$ hombres y $20\sqrt{S}$ mujeres. Si se compran F anuncios de futbol, los verán $17\sqrt{F}$ hombres y $7\sqrt{F}$ mujeres. Q & H quiere que por lo menos 40 millones de hombres y 60 millones de mujeres vean sus anuncios.

a Formule un PNL que minimice el costo de Q & H de llegar a suficientes televidentes.

b ¿El PNL viola las suposiciones de proporcionalidad y aditividad?

c Suponga que el número de mujeres a las que llegan F anuncios emitidos en partidos de futbol y S anuncios difundidos en comedias es $7\sqrt{F} + 20\sqrt{S} - 0.2\sqrt{FS}$. ¿Por qué ésta podría ser una representación más real del número de mujeres televidentes que ven los anuncios de Q & H?

2 El área de un triángulo con lados de longitud a, b y c es $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es la mitad del perímetro del triángulo. Se tienen 60 pies de cerca y se quiere cercar un área de forma triangular. Formule un PNL que permita maximizar el área cercada.

3 La energía utilizada en comprimir un gas (en tres etapas) de una presión inicial I a una presión final F está determinada por

$$K\left\{\sqrt{\frac{p_1}{I}}+\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}+\sqrt{\frac{F}{p_2}}-3\right\}$$

Formule un PNL cuya solución describa cómo minimizar la energía utilizada para comprimir el gas.

4 Resuelva el problema 1 por medio de LINGO.

5 Use LINGO para resolver el problema 2.

6 Resuelva el problema 3 por medio de LINGO. Use $I = 64$ y $F = 1\,000$.

7 Para el ejemplo 6 del capítulo 8, sea A = número de días que se reduce la duración de A, B = número de días que se reduce la duración de B, etcétera. Suponga que el costo de acelerar cada actividad es como sigue:

A, $5A^2$; B, $20B^2$; C, $2C^2$; D, $20D^2$; E, $10E^2$; F, $15F^2$

y que cada actividad se podría acelerar a una duración de 0 días, si se desea. Formule un PNL que minimice el costo de terminar el proyecto en 25 días o menos.

8 Beerco tiene \$100 000 para gastar en publicidad en cuatro mercados. El ingreso por las ventas (en miles de dólares) que se puede crear en cada mercado gastando x_i miles de dólares en el mercado i se da en la tabla 7. Para maximizar el ingreso por ventas, ¿cuánto dinero se debe gastar en cada mercado?

9 Widgetco produce dispositivos en la planta 1 y la planta 2. Cuesta $20x^{1/2}$ producir x unidades en la planta 1 y $40x^{1/3}$ producir x unidades en la planta 2. Cada planta puede producir tantas como 70 unidades. Cada unidad producida se puede vender por \$10. A lo sumo, se pueden vender 120 dispositivos. Formule un PNL cuya solución le indique a Widgetco cómo maximizar la ganancia.

10 Tres ciudades se localizan en los vértices de un triángulo equilátero. Se construirá un aeropuerto en un lugar que minimiza la distancia total del aeropuerto a las tres ciudades. Formule un PNL cuya solución permita decidir dónde construir el aeropuerto. Luego, resuelva su PNL en LINGO.

11 El rendimiento de un proceso químico depende del tiempo T (en minutos) que se ejecuta el proceso y la temperatura TEMP (en grados centigrados) a la que se opera el proceso. Esta dependencia se describe mediante la ecuación

$$\text{RENDIMIENTO} = 87 - 1.4T' + .4\text{TEMP}' - 2.2T'^2 - 3.2\text{TEMP}'^2 - 4.9(T')(\text{TEMP}')$$

donde $T' = (T - 90)/10$ y $\text{TEMP}' = (\text{TEMP} - 150)/5$. T debe estar entre 60 y 120 minutos, en tanto que TEMP debe estar entre 100 y 200 grados. Prepare un PNL que se pueda usar para maximizar el rendimiento del proceso. Utilice LINGO para resolver su PNL.

TABLA 7

Mercado	Ingreso por ventas
1	$10x_1^{4}$
2	$8x_2^{5}$
3	$12x_3^{3}$
4	$16x_4^{6}$

Group B

12 Considere el problema 5 de la sección 3.8 con la siguiente modificación: suponga que se agrega un compuesto químico llamado Superquality (SQ) para mejorar el nivel de calidad de la gasolina y el aceite de calentamiento. Si se agrega una cantidad x de SQ a cada barril de gasolina se mejora su nivel de calidad por $x^{.5}$ sobre el nivel anterior. Si se agrega una cantidad x de SQ a cada barril de aceite de calentamiento se mejora su nivel de calidad por $.6x^{.6}$ sobre el nivel anterior. La cantidad de SQ agregada al aceite de calentamiento no puede ser mayor (en peso) al 5% de los aceites usados para hacer el aceite de calentamiento. De manera similar, la cantidad de SQ agregada a la gasolina no puede ser mayor (en peso) al 5% de los aceites usados para hacer la gasolina. SQ se podría comprar a un costo de \$20 por libra. Formule (y resuelva con LINGO) un PNL que permita a CEO Adam Chandler maximizar sus ganancias.

13 Un vendedor de Fuller Brush tiene tres opciones: renunciar, poner en práctica un nivel de esfuerzo mínimo o uno de esfuerzo máximo. Suponga por simplicidad que cada agente de ventas venderá cepillos por un valor de \$0, \$5 000 o \$50 000. La probabilidad de cada cantidad de ventas depende del nivel de esfuerzo en la manera descrita en la tabla 8.

Si al vendedor se le pagan \$w, entonces obtiene un beneficio $w^{1/2}$. El esfuerzo mínimo le cuesta al vendedor 0 unidades de beneficio, en tanto que el esfuerzo máximo le cuesta 50 unidades de beneficio. Si el vendedor renunciara a Fuller y trabajara en otra parte, entonces obtendría un beneficio de 20. Fuller quiere que los vendedores pongan en práctica un nivel de máximo esfuerzo. La pregunta es cómo minimizar el costo de hacerlo. La compañía no puede observar el nivel de esfuerzo que muestra un vendedor, pero si el tamaño de sus ventas. Así, el sueldo se determina por completo por el tamaño de la venta. Fuller debe determinar entonces w_0 = salario pagado por \$0 de ventas, w_{5000} = salario pagado por ventas con un valor de \$5 000 y $w_{50\,000}$ = sueldo percibido por \$50 000 en ventas. Estos salarios deben fijarse de modo que los vendedores evalúen el beneficio esperado a partir del máximo esfuerzo, más que renunciar y más que el mínimo esfuerzo. Formule (y resuelva en LINGO) un PNL que se pueda usar para asegurar que los vendedores ponen en práctica el máximo esfuerzo. Este problema es un ejemplo de *teoría de agencias*.[†]

TABLA 8

	Nivel de esfuerzo	
Tamaño a la venta (\$)	Mínimo	Máximo
0	.6	.3
5 000	.3	.2
50 000	.1	.5

[†]Basado en Grossman y Hart (1983).

11.3 Funciones convexas y cóncavas

Las funciones convexas y cóncavas desempeñan un papel muy importante en el estudio de problemas de programación no lineales.

Sea $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función definida para los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en un conjunto convexo S.[†]

DEFINICIÓN ■ Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una **función convexa** en un conjunto convexo S si para cualquier $x' \in S$ y $x'' \in S$

$$f[cx' + (1 - c)x''] \leq cf(x') + (1 - c)f(x'') \tag{3}$$

se cumple para $0 \leq c \leq 1$. ■

DEFINICIÓN ■ Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una **función cóncava** en un conjunto convexo S si para cualquier $x' \in S$ y $x'' \in S$

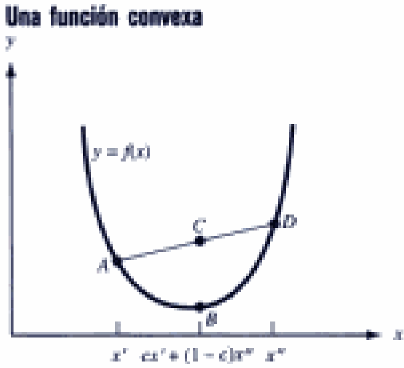
$$f[cx' + (1 - c)x''] \geq cf(x') + (1 - c)f(x'') \tag{4}$$

se cumple para $0 \leq c \leq 1$. ■

De (3) y (4), se ve que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa si y sólo si $-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava, y viceversa.

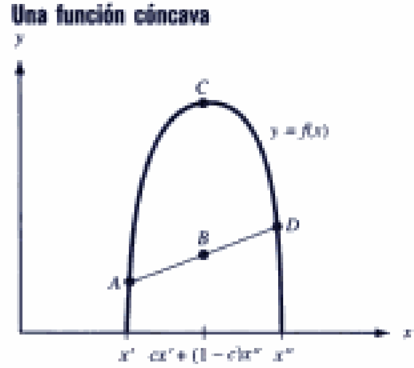
Para comprender mejor estas definiciones, sea $f(x)$ una función convexa de una sola variable. De la figura 15 y la desigualdad 3, se encuentra que $f(x)$ es convexa si y sólo si el segmento de línea que une dos puntos cualesquiera en la curva $y = f(x)$ nunca está debajo de la curva $y = f(x)$. De manera similar, la figura 16 y la desigualdad (4) muestran que $f(x)$ es una función cóncava si y sólo si la línea recta que une dos puntos cualesquiera en la curva $y = f(x)$ nunca está arriba de la curva $y = f(x)$.

FIGURA 15
Una función convexa



Punto $A = (x', f(x'))$
Punto $D = (x'', f(x''))$
Punto $C = (cx' + (1 - c)x'', cf(x') + (1 - c)f(x''))$
Punto $B = (cx' + (1 - c)x'', f(cx' + (1 - c)x''))$
De la figura: $f(cx' + (1 - c)x'') \leq cf(x') + (1 - c)f(x'')$

FIGURA 16
Una función cóncava



Punto $A = (x', f(x'))$
Punto $D = (x'', f(x''))$
Punto $C = (cx' + (1 - c)x'', f(cx' + (1 - c)x''))$
Punto $B = (cx' + (1 - c)x'', cf(x') + (1 - c)f(x''))$
De la figura: $f(cx' + (1 - c)x'') \geq cf(x') + (1 - c)f(x'')$

[†]Recuerde del capítulo 3 que un conjunto S es convexo si $x' \in S$ y $x'' \in S$ implica que los puntos en el segmento de línea que une a x' y x'' son miembros de S. Con esto se asegura que $cx' + (1 - c)x''$ será un miembro de S.

EJEMPLO 12 Funciónes convexas y cóncavas

Para $x \geq 0$, $f(x) = x^2$ y $f(x) = e^x$ son funciones convexas y $f(x) = x^{1/2}$ es una función cóncava. Estos hechos son evidentes en la figura 17.

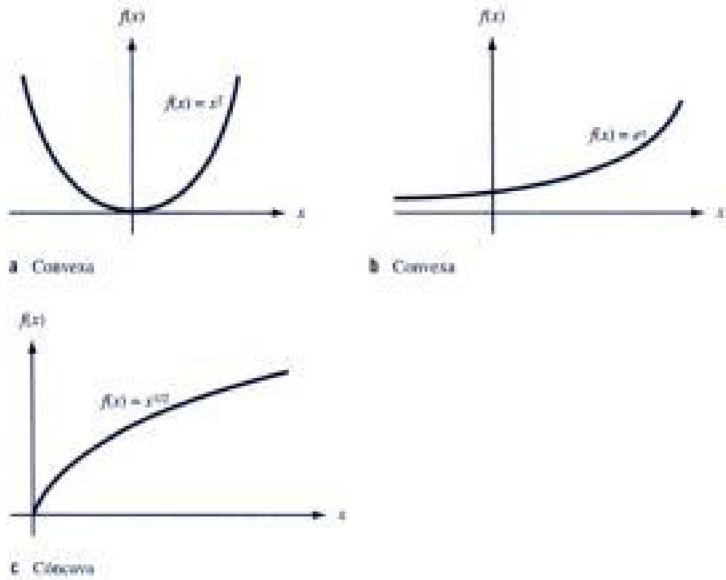


FIGURA 17
Ejemplos de funciones convexas y cóncavas

EJEMPLO 13 Suma de funciones convexas

Se puede demostrar (véase el problema 12 al final de esta sección) que la suma de las dos funciones convexas es convexa y la suma de dos funciones cóncavas es cóncava. Así, $f(x) = x^2 + e^x$ es una función convexa.

EJEMPLO 14 Función ni cóncava ni convexa

Debido a que el segmento de línea AB está abajo de $y = f(x)$ y el segmento de línea BC se ubica arriba de $y = f(x)$, $f(x)$ según se ilustra en la figura 18, no es una función convexa o cóncava.

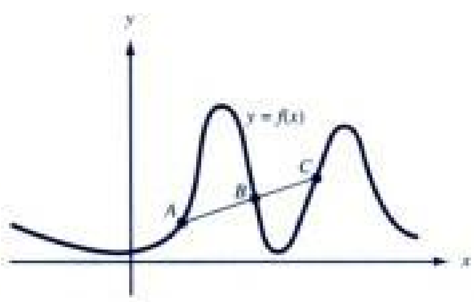


FIGURA 18
Una función que no es ni cóncava ni convexa

EJEMPLO 15 Función lineal cóncava y convexa

Una función lineal de la forma $f(x) = ax + b$ es cóncava y convexa. Esto se deduce de

$$\begin{aligned} f[cx' + (1 - c)x''] &= a[cx' + (1 - c)x''] + b \\ &= c(ax' + b) + (1 - c)(ax'' + b) \\ &= cf(x') + (1 - c)f(x'') \end{aligned}$$

Tanto (3) como (4) cumplen con la igualdad, así que $f(x) = ax + b$ es una función tanto cóncava como convexa.

Antes de estudiar cómo determinar si una función es cóncava o convexa, se demuestra un resultado que ilustra la importancia de las funciones convexas y cóncavas.

TEOREMA 1

Considere el PNL (2) y suponga que es un problema de maximización. Suponga que la región factible S para el PNL (2) es un conjunto convexo. Si $f(x)$ es cóncava en S, entonces cualquier máximo local para el PNL (2) es una solución óptima para este PNL.

Demostración Si el teorema 1 es falso, entonces debe haber un máximo local $\bar{x}$ que no es una solución óptima para el PNL (2). Sea S la región factible para el PNL (2) (se supuso que S es un conjunto convexo). Entonces, para alguna $x \in S$, $f(x) > f(\bar{x})$. La desigualdad (4) implica que para cualquier c que satisface $0 < c < 1$,

$$\begin{aligned} f[c\bar{x} + (1 - c)x] &\geq cf(\bar{x}) + (1 - c)f(x) \\ &> cf(\bar{x}) + (1 - c)f(\bar{x}) \qquad [\text{de } f(x) > f(\bar{x})] \\ &= f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Ahora observe que para c arbitrariamente cercana a 1, $c\bar{x} + (1 - c)x$ es factible (debido a que S es convexa) y está cerca de $\bar{x}$. Así, $\bar{x}$ no puede ser un máximo local. Esta contradicción demuestra el teorema 1.

Para demostrar el teorema 1′ se puede usar un razonamiento similar (véase el problema 11 al final de esta sección).

TEOREMA 1′

Considere el PNL (2) y suponga que se trata de un problema de minimización. Suponga que la región factible S para el PNL (2) es un conjunto convexo. Si $f(x)$ es convexa en S, entonces cualquier mínimo local para el PNL (2) es una solución óptima para este PNL.

Los teoremas 1 y 1′ demuestran que si se está maximizando una función cóncava (o minimizando una función convexa) en una región convexa factible S, entonces cualquier máximo local (o mínimo local) es solución del PNL (2). A medida que se resuelvan PNL, se aplicarán de manera repetida los teoremas 1 y 1′.

Ahora se explica cómo determinar si una función $f(x)$ de una sola variable es convexa o cóncava. Recuerde que si $f(x)$ es una función convexa de una sola variable, la línea que une dos puntos cualesquiera en $y = f(x)$ nunca está debajo de la curva $y = f(x)$. De las figuras 9 y 10, se ve que si $y = f(x)$ convexa significa que la pendiente de $f(x)$ debe ser no decreciente para los valores de x.

TEOREMA 2

Suponga que $f''(x)$ existe para las x de un conjunto convexo S. Entonces $f(x)$ es una función convexa en S si y sólo si $f''(x) \geq 0$ para toda x en S.

Debido a que $f(x)$ es convexa si y sólo si $-f(x)$ es cóncava. El teorema 2′ también debe ser cierto.

TEOREMA 2′

Suponga que $f''(x)$ existe para toda x en un conjunto convexo S. Entonces $f(x)$ es una función cóncava en S si y sólo si $f''(x) \leq 0$ para toda x en S.

EJEMPLO 16 Cómo determinar si una función es convexa o cóncava

1 Demuestre que $f(x) = x^2$ es una función convexa en $S = R^1$.

2 Demuestre que $f(x) = e^x$ es una función convexa en $S = R^1$.

3 Demuestre que $f(x) = x^{1/2}$ es una función cóncava en $S = (0, \infty)$.

4 Demuestre que $f(x) = ax + b$ es una función cóncava y convexa en $S = R^1$.

Solución 1 $f''(x) = 2 \geq 0$, así que $f(x)$ es convexa en $S = R^1$.

2 $f''(x) = e^x \geq 0$, así que $f(x)$ es convexa en $S = R^1$.

3 $f''(x) = -x^{-3/2}/4 \leq 0$, así que $f(x)$ es una función cóncava en $S(0, \infty)$.

4 $f''(x) = 0$, así que $f(x)$ es cóncava y convexa en $S = R^1$.

¿Cómo se determina si una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables es convexa o cóncava en un conjunto $S \subset R^n$? Se supone que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden. Antes de enunciar el criterio utilizado para determinar si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es convexa o cóncava, se requieren tres definiciones.

DEFINICIÓN ■ El **hesiano** de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es la matriz de $n \times n$ cuyo ij-ésimo elemento es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \blacksquare$$

Sea que $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ denota el valor del hesiano en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Por ejemplo, si $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2$, entonces

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN ■ Un ***i*-ésimo menor principal** de una matriz de $n \times n$ es el determinante de cualquier matriz $i \times i$ obtenida al eliminar $n - i$ renglones y las $n - i$ columnas correspondientes de la matriz. ■

Así, para la matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

los primeros menores principales: -2 y -4, y el segundo menor principal es $-2(-4) - (-1)(-1) = 7$. Para cualquier matriz, los primeros menores principales son sólo los elementos diagonales de la matriz.

DEFINICIÓN ■ El **k-ésimo menor principal** de una matriz de $n \times n$ es el determinante de la matriz $k \times k$ obtenida al eliminar los últimos $n - k$ renglones y columnas de la matriz. ■

Sea $H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ el k-ésimo menor principal de la matriz hesiana evaluada en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Así, si $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 2x_1x_2 + x_2^2$, entonces $H_1(x_1, x_2) = 6x_1$, y $H_2(x_1, x_2) = 6x_1(2) - 2(2) = 12x_1 - 4$.

Aplicando los teoremas 3 y 3' (expresados más adelante sin demostración), se puede usar la matriz hesiana para determinar si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa o cóncava (o ninguna) de un conjunto convexo $S \subset R^n$. [Véase en Bazaraa y Shetty, páginas 91–93 (1993) una demostración de los teoremas 3 y 3'.]

TEOREMA 3

Suponga que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden para cada punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. Entonces $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa de S si y sólo si para cada $x \in S$, los menores principales de H son no negativos.

EJEMPLO 17 Uso del hesiano para confirmar la convexidad o concavidad 1

Demuestre que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ es una función convexa en $S = R^2$.

Solución Se encuentra que

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Los primeros menores principales del hesiano son los elementos diagonales (ambos iguales a $2 \geq 0$). El segundo menor principal es $2(2) - 2(2) = 0 \geq 0$. Para cualquier punto, los menores principales de H son no negativos, de esta manera el teorema 3 muestra que $f(x_1, x_2)$ es una función convexa en R^2.

TEOREMA 3'

Suponga que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden para cada punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. Entonces $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava en S si y sólo si para cada $x \in S$ y $k = 1, 2, \ldots, n$, los menores principales distintos de cero tienen el mismo signo que $(-1)^k$.

EJEMPLO 18 Uso del hesiano para determinar convexidad o concavidad 2

Demuestre que $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2$ es una función cóncava en R^2.

Solución Se encuentra que

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Los primeros menores principales son los elementos diagonales del hesiano (-2 y -4). Ambos son negativos. El segundo menor principal es el determinante de $H(x_1, x_2)$ y es igual a $-2(-4) - (-1)(-1) = 7 > 0$. Así, $f(x_1, x_2)$ es una función cóncava en R^2.

EJEMPLO 19 Uso del hesiano para determinar la convexidad o concavidad 3

Demuestre que para $S = R^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$ no es una función convexa o cóncava.

Solución Se tiene

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Los menores principales del hesiano son 2 y 4. Debido a que los dos primeros menores principales son positivos, $f(x_1, x_2)$ no puede ser cóncava. El segundo menor principal es $2(4) - (-3)(-3) = -1 < 0$. Así, $f(x_1, x_2)$ no puede ser convexa. Juntos, estos hechos muestran que $f(x_1, x_2)$ no puede ser una función convexa o cóncava.

EJEMPLO 20 Uso del hesiano para determinar la convexidad o concavidad 4

Muestre que para $S = R^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3$ es una función convexa.

Solución El hesiano está dado por

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Al eliminar los renglones (y columnas) 1 y 2 del hesiano, se obtiene el menor principal de primer orden $4 > 0$. Si se eliminan los renglones (y columnas) 1 y 3 del hesiano, se obtiene el menor principal de primer orden $2 > 0$. Eliminando los renglones (y columnas) 2 y 3 del hesiano, se obtiene el menor principal de primer orden $2 > 0$.

Al eliminar el renglón 1 y la columna 1 del hesiano, se encuentra el menor principal de segundo orden

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0.$$

Si se elimina el renglón 2 y la columna 2 del hesiano, se encuentra el menor principal de segundo orden

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 7 > 0$$

Eliminando el renglón 3 y la columna 3 del hesiano, se encuentra el menor principal de segundo orden

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0.$$

El menor principal de tercer orden es simplemente el determinante del hesiano. Desarrollando por los cofactores del renglón 1, se encuentra el menor principal de tercer orden

$$\begin{gathered} 2[(2)(4) - (-1)(-1)] - (-1)[(-1)(4) - (-1)(-1)] \\ +(-1)[(-1)(-1) - (-1)(2)] = 14 - 5 - 3 = 6 > 0. \end{gathered}$$

Debido a que para toda (x_1, x_2, x_3) los menores principales del hesiano son no negativos, se demostró que $f(x_1, x_2, x_3)$ es una función convexa en R^3.

PROBLEMAS

Grupo A

En el conjunto S, determine si cada función es convexa, cóncava o ninguna

1 $f(x) = x^3$; $S = [0, \infty)$

2 $f(x) = x^3$; $S = R^1$

3 $f(x) = \frac{1}{x}$; $S = (0, \infty)$

4 $f(x) = x^a$ $(0 \le a \le 1)$; $S = (0, \infty)$

5 $f(x) = \ln x$; $S = (0, \infty)$

6 $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_2^2$; $S = R^2$

7 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$; $S = R^2$

8 $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - 2x_2^2$; $S = R^2$

9 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + .5x_1x_2$; $S = R^3$

10 ¿Para qué valores de a, b y c, $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ es una función convexa en R^2? ¿Una función cóncava en R^2?

Grupo B

11 Demuestre el teorema 1′.

12 Demuestre que si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son funciones convexas en un conjunto convexo S, entonces $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa en S.

13 Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa en un conjunto convexo S, demuestre que para $c \ge 0$, $g(x, x_2, \ldots, x_n) = cf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa en S, y para $c \le 0$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = cf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava en S.

14 Demuestre que si $y = f(x)$ es una función cóncava en R^1, entonces $z = \frac{1}{f(x)}$ es una función convexa [suponga que $f(x) > 0$].

15 Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es *cuasicóncava* en un conjunto convexo $S \subset R^n$ si $x' \in S$, $x'' \in S$, y $0 \le c \le 1$ implica

$$f[cx' + (1 - c)x''] \ge \min[f(x'), f(x'')]$$

Muestre que si f es cóncava en R^1, entonces f es cuasicóncava. ¿Cuál de las funciones en la figura 19 es cuasicóncava? ¿Una función cuasicóncava es necesariamente una función cóncava?

16 Del problema 12, se deduce que la suma de las funciones cóncavas es cóncava. La suma de las funciones cuasicóncavas es necesariamente cuasicóncava?

17 Suponga que un hesiano de función tiene elementos positivos y negativos en su diagonal. Muestre que la función no es cóncava ni convexa.

18 Muestre que si $f(x)$ es una función cóncava creciente, no negativa, entonces $\ln[f(x)]$ también es una función cóncava.

19 Muestre que si una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cuasicóncava en un conjunto convexo S, entonces para cualquier número a el conjunto S_a = todos los puntos que satisfacen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge a$ es un conjunto convexo.

20 Muestre que el teorema 1 es falso si f es una función cuasicóncava.

21 Suponga que las restricciones de un PNL son de la forma $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i (i = 1, 2, \ldots m)$. Muestre que si cada g_i es una función convexa, entonces la región factible del PNL es convexa.

Grupo C

22 Si $f(x_1, x_2)$ es una función cóncava en R^2, demuestre que para cualquier número a, el conjunto de (x_1, x_2) que satisface $f(x_1, x_2) \ge a$ es un conjunto convexo.

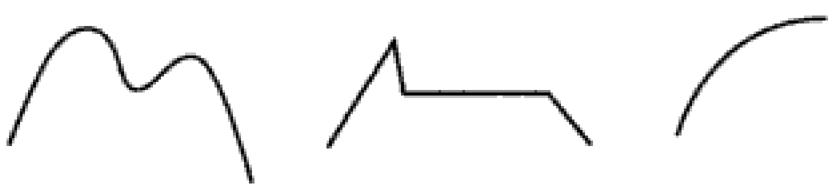
23 Sea **Z** una variable aleatoria $N(0, 1)$, y sea $F(x)$ la función de distribución acumulada para Z. Demuestre que en $S = (-\infty, 0]$, $F(x)$ es una función convexa creciente y en $S = [0, \infty)$, $F(x)$ es una función cóncava creciente.

24 Recuerde el PL Dakota analizada en el capítulo 6. Sea $v(L, FH, CH)$ el ingreso máximo que se obtiene cuando están disponibles L pies tablón de madera, FH horas de acabado y CH horas de carpintería.

a Demuestre que $v(L, FH, CH)$ es una función cóncava.

b Explique por qué este resultado muestra que el valor de cada unidad disponible adicional de un recurso debe ser una función no creciente de la cantidad del recurso que está disponible.

FIGURA 19



a b c

11.4 Solución de PNL con una variable

En esta sección, se explica cómo resolver un PNL

$$\begin{aligned} &\max \text{ (o min) } f(x) \\ &\text{s.a} \quad x \in [a, b] \end{aligned} \tag{5}$$

[Si $b = \infty$, entonces la región factible para el PNL (5) es $x \geq a$, y si $a = -\infty$, entonces la región factible para (5) es $x \leq b$.]

Para encontrar la solución óptima a (5), se encuentran los máximos locales (o mínimos). Un punto que es un máximo local o mínimo local para (5) se llama un extremo local. Entonces la solución óptima para (5) es el máximo local (o mínimo) que tiene el valor más grande (o más pequeño de $f(x)$. Por supuesto, si $a = -\infty$ o $b = \infty$, entonces es posible que (5) no tenga solución óptima (véase la figura 20).

Hay tres tipos de puntos para los que (5) puede tener un máximo local o mínimo (estos puntos por lo común se llaman *candidatos extremos*):

Caso 1 Puntos donde $a < x < b$ y $f'(x) = 0$ [llamado un punto estacionario de $f(x)$].

Caso 2 Puntos donde $f'(x)$ no existe.

Caso 3 Puntos finales a y b del intervalo $[a, b]$.

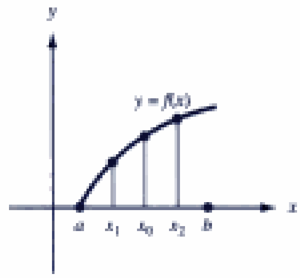
Caso 1. Puntos donde $a < x < b$ y $f'(x) = 0$

Suponga que $a < x < b$, y $f'(x_0)$ existe. Si x_0 es un máximo local o un mínimo local, entonces $f'(x_0) = 0$. Para ver esto, considere las figuras 21a y 21b. De la figura 21a, se ve que si $f'(x_0) = 0$, entonces hay puntos x_1 y x_2 cerca de x_0 donde $f(x_1) < f(x_0)$ y $f(x_2) > f(x_0)$. Así, si $f'(x_0) > 0$, x_0 no puede ser un máximo local o un mínimo local. De manera similar, en la figura 21b se muestra que si $f'(x_0) < 0$, entonces x_0 no puede ser un máximo local o un mínimo local. Sin embargo, de las figuras 21c y 21d, se ve que $f'(x_0) = 0$, entonces x_0 podría ser un máximo local o un mínimo local. Por desgracia, en la figura 21e se observa $f'(x_0)$ puede ser igual a cero sin que x_0 sea un máximo local o un mínimo local. De la figura 21c, se observa que si $f'(x_0)$ cambia de positiva a negativa conforme se pasa por x_0, entonces x_0 es un máximo local. Así, si $f''(x_0) < 0$, x_0 es un máximo local. De manera similar, de la figura 21d, se ve que si $f'(x_0)$ cambia de negativa a positiva a medida que se pasa por x_0, x_0 es un mínimo local. Así, si $f''(x_0) > 0$, x_0 es un mínimo local.

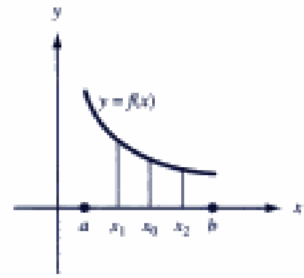
FIGURA 20
PNL sin solución

a $\max f(x)$
s.a $x \in (-\infty, b]$

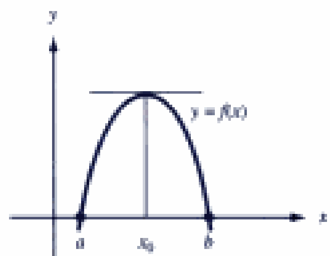
b $\max f(x)$
s.a $x \in [a, \infty)$



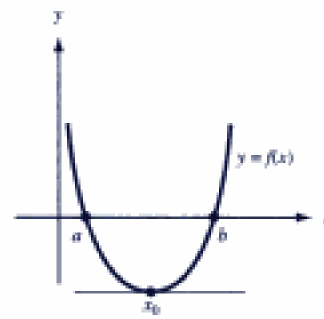
a $f'(x_0) > 0$
$f(x_1) < f(x_0)$
$f(x_2) > f(x_0)$
x_0 no es un extremo local



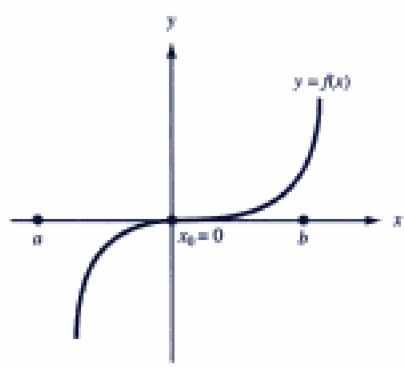
b $f'(x_0) < 0$
$f(x_1) > f(x_0)$
$f(x_2) < f(x_0)$
x_0 no es un extremo local



c $f'(x_0) = 0$
Para $x < x_0$, $f'(x) > 0$
Para $x > x_0$, $f'(x) < 0$
x_0 es un máximo local



d $f'(x_0) = 0$
Para $x < x_0$, $f'(x) < 0$
Para $x > x_0$, $f'(x) > 0$
x_0 es un máximo local



e $x_0 = 0$ no es un máximo local
o un mínimo local
pero $f'(x_0) = 0$

FIGURA 21
Cómo determinar si x_0 es un máximo local o un mínimo local cuando $f'(x_0)$ existe

TEOREMA 4

Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.

¿Qué pasa si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$ (este caso se muestra en la figura 21e)? En este caso se determina si x_0 es un máximo local o un mínimo local mediante la aplicación del teorema 5.

TEOREMA 5

Si $f'(x_0) = 0$, y

1 Si la primera derivada no nula (no cero) en x_0 es una derivada de orden impar [$f^{(3)}(x_0), f^{(5)}(x_0)$, etcétera], entonces x_0 no es un máximo local o mínimo local.

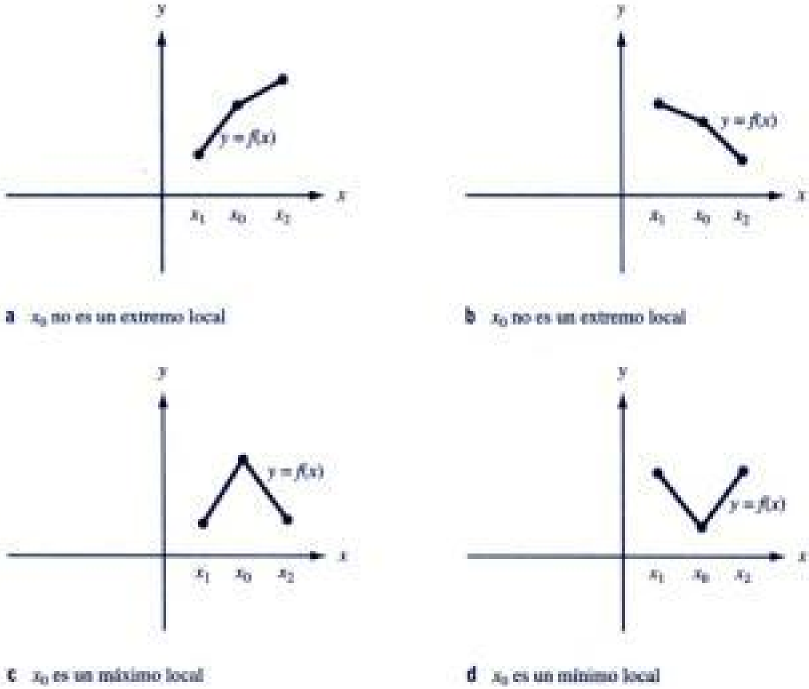
2 Si la primera derivada no nula en x_0 es positiva y de orden par, entonces x_0 es un máximo local.

3 Si la primera derivada no nula en x_0 es negativa y de orden par, entonces x_0 es un máximo local.

Se omiten las demostraciones de los teoremas 4 y 5. [Se deducen de manera directa al aplicar la definición de un máximo local o mínimo local al desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ respecto a x_0.] El teorema 4 es un caso especial del teorema 5. Se pide demostrar los teoremas 4 y 5 en los problemas 16 y 17.

Caso 2. Puntos donde $f'(x)$ no existe

Si $f(x)$ no tiene una derivada en x_0, x_0 podría ser un máximo local, un mínimo local o ninguno (véase la figura 22). En este caso, se determina si x_0 es un máximo local o un mínimo local al comprobar los valores de $f(x)$ en los puntos $x_1 < x_0$ y $x_2 > x_0$ cerca de x_0. Los cuatro casos posibles que pueden ocurrir se resumen en la tabla 9.



a x_0 no es un extremo local

b x_0 no es un extremo local

c x_0 es un máximo local

d x_0 es un mínimo local

FIGURA 22
Cómo determinar si x_0 es un máximo local o un mínimo local cuando $f'(x_0)$ no existe

TABLA 9
Cómo determinar si un punto donde $f'(x)$ no existe es un máximo local o un mínimo local

Relación entre $f(x_0)$, $f(x_1)$ y $f(x_2)$	x_0	Figura
$f(x_0) > f(x_1)$; $f(x_0) < f(x_2)$	No es un extremo local	16a
$f(x_0) < f(x_1)$; $f(x_0) > f(x_2)$	No es un extremo local	16b
$f(x_0) \geq f(x_1)$; $f(x_0) \geq f(x_2)$	Máximo local	16c
$f(x_0) \leq f(x_1)$; $f(x_0) \leq f(x_2)$	Mínimo local	16d

Caso 3. Puntos finales *a* y *b* de [*a*, *b*]

De la figura 23, se ve que

Si $f'(a) > 0$, entonces a es un mínimo local.
Si $f'(a) < 0$, entonces a es un máximo local.
Si $f'(b) > 0$, entonces b es un máximo local.
Si $f'(b) < 0$, entonces b es un mínimo local.

Si $f'(a) = 0$ o $f'(b) = 0$, trace un bosquejo como la figura 22 para determinar si a o b es un extremo local.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo se aplican estas ideas para resolver PNL de la forma (5).

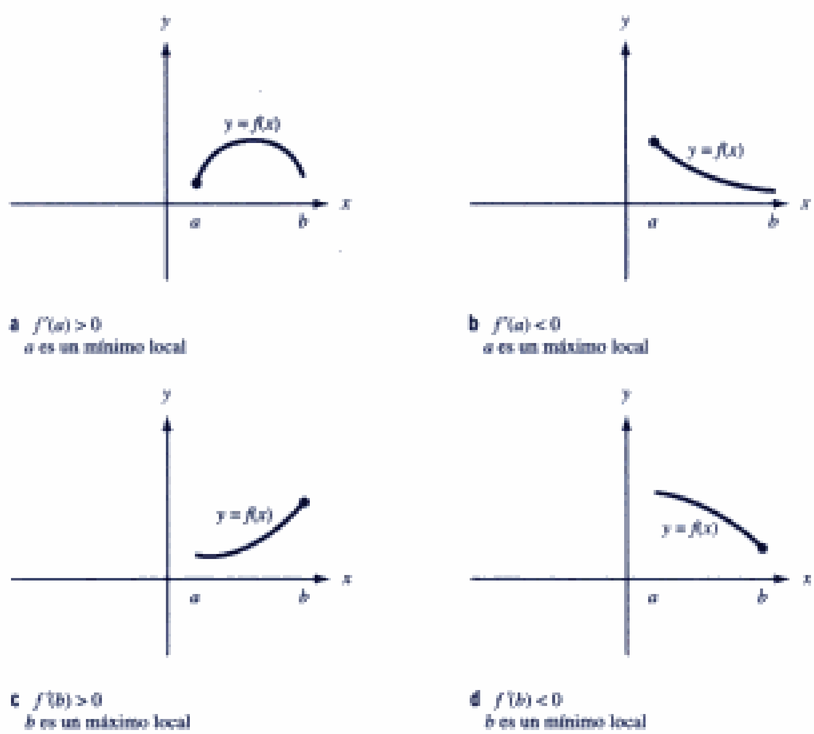


FIGURA 23
Cómo determinar si x_0 es un máximo local o un mínimo local si x_0 es un punto final

EJEMPLO 21 Un monopolista maximiza la ganancia

A un monopolista le cuesta \$5/unidad producir un producto. Si produce x unidades del producto, entonces cada uno se puede vender en $10 - x$ dólares ($0 \leq x \leq 10$). Para maximizar la ganancia, ¿cuánto debe producir el monopolista?

Solución Sea $P(x)$ la ganancia del monopolista si produce x unidades. Entonces

$$P(x) = x(10 - x) - 5x = 5x - x^2 \qquad (0 \leq x \leq 10)$$

Así, el monopolista quiere resolver el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} &\max P(x) \\ &\text{s.a} \quad 0 \leq x \leq 10 \end{aligned}$$

Ahora se clasifican los candidatos extremos:

Caso 1 $P'(x) = 5 - 2x$, así que $P'(2.5) = 0$. Debido a que $P''(x) = -2$, $x = 2.5$ es un máximo local que produce una ganancia de $P(2.5) = 6.25$.

Caso 2 $P'(x)$ existe para los puntos en $[0, 10]$, así que no hay candidatos de caso 2.

Caso 3 $a = 0$ tiene $P'(0) = 5 > 0$, de modo que $a = 0$ es un mínimo local; $b = 10$ tiene $P'(10) = -15 < 0$, entonces $b = 10$ es un mínimo local.

Así, $x = 2.5$ es el único máximo local. Esto significa que las ganancias del monopolista se maximizan al elegir $x = 2.5$.

Observe que $P''(x) = -2$ para todos los valores de x. Esto muestra que $P(x)$ es una función cóncava. Cualquier máximo local para $P(x)$ debe ser la solución óptima para el PNL. Así, el teorema 1 implica que una vez determinado que $x = 2.5$ es un máximo local, se sabe que es la solución óptima para el PNL.

EJEMPLO 22 Determinación del máximo global cuando el punto final es un máximo

Sea

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 - (x - 1)^2 \qquad \text{para} \qquad 0 \leq x < 3 \\ f(x) &= -3 + (x - 4)^2 \qquad \text{para} \qquad 3 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

Encuentre

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a} \quad 0 \leq x \leq 6 \end{aligned}$$

Solución **Caso 1** Para $0 \leq x < 3$, $f'(x) = -2(x - 1)$ y $f''(x) = -2$. Para $3 < x \leq 6$, $f'(x) = 2(x - 4)$ y $f''(x) = 2$. Así, $f'(1) = f'(4) = 0$. Debido a que $f''(1) < 0$, $x = 1$ es un máximo local. Debido a que $f''(4) > 0$, $x = 4$ es un mínimo local.

Caso 2 De la figura 24, se ve que $f(x)$ no tiene derivada en $x = 3$ (para x ligeramente menor que 3, $f'(x)$ está cerca de -4, y para x un poco mayor que 3, $f'(x)$ está cerca de -2). Debido a que $f(2.9) = -1.61$, $f(3) = -2$, y $f(3.1) = -2.19$, $x = 3$ no es un extremo local.

Caso 3 Debido a que $f'(0) = 2 > 0$, $x = 0$ es un mínimo local. Debido a que $f'(6) = 4 > 0$, $x = 6$ es un máximo local.

Por lo tanto, en $[0, 6]$, $f(x)$ tiene un máximo local para $x = 1$ y $x = 6$. Debido a que $f(1) = 2$ y $f(6) = 1$, se encuentra que la solución óptima para el PNL ocurre para $x = 1$.

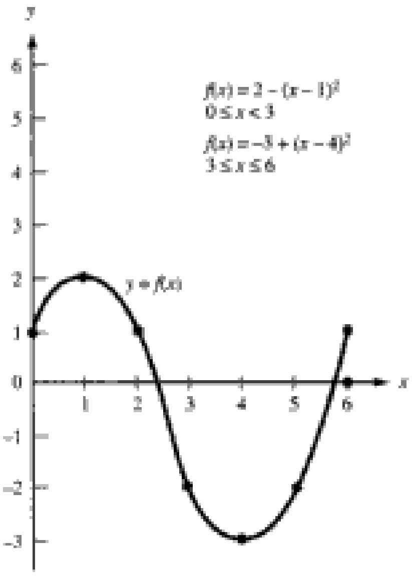


FIGURA 24
Gráfica para el ejemplo 22

Evaluación y optimización no lineal

Una decisión de negocios importante es la determinación del precio de maximización de ganancia que debe cargarse por un producto. La demanda de un producto suele modelarse como una función lineal del precio

$$\text{Demanda} = a - b(\text{precio})$$

donde a y b son constantes. Si la función de demanda lineal es pertinente, entonces la ganancia de un producto con un costo unitario de c está dado por

$$(\text{Precio} - c)^*[a - b(\text{precio})].$$

Esto significa que la ganancia es una función cóncava del precio, y el Solver debe encontrar el precio de maximización de ganancia. En esta sección, se obtienen dos modelos de Solver (basados en Dolan y Simon, 1997) que se pueden usar para determinar los precios óptimos.

El primer modelo enfrenta el problema siguiente: a medida que fluctúan las tasas de intercambio, ¿cómo debe cambiar una compañía norteamericana el precio de su producto en el extranjero? Para ser más específicos, suponga que Eli Daisy está vendiendo un fármaco en Alemania. Su objetivo es maximizar su ganancia en dólares, pero cuando el fármaco se vende en Alemania, recibe marcos. Para maximizar la ganancia en dólares de Daisy, ¿cómo debe variar el precio en marcos con la tasa de cambio? Para ilustrar las ideas del caso, considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 23 Evaluación cuando varía las tasas de cambio

El costo de producir el fármaco taxoprol es de $60. En la actualidad, la tasa de cambio es de 0.667 dólares/marco, y se cargan 150 marcos por el taxoprol. La demanda actual por el taxoprol es de 100 unidades y se estima que la elasticidad para el taxoprol es 2.5. Suponiendo una curva de demanda lineal, determine cómo debe variar el precio (en marcos) del taxoprol con la tasa de cambio.

Solución Se empieza por determinar la curva de demanda lineal que relaciona la demanda con el precio en marcos. En la actualidad, la demanda es 100 y el precio es 150 marcos. Recuerde de la economía que la elasticidad del precio de un producto es la disminución porcentual en ventas que resulta de un incremento del precio de 1%. La elasticidad del precio es 2.5, Intprice.xls

así que un incremento de 1% en el precio (a 151.5) da como resultado una disminución de 2.5% en la demanda (a 100 − 2.5 = 97.5). En el archivo Intprice.xls (hoja Linear Demand), se introducen estos dos puntos en B12:C13. Ahora se encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la curva de demanda.

$$\text{Pendiente} = \frac{97.5 - 100}{151.5 - 150} = -1.6667$$

(debido a que la demanda es mayor que 1 en valor absoluto, la demanda es elástica).

La pendiente se calcula en D13 con la fórmula

$$=(B13 - B12)/(A13 - A12)$$

$$\text{Intercepción} = 100 + (-150)(-1.6667) = 350$$

La intercepción es calculada en D14 con la fórmula

$$=B12 + (-A12)*(D13)$$

Por consiguiente, demanda = 350 − 1.6667(precio en marcos). (Véase la figura 25.)

Ahora se puede calcular (para un conjunto de precios de prueba) la ganancia para tasas de cambio que varían de .4 $/marco a 1$/marco. Luego, use Solver para encontrar el conjunto de precios que maximizan la *suma* de estas ganancias. Con esto se asegura que se encontró un precio de maximización de ganancia para diversas tasas de cambio.

Paso 1 Introduzca los valores de prueba para la tasa de cambio ($/marco) en el intervalo de celdas B4:J4.

Paso 2 En B5:J5, escriba el costo unitario en dólares ($60).

Paso 3 En B6:J6, teclee los precios de prueba (en marcos) para el taxoprol.

Paso 4 Observe que la demanda para cada tasa de cambio se obtiene mediante 350 − 1.66667*(precio en marcos).

En las celdas B7:J7, se determina la demanda para cada tipo de cambio. En B7, se encuentra la demanda para el tipo de cambio de 0.6667$/marco con la fórmula

$$=\$D\$14 + \$D\$13*B6$$

Para calcular la demanda de las otras tasas de cambio se copia esta fórmula al intervalo C7:J7

Paso 5 Observe que la ganancia en dólares se obtiene a partir de

$$[(\$/\text{marco})*\text{precio en marcos} - \text{costo en dólares}]*(\text{demanda})$$

FIGURA 25

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Dependencia del precio**										
2	**en la tasa de cambio**										
3											
4	$/DM actual	0.666667	0.4	0.5	0.6	0.666667	0.7	0.8	0.9	1	
5	Costo unitario en dólares	60	60	60	60	60	60	60	60	60	
6	Precio actual en marcos	149.9999	179.9999	164.9999	154.9999	149.9999	147.8571	142.4999	138.3333	134.9999	
7	Demanda actual	100.0002	50.00015	75.00014	91.6668	100.0002	103.5716	112.5001	119.4446	125.0001	
8	Ganancia actual en dólares	4000.005	600	1687.5	3025	4000.005	4505.357	6075	7704.167	9375	Ganancia total
9	Elasticidad	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	36972.03
10											
11	Precio en marcos	demanda									
12	150	100									
13	151.5	97.5	pendiente	-1.666667							
14	Demanda = 350-(5/3)*precio		ordenada al	origen 350							

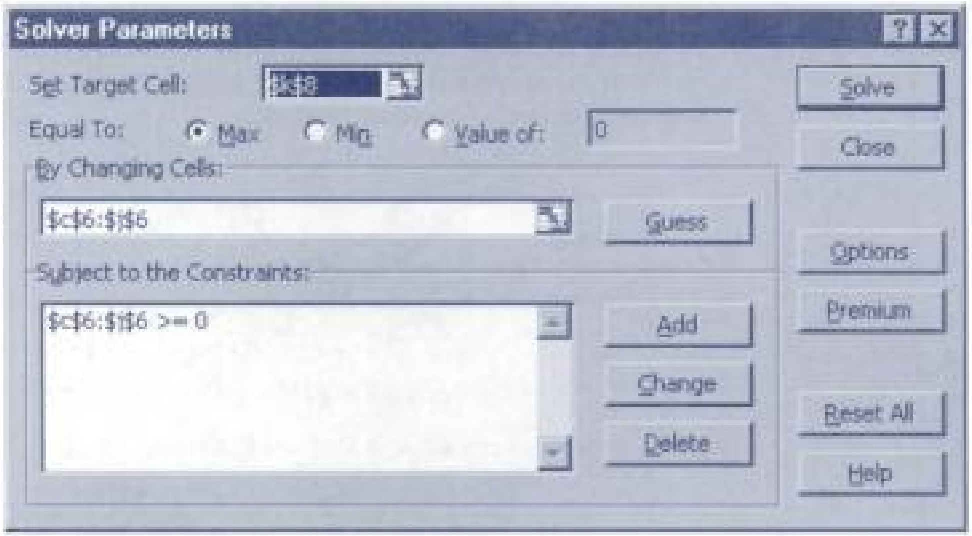


FIGURA 26

En las celdas B8:J8, se calcula la ganancia en dólares (para los precios de prueba) de cada tasa de cambio. En B8, se determina la ganancia para la tasa de cambio actual (.66667$/marco) y el precio actual (150 marcos) con la fórmula

$$=(B4*B6 - B5)*B7$$

Copiando esta fórmula al intervalo de celdas C8:J8, se calculan las ganancias para las otras tasas de cambio.

Paso 6 En la celda K8, se agrega la ganancia para las tasas de cambio con la fórmula

$$= \text{SUM(C8:J8)}$$

Paso 7 Ahora se utiliza el Solver para determinar el precio de maximización de ganancia de cada tasa de cambio. Al cambiar los precios no negativos para cada tasa de cambio (C6:J6), se puede maximizar la suma de las ganancias (K8). Debido a que cada precio sólo afecta la ganancia para la tasa de cambio en su propia columna, esto asegura que se encuentra el precio de maximización de ganancia para cada tasa de cambio. Por ejemplo, para .66667$/marco, el precio óptimo es 150 marcos. Observe que si el valor del marco disminuye en 25% a .5 $/marco, sólo se eleva el costo en marcos por 10% ($\frac{165 - 150}{150} = .10$). Debido a la demanda elástica, la maximización de ganancia no requiere que los clientes alemanes absorban la pérdida en dólares debida a la depreciación del marco. La ventana del Solver es como se ilustra en la figura 26.

¿Cómo se puede usar el Solver para determinar un precio de maximización de ganancia? Una manera es obtener una curva de demanda al segmentar el mercado e identificar un precio bajo, un precio medio y un precio alto. Para cada uno de estos precios y segmentos de mercado, pida a los expertos de la compañía que estimen la demanda del producto. Luego, se pueden usar las capacidades de ajuste de tendencia de Excel para ajustar una función cuadrática que se pueda usar para estimar cada demanda del segmento para precios distintos. Por último, se pueden agregar las curvas de demanda de segmento a fin de obtener una curva de demanda agregada y usar el Solver para determinar el precio de maximización de ganancia. El procedimiento se ilustra en el ejemplo 24 [basado en Dolan y Simon (1996)].

EJEMPLO 24 Evaluación de una barra de dulce

Producir una barra de dulce cuesta 55 centavos. Se está considerando cargar un precio de entre $1.10 y $1.50 para esta barra de dulce. Para un precio de $1.10, $1.30 y $1.50, el departamento de comercialización estima la demanda para cada barra de dulce en las tres regiones donde se venderá (véase la tabla 10). ¿Qué precio maximizará la ganancia?

Solución

Expdemand.xls

Paso 1 Se empieza por ajustar una curva cuadrática a las tres demandas especificadas en la tabla 10 para cada región. Véase el archivo Expdemand.xls. Por ejemplo, para la región 1 se utiliza la opción Asistente para gráficas X-Y a fin de graficar D4:E6. De clic en los puntos de la gráfica hasta que se vuelvan amarillos y elija Insert Trendline Polynomial (2) y compruebe la opción de ecuación para asegurarse que se lista la ecuación cuadrática que se ajusta de manera exacta a los tres puntos.

Así, se estima la demanda de la región 1 (véase la figura 27):

$$= -87.5*(\text{precio})^2 + 195*(\text{precio}) - 73.625$$

De manera similar, en las regiones 2 y 3 se encuentran las siguientes ecuaciones de demanda (véanse las figuras 28 y 29):

$$\text{Demanda de la región } 2 = -75*(\text{precio})^2 + 155*(\text{precio}) - 47.75$$
$$\text{Demanda de la región } 3 = -12.5*(\text{precio})^2 - 5*(\text{precio}) + 44.625$$

Paso 2 Ahora se introduce un precio de prueba en la celda H4 y se determina en las celdas I4:K4 la demanda (en miles de unidades) para ese precio en cada región:

Demanda de la región 1 (celda I4) = −87.5*H4^2 + 195*H4 − 73.625
Demanda de la región 2 (celda J4) = −75*(H4)^2 + 155*H4 − 47.75
Demanda de la región 3 (celda K4) = −12.5*(H4)^2 − 5*H4 + 44.625

Paso 3 En la celda L4, se calcula la demanda total (en miles de unidades) con la fórmula

= SUM(I4:K4)

Paso 4 En la celda I6, se calcula la ganancia (en miles de dólares):

= (H4 − I2)*L4

Paso 5 Ahora se está listo para invocar el Solver a fin de encontrar el precio de maximización de ganancia. Simplemente se maximiza la ganancia (celda I6), con el precio (H4) que es una celda cambiante. Debido a que las curvas de demanda son, en teoría, válidas

TABLA 10

Precio ($) (Costo unitario: 0.55)	Demanda (en miles)		
	Región 1	Región 2	Región 3
Bajo (1.10)	35	32	24
Medio (1.30)	32	27	17
Alto (1.50)	22	16	9

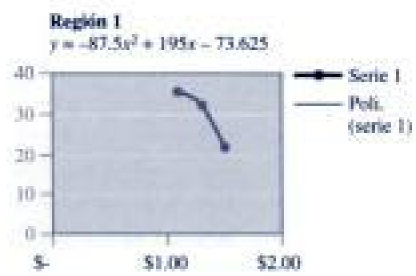


FIGURA 27

sólo para precios entre \$1.10 y \$1.50, se agregan las restricciones H4≥1.10 y H4≤1.50 (véase en la figura 30 la ventana del Solver).

¿Por qué el modelo es no lineal? Como se ilustra en la figura 31, se encuentra que el precio que maximiza la ganancia es \$1.29

FIGURA 28

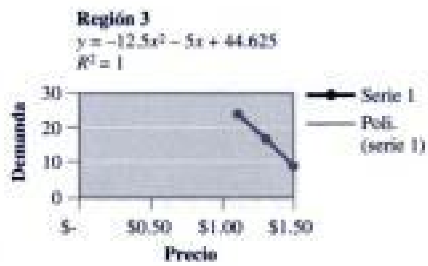


FIGURA 29

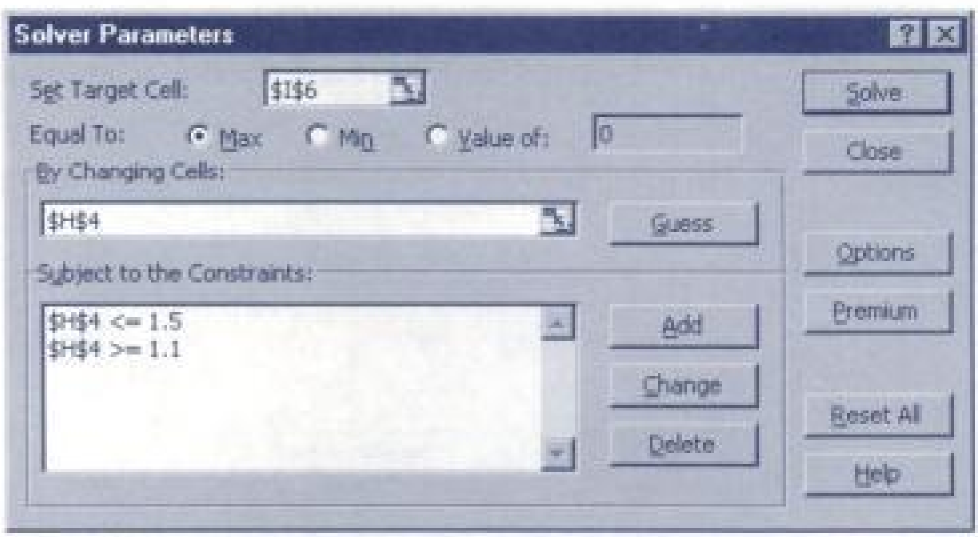


FIGURA 30

	H	I	J	K	L
2	Costo variable	0.55			
3	Precio	Demanda de la región 1	Demanda de la región 2	Demanda de la región 3	Demanda total
4	1.286325018	32.42807	27.53297	17.51047	77.47152
5					
6	Ganancia	57.04422			
7	(000's)				

FIGURA 31

Si se está tratando de maximizar una función $f(x)$ que es un producto de varias funciones, a menudo es más fácil maximizar ln $[f(x)]$. Debido a que ln es una función creciente, se sabe que cualquier x que es solución de max $z' = \ln [f(x)]$ sujeta a $x \in S$ también es solución de max $z = f(x)$ sobre $x \in S$. Véase en el problema 4 una aplicación de esta idea.

Solución de PNL de una variable con LINGO

Si está maximizando una función objetivo cóncava $f(x)$ (o incluso si el logaritmo de la función objetivo en un problema de maximización es una función cóncava), puede estar seguro de que LINGO encontrará la solución óptima para el PNL

$$\begin{aligned} &\max z = f(x) \\ &\text{s.a} \qquad a \le x \le b \end{aligned}$$

Así, si se resuelve el ejemplo 21 en LINGO, se estaría seguro de que encontró la respuesta correcta. Sin embargo, en el ejemplo 22 no se podría estar seguro de que LINGO encontraría el valor máximo de $f(x)$ en el intervalo [0, 6].

De manera similar, si se está maximizando una función objetivo convexa, entonces se sabe que LINGO encontrará la solución óptima para el PNL

$$\begin{aligned} &\min z = f(x) \\ &\text{s.a} \qquad a \le x \le b \end{aligned}$$

Si se está intentando minimizar una función no convexa o maximizar una función no cóncava de un PNL de una variable sujeta a la restricción $a \le x \le b$, entonces LINGO podría encontrar un extremo local que no resuelve el PNL. En tales situaciones, el usuario puede influir en la solución determinada mediante LINGO introduciendo un valor de inicio para x con el comando INIT. Por ejemplo, si se instruye a LINGO para resolver

$$\begin{aligned} &\min z = x \operatorname{sen}(\pi x) \\ &\text{s.a} \qquad 0 \le x \le 6 \end{aligned}$$

LINGO podría encontrar el mínimo local $x = 1.564$. Esto es porque a falta de un valor, LINGO primero supone que $x = 0$, y en $x = 1.564$ se satisfacen las condiciones para un mínimo local $[f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0]$. Una gráfica de la función x sen (πx) revela que otro mínimo local ocurre para x entre 5 y 6. Por medio del comando INIT, se podría instruir a LINGO para que empiece cerca de $x = 5$. Después, LINGO de hecho encuentra la solución óptima ($x = 5.52$) para el PNL. Por ejemplo, para que LINGO empiece con $x1=2$ y $x2=3$, se agregaría la siguiente sección al programa de LINGO:

```
INIT:
x1=2;
x2=3;
ENDINIT
```

PROBLEMAS

Grupo A

1 A una compañía le cuesta \$100 en costos variables producir un acondicionador de aire, más un costo fijo de \$5 000 si se producen acondicionadores de aire. Si la compañía gasta x dólares en publicidad, entonces puede vender $x^{1/2}$ acondicionadores de aire a \$300 cada uno. ¿Cuánto puede maximizar su ganancia la compañía? Si el costo fijo de producir acondicionadores de aire fuera de \$20 000, ¿qué debe hacer la compañía?

2 Si un monopolista produce q unidades, puede cobrar $100 - 4q$ dólares/unidad. El costo fijo de producción es $50 y el costo variable por unidad es $2. ¿Cómo puede maximizar las ganancias el monopolista? Si el monopolista debe pagar un impuesto por ventas de $2/unidad, entonces incrementaría o disminuiría la producción?

3 Muestre que para toda x, $e^x \geq x + 1$. [*Sugerencia*: sea $f(x) = e^x - x - 1$. Demuestre que

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.a} \quad x \in R \end{aligned}$$

ocurre para $x = 0$.]

4 Suponga que en n turnos al bat un beisbolista conecta x imparables. Suponga que se desea estimar la probabilidad (p) del jugador de conectar un imparable en cada turno al bat. El método de máxima verosimilitud estima p mediante $\hat{p}$, donde $\hat{p}$ maximiza la probabilidad de observar x imparables en n turnos al bat. Muestre que el método de máxima verosimilitud elegiría $\hat{p} = \frac{x}{n}$.

5 Encuentre la solución óptima para

$$\begin{aligned} &\max x^3 \\ &\text{s.a} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

6 Encuentre la solución óptima para

$$\begin{aligned} &\min x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ &\text{s.a} \quad -2 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

7 Durante la administración Reagan, el economista Arthur Laffer se volvió famoso por su curva de Laffer, la cual implicaba que un incremento en la tasa de impuestos podría disminuir los ingresos por impuestos, mientras que una disminución en la tasa de impuestos puede incrementar los ingresos por impuestos. Este problema ilustra el porqué de la curva de Laffer. Suponga que si un individuo hace un esfuerzo e, obtiene una recompensa de $10e^{1/2}$. También suponga que un individuo asocia un costo de e con un nivel de esfuerzo de e. Suponga además que la tasa de impuesto es T. Esto significa que cada individuo logra mantener una fracción $1 - T$ de ingreso antes de impuesto. Demuestre que $T = .5$ maximiza los ingresos del gobierno por impuestos. Así, si la tasa de impuestos fuera 60%, entonces un corte en la tasa de impuestos incrementaría los ingresos.

8 El costo por día de mantener en funcionamiento un hospital es $200\,000 + .002x^2$ dólares, donde x = pacientes atendidos por día. ¿Qué tamaño de hospital minimiza el costo por paciente de mantener en operación el hospital?

9 Cada mañana durante la hora de mayor tráfico, 10 000 personas quieren viajar de Nueva Jersey a Nueva York. Si una persona aborda el tren subterráneo, el viaje dura 40 minutos. Si x miles de personas viajan a Nueva York cada mañana, el tiempo en minutos para hacer el recorrido es $20 + 5x$. Este problema ilustra un hecho básico de la vida: si se deja a las personas que se las arreglen como puedan, ¡causarán más congestión de la que ocurre en realidad!

a Muestre que si se deja a su suerte a las personas, viajará por carretera un promedio de 4 000 personas de Nueva Jersey a Nueva York. Aquí se debe suponer que las personas se dividirán entre quienes viajan por metro y quienes viajan por carretera, de manera que el tiempo de viaje promedio por carretera = tiempo de viaje promedio por metro. Cuando ocurre este equilibrio, nadie tiene un incentivo para cambiar de carretera a metro o viceversa.

b Demuestre que el tiempo de viaje promedio por persona se minimiza si viajan por carretera 2 000 personas.

10 En la actualidad, la tasa de cambio es 100 yenes por dólar. En Japón, una compañía norteamericana vende un producto en 700 yenes cuya producción cuesta 5 dólares. El producto tiene una elasticidad de 3. Para tasas de cambio que varían de 70 a 130 yenes por dólar, determine el precio óptimo del producto en Japón y la ganancia en dólares. Suponga una curva de demanda lineal. Se supone que la demanda actual es igual a 100.

11 El costo de producir una X-Box es $250. Se intenta determinar el precio de venta de la X-Box. Están en consideración precios entre $200 y $400, con la demanda para precios de $200, $250, $350 y $400 dada a continuación. Suponga que MSFT obtiene $10 de ganancia por cada juego que compre un dueño de X-Box. Determine el precio óptimo y la ganancia asociada para el caso en que un dueño promedio de X-Box compre 10 juegos.

Precio de la consola ($)	Demanda
200	2.00E+06
250	1.20E+06
350	6.00E+05
400	2.00E+05
Costo unitario	$250

12 Usted es el editor de una nueva revista. El costo variable de editar y distribuir cada copia semanal de la revista es de $0.25. Usted está pensando en cargar entre $0.50 y $1.30 por semana para la revista. Los números estimados de suscriptores (en millones) para precios semanales de $0.50, $0.80 y $1.30 son los siguientes:

Precio	Demanda (millones)
0.5	2.00
0.8	1.20
1.3	0.30

¿Qué precio maximiza la ganancia semanal de la revista?

Grupo B

13 A una compañía le cuesta $c(x)$ dólares producir x unidades. La curva $y = c'(x)$ se conoce como curva de costo marginal de la empresa. (¿Por qué?) La curva de costo promedio de la empresa está dada por $z = \frac{c(x)}{x}$. Sea x^* el nivel de producción que minimiza el costo promedio de la compañía. Mencione las condiciones en las que la curva de costo marginal corta a la curva de costo promedio en x^*.

14 Cuando una máquina tiene t años de antigüedad, obtiene un ingreso a una tasa de e^{-t} dólares por año. Después de t años de uso, la máquina se puede vender en $\frac{1}{t+1}$ dólares.

a ¿Cuándo se debe vender la máquina para maximizar el ingreso total?

b Si el ingreso se descuenta en forma continua (de modo que $1 del ingreso recibido en t años desde este momento sea equivalente a e^{-rt} dólares de ingreso recibido ahora), ¿cómo cambiaría la respuesta del inciso a?

15[†] Suponga que una compañía debe atender clientes que están en un área de A millas cuadradas con n almacenes. Kolesar y Blum demostraron que la distancia promedio entre un almacén y un cliente es

$$\sqrt{\frac{A}{n}}$$

Suponga que a la compañía le cuesta $60 000 por año mantener un almacén y $400 000 construir uno. (Suponga que un costo de $400 000 es equivalente a incurrir por siempre en un costo de $40 000 por año.) La compañía llena 160 000 órdenes por día, y el costo de envío por orden es $1 por milla. Si la compañía atiende un área de 100 millas cuadradas, entonces ¿cuántos almacenes debe tener?

16 Demuestre el teorema 4.

17 Demuestre el teorema 5.

11.5 Búsqueda de la sección áurea

Considere una función $f(x)$. [Para alguna x, es posible que no exista $f'(x)$.] Suponga que se quiere resolver el siguiente PNL:

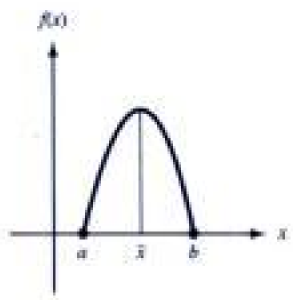
$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a} \quad a \le x \le b \end{aligned} \tag{6}$$

Es posible que no exista $f'(x)$, o bien, podría ser difícil resolver la ecuación $f'(x) = 0$. En cualquier caso, podría ser difícil usar los métodos de la sección anterior para resolver este PNL. En esta sección, se analiza cómo se puede resolver (6) si $f(x)$ es un tipo especial de función (una función unimodal).

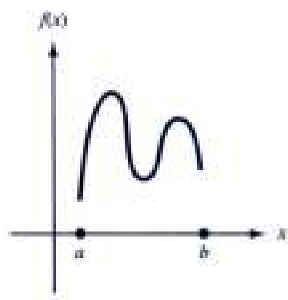
DEFINICIÓN ■ Una función $f(x)$ es **unimodal** en $[a, b]$ si para algún punto $\bar{x}$ en $[a, b]$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $[a, \bar{x}]$ y estrictamente decreciente en $[\bar{x}, b]$. ■

Si $f(x)$ es unimodal en $[a, b]$, entonces $f(x)$ tendrá sólo un máximo local ($\bar{x}$) en $[a, b]$ y ese máximo local será solución de (6). (Véase la figura 32.) Sea $\bar{x}$ la solución óptima de (6).

Sin más información, lo que se puede decir es que la solución óptima para (6) es algún punto en el intervalo $[a, b]$. Al evaluar $f(x)$ en dos puntos x_1 y x_2 (suponga que $x_1 < x_2$) en $[a, b]$, se podría reducir el tamaño del intervalo en el que debe estar la solución para (6). Después de evaluar $f(x_1)$ y $f(x_2)$, debe ocurrir uno de tres casos. En cada uno, se puede mostrar que la solución óptima para (6) estará en un subconjunto de $[a, b]$.



a Una función unimodal en $[a, b]$
$\bar{x}$ = máximo local y solución para
$\max f(x)$
s.a $a \le x \le b$



b Una función que no es unimodal en $[a, b]$

FIGURA 32
Definición de una función unimodal

[†]Basado en Kolesar y Blum (1973).

Caso 1 $f(x_1) < f(x_2)$. Debido a que $f(x)$ es creciente para por lo menos parte del intervalo $[x_1, x_2]$, el hecho de que $f(x)$ sea unimodal muestra que la solución óptima para (6) no puede ocurrir en $[a, x_1]$. Así, en el caso 1, $\bar{x} \in (x_1, b]$. (Véase la figura 33.)

Caso 2 $f(x_1) = f(x_2)$. Para alguna parte del intervalo $[x_1, x_2]$, $f(x)$ debe ser decreciente, y la solución óptima para (6) debe ocurrir para alguna $\bar{x} < x_2$. Por lo tanto, en el caso 2, $\bar{x} \in [a, x_2]$. (Véase la figura 34.)

Caso 3 $f(x_1) > f(x_2)$. En este caso, $f(x)$ comienza a disminuir antes que x llegue a x_2. Así, $\bar{x} \in [a, x_2)$. (Véase la figura 35.)

El intervalo en el que debe quedar $\bar{x}$ —ya sea $[a, x_2)$ o $(x_1, b]$— se llama el **intervalo de incertidumbre.**

Muchos algoritmos de búsqueda usan estas ideas para reducir el intervalo de incertidumbre [véase Bazaraa y Shetty (1993, sección 8.1)]. La mayoría de estos algoritmos proceden como sigue:

Paso 1 Comience con la región de incertidumbre $[a, b]$ para x. Evalúe $f(x)$ en dos puntos x_1 y x_2, elegidos de manera juiciosa.

Paso 2 Determine cuál de los casos 1 a 3 se cumple, y encuentre un intervalo reducido de incertidumbre.

Paso 3 Evalúe $f(x)$ en dos nuevos puntos (el algoritmo especifica cómo se eligen los dos nuevos puntos). Vuelva al paso 2 a menos que la longitud del intervalo de incertidumbre sea suficientemente pequeña.

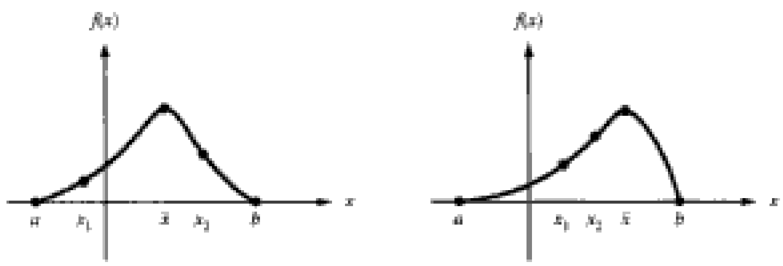


FIGURA 33
Si $f(x_1) < f(x_2)$, $\bar{x} \in (x_1, b]$

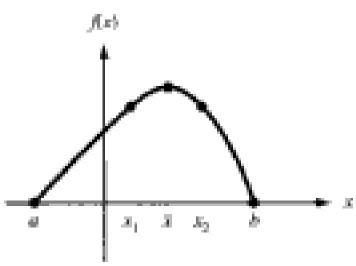


FIGURA 34
Si $f(x_1) = f(x_2)$, $\bar{x} \in [a, x_2]$

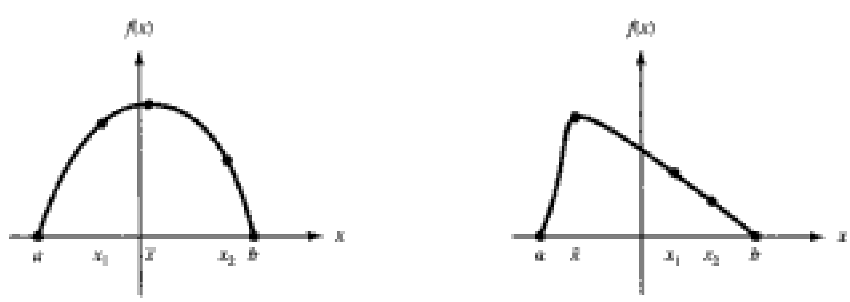


FIGURA 35
Si $f(x_1) > f(x_2)$, $\bar{x} \in [a, x_2)$

Se analiza en detalle tal algoritmo de búsqueda: búsqueda de sección áurea. Al usar este algoritmo con el fin de resolver (6) para una función unimodal $f(x)$, se verá que cuando se eligen dos puntos nuevos en el paso 3, uno siempre coincide en el que ya se evaluó $f(x)$.

Sea r la única raíz positiva de la ecuación cuadrática $r^2 + r = 1$. Entonces con la fórmula cuadrática se tiene que

$$r = \frac{5^{1/2} - 1}{2} = 0.618$$

(véase el problema 3 al final de esta sección para una explicación de por qué se hace referencia a r como la sección áurea.) La búsqueda de la sección áurea comienza con la evaluación de $f(x)$ en los puntos x_1 y x_2, donde $x_1 = b - r(b - a)$, y $x_2 = a + r(b - a)$ (véase la figura 36). De esta figura, se ve que para encontrar x_1, se avanza una fracción r del intervalo desde el punto final derecho; para encontrar x_2, se avanza una fracción r del intervalo desde el punto final izquierdo. Entonces la búsqueda de sección áurea genera dos nuevos puntos, en el que $f(x)$ se debe evaluar de nuevo con los siguientes movimientos:

Nuevo punto izquierdo Desplácese una distancia igual a una fracción r del intervalo actual de incertidumbre desde el punto final derecho del intervalo de incertidumbre.

Nuevo punto derecho Desplácese una distancia igual a una fracción r del intervalo actual de incertidumbre desde el punto final izquierdo del intervalo.

A partir del análisis de los casos 1 a 3, se sabe que si 1–3, entonces $f(x_1) < f(x_2)$, entonces $\bar{x} \in (x_1, b]$, mientras que si $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces $\bar{x} \in a, x_2)$. Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces el intervalo reducido de incertidumbre tiene longitud $b - x_1 = r(b - a)$, y si $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces el intervalo reducido de incertidumbre tiene longitud $x_2 - a = r(b - a)$. Así, después de evaluar $f(x_1)$ y $f(x_2)$, se ha reducido el intervalo de incertidumbre a una longitud $r(b - a)$.

Cada vez que $f(x)$ se evalúa en dos puntos y se reduce el intervalo de incertidumbre, se dice que se completó una interación de búsqueda de la sección áurea. Defina

L_k = longitud del intervalo de incertidumbre después que se completan k iteraciones del algoritmo

I_k = intervalo de incertidumbre después de completar k iteraciones

Entonces se ve que $L_1 = r(b - a)$, y $I_1 = [a, x_2)$, o bien, $I_1 = (x_1, b]$.

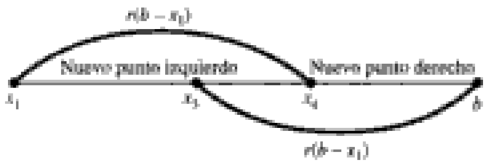
Siguiendo este procedimiento, se generan dos nuevos puntos, x_3 y x_4, en los que se debe evaluar $f(x)$.

Caso 1 $f(x_1) < f(x_2)$. El nuevo intervalo de incertidumbre, $(x_1, b]$, tiene longitud $b - x_1 = r(b - a)$. Entonces (véase la figura 37a)

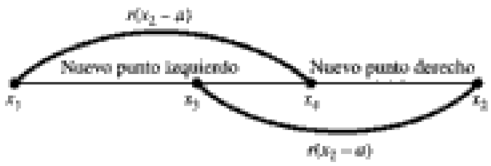
$$x_3 = \text{nuevo punto izquierdo} = b - r(b - x_1) = b - r^2(b - a)$$
$$x_4 = \text{nuevo punto derecho} = x_1 + r(b - x_1)$$

El nuevo punto izquierdo, x_3, será igual al punto derecho anterior, x_2. Para ver esto, use el hecho de que $r^2 = 1 - r$ para concluir que $x_3 = b - r^2(b - a) = b - (1 - r)(b - a) = a + r(b - a) = x_2$.

FIGURA 36
Ubicación de x_1 y x_2 para la búsqueda de la sección áurea



a Si $f(x_1) < f(x_2)$, el nuevo intervalo de incertidumbre es $(x_1, b]$



b Si $f(x_1) \geq f(x_2)$, el nuevo intervalo de incertidumbre es $[a, x_2)$

FIGURA 37
Cómo generar nuevos puntos en la búsqueda de la sección áurea

Caso 2 $f(x_1) \geq f(x_2)$. El nuevo intervalo de incertidumbre, $[a, x_2)$, tiene longitud $x_2 - a = r(b - a)$. Entonces (véase la figura 37b)

$$x_3 = \text{nuevo punto izquierdo} = x_2 - r(x_2 - a)$$
$$x_4 = \text{nuevo punto derecho} = a + r(x_2 - a) = a + r^2(b - a)$$

El nuevo punto derecho, x_4, será igual al punto izquierdo anterior, x_1. Para ver esto, use el hecho de que $r^2 = 1 - r$ para concluir que $x_4 = a + r^2(b - a) = a + (1 - r)(b - a) = b - r(b - a) = x_1$.

Ahora los nuevos valores de $f(x_3)$ y $f(x_4)$ se pueden usar para reducir más la longitud del intervalo de incertidumbre. En este punto, se han completado dos iteraciones de búsqueda de la sección áurea.

Ya se demostró que en cada iteración de la búsqueda de la sección áurea, $f(x)$ se debe evaluar en sólo uno de los nuevos puntos. Es fácil ver que $L_2 = rL_1 = r^2(b - a)$ y, en general, con, $L_k = rL_{k-1}$ se obtiene $L_k = r^k(b - a)$. Así, si se quiere que el intervalo final de incertidumbre tenga una longitud $< \epsilon$, se deben llevar a cabo k iteraciones de la búsqueda de la sección áurea, donde $r^k(b - a) < \epsilon$.

EJEMPLO 25 Búsqueda de la sección áurea

Utilice la búsqueda de la sección áurea para encontrar

$$\begin{aligned} &\max\ -x^2 - 1 \\ &\text{s.a} \qquad -1 \leq x \leq 0.75 \end{aligned}$$

con el intervalo de incertidumbre final que tiene una longitud menor que $\frac{1}{4}$.

Solución Aquí $a = -1$, $b = 0.75$ y $b - a = 1.75$. Para determinar el número de k iteraciones de la búsqueda de la sección áurea que se deben llevar a cabo, se obtiene el valor de k a partir de $1.75(0.618^k) < 0.25$, o bien, $0.618^k < \frac{1}{7}$. Aplicando logaritmos naturales en ambos lados, se obtiene

$$\begin{aligned} k \ln 0.618 &< \ln \tfrac{1}{7} \\ k(-0.48) &< -1.95 \\ k &> \tfrac{1.95}{0.48} = 4.06 \end{aligned}$$

Así, se llevan a cabo las cinco iteraciones de la búsqueda de la sección áurea. Primero se determina x_1 y x_2:

$$x_1 = 0.75 - (0.618)(1.75) = -0.3315$$
$$x_2 = -1 + (0.618)(1.75) = 0.0815$$

Entonces $f(x_1) = -1.1099$ y $f(x_2) = -1.0066$. Debido a que $f(x_1) < f(x_2)$, el nuevo intervalo de incertidumbre es $I_1 = (x_1, b] = (-0.3315, 0.75]$, y se tiene que $x_3 = x_2$. Por supuesto, $L_1 = 0.75 + 0.3315 = 1.0815$. Ahora se determinan los dos nuevos puntos x_3 y x_4:

$$x_3 = x_2 = 0.0815$$
$$x_4 = -0.3315 + 0.618(1.0815) = 0.3369$$

Ahora $f(x_3) = f(x_2) = -1.0066$ y $f(x_4) = -1.1135$. Debido a que $f(x_3) > f(x_4)$, entonces el nuevo intervalo de incertidumbre es $I_2 = [-0.3315, x_4) = [-0.3315, 0.3369)$, y x_6 será igual a x_3. También, $L_2 = 0.3369 + 0.3315 = 0.6684$. Entonces

$$x_5 = 0.3369 - 0.618(0.6684) = -0.0762$$
$$x_6 = x_3 = 0.0815$$

Note que $f(x_5) = -1.0058$ y $f(x_6) = f(x_3) = -1.0066$. Debido a que $f(x_5) > f(x_6)$, el nuevo intervalo de incertidumbre es $I_3 = [-0.3315, x_6) = [-0.3315, 0.0815)$ y $L_3 = 0.0815 + 0.3315 = 0.4130$. Debido a que $f(x_6) < f(x_5)$, se tiene que $x_5 = x_8$ y $f(x_8) = -1.0058$. Ahora,

$$x_7 = 0.0815 - 0.618(0.413) = -0.1737$$
$$x_8 = x_5 = -0.0762$$

y $f(x_7) = -1.0302$. Debido a que $f(x_8) > f(x_7)$, el nuevo intervalo de incertidumbre es $I_4 = (x_7, 0.0815] = (-0.1737, 0.0815]$, y $L_4 = 0.0815 + 0.1737 = 0.2552$. Asimismo, se cumple que, $x_9 = x_8$. Por último,

$$x_9 = x_8 = -0.0762$$
$$x_{10} = -0.1737 + 0.618(0.2552) = -0.016$$

Ahora $f(x_9) = f(x_8) = -1.0058$ y $f(x_{10}) = -1.0003$. Debido a que $f(x_{10}) > f(x_9)$, el nuevo intervalo de incertidumbre es $I_5 = (x_9, 0.0815] = (-0.0762, 0.0815]$ y $L_5 = 0.0815 + 0.0762 = 0.1577 < 0.25$ (como se desea).

Por lo tanto, se determinó que

$$\begin{aligned} &\max\ -x^2 - 1 \\ &\text{s.a} \quad -1 \le x \le 0.75 \end{aligned}$$

debe quedar en el intervalo $(-0.0762, 0.0815]$. (Por supuesto, el máximo real ocurre para $\bar{x} = 0$.)

La búsqueda de la sección áurea se puede aplicar a un problema de minimización al multiplicar la función objetivo por -1. Para esto se supone que la función objetivo modificada es unimodal.

Uso de hojas de cálculo para llevar a cabo la búsqueda de la sección áurea

Golden.xls

En la figura 38 (archivo Golden.xls) se muestra una ejecución de la búsqueda de la sección áurea en Lotus 1-2-3. Se empieza por introducir los puntos finales izquierdo y derecho ($a = -1$, $b = .75$) del intervalo de incertidumbre para el ejemplo 25 en las celdas A2 y B2. Se calcula r escribiendo la fórmula (5^.5–1)/2. Luego, se nombra la celda G2 con el rango R (con la secuencia de instrucciones **INSERT NAME CREATE**). En las fórmulas posteriores, R se refiere al rango R y toma el valor de r calculado en G2. Se calcula el punto izquierdo inicial x_1 introduciendo la fórmula =B2–R*(B2–A2) en C2 y el punto derecho inicial x_2 escribiendo la fórmula =A2+R*(B2–A2) en D2. De hecho, las fórmulas en C2 y D2 ponen en práctica la figura 36. Se evalúa $f(x_1)$ introduciendo −(C2^.2–1) en E2 y $f(x_2)$ escribiendo −(D2)^2–1 en F2.

A	A	B	C	D	E	F	G
1	LEFTPTUNC	RIGTPTUNC	LEFTPT	RIGHTPT	F(LEFTPT)	F(RIGHTPT)	R
2	-1	0.75	-0.33156	0.081559	-1.10993169	-1.00665195	0.618034
3	-0.33155948	0.75	0.081559	0.336881	-1.00665195	-1.11348883	
4	-0.33155948	0.336881039	-0.07624	0.081559	-1.00581222	-1.00665195	FIGURE
5	-0.33155948	0.08155948	-0.17376	-0.07624	-1.03019326	-1.00581222	25
6	-0.17376208	0.08155948	-0.07624	-0.01596	-1.00581222	-1.00025487	GOLDEN
7	-0.07623792	0.08155948	-0.01596	0.021286	-1.00025487	-1.0004531	SECTION
8							SEARCH

FIGURA 38
Búsqueda de la sección áurea para el ejemplo 25

En A3, se determina el nuevo punto izquierdo del intervalo de incertidumbre al introducir la fórmula **=IF**(E2<F2, C2, A2). Con esto se asegura que si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces el nuevo punto izquierdo del intervalo de incertidumbre es igual al último punto izquierdo donde se evaluó la función (x_1); mientras que si $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces el nuevo punto izquierdo de incertidumbre es igual al punto final izquierdo anterior (a). De manera similar, en B3 se determina el nuevo punto final derecho del intervalo de incertidumbre. En C3, se calcula el nuevo punto final izquierdo (x_3) donde la función se evalúa al introducir la fórmula **=IF**(E2<F2,D2,D2–R*(D2–A2)). Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces con esta fórmula se asegura que el nuevo punto izquierdo (x_3) será igual al antiguo punto derecho (x_2); si $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces el nuevo punto izquierdo (x_3) será igual $x_2 - r(x_2 - a)$ [esto es igual a D2–R*(D2–A2)]. En D3, se calcula el nuevo punto derecho (x_4) escribiendo la fórmula **=IF**(E2<F2,C2+R*(B2–C2), C2). Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces el nuevo punto derecho (x_4) será igual a $x_1 + r(b - x_1)$ [esto es igual a C2+R*(B2–C2)]; si $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces el nuevo punto derecho será igual al antiguo punto izquierdo (x_1) (que es igual a C2). En E3, se evalúa la función en el nuevo punto izquierdo introduciendo −(C4)^2–1, y en F3 se evalúa la función en el nuevo punto final derecho escribiendo −(D4)^2–1.

Ahora, copiando las fórmulas del intervalo A3:F3 al intervalo A3:F7 se generan cuatro iteraciones más de la búsqueda de la sección áurea.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Use la búsqueda de la sección áurea para determinar (dentro de un intervalo de 0.8) la solución óptima para

$$\max\ x^2 + 2x$$
$$\text{s.a} \quad -3 \leq x \leq 5$$

2 Use la búsqueda de sección áurea para determinar (dentro de un intervalo de 0.6) la solución óptima para

$$\max\ x - e^x$$
$$\text{s.a} \quad -1 \leq x \leq 3$$

3 Considere un segmento de línea [0, 1] que está dividido en dos partes (figura 39). Se dice que el segmento de línea está dividido en la sección áurea si

$$\frac{\text{Longitud de la línea completa}}{\text{Longitud de la parte más grande de la línea}} = \frac{\text{Longitud de la parte más grande de la línea}}{\text{Longitud de la parte más pequeña de la línea}}$$

Demuestre que para que el segmento de línea esté dividido en la sección áurea,

$$r = \frac{5^{1/2} - 1}{2}$$

4 Hughesco está interesada en determinar, por medio de los datos de la tabla 11, cómo una reducción de la presión de chorro del líquido (p) afecta la vida útil de una máquina herramienta (t). La presión p está restringida a estar entre 0 y 600 libras por pulgada cuadrada (psi). Utilice la búsqueda de sección áurea para estimar (dentro de 50 unidades) el valor de p que maximiza la vida útil de la máquina herramienta. Suponga que t es una función unimodal de p.

FIGURA 39

TABLA 11

p (Libras por pulgada cuadrada)	t (Minutos)
229	39
371	81
458	82
513	79
425	84
404	85
392	84

11.6 Maximización y minimización no restringidas con varias variables

Ahora se analiza cómo encontrar una solución óptima (si existe) o un extremo local para el PNL sin restricción siguiente:

$$\begin{aligned} &\max \text{ (o min) } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{s.a} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \end{aligned} \tag{7}$$

Se supone que existen las derivadas parciales primera y segunda de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y son continuas en todos los puntos. Sea

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}$$

la derivada parcial de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con respecto a x_i, evaluada en $\bar{x}$. Una condición necesaria para que $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ sea un extremo local para el PNL (7) se da en el teorema 6.

TEOREMA 6

Si $\bar{x}$ es un extremo local para (6), entonces $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$.

Para ver por qué se cumple el teorema 6, suponga que $\bar{x}$ es un extremo local para (7): por ejemplo, un máximo local. Si $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} > 0$ se cumple para cualquier i, entonces al incrementar un poco x_i (y manteniendo constantes las otras variables), se puede encontrar un punto x' cercano a $\bar{x}$ con $f(x') > f(\bar{x})$. Esto contradiría el hecho de que $\bar{x}$ es un máximo local. De manera similar, si $\bar{x}$ es un máximo local para (7) y $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} < 0$, entonces al incrementar un poco x_i (y manteniendo constantes las otras variables), se puede encontrar un punto x'' cercano a $\bar{x}$ con $f(x'') > f(\bar{x})$. Así, si $\bar{x}$ es un máximo local para (7), entonces $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ se debe cumplir para $i = 1, 2, \ldots, n$. Con un argumento similar se muestra que si $\bar{x}$ es un mínimo local, entonces $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ se debe cumplir para $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINICIÓN ■ Un punto $\bar{x}$ que tiene $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ se llama **punto estacionario** de f. ■

Los tres teoremas siguientes dan las condiciones (en donde interviene el hesiano de f) en las que un punto estacionario es un mínimo local, un máximo local o no es un extremo local.

TEOREMA 7

Si $H_k(\bar{x}) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces un punto estacionario $\bar{x}$ es un mínimo local para el PNL (7).

TEOREMA 7′

Si, para $k = 1, 2, \ldots, n$, $H_k(\bar{x})$ es distinta de cero y tiene el mismo signo que $(-1)^k$, entonces un punto estacionario $\bar{x}$ es un máximo local para el PNL (7).

TEOREMA 7''

Si $H_n(\bar{x}) \neq 0$ y no se cumplen las condiciones de los teoremas 7 y 7', entonces un punto estacionario $\bar{x}$ no es un extremo local.

Si un punto estacionario $\bar{x}$ no es un extremo local, entonces se llama **punto silla.** Si $H_n(\bar{x}) = 0$ para un punto estacionario $\bar{x}$, entonces $\bar{x}$ podría ser un mínimo local, un máximo local o un punto silla, y las pruebas precedentes son no concluyentes.

De los teoremas 1 y 7', se sabe que si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava (y el PNL (7) es un problema de maximización), entonces cualquier punto estacionario para (7) es una solución óptima para (7). De los teoremas 1' y 7, se sabe que si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa [y el PNL (7) es un problema de minimización], entonces cualquier punto estacionario para (7) es una solución óptima para (7).

EJEMPLO 26 Evaluación monopolista con varios tipos de cliente

Una monopolista que produce un solo producto tiene dos tipos de clientes. Si se producen q_1 unidades para el cliente 1, entonces el cliente 1 está dispuesto a pagar un precio de $70 - 4q_1$ dólares. Si se producen q_2 unidades para el cliente 2, entonces el cliente 2 está dispuesto a pagar un precio de $150 - 15q_2$ dólares. Para $q > 0$, el costo de fabricar q unidades es $100 + 15q$ dólares. Para maximizar la ganancia, ¿cuánto debe vender el monopolista a cada cliente?

Solución Sea $f(q_1, q_2)$ la ganancia del monopolista si produce q_i unidades para el cliente i. Entonces (suponiendo que tiene lugar cierta producción)

$$f(q_1, q_2) = q_1(70 - 4q_1) + q_2(150 - 15q_2) - 100 - 15q_1 - 15q_2$$

A fin de encontrar los puntos estacionarios para $f(q_1, q_2)$, se establece

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = 70 - 8q_1 - 15 = 0 \qquad (\text{para } q_1 = \tfrac{55}{8})$$

$$\frac{\partial f}{0 q_2} = 150 - 30q_2 - 15 = 0 \qquad (\text{para } q_2 = \tfrac{9}{2})$$

Así, el único punto estacionario de $f(q_1, q_2)$ es $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$. A continuación encuentre el hesiano para $f(q_1, q_2)$.

$$H(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -30 \end{bmatrix}$$

Puesto que el primer menor principal director de H es $-8 < 0$, y el segundo menor principal director de H es $(-8)(-30) = 240 > 0$, el teorema 7'muestra que $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ es un máximo local. También, el teorema 3' implica que $f(q_1, q_2)$ es una función cóncava [en el conjunto de puntos S de (q_1, q_2) que satisface $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, y $q_1 + q_2 > 0$]. Así, el teorema 1 implica que $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ maximiza la ganancia entre todas las posibilidades de producción (con la posible excepción de ninguna producción). Entonces $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ da una ganancia de

$$f(q_1, q_2) = \tfrac{55}{8}(70 - \tfrac{220}{8}) + \tfrac{9}{2}[150 - 15(\tfrac{9}{2})] - 100 - 15(\tfrac{55}{8} + \tfrac{9}{2}) = \$392.81$$

La ganancia por producir $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ excede la ganancia de \$0 que se obtuvo sin producir nada, de modo que $(\frac{55}{8}, \frac{9}{2})$ resuelve el PNL; el monopolista debe vender $\frac{55}{8}$ unidades al cliente 1 y $\frac{9}{2}$ unidades al cliente 2.

Suponga que la calificación promedio (CP) para un estudiante se puede predecir con exactitud a partir de la puntuación del estudiante en el GMAT (Graduate Management Admissions Test, examen de admisión a la licenciatura en administración). Para precisar, suponga que el i-ésimo estudiante examinado tiene una CP de y_i y una puntuación GMAT de x_i. ¿Cómo se puede usar el **método de mínimos cuadrados** para estimar una relación hipotética de la forma $y_i = a + bx_i$?

Solución Sea $\hat{a}$ la estimación de a y $\hat{b}$ la estimación de b. Dado que para los estudiantes $i = 1, 2, \ldots, n$ se ha observado $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \hat{e}_i = y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)$ es el error en la estimación de la calificación promedio del estudiante i. El método de mínimos cuadrados elige $\hat{a}$ y $\hat{b}$ to para minimizar

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} \hat{e}_i^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - a - bx_i)^2$$

Puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - a - bx_i) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - a - bx_i)x_i$$

$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0$ se cumplirá para el punto $(\hat{a}, \hat{b})$ que satisface

$$\sum_{i=1}^{i=n} (y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \text{o} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

y

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i(y_i - a - bx_i) = 0 \qquad \text{o} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} x_iy_i = a\sum_{i=1}^{i=n} x_i + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2$$

Éstas son las famosas **ecuaciones normales.** ¿La solución $(\hat{a}, \hat{b})$ para las ecuaciones normales minimiza $f(a, b)$? Para contestar esta pregunta, se debe calcular el hesiano para $f(a, b)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2n, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

Así,

$$H = \begin{bmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i & 2\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \end{bmatrix}$$

Puesto que $H_1(\hat{a}, \hat{b}) = 2n > 0$, $(\hat{a}, \hat{b})$ será un mínimo local si

$$H_2(\hat{a}, \hat{b}) = 4n\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2 > 0$$

En el ejemplo 31 de la sección 11.8, se mostró que

$$n\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i\right)^2$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Así, si por lo menos dos de las x_i son diferentes, el teorema 7' implica que $(\hat{a}, \hat{b})$ será un mínimo local. $H(a, b)$ no depende de los valores de a y b, así que este razonamiento (y el teorema 3) muestra que si por lo menos dos de las x_i son diferentes, entonces $f(a, b)$ es una función convexa. Si por lo menos dos de las x_i son diferentes, entonces el teorema 1′ muestra que $(\hat{a}, \hat{b})$ minimiza $f(a, b)$.

EJEMPLO 28 Localización de máximos, mínimos y punto silla

Encuentre los máximos locales, mínimos locales y puntos silla para $f(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_2^3x_1 - x_1x_2$.

Solución Se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_2 + x_2^3 - x_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 + 3x_2^2x_1 - x_1$$

Así, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ requiere

$$2x_1x_2 + x_2^3 - x_2 = 0 \quad \text{o bien} \quad x_2(2x_1 + x_2^2 - 1) = 0 \tag{8}$$

$$x_1^2 + 3x_2^2x_1 - x_1 = 0 \quad \text{o bien} \quad x_1(x_1 + 3x_2^2 - 1) = 0 \tag{9}$$

Para que se cumpla la ecuación (8), se debe cumplir (i) $x_2 = 0$, o bien, (ii) $2x_1 + x_2^2 - 1 = 0$ Para que se cumpla la ecuación (9), se debe cumplir (iii) $x_1 = 0$, o bien, (iv) $x_1 + 3x_2^2 - 1 = 0$.

Así, para que (x_1, x_2) sea un punto estacionario, se debe tener que:

se cumplen (i) y (iii). Esto sólo es cierto en (0, 0).

se cumplen (i) y (iv). Esto sólo es cierto en (1, 0).

se cumplen (ii) y (iii). Esto sólo es cierto en (0, 1) y (0, −1).

se cumplen (ii) y (iv). Esto requiere que se cumplan $x_2^2 = 1 - 2x_1$ y $x_1 + 3(1 - 2x_1) - 1 = 0$.

Entonces

$$x_1 = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{5^{1/2}}{5} \quad \text{o bien} \quad -\frac{5^{1/2}}{5}$$

Así, $f(x_1, x_2)$ tiene los siguientes puntos estacionarios:

$$(0, 0), (1, 0), (0, 1), (0, -1), \left(\frac{2}{5}, \frac{5^{1/2}}{5}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{5}, -\frac{5^{1/2}}{5}\right)$$

También,

$$H(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 3(x_2)^2 - 1 \\ 2x_1 + 3(x_2)^2 - 1 & 6x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que $H_1(0, 0) = 0$, no se pueden satisfacer las condiciones de los teoremas 7 y 7′. Debido a que $H_2(0, 0) = -1 \neq 0$, el teorema 7″ ahora implica que (0, 0) es un punto silla.

$$H(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $H_1(1, 0) = 0$ y $H_2(1, 0) = -1$, así que por el teorema 7″ (1, 0) es también un punto silla. Puesto que

$$H(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que $H_1(0, 1) = 2 > 0$ (de modo que no se puede satisfacer la hipótesis del teorema 7') y $H_2(0, 1) = -4$ (así que no se puede satisfacer la hipótesis del teorema 7). Debido a que $H_2(0, 1) \neq 0$, $(0, 1)$ es un punto silla.

Para $\left(\frac{2}{5}, -\frac{5^{1/2}}{5}\right)$, se tiene

$$H\left(\frac{2}{5}, -\frac{5^{1/2}}{5}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5^{1/2}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{12}{5(5)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

Así,

$$H_1\left(\frac{2}{5}, -\frac{5^{1/2}}{5}\right) = -\frac{2}{5^{1/2}} < 0 \quad \text{y} \quad H_2\left(\frac{2}{5}, -\frac{5^{1/2}}{5}\right) = \frac{20}{25} > 0$$

Por consiguiente, el teorema 7' muestra que $\left(\frac{2}{5}, -\frac{5^{1/2}}{5}\right)$ es un máximo local. Por último,

$$H\left(\frac{2}{5}, \frac{5^{1/2}}{5}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5^{1/2}} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{12}{5(5)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

Puesto que $H_1\left(\frac{2}{5}, \frac{5^{1/2}}{5}\right) = \frac{2}{5^{1/2}} > 0$ y $H_2\left(\frac{2}{5}, \frac{5^{1/2}}{5}\right) = \frac{20}{25} > 0$, el teorema 7 muestra que $\left(\frac{2}{5}, \frac{5^{1/2}}{5}\right)$ es un mínimo local.

¿Cuándo LINGO encuentra la solución óptima de un PNL no restringida?

Si se está maximizando una función cóncava (sin restricciones) o minimizando una función convexa (sin restricciones), se puede estar seguro de que cualquier solución encontrada mediante LINGO es la solución óptima del problema. En el ejemplo 27, por ejemplo, se observa que $f(a, b)$ es una función convexa, así que se sabe que LINGO encontraría correctamente la recta de mínimos cuadrados que ajusta un conjunto de puntos.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Una compañía tiene n fábricas. La fabrica i se localiza en el punto (x_i, y_i), en el plano x–y. La compañía quiere ubicar un almacén en un punto (x, y) que minimice

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\text{distancia desde la fábrica } i \text{ hasta el almacén})^2$$

¿Dónde se debe ubicar el almacén?

2 Una compañía puede vender todo lo que produce de un determinado producto en \$2/unidad. El producto se obtiene al combinar dos insumos. Si se usan q_1 unidades del insumo 1 y q_2 unidades del insumo 2, entonces la compañía produce $q_1^{1/3} + q_2^{2/3}$ unidades del producto. Si cuesta \$1 comprar una unidad del insumo 1 y \$1.50 comprar una unidad del insumo 2, entonces ¿cómo puede maximizar su ganancia la compañía?

3 (Modelo colusorio de Duopoly) Hay dos empresas que producen dispositivos. A la primera compañía le cuesta q_1 dólares producir q_1 dispositivos y a la segunda le cuesta $0.5q_2^2$ dólares producir q_2 dispositivos. Si se produce un total de q dispositivos, los consumidores pagan $\$200 - q$ por cada uno. Si los dos fabricantes desean actuar en conveniencia en un intento por maximizar la suma de sus ganancias, ¿cuántos dispositivos debe producir cada compañía?

4 A una compañía le cuesta \$6/unidad producir un producto. Si carga un precio p y gasta a dólares en publicidad, puede vender $10\,000p^{-2}a^{1/6}$ unidades del producto. Determine el precio y el nivel de publicidad que maximice las ganancias de la compañía.

5 Una compañía produce dos productos. Si carga un precio p_i por el producto i, puede vender q_i unidades del producto i, donde $q_1 = 60 - 3p_1 + p_2$ y $q_2 = 80 - 2p_2 + p_1$. Cuesta \$25 producir una unidad del producto 1 y \$72 producir una unidad del producto 2. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben fabricar a fin de maximizar las ganancias?

6 Encuentre los máximos y mínimos locales y los puntos silla para $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 + x_2^4$.

7 Encuentre los máximos y mínimos locales y los puntos silla para $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$.

Grupo B

8[†] (Modelo de Cournot Duopoly) Considérese el problema 3. La solución de Cournot para esta situación se obtiene como sigue: la empresa i producirá $\bar{q}_i$, donde si la empresa 1 cambia su nivel de producción de $\bar{q}_1$ (y la empresa 2 aún produce $\bar{q}_2$), entonces disminuirá la ganancia de la empresa 1. También, si la empresa 2 cambia su nivel de producción de $\bar{q}_2$ (y la empresa 1 todavía produce $\bar{q}_1$), entonces disminuirá la ganancia de la empresa 2. Si la empresa i produce $\bar{q}_i$, esta solución es estable, porque si cualquiera de las empresas cambia su nivel de producción, empeorará. Determine $\bar{q}_1$ y $\bar{q}_2$.

9 En la liga de baloncesto Bloomington Girls Club, se jugaron los siguientes juegos: el equipo A venció al B por 7 puntos, el equipo C venció al A por 8 puntos, el equipo B venció al C por 6 puntos y el equipo B venció al C por 9 puntos. Sean A, B y C las "clasificaciones" de cada equipo en el sentido de que si, por ejemplo, el equipo A juego contra el B, entonces se predice que el equipo A vencerá al B por $A - B$ puntos. Determine los valores de A, B y C que se ajusten mejor (en el sentido de mínimos cuadrados) a estos resultados. Para obtener un conjunto único de clasificaciones, podría ser útil agregar la restricción $A + B + C = 0$. Esto asegura que un equipo "promedio" tendrá una clasificación de 0.

11.7 Método del ascenso escalonado

Suponga que se quiere resolver el siguiente PNL irrestricto:

$$\begin{aligned} &\max\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{s.a} \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \end{aligned} \tag{10}$$

En la explicación de la sección 11.6 se muestra que si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava, entonces la solución óptima a (10) (si existe) ocurrirá en un punto estacionario $\bar{x}$ con

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} = 0$$

En los ejemplos 26 y 28, es fácil encontrar un punto estacionario, pero en muchos problemas, podría ser difícil. En esta sección, se analiza el *método del ascenso escalonado*, que se puede usar para aproximar un punto estacionario de la función.

DEFINICIÓN ■ Considerando el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, la **longitud** de $\mathbf{x}$ (escrito $\|\mathbf{x}\|$) es

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \quad ■$$

Recordando de la sección 2.1 que cualquier vector de n-dimensiones representa una dirección en R^n. Desafortunadamente, para cuaquier dirección, existe un número infinito de vectores que representan esa dirección. Por ejemplo, los vectores (1, 1), (2, 2) y (3, 3) todos representan la misma dirección (moviéndose en un ángulo de 45°) en R^2. Para cualquier vector $\mathbf{x}$, el vector $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ tendrá una longitud de 1 y tendrá la misma dirección de $\mathbf{x}$ (ver problema 1 al final de esta sección). Por lo que, con cualquier dirección en R^n, se podrá asociar un vector de longitud 1 (llamado vector unitario). Por ejemplo, debido a que $\mathbf{x} = (1, 1)$ tiene $\|\mathbf{x}\| = 2^{1/2}$ la dirección definida por $\mathbf{x} = (1, 1)$ está asociado con el vector unitario $(1/2^{1/2}, 1/2^{1/2})$. Para cualquier vector $\mathbf{x}$ el vector unitario $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ es llamado la versión normalizada de $\mathbf{x}$. De aquí que, cualquier dirección en R^n se presentará por el vector normalizado indicando esa dirección. Por lo tanto, la dirección en R^2 definida por (1, 1), (2, 2), (3, 3), . . . se describirá por el vector normalizado:

$$\left(\frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{2^{1/2}}\right)$$

Considere una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cuyas derivadas parciales existen en cada punto.

DEFINICIÓN ■ El **vector gradiente** para $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, escrito como $\nabla f(\mathbf{x})$, está dado por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right] \quad ■$$

$\nabla f(\mathbf{x})$ define la dirección

$$\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|}$$

Por ejemplo, si $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (2x_1, 2x_2)$. Así, $\nabla f(3, 4) = (6, 8)$. Debido a que $\| \nabla f(3, 4) \| = 10$, $\nabla f(3, 4)$ define la dirección $(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}) = (0.6, 0.8)$.

En cualquier punto $\bar{\mathbf{x}}$ que se ubica en la curva $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\bar{\mathbf{x}})$, el vector

$$\frac{\nabla f(\bar{\mathbf{x}})}{\| \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) \|}$$

será perpendicular a la curva $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\bar{x})$ (véase el problema 5 al final de esta sección). Por ejemplo, sea $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Entonces en (3, 4),

$$\frac{\nabla f(3, 4)}{\| \nabla f(3, 4) \|} = (0.6, 0.8)$$

es perpendicular a $x_1^2 + x_2^2 = 25$ (véase la figura 40).

De la definición de $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, se deduce que si el valor de x_i se incrementa por una pequeña cantidad δ, el valor de $f(\mathbf{x})$ se incrementa por aproximadamente $\delta \dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$. Supóngase que se avanza desde un punto $\mathbf{x}$ una pequeña longitud δ en una dirección definida por un vector columna normalizado $\mathbf{d}$. ¿Por cuánto se incrementa $f(\mathbf{x})$? La respuesta es que $f(\mathbf{x})$ se incrementa en $\mathbf{d}$ veces el producto escalar de $\dfrac{\nabla f(\mathbf{x})}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|}$ y $\mathbf{d}$ $\left(\text{escrito como } \dfrac{\delta \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}}{\| \nabla f(\mathbf{x}) \|}\right)$.

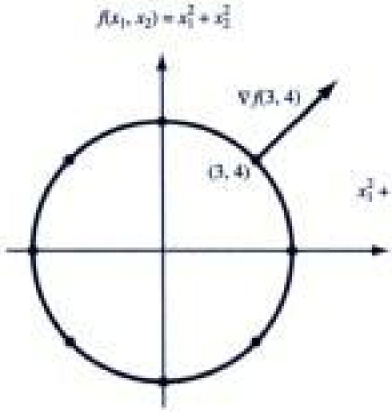


FIGURA 40
$\nabla f(3, 4)$ es perpendicular a $f(x_1, x_2)$ en (3, 4)

Por lo tanto, si $\frac{\nabla f(\mathbf{x})\,\mathbf{d}}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} > 0$, al moverse en una dirección **d** lejos de **x** se incrementará el valor de $f(\mathbf{x})$, y si $\frac{\nabla f(\mathbf{x})\,\mathbf{d}}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} < 0$, al moverse en una dirección **d** lejos de **x** disminuirá $f(\mathbf{x})$. Por ejemplo, suponga que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ y se avanza una longitud δ en una dirección de 45° lejos del punto (3, 4). ¿Por cuánto cambia el valor de $f(x_1, x_2)$? Una dirección de 45° se representa por medio del vector $\left(\frac{1}{2^{1/2}}, \frac{1}{2^{1/2}}\right)$ y $\frac{\nabla f(3,4)}{\|\nabla f(3,4)\|} = (0.6, 0.8)$, así que el valor de $f(x_1, x_2)$ se incrementa por aproximadamente

$$\delta[0.6 \quad 0.8]\begin{bmatrix} \frac{1}{2^{1/2}} \\ \frac{1}{2^{1/2}} \end{bmatrix} = 0.99\delta$$

Recuerde de la sección 11.6 que la solución óptima $\bar{\mathbf{v}}$ para (10) debe satisfacer $\nabla f(\bar{\mathbf{v}}) = 0$. Ahora suponga que se está en un punto $\mathbf{v}_0$ y que se quiere encontrar un punto $\bar{\mathbf{v}}$ que es solución de (10). En un intento por encontrar $\bar{\mathbf{v}}$, parece razonable alejarse de $\mathbf{v}_0$ en una dirección que maximiza la tasa (al menos en forma local) a la que se incrementa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ El lema 1 demuestra su utilidad aquí (véase repaso del problema 22).

LEMA 1

Suponga que se está en un punto **v** y se avanza desde **v** una pequeña distancia δ en una dirección **d**. Entonces para una δ, especifica, el incremento máximo en el valor de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ocurrirá si se elige

$$\mathbf{d} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$$

En resumen, si se avanza una pequeña distancia desde **v** y se quiere incrementar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tan rápido como sea posible, entonces se debe avanzar en la dirección de $\nabla f(\mathbf{v})$.

Ahora se está preparado para describir el método del ascenso más inclinado. Comience en cualquier punto $\mathbf{v}_0$. Moviéndose en la dirección de $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ se obtiene una tasa máxima de incremento para f, así que se comienza por alejarse de $\mathbf{v}_0$ en la dirección de $\nabla f(\mathbf{v}_0)$. Para algún valor no negativo de t, se avanza hasta un punto $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + t\nabla f(\mathbf{v}_0)$. El mejoramiento máximo posible en el valor de f (para un problema de maximización) que se logra al alejarse de $\mathbf{v}_0$ en la dirección de $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ resulta de moverse $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + t_0\nabla f(\mathbf{v}_0)$, donde t_0 resuelve el siguiente problema de optimización unidimensional.

$$\begin{aligned} &\max f(\mathbf{v}_0 + t_0\nabla f(\mathbf{v}_0)) \\ &\text{s.a} \qquad t_0 \geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

El PNL (11) se podría resolver mediante los métodos de la sección 11.4 o, si es necesario, por un procedimiento como la búsqueda de la sección áurea.

Si $\|\nabla f(\mathbf{v}_1)\|$ es pequeño (por ejemplo, menor que 0.01), se podría terminar el algoritmo con el conocimiento de que $\mathbf{v}_1$ está cerca de un punto estacionario $\bar{\mathbf{v}}$ que tiene $\nabla f(\bar{\mathbf{v}}) = 0$. Si $\|\nabla f(\mathbf{v}_1)\|$ no es suficientemente pequeño, entonces se avanza desde $\mathbf{v}_1$ una distancia t_1 en la dirección de $\|\nabla f(\mathbf{v}_1)\|$. Como antes, se eligen t_1 al resolver

$$\begin{aligned} &\max f(\mathbf{v}_1 + t_1\nabla f(\mathbf{v}_1)) \\ &\text{s.a} \qquad t_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora se está en el punto $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + t_1\nabla f(\mathbf{v}_1)$. Si $\| \nabla f(\mathbf{v}_2) \|$ es suficientemente pequeño, entonces se termina el algoritmo y se elige a $\mathbf{v}_2$ como la aproximación a un punto estacionario de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. De lo contrario, se continúa de este modo hasta llegar a un punto $\mathbf{v}_n$ con un valor de $\| \nabla f(\mathbf{v}_n) \|$ suficientemente pequeño. Entonces se elige $\mathbf{v}_n$ como la aproximación a un punto estacionario de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Este algoritmo se llama **método del ascenso escalonado** debido a que para generar puntos, se avanza siempre en la dirección que maximiza la tasa a la que se incrementa f (por lo menos en forma local).

EJEMPLO 29 Ejemplo del ascenso escalonado

Use el método del ascenso escalonado para aproximar la solución de

$$\begin{aligned} &\max z = -(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2 = f(x_1, x_2) \\ &\text{s.a} \qquad (x_1, x_2) \in R^2 \end{aligned}$$

Solución Se elige de manera arbitraria comenzar en el punto $\mathbf{v}_0 = (1, 1)$. Debido a que $\nabla f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (-2(x_1 - 3), -2(x_2 - 2))$, se tiene $\nabla f(1, 1) = (4, 2)$. Así, se debe elegir t_0 para maximizar

$$f(t_0) = f[(1, 1) + t_0(4, 2)] = f(1 + 4t_0, 1 + 2t_0) = -(-2 + 4t_0)^2 - (-1 + 2t_0)^2$$

Estableciendo $f'(t_0) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} -8(-2 + 4t_0) - 4(-1 + 2t_0) &= 0 \\ 20 - 40t_0 &= 0 \\ t_0 &= 0.5 \end{aligned}$$

El nuevo punto es $\mathbf{v}_1 = (1, 1) + 0.5(4, 2) = (3, 2)$. Ahora $\nabla f(3, 2) = (0, 0)$, y se termina el algoritmo. Debido a que $f(x_1, x_2)$ es una función cóncava, se ha encontrado la solución óptima para el PNL.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Para cualquier vector $\mathbf{x}$, muestre que el vector $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ tiene una longitud unitaria.

2 Utilice el método del ascenso escalonado para aproximar la solución óptima para el problema siguiente: $\max z = -(x_1 - 2)^2 - x_1 - x_2^2$. Comience en el punto (2.5, 1.5).

3 Use el ascenso escalonado para aproximar la solución óptima para el problema siguiente: $\max z = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$. Comience en el punto (0.5, 0.5). Observe que en las iteraciones posteriores, los puntos sucesivos están muy cercanos entre sí. Para solucionar este problema se elaboraron variaciones del ascenso escalonado [véase Bazaraa y Shetty (1993, sección 8.6)].

Grupo B

4 ¿Cómo modificaría el método del ascenso escalonado si cada variable x_i estuviera restringida a quedar en el intervalo $[a_i, b_i]$?

Grupo C

5 Muestre que en cualquier punto $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $\nabla f(\bar{\mathbf{x}})$ es perpendicular a la curva $f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. (*Sugerencia:* dos vectores son perpendiculares a la curva si su producto escalar es igual a cero.)

11.8 Multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange se pueden usar para resolver PNL en los que las restricciones son restricciones de igualdad. Considere el PNL del siguiente tipo:

$$\begin{aligned} \max \text{ (o min) } z &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{s.a} \qquad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= b_m \end{aligned} \tag{12}$$

Para resolver (12), se asocia un multiplicador λ_i con la i-ésima restricción en (12) y se forma la **función de Lagrange (lagrangiano)**

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i[b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \tag{13}$$

Luego se intenta encontrar un punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ que maximiza (o minimiza) $L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. En muchas situaciones, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es solución de (12). Suponga que (12) es un problema de maximización. Si $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ maximiza a L, entonces en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Aquí $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}$ es la derivada parcial de L con respecto a λ_i. Esto demuestra que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ satisfará las restricciones en (12). Para mostrar que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es solución de (12), sea $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ cualquier punto que está en la región factible de 12. Puesto que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ maximiza a L, para números cualesquiera $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_m$ se tiene

$$L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m) \geq L(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_m) \tag{14}$$

Puesto que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ y $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ son factibles en (12), los términos en (13) relacionados con las λ son cero, y (14) se convierte en $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \geq f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Así, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ no es solución de (12). En resumen, si $(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ resuelve el problema de maximización irrestricto

$$\max L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \tag{15}$$

entonces $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es solución de (12).

De la sección 11.6, se sabe que para que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ resuelva (15), es necesario que en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \tag{16}$$

El teorema 8 da las condiciones que implican que cualquier punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ que satisface la ecuación (16) producirá una solución óptima $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ para (12).

TEOREMA 8

Suponga que (12) es un problema de maximización. Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava y cada $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función lineal, entonces cualquier punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ que satisface la ecuación (16) producirá una solución óptima $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ para (12).

TEOREMA 8'

Suponga que (12) es un problema de minimización. Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa y cada $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función lineal, entonces cualquier punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ que satisface la ecuación (16) producirá una solución óptima $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ para (12).

Aun cuando no se cumplan las hipótesis de estos teoremas, es posible que cualquier punto que satisfaga la ecuación (16) es solución de (12). Véanse en el apéndice de Henderson y Quandt (1980).

Interpretación geométrica de los multiplicadores de Lagrange

De la ecuación (16) se sabe que para que el punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ sea solución de (12) es necesario que en $\bar{x}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n$$

Esto equivale a decir que existen números $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ tal que en el punto $\bar{x}$

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \nabla g_i \tag{17}$$

Para ver por qué esto es así, observe que el j-ésimo componente del lado izquierdo de (17) es

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

y el j-ésimo componente del lado derecho es

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

Así, (17) implica que para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \text{ o bien, } \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$$

Otra forma de considerar (17) es como sigue: para que $\bar{x}$ resuelva (12), es necesario que en $\bar{x}$, ∇f sea una combinación lineal de los gradientes de restricción.

Para un problema de optimización con una restricción es fácil ver por qué (17) se debe cumplir en una solución para (12). Si (12) tiene una restricción, entonces (17) es equivalente a la declaración de que el gradiente de la función objetivo y la restricción son paralelas. La necesidad de esta condición se ilustra en la figura 41. Aquí $z = 3$ es el valor óptimo de z cuando se intenta maximizar $f(x_1, x_2)$, sujeta a $g(x_1, x_2) = 0$. En el punto óptimo en la figura 41, $\nabla f = \lambda \nabla g$, donde $\lambda < 0$.

Para ver por qué se debe cumplir (17) para una solución óptima de (12), considérese el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \max z &= f(x_1, x_2, x_3) \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ & g_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

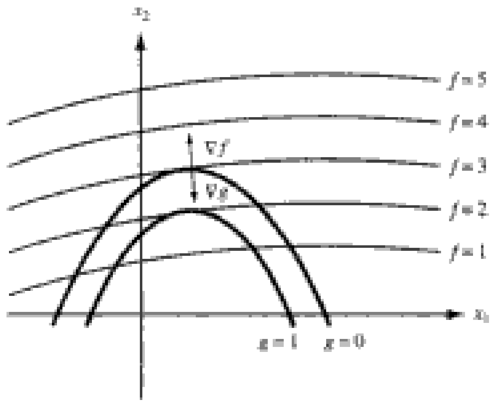


FIGURA 41
Ejemplo de (17) con una restricción

Suponga que $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ es una solución óptima de (18). Se afirma que para cualquier $c \neq 0$, el siguiente sistema de ecuaciones puede no tener solución (los gradientes se evalúan en $\bar{x}$).

$$\begin{bmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \\ \nabla f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \tag{19}$$

Para ver por qué (19) puede no tener solución, suponga que tiene solución para alguna $c > 0$. [Si (19) tiene una solución con $c < 0$, entonces se cumple un argumento similar.] Esta solución define una dirección **d** en tres dimensiones. Si se avanza en la dirección **d** una pequeña distancia ϵ lejos de $\bar{x}$ se puede encontrar un punto factible $\bar{x} + \epsilon\mathbf{d}$ para (18) que tiene un valor de z más grande que $\bar{x}$. Esto contradiría la optimalidad de $\bar{x}$. Para ver que $\bar{x} + \epsilon\mathbf{d}$ es factible en (18), observe que para $i = 1, 2$ (19) implica que $g_i(\bar{x} + \epsilon\mathbf{d})$ es aproximadamente igual a

$$g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \left(\frac{\epsilon d_j}{\|\mathbf{d}\|}\right) = g_i(\bar{x}) = 0$$

También $f(\bar{x} + \epsilon\mathbf{d})$ es aproximadamente igual a

$$f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\epsilon d_j}{\|\mathbf{d}\|}\right) = f(\bar{x}) + c\epsilon / \|\mathbf{d}\| > f(\bar{x})$$

Esto significa que si $\bar{x}$ es solución de (18), entonces (19) puede no tener solución para $c \neq 0$. De la sección 2.4, se sabe que (19) puede no tener solución si y sólo si el rango de la matriz en el lado izquierdo de (19) es menor que o igual a 2. Esto significa que ∇f, ∇g_1, ∇g_2 en $\bar{x}$ son vectores con dependencia lineal. Así, una combinación lineal no trivial de ∇f, ∇g_1 y ∇g_2 debe dar como resultado el vector cero. Si se supone que ∇g_1 y ∇g_2 son linealmente independientes (el caso usual), entonces de debe cumplir (17).

Multiplicadores de Lagrange y análisis de sensibilidad

Los multiplicadores de Lagrange λ_i se pueden usar en el análisis de sensibilidad. Si el lado derecho de la i-ésima restricción se incrementa por una pequeña cantidad Δb_i (ya sea en un problema de maximización o minimización), entonces el valor óptimo de z para (12) se incrementará más o menos $\sum_{i=1}^{i=m} (\Delta b_i)\lambda_i$. Este resultado se demuestra en el problema 9 de esta sección. En particular, si se incrementa en Δb_i, el lado derecho de sólo la restricción i, entonces el valor óptimo de z de (12) se incrementará en $(\Delta b_i)\lambda_i$.

En los dos ejemplos siguientes se ilustra el uso de los multiplicadores de Lagrange. En la mayoría de los casos, la forma más fácil de encontrar un punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ que satisfaga a (16) es resolver primero para $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ en términos de $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots,$

$\bar{\lambda}_m$. Luego, determine los valores de las $\bar{\lambda}_i$ al sustituir estas relaciones en las restricciones de (12). Por último, use los valores de las $\bar{\lambda}_i$ para determinar $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$.

EJEMPLO 30 Multiplicador de Lagrange en publicidad

Una compañía planea gastar \$10 000 dólares en publicidad. El costo de anunciarse en televisión es de \$3 000 por minuto y en radio cuesta \$1 000 por minuto. Si la empresa compra x minutos de publicidad en televisión y y minutos en radio, entonces su ingreso en miles de dólares está dado por $f(x, y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$. ¿Cómo la empresa puede maximizar su ingreso?

Solución Se quiere resolver el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \max z &= -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y \\ \text{s.a} \quad & 3x + y = 10 \end{aligned}$$

Entonces $L(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y + \lambda(10 - 3x - y)$. Se establece

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Esto produce

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x + y + 8 - 3\lambda = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + x + 3 - \lambda = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - 3x - y = 0 \tag{22}$$

Observe que $10 - 3x - y = 0$ se reduce a la restricción $3x + y = 10$. La ecuación (20) produce $y = 3\lambda - 8 + 4x$, y (21) $x = \lambda - 3 + 2y$. Así, $y = 3\lambda - 8 + 4(\lambda - 3 + 2y) = 7\lambda - 20 + 8y$, o bien

$$y = \tfrac{20}{7} - \lambda \tag{23}$$

$$x = \lambda - 3 + 2(\tfrac{20}{7} - \lambda) = \tfrac{19}{7} - \lambda \tag{24}$$

Sustituyendo las ecuaciones (23) y (24) en (22) se obtiene $10 - 3(\frac{19}{7} - \lambda) - (\frac{20}{7} - \lambda) = 0$, o bien, $4\lambda - 1 = 0$, o $\lambda = \frac{1}{4}$. Luego, con (23) y (24) se obtiene

$$\bar{y} = \tfrac{20}{7} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{73}{28}$$
$$\bar{x} = \tfrac{19}{7} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{69}{28}$$

El hesiano para $f(x, y)$ es

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Puesto que cada menor principal de primer orden es negativo y $H_2(x, y) = 7 > 0$, $f(x, y)$ es cóncava. La restricción es lineal, de modo que el teorema 8 muestra que el método del multiplicador de Lagrange produce la solución óptima para el PNL.

Así, la empresa debe comprar $\frac{69}{28}$ minutos de tiempo en televisión y $\frac{73}{28}$ minutos de tiempo en radio. Puesto que $\lambda = \frac{1}{4}$, gastar un Δ extra (miles) (para Δ pequeña) incrementaría los ingresos de la compañía por alrededor de \$0.25Δ (miles).

En general, si la empresa gastó a dólares en publicidad, entonces se podría demostrar que $\lambda = \frac{11-a}{4}$ (véase el problema 1 al final de esta sección). Se ve que mientras más dinero se gasta en publicidad, el incremento para el ingreso por cada dólar adicional en publicidad se vuelve más pequeño.

EJEMPLO 31 Multiplicador de Lagrange y solución óptima

Dados los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, demuestre que

$$n \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2$$

donde la igualdad se cumple sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solución Suponga que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$. Considere el PNL

$$\min z = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^{i=n} x_i = c \tag{25}$$

Para resolver (25), se forma

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda(c - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)$$

Entonces para resolver (25) se necesita encontrar $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ que satisface

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 2x_i - \lambda = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - x_1 - x_2 - \cdots - x_n = 0$$

De $\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$, se obtiene $2\bar{x}_1 = 2\bar{x}_2 = \cdots = 2\bar{x}_n = \bar{\lambda}$, o bien, $x_i = \dfrac{\bar{\lambda}}{2}$. De $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, se obtiene $c - \dfrac{n\bar{\lambda}}{2} = 0$, o bien, $\bar{\lambda} = \dfrac{2c}{n}$. La función objetivo es convexa (es la suma de n funciones convexas) y la restricción es lineal. Así, el teorema 8′ muestra que el método del multiplicador de Lagrange produce una solución óptima para (25); ésta tiene

$$\bar{x}_i = \frac{\left(\frac{2c}{n}\right)}{2} = \frac{c}{n} \quad \text{y} \quad z = n\left(\frac{c^2}{n^2}\right) = \frac{c^2}{n}$$

Así, si

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = c$$

entonces

$$n \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \geq n\left(\frac{c^2}{n}\right) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i \right)^2$$

donde la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Si se está tratando de maximizar una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que es un producto de varias funciones, entonces a menudo es más fácil maximizar $\ln [f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$. Puesto que ln es una función creciente, se sabe que cualquier x^* que maximiza $\ln [f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ sobre cualquier conjunto de valores posibles para $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ también maximizará $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sobre el mismo conjunto posible de valores para $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Véase en el problema 2 una aplicación de esta idea.

Solución de PNL con restricciones de igualdad en LINGO

Si las hipótesis del teorema 8 o teorema 8′ se cumplen para un problema, LINGO encontrará la solución óptima para el PNL. Se recibirán los mensajes OPTIMAL TO TOLERANCES y DUAL CONDITIONS: SATISFIED. "Optimal to Tolerances" significa que LINGO está seguro de que encontró un extremo local. "Dual Conditions: Satisfied" significa que LINGO está seguro de que el punto que encontró satisface (16). La figura 42 (archivo Adv.lng) contiene la impresión de LINGO para el ejemplo 28.

Adv.lng

Interpretación de la columna price de LINGO

Para un problema de maximización, la columna PRICE de LINGO produce el multiplicador de Lagrange para cada restricción. Así, si el lado derecho de la restricción i en un problema de maximización se incrementa por una pequeña cantidad Δ, entonces el valor óptimo de z se incrementa por aproximadamente Δ(PRICE para la restricción i). La columna PRICE en la figura 42 implica que en el ejemplo 30 gastar un Δ extra de miles de dólares en publicidad incrementará los ingresos en alrededor de 0.25\Delta$ (miles).

Para un problema de minimización, la columna PRICE de LINGO produce el negativo del multiplicador de Lagrange para cada restricción. Así, si el lado derecho de la restricción i en un problema de minimización se incrementa por una pequeña cantidad Δ, entonces el valor óptimo de z se incrementa en aproximadamente Δ(−PRECIO para la restricción i).

```
MODEL:
   1) MAX= - 2 * X ^ 2 - Y ^ 2 + X * Y + 8 * X + 3 * Y ;
   2) 3 * X + Y = 10 ;
   3) X > 0 ;
   4) Y > 0 ;
END

SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  SATISFIED.

            OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)         15.017855

   VARIABLE          VALUE         REDUCED COST
          X           2.464283          .000000
          Y           2.607140          .000003

        ROW   SLACK OR SURPLUS           PRICE
         2)          -.000010          .249996
         3)          2.464283          .000000
         4)          2.607140          .000000
```

FIGURA 42
Solución óptima para el ejemplo 28

PROBLEMAS

Grupo A

1 Para el ejemplo 30, demuestre que si a dólares están disponibles para publicidad, entonces un dolar extra gastado en publicidad incrementa los ingresos en alrededor de $\frac{11-a}{4}$.

2 Una persona paga \$2 por una hora de mano de obra y \$1 por una unidad de capital. Si están disponibles L horas de trabajo y K unidades de capital, entonces se pueden producir $L^{2/3}K^{1/3}$ máquinas. Si la persona tiene \$10 para comprar mano de obra y capital, ¿cuál es el número máximo de máquinas que se pueden producir?

3 En el problema 2, ¿cuál es el método de costo mínimo de producir 6 máquinas?

4 Una compañía cervecera dividió a Bloomington en dos territorios. Si se gastan x_1 dólares en promoción en el territorio 1, entonces $6x_1^{1/2}$ cajas de cerveza se pueden vender ahí; y si se gastan x_2 dólares en promoción en el territorio 2, entonces $4x_2^{1/2}$ cajas de cerveza se pueden vender allí. Cada caja de cerveza vendida en el territorio 1 se vende en \$10 y se incurre en \$5 de costos de envío y producción. Cada caja de cerveza vendida en el territorio 2 se vende en \$9 y se incurre en \$4 de costos de envío y producción. Para gastos de promoción se tienen disponibles un total de \$100. ¿Cómo puede la compañía cervecera maximizar sus ganancias? Si se pudiera gastar un dólar extra en promoción, ¿por cuánto más o menos se incrementarían las ganancias? ¿En cuanto se incrementaría el ingreso?

Grupo B

5 Debemos invertir todo nuestro dinero en dos acciones: x y y. La varianza del rendimiento anual en una porción de la acción x es var x, y la varianza del rendimiento anual en una parte de la acción y es var y. Suponga que la covarianza entre el rendimiento anual para una parte de x y una parte de y es cov(x, y). Si invertimos a% de nuestro dinero en la acción x y b% en la acción y, entonces la varianza de nuestro rendimiento está dada por $a^2\text{var } x + b^2\text{var } y + 2ab \text{ cov}(x, y)$. Se quiere minimizar la varianza del rendimiento en nuestro dinero invertido. ¿Qué porcentaje del dinero se debe invertir en cada acción?

6 Al igual que en el problema 5, suponga que se debe determinar el porcentaje de nuestro dinero que se invierte en las acciones x y y. Una elección de a y b se llama *cartera*. Una cartera es eficaz si no hay otra con mayor rendimiento promedio y menor varianza, o bien, un mayor rendimiento promedio y la misma varianza o menor varianza con el mismo rendimiento promedio. Sea $\bar{x}$ el rendimiento promedio en la acción x y $\bar{y}$ el rendimiento promedio en la acción y. Considere el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \max z = {} & c[a\bar{x} + b\bar{y}] \\ & - (1 - c)[a^2\text{var } x + b^2\text{var } y \\ & + 2ab\text{cov}(x, y)] \\ \text{s.a} \quad & a + b = 1 \\ & a, b \geq 0 \end{aligned}$$

Suponga que $1 > c > 0$. Muestre que cualquier solución para este PNL es una cartera eficaz.

7 Suponga que el producto i ($i = 1, 2$) cuesta \$$c_i$ por unidad. Si se compran x_i($i = 1, 2$) unidades de productos 1 y 2, entonces se recibe una utilidad de $x_1^a x_2^{1-a}$($0 < a < 1$).

a Si \$$d$ están disponibles para comprar los productos 1 y 2, ¿cuántos se deben comprar de cada tipo?

b Muestre que un incremento en el costo del producto i disminuye el número de unidades de producto i que se deben comprar.

c Muestre que un incremento en el costo del producto i no cambia el número de unidades del otro producto que se debe comprar.

8 Suponga que un envase cilíndrico debe contener un volumen de 26 pulgadas cúbicas. Si la compañía quiere minimizar el área superficial del envase, ¿cuál debe ser la relación de la altura al radio del envase? (*Sugerencia*: el volumen de un cilindro circular es $\pi r^2 h$, y el área superficial de un cilindro circular recto es $2\pi r^2 + 2\pi rh$, donde r = radio del cilindro y h = altura del cilindro.)

9 Muestre que si el lado derecho de la i-ésima restricción se incrementa en una pequeña cantidad Δb_i (en un problema de maximización o minimización), entonces el valor óptimo de z para (11) se incrementará en aproximadamente $\sum_{i=1}^{i=m} (\Delta b_i)\lambda_i$.

11.9 Condiciones de Kuhn-Tucker

En esta sección, se analizan las condiciones necesarias y suficientes para que $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ sea una solución óptima del siguiente PNL:

$$\begin{aligned} & \max \text{ (o min) } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{s.a.} \quad & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\ & g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\ & \quad \vdots \\ & g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m \end{aligned} \tag{26}$$

Para aplicar los resultados de esta sección, todas las restricciones del PNL deben ser restricciones $\leq$. Una restricción de la forma $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ se debe volver a escribir como $-h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq -b$. Por ejemplo, la restricción $2x_1 + x_2 \geq 2$ se debe volver a escribir como $-2x_1 - x_2 \leq -2$. Una restricción de la forma $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$ se debe remplazar por $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ y $-h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq -b$. Por ejemplo, $2x_1 + x_2 = 2$ se sustituiría por $2x_1 + x_2 \leq 2$ y $-2x_1 - x_2 \leq -2$.

Los teoremas 9 y 9′ dan las condiciones (las **condiciones de Kuhn-Tucker,** o bien, KT) que son necesarias para que un punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ sea solución de (26). La derivada parcial de una función f con respecto a una variable x_j evaluada en $\bar{x}$ se escribe

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}$$

Para que los teoremas de esta sección se cumplan, las funciones $g_1, g_2, ..., g_m$ deben satisfacer ciertas condiciones de regularidad (conocidas como **calificaciones de restricción**). Se analizará de manera breve una calificación de restricción al final de la sección. [Para una explicación en detalle de las calificaciones de restricción, se recomienda al lector leer el capítulo 5 de Bazaraa y Shetty (1993).]

Cuando las restricciones son lineales, siempre se satisfacen estas suposiciones de regularidad. En otras situaciones (en particular cuando algunas de las restricciones son de igualdad), no sería posible satisfacer las condiciones de regularidad. Se supone que los problemas que se consideran satisfacen estas condiciones de regularidad.

TEOREMA 9

Suponga que (26) es un problema de maximización. Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es una solución óptima de (26), entonces $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ debe satisfacer las m restricciones de (26), y debe haber multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ que satisfagan

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{27}$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{28}$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{29}$$

TEOREMA 9′

Suponga que (26) es un problema de minimización. Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es una solución óptima de (26), entonces $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ debe satisfacer las m restricciones de (26), y debe haber multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ que satisfagan

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Al igual que los multiplicadores de Lagrange de la sección anterior, el multiplicador $\bar{\lambda}_i$ asociado con las condiciones de K-T se podría considerar como el precio sombra para la i-ésima restricción en (26). Suponga que (26) es un problema de maximización. Si el lado derecho de la i-ésima restricción se incrementa de b_i a $b_i + \Delta$ (para Δ pequeña), el valor óptimo de la función objetivo se incrementará en alrededor de $\Delta\bar{\lambda}_i$. Suponga que (26) es un problema de minimización. Si el lado derecho de la i-ésima restricción se incrementa de b_i a $b_i + \Delta$ (para Δ pequeña), entonces el valor óptimo de la función objetivo se reduce una cantidad $\Delta\bar{\lambda}_i$.

Teniendo en mente esta interpretación de los multiplicadores como precios sombra, se podría interpretar (27)-(29) para un problema de maximización. Suponga que se considera cada restricción en (26) como una restricción de utilización de recursos. Es decir, en $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ se usa $g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ unidades del recurso i, y b_i unidades del recurso i están disponibles. Si se incrementa el valor de x_j en una cantidad Δ pequeña, entonces el valor de la función objetivo se incrementa en

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} \Delta$$

Al cambiar el valor de x_j a $\bar{x}_j + \Delta$ también se cambia la i-esima restricción a

$$g_i(\bar{x}) + \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\Delta \leq b_i \quad \text{o} \quad g_i(\bar{x}) \leq b_i - \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\Delta$$

Así, incrementar x_j por Δ tiene el efecto de aumentar el lado derecho de la i-ésima restricción por

$$-\frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\Delta$$

Estos cambios en el lado derecho de las restricciones incrementan el valor de z en alrededor de

$$-\Delta \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}$$

En total, el cambio aproximado en z debido a incrementar x_j en Δ es

$$\Delta\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right]$$

Si el término entre corchetes es más grande que cero, se puede incrementar f eligiendo $\Delta > 0$. Por otro lado, si el término es más pequeño que cero, se puede aumentar f eligiendo $\Delta < 0$. Así, para que $\bar{x}$ sea óptima, se debe cumplir (27).

La condición (28) es una generalización de las condiciones de holgura complementarias para los PL analizados en la sección 6.10. La condición (28) implica que

$$\text{Si } \bar{\lambda}_i > 0, \quad \text{entonces} \quad g_i(\bar{x}) = b_i \quad (i\text{-ésima restricción activa}) \tag{28'}$$

$$\text{Si } g_i(\bar{x}) < b_i, \quad \text{entonces} \quad \bar{\lambda}_i = 0 \tag{28''}$$

Suponga que la restricción $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i$ es una restricción de utilización de recursos que representa el hecho de que a lo sumo se pueden usar b_i unidades del i-ésimo recurso disponible actualmente. Luego (28′) establece que si una unidad adicional del recurso asociado con la i-ésima restricción es tener cuaquier valor, entonces la solución óptima actual debe usar todas las b_i unidades del i-ésimo recurso actual disponible. Por otro lado, (28″) establece que si se utiliza alguno de los recursos disponibles, entonces las cantidades adicionales del i-ésimo recurso no tienen valor.

Si para $\Delta > 0$, se incrementa el lado derecho de la i-ésima restricción b_i a $b_i + \Delta$, entonces el valor óptimo de la función objetivo deberá incrementarse o permanecer estable, debido a la integración de puntos a la región factible del problema. Incrementar el lado derecho de la i-ésima restricción en Δ incrementa el valor óptimo de la función objetivo por $\Delta\bar{\lambda}_i$, de manera tal que $\bar{\lambda}_i \geq 0$. Esto es por lo cual (29) está considerada en las condiciones K−T.

En muchas situaciones, las condiciones de K−T se aplican a los PNL en los que las variables deben ser no negativas. Por ejemplo, es posible que se desee usar las condiciones de K−T para hallar la solución óptima de

$$\begin{aligned}
&\max\ (\text{o min})\ z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\text{s.a} \quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1 \\
&\qquad\ \ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_2 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\ \ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_m \\
&\qquad\qquad\qquad -x_1 \leq 0 \\
&\qquad\qquad\qquad -x_2 \leq 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad -x_n \leq 0
\end{aligned} \tag{30}$$

Si se asocian los multiplicadores $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ con las restricciones de no negatividad en (30), los teoremas 9 y 9′ se reducen a los teoremas 10 y 10′.

TEOREMA 10

Suponga que (30) es un problema de maximización. Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es una solución óptima de (30), entonces $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ debe satisfacer las restricciones de (30) y debe haber multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_n$ que satisfagan

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} + \bar{\mu}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{32}$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right]\bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{33}$$

$$\bar{\lambda}_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{34}$$

$$\bar{\mu}_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{35}$$

Debido a que $\bar{\mu}_j \ge 0$, (31) es equivalente a

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \le 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{31′}$$

Entonces (31)−(34), las condiciones de K−T para un problema de maximización con restricciones de no negatividad, se pueden rescribir como

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \le 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{31′}$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{32′}$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right]\bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{33′}$$

$$\bar{\lambda}_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{34′}$$

TEOREMA 10′

Suponga que (30) es un problema de minimización. Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es una solución óptima de (30), entonces $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ debe satisfacer las restricciones de (30) y debe haber multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_n$ que satisfagan

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} - \bar{\mu}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{36}$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{37}$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right]\bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{38}$$

$$\bar{\lambda}_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{39}$$

$$\bar{\mu}_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

Debido a que $\bar{\mu}_j \geq 0$, (36) se puede escribir como

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \geq 0 \qquad \textbf{(36')}$$

Entonces (36)–(39), las condiciones de K–T para un problema de minimización con restricciones de no negatividad, se pueden rescribir como

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j} \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \textbf{(36')}$$

$$\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \textbf{(37')}$$

$$\left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_j}\right]\bar{x}_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \textbf{(38')}$$

$$\bar{\lambda}_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \qquad \textbf{(39')}$$

Los teoremas 9, 9′, 10 y 10′ dan las condiciones que son *necesarias* para que un punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ sea una solución óptima de (26) o (30). Los dos teoremas siguientes dan las condiciones que son *suficientes* para que $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ sea una solución óptima de (26) o (30) (véase Bazaraa y Shetty (1993)).

TEOREMA 11

Suponga que (26) es un problema de maximización. Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava y $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son funciones convexas, entonces cualquier punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ que satisface las hipótesis del teorema 9 es una solución óptima de (26). También, si (30) es un problema de maximización, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava y $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son funciones convexas, entonces cualquier punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ que satisface las hipótesis del teorema 10 es una solución óptima de (30).

TEOREMA 11′

Suponga que (26) es un problema de minimización. Si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa y $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son funciones convexas, entonces cualquier punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ que satisface las hipótesis del teorema 9′ es una solución óptima de (26). También, si (30) es un problema de minimización, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa y $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son funciones convexas, entonces cualquier punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ que satisface las hipótesis del teorema 10′ es una solución óptima de (30).

OBSERVACIÓN La razón de que las hipótesis de los teoremas 11 y 11′ requieren que cada $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sea convexa es que esto asegura que la región factible para (26) o (30) es un conjunto convexo (véase el problema 21 de la sección 11.3)

Interpretación geométrica de las condiciones de Kuhn-Tucker

Es fácil demostrar que las condiciones (27)−(29) del teorema 9 se cumplen en un punto $\bar{x}$ si y sólo si ∇f es una combinación lineal no negativa de $\nabla g_1, \nabla g_2, \ldots, \nabla g_m$, y la ponderación que multiplica a ∇g_i en esta combinación lineal es igual a 0 si la i-ésima restricción en (26) es inactiva.

En resumen, (27)-(29) son equivalentes a la existencia de $\lambda_i \geq 0$ tal que

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) \tag{41}$$

y cada restricción que es inactiva en $\bar{x}$ tiene $\lambda_i = 0$.

Las figuras 43 y 44 ilustran la ecuación (41). En la figura 43, se intenta resolver (la región factible está sombreada)

$$\begin{aligned} \min z &= f(x_1, x_2) \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) \leq 0 \end{aligned}$$

En $\bar{x}$, (41) se cumple con ambas restricciones activas y se tiene que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. En la figura 44, se está tratando resolver de nuevo (otra vez se sombrea la región factible)

$$\begin{aligned} \min z &= f(x_1, x_2) \\ \text{s.a} \quad & g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ & g_2(x_1, x_2) \leq 0 \end{aligned}$$

Aquí, la segunda restricción es inactiva, de modo que (41) se debe cumplir con $\lambda_2 = 0$.

Las condiciones de K−T se ilustran en los dos ejemplos siguientes.

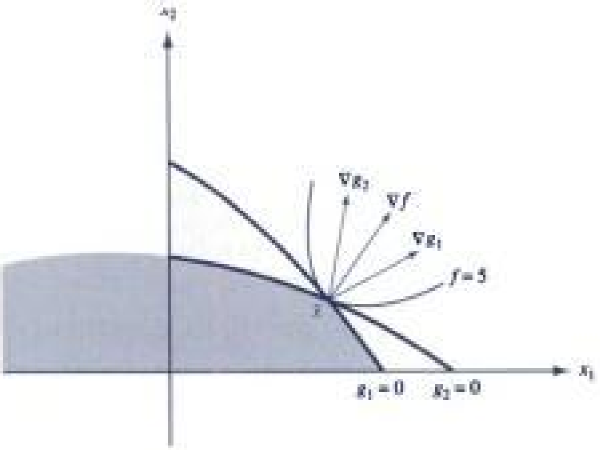


FIGURA 43
Ejemplo de las condicciones de Kuhn-Tucker: ambas restricciones son activas

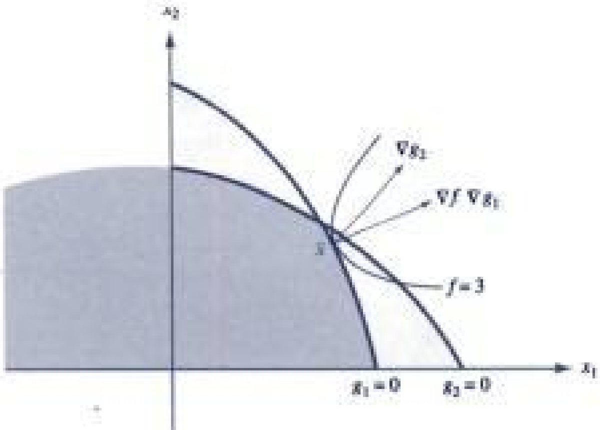


FIGURA 44
Ejemplo de las condiciones de Kuhn-Tucker: una restricción es activa y la otra es inactiva

EJEMPLO 32 Interpretación de las condiciones de Kuhn-Tucker

Describa la solución óptima para

$$\max f(x)$$
$$\text{s.a} \qquad a \le x \le b \tag{42}$$

Solución De la sección 11.4, se sabe {suponiendo que $f'(x)$ existe para toda x en el intervalo $[a, b]$} que la solución óptima para este problema debe ocurrir en a [con $f'(a) \le 0$], en b [con $f'(b) \ge 0$], en un punto que tiene $f'(x) = 0$. ¿Cómo las condiciones de K–T producen estos tres casos?

Se escribe (42) como

$$\max f(x)$$
$$\text{s.a} \qquad -x \le -a$$
$$x \le b$$

Entonces (27)–(29) producen

$$f'(x) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{43}$$
$$\lambda_1(-a + x) = 0 \tag{44}$$
$$\lambda_2(b - x) = 0 \tag{45}$$
$$\lambda_1 \ge 0 \tag{46}$$
$$\lambda_2 \ge 0 \tag{47}$$

Al usar las condiciones de K−T para resolver los PNL, es útil notar que cada multiplicador λ_i debe satisfacer $\lambda_i = 0$ o $\lambda_i > 0$. Así, al intentar hallar los valores de x, λ_1 y λ_2 que satisfacen a las ecuaciones (43)−(47), se deben considerar los cuatro casos siguientes:

Caso 1 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De (43), se obtiene el caso $f'(\bar{x}) = 0$.

Caso 2 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$. Debido a que $\lambda_2 > 0$, (45) da como resultado $\bar{x} = b$. Entonces (43) produce $f'(b) = \lambda_2$, y debido a que $\lambda_2 > 0$, se obtiene el caso donde $f'(b) > 0$.

Caso 3 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. Debido a que $\lambda_1 > 0$, de (44) se obtiene $\bar{x} = a$. Entonces (43) produce el caso donde $f'(a) = -\lambda_1 < 0$.

Caso 4 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. De (44) y (45), se obtiene $\bar{x} = a$ y $\bar{x} = b$. Esta contradicción indica que no puede ocurrir el caso 4.

Las restricciones son lineales, así que el teorema 11 muestra que si $f(x)$ es cóncava, entonces de (43)−(47) se obtiene la solución óptima de (42).

EJEMPLO 33 Proceso de producción

Un monopolista puede comprar hasta 17.25 onzas de un compuesto químico a \$10/onza. A un costo de \$3/onza, el compuesto químico se procesa en una onza de producto 1; o bien, a un costo de \$5/onza, el compuesto se procesa en una onza de producto 2. Si se producen x_1 onzas de producto 1, éste se vende a un precio de \$30 − x_1 por onza. Si se producen x_2 onzas de producto 2, éste se vende a un precio de \$50 − $2x_2$ por onza. Determine cómo puede maximizar las ganancias el monopolista.

Solución Sean

x_1 = onzas producidas del producto 1

x_2 = onzas producidas del producto 2

x_3 = onzas procesadas del compuesto químico

Se desea resolver el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1(30 - x_1) + x_2(50 - 2x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le x_3 \quad \text{o} \quad x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \\ & x_3 \le 17.25 \end{aligned} \tag{48}$$

Por supuesto, se deben agregar las restricciones $x_1, x_2, x_3 \ge 0$. Sin embargo, debido a que la solución óptima para (48) satisface las restricciones de no negatividad, también será óptima para un PNL que consiste en (48) con las restricciones de no negatividad.

Observe que la función objetivo en (48) es la suma de las funciones cóncavas (y, por lo tanto, es cóncava) y las restricciones son convexas (debido a que son lineales). Así, el teorema 11 muestra que las condiciones de K−T son necesarias y suficientes para que (x_1, x_2, x_3) sea una solución óptima de (48). Del teorema 9, las condiciones de K–T se convierten en

$$30 - 2x_1 - 3 - \lambda_1 = 0 \tag{49}$$

$$50 - 4x_2 - 5 - \lambda_1 = 0 \tag{50}$$

$$-10 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{51}$$

$$\lambda_1(-x_1 - x_2 + x_3) = 0 \tag{52}$$

$$\lambda_2(17.25 - x_3) = 0 \tag{53}$$

$$\lambda_1 \ge 0 \tag{54}$$

$$\lambda_2 \ge 0 \tag{55}$$

Como en el ejemplo anterior, hay cuatro casos por considerar:

Caso 1 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Este caso no ocurre debido a que se violaría la ecuación (51).

Caso 2 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$. Si $\lambda_1 = 0$, entonces (51) implica que $\lambda_2 = -10$. Esto violaría la ecuación (55).

Caso 3 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$. De (51), se obtiene $\lambda_1 = 10$. Ahora (49) produce $x_1 = 8.5$, y (50) da $x_2 = 8.75$. De (52), se obtiene $x_1 + x_2 = x_3$, así que $x_3 = 17.25$. Por consiguiente, $\bar{x}_1 = 8.5, \bar{x}_2 = 8.75, \bar{x}_3 = 17.25, \bar{\lambda}_1 = 10, \bar{\lambda}_2 = 0$ satisface la condiciones de K–T.

Caso 4 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. El caso 3 produce una solución óptima, así que no es necesario considerar el caso 4.

Entonces, la solución óptima para (48) es comprar 17.25 onzas del compuesto químico y producir 8.5 onzas del producto 1 y 8.75 onzas del producto 2. Para Δ pequeña, $\lambda_1 = 10$ indica que si se obtuviera un Δ extra de onzas del compuesto químico sin costo alguno, entonces las ganancias se incrementarían en 10Δ. (¿Puede el lector ver por qué?) De (51), se encuentra que $\bar{\lambda}_2 = 0$. Esto significa que el derecho a comprar Δ onzas extra del compuesto no incrementaría las ganancias. (¿Puede el lector ver por qué?)

Calificaciones de restricción

A menos que la calificación de restricción o condición de regularidad se satisfaga en un punto óptimo $\bar{x}$, es posible que las condiciones de Kuhn−Tucker no se cumplan en $\bar{x}$. Hay muchas calificaciones de restricción, pero se elige estudiar la calificación de restricción de independencia lineal: sea $\bar{x}$ una solución óptima para el PNL (26) o (30). Si las g_i son continuas, y los gradientes de las restricciones activas (entre otras cualquier restricción de no negatividad activa en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) en $\bar{x}$ forman un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces se deben cumplir las condiciones de Kuhn−Tucker en $\bar{x}$.

El ejemplo siguiente muestra que si no se cumple la calificación de restricción de independencia lineal, entonces pueden no cumplirse las condiciones de Kuhn−Tucker en la solución óptima para un PNL.

EJEMPLO 34 Necesidad de la calificación de restricción

Muestre que las condiciones de Kuhn−Tucker no se cumplen en la solución óptima para el PNL siguiente:

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 \\ &\text{s.a} \quad x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0 \\ &\qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Solución Si $x_1 > 1$, entonces la primera restricción en (56) implica que $x_2 < 0$. Así, el valor óptimo de z para (56) no puede ser mayor que 1. Debido a que $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ es factible y produce $z = 1$, (1, 0) debe ser la solución óptima para el PNL (56).

Del teorema 10, las siguientes ecuaciones son dos de las condiciones de Kuhn–Tucker para (56).

$$1 + 3\lambda_1(1 - x_1)^2 = -\mu_1 \tag{57}$$

$$\mu_1 \ge 0 \tag{58}$$

En la solución óptima (1, 0), (57) implica que $\mu_1 = -1$, lo que contradice a la ecuación (58). Así, las condiciones de Kuhn−Tucker no se satisfacen en (1, 0). Ahora se muestra que en el punto (1, 0) se viola la calificación de restricción de independencia lineal. En (1, 0) las restricciones $x_2 - (1 - x_1)^3 \le 0$ y $x_2 \ge 0$ son activas. Entonces

$$\nabla(x_2 - (1 - x_1)^3) = [0, 1]$$
$$\nabla(-x_2) = [0, -1]$$

Debido a que $[0, 1] + [0, -1] = [0, 0]$, estos gradientes son linealmente dependientes. Por lo tanto, en (1, 0) los gradientes de las restricciones activas son linealmente dependientes, y no se satisface la calificación de restricción.

Solución de PNL con restricciones de desigualdad (y posiblemente igualdad) en LINGO

LINGO no requiere que las restricciones se escriban en la forma de la ecuación (26) o (30). Las restricciones se pueden introducir como menor o igual que, igual, o bien, mayor o igual que. Si el problema satisface las hipótesis del teorema 11 o el teorema 11′, entonces se puede saber que LINGO encontrará la solución óptima al problema. Se sabrá que LINGO encontró un punto que satisface las condiciones de Kuhn-Tucker si aparece el mensaje DUAL CONDITIONS: SATISFIED. Por ejemplo, se puede estar seguro de que LINGO encontraría la solución óptima para el ejemplo 33.

Para las impresiones de LINGO dadas en la sección 11.2 para los ejemplos 9−11, no se puede estar seguro de que LINGO encontró la solución óptima de alguno de estos problemas. El ejemplo 9 (figura 6) no satisface las hipótesis del teorema 11 debido a que el lado izquierdo de los renglones 16 a 18 no son funciones cóncavas y el lado izquierdo de los renglones 19 a 21 no son funciones convexas. Para ver si LINGO en realidad encontró la solución óptima del PNL, se utiliza el comando INIT para introducir una amplia variedad de soluciones de inicio (centrándose en los valores de R, U, y P). Es posible que no se encuentre ninguna solución mejor que la de la figura 6, así que se tiene bastante confianza de que LINGO encontró la solución óptima del ejemplo 9. De manera similar, los ejemplos 10 y 11 no satisfacen las hipótesis del teorema 11′, así que no se puede estar seguro de que LINGO encontró una solución óptima para estos problemas (¡aunque LINGO encontró un punto que satisface las condiciones de Kuhn−Tucker!). Sin embargo, de nuevo el uso extenso del comando INIT no encontró ninguna solución mejor, así que se tiene bastante confianza de que LINGO encontró la solución óptima para los ejemplos 10 y 11.

Interpretación de la columna price en el resultado de LINGO

Si el lado derecho de la restricción i (no importa el tipo de restricción) en un PNL se incrementa por una pequeña cantidad Δ, entonces el valor óptimo de z se *mejora* en aproximadamente Δ(PRECIO para la restricción i). Así, en un problema de maximización incrementar el lado derecho de la i-ésima restricción en una pequeña cantidad Δb_i dará como resultado que el valor óptimo de z se incremente en aproximadamente Δb_i(precio de la restricción i); en un problema de minimización incrementar el lado derecho de la i-ésima restricción por una pequeña cantidad Δb_i dará como resultado que el valor óptimo de z disminuya en más o menos Δb_i(precio de la restricción i).

PROBLEMAS

Grupo A

1[†] Una compañía que produce electricidad enfrenta demandas de energía durante las horas pico y los periodos de carga reducida. Si durante las horas pico se carga un precio de p_1 dólares por kilowatt-hora, los clientes demandarán $60 - 0.5\,p_1$ kwh de potencia. Si se carga un precio de p_2 dólares durante las horas de carga reducida, entonces los clientes demanda $40 - p_2$ kwh. La compañía eléctrica debe tener la capacidad suficiente para satisfacer la demanda durante las horas de carga máxima y reducida. Cuesta \$10 por día mantener cada kilowatt-hora de capacidad. Determine cómo la compañía eléctrica puede maximizar los ingresos diarios menos los costos de operación.

2 Utilice las condiciones de K−T para hallar la solución óptima del siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1^2 + x_2^2 \le 1 \end{aligned}$$

3 Considere el problema de Giapetto de la sección 3.1:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \le 100 \\ & x_1 + x_2 \le 80 \\ & x_1 \le 40 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones de K−T para este problema y explique su relación con el dual del PN de Giapetto y las condiciones de holgura complementarias para el PL.

4 Si la región factible para (26) está acotada y contiene sus puntos límite, entonces se puede demostrar que (26) tiene una solución óptima. Suponga que las condiciones de regularidad son válidas pero no las hipótesis de los teoremas 11 y 11′. Si se puede demostrar que sólo un punto satisface las condiciones de K−T, ¿entonces por qué ese punto debe ser la solución óptima para el PNL?

5 Un total de 160 horas de mano de obra están disponibles cada semana a \$15/hora. Se puede comprar más mano de obra a \$25/hora. El capital se puede comprar en cantidades ilimitadas a un costo de \$5/unidad de capital. Si K unidades de capital y L unidades de mano de obra están disponibles durante una semana, entonces se producen $L^{1/2}K^{1/3}$ máquinas. Cada máquina se vende en \$270. ¿Cómo puede la empresa maximizar sus ganancias semanales?

[†]Basado en Littlechild, "Peak Loads" (1970).

6 Use las condiciones de K−T para hallar la solución óptima para el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \min z &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ \text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

7 Para el ejemplo 31, explique por qué $\bar{\lambda}_1 = 10$ y $\bar{\lambda}_2 = 0$. (*Sugerencia*: considere el principio económico de que para cada producto el ingreso marginal debe ser igual al costo marginal.)

8 Utilice las condiciones de K−T para encontrar la solución óptima para el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \max z &= -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 \le 3 \\ & x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

9 Utilice las condiciones de K−T para hallar la solución óptima del siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \min z &= e^{-x_1} + e^{-2x_2} \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

10 Utilice las condiciones de K−T para hallar la solución óptima del siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \min z &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \le 7 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Para los problemas 11−15, utilice LINGO para resolver el problema. Luego, explique si tiene la seguridad de que el programa encontró la solución óptima.

11 Resuelva el problema 7 de la sección 11.2

12 Resuelva el problema 8 de la sección 11.2

13 Resuelva el problema 11 de la sección 11.2

14 Resuelva el problema 15 de la sección 11.2

15 Resuelva el problema 16 de la sección 11.2

Group B

16 Se debe determinar el porcentaje de dinero por invertir en dos acciones x y y. Sea a = porcentaje de dinero invertido en x y $b = 1 - a$ = porcentaje de dinero invertido en y. Una elección de a y b se llama *cartera*. Una cartera es eficaz si no hay otra cuyo rendimiento promedio sea mayor y tenga menor varianza, o bien, un rendimiento promedio mayor y la misma varianza o una menor varianza con el mismo rendimiento promedio. Sea $\bar{x}$ el rendimiento promedio para la acción x y $\bar{y}$ el correspondiente a la acción y. La varianza del rendimiento anual en una parte de la acción x es var x, y la varianza del rendimiento anual en una parte de la acción y es var y. Suponga que la covarianza entre el rendimiento anual para una parte de la acción x y una parte de la y es cov(x, y). Si se invierte a% del dinero en la acción x y b% en la acción y, la varianza del rendimiento está dada por

$$a^2 \text{ var } x + b^2 \text{ var } y + 2ab \text{ cov}(x, y)$$

Considere el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} &\max z = a\bar{x} + b\bar{y} \\ &\text{s.a} \quad a^2\text{var } x + b^2\text{var } y + 2ab \text{ cov}(x, y) \leq v^*, \\ &\qquad\quad a + b = 1 \end{aligned}$$

donde v^* es un número no negativo.

a Demuestre que cualquier solución para este PNL es una cartera eficiente.

b Muestre que cuando v^* varía en los números no negativos, se obtienen carteras eficientes.

11.10 Programación cuadrática

Considere un PNL cuya función objetivo es la suma de los términos de la forma $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$. El grado del término $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ es $k_1 + k_2 + \cdots k_n$. Así, el grado del término $x_1^2 x_2$ es 3, y el grado del término $x_1 x_2$ es 2. Un PNL cuyas restricciones son lineales y cuya función objetivo es la suma de los términos de la forma $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ (donde cada término tiene un grado de 2, 1 o 0) es un **problema de programación cuadrática** (PPC).

Se pueden usar varios algoritmos para resolver PPC [véase Bazaraa y Shetty (1993, capítulo 11)]. Aqui se estudia la aplicación de la programación cuadrática para la selección de la cartera y se muestra cómo se usa LINGO para resolver problemas de programación cuadrática. También se describe el método de Wolfe para resolver problemas PC.

Programación cuadrática y selección de cartera

Considere un inversionista que tiene una cantidad fija de dinero que puede ser invertida en varias inversiones. Se supone a menudo que un inversionista quiere maximizar el rendimiento esperado de sus inversiones (cartera) en tanto que al mismo tiempo asegura que el riesgo de su cartera es pequeño (el cual se mide por medio de la varianza del rendimiento obtenido por la cartera). Infortunadamente, el rendimiento en las acciones que producen un rendimiento esperado grande por lo general es muy variable. Así, el problema de seleccionar una cartera a menudo se aborda eligiendo un rendimiento mínimo aceptable esperado y encontrando la cartera con la varianza mínima que obtiene un rendimiento esperado aceptable. Por ejemplo, un inversionista podría buscar la cartera con la varianza mínima que produce un rendimiento esperado de 12%. Al variar el rendimiento mínimo aceptable, el inversionista podría obtener y comparar varias carteras deseables.

Estas ideas reducen el problema de la selección de cartera a uno de programación cuadrática. Para ver esto, se necesita observar que dada las variables aleatorias $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \cdots, \mathbf{X}_n$ y las constantes a, b, y k,

$$E(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n) = E(\mathbf{X}_1) + E(\mathbf{X}_2) + \cdots + E(\mathbf{X}_n) \quad (59)$$

$$\text{var } (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n) = \text{var } \mathbf{X}_1 + \text{var } \mathbf{X}_2 + \cdots + \text{var } \mathbf{X}_n + \sum_{i \neq j} \text{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \quad (60)$$

$$E(k\mathbf{X}_i) = kE(\mathbf{X}_i) \quad (61)$$

$$\text{var } (k\mathbf{X}_i) = k^2\text{var } \mathbf{X}_i \quad (62)$$

$$\text{cov}(a\mathbf{X}_i, b\mathbf{X}_j) = ab \text{ cov } (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \quad (63)$$

Aquí, cov(**X**,**Y**) es la covarianza entre las variables aleatorias **X** y **Y**. En el ejemplo siguiente, se muestra cómo el problema de selección de cartera se reduce a un problema de programación cuadrática.

EJEMPLO 35 Optimización de cartera

Tengo \$1 000 para invertir en tres acciones. Sea $\mathbf{S}_i$ la variable aleatoria que representa el rendimiento anual por \$1 invertido en la acción i. Así, si $\mathbf{S}_i = 0.12$, el valor de \$1 invertido en la acción i al comienzo de un año era 1.12 al final del mismo. Se tiene la siguiente información: $E(\mathbf{S}_1) = 0.14$, $E(\mathbf{S}_2) = 0.11$, $E(\mathbf{S}_3) = 0.10$, var $\mathbf{S}_1 = 0.20$, var $\mathbf{S}_2 = 0.08$, var $\mathbf{S}_3 = 0.18$, cov $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = 0.05$, cov $(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3) = 0.02$, cov $(\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) = 0.03$. Formule un PPC que se pueda utilizar para encontrar la cartera que obtiene un rendimiento anual esperado de por lo menos 12% y reduce la varianza del rendimiento anual en dólares de la cartera.

Solución Sea x_j = número de dólares invertidos en la acción $j(j = 1, 2, 3)$. Entonces el rendimiento anual de la cartera es $(x_1\mathbf{S}_1 + x_2\mathbf{S}_2 + x_3\mathbf{S}_3)/1000$ y el rendimiento anual esperado de la cartera es [por (59) y (61)]:

$$\frac{x_1E(\mathbf{S}_1) + x_2E(\mathbf{S}_2) + x_3E(\mathbf{S}_3)}{1\,000}$$

Para asegurar que la cartera tiene un rendimiento esperado de por lo menos 12%, se debe incluir en la formulación la restricción siguiente:

$$\frac{0.14x_1 + 0.11x_2 + 0.10x_3}{1\,000} \geq 0.12 = 0.14x_1 + 0.11x_2 + 0.10x_3 \geq 0.12\,(1\,000) = 120$$

Por supuesto, se debe incluir también la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 1\,000$. Se supone que la cantidad invertida en una acción debe ser no negativa (es decir, no se permiten ventas en descubierto de la acción) y agrega las restricciones $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. El objetivo es simplemente minimizar la varianza del valor final de la cartera. De (60), la varianza del valor final está dada por

$$\begin{aligned}
\text{var}\,(x_1\mathbf{S}_1 + x_2\mathbf{S}_2 + x_3\mathbf{S}_3) &= \text{var}\,(x_1\mathbf{S}_1) + \text{var}\,(x_2\mathbf{S}_2) + \text{var}\,(x_3\mathbf{S}_3)\\
&\quad + 2\,\text{cov}(x_1\mathbf{S}_1, x_2\mathbf{S}_2) + 2\,\text{cov}(x_1\mathbf{S}_1, x_3\mathbf{S}_3)\\
&\quad + 2\,\text{cov}(x_2\mathbf{S}_2, x_3\mathbf{S}_3)\\
&= x_1^2\,\text{var}\,\mathbf{S}_1 + x_2^2\,\text{var}\,\mathbf{S}_2 + x_3^2\,\text{var}\,\mathbf{S}_3 + 2x_1x_2\text{cov}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2)\\
&\quad + 2x_1x_3\text{cov}(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3) + 2x_2x_3\,\text{cov}(\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)\\
&\quad \text{[de las ecuaciónes (62) y (63)]}\\
&= 0.20x_1^2 + 0.08x_2^2 + 0.18x_3^2 + 0.10x_1x_2\\
&\quad + 0.04x_1x_3 + 0.06x_2x_3
\end{aligned}$$

Observe que cada término en la última expresión para la varianza de la cartera es de grado 2. Así, se tiene un PNL con restricciones lineales y una función objetivo que consiste en términos de segundo grado. Para obtener la cartera de varianza mínima que produce un rendimiento esperado de por lo menos 12%, se debe resolver el siguiente PPC:

$$\begin{aligned}
\min z &= 0.20x_1^2 + 0.08x_2^2 + 0.18x_3^2 + 0.10x_1x_2 + 0.04x_1x_3 + 0.06x_2x_3\\
\text{s.a} \quad & 0.14x_1 + 0.11x_2 + 0.10x_3 \geq 120\\
& x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 1\,000\\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{64}$$

OBSERVACIONES

1 La idea de usar la programación cuadrática para determinar las carteras óptimas viene de Markowitz (1959) y es parte del trabajo con el que ganó el premio Nobel de economía.

2 En el problema 9, se analiza cómo usar datos reales para estimar la media y la varianza del rendimiento de una inversión, así como la covarianza de los rendimientos en pares de inversiones.

3 En el problema 10, se explora el modelo de un solo factor de Sharpe (1963), que simplifica en gran medida la optimización de la cartera.

4 En realidad, se incurre en costos de transacción cuando se compran y se venden inversiones. En el problema 11, se explora cómo los costos de transacción cambian los modelos de optimización de la cartera.

Solución de PNL con LINGO

Port.lng

Cuando LINGO resuelve problemas de programación no lineal, se supone que las variables son no negativas. El siguiente modelo de LINGO (archivo Port.lng) se puede usar para resolver el problema de selección de cartera, ejemplo 33.

```
MODEL:
   1]SETS:
   2]STOCKS/1..3/:MEAN,AMT;
   3]PAIRS(STOCKS,STOCKS):COV;
   4]ENDSETS
   5]MIN=@SUM(PAIRS(I,J):AMT(I)*AMT(J)*COV(I,J));
   6]@SUM(STOCKS:AMT)=1000;
   7]@SUM(STOCKS:AMT*MEAN)>RQRT;
   8]DATA:
   9]MEAN= .14,.11,.10;
  10]RQRT=120;
  11]COV= .2,.05,.02,
  12].05,.08,.03,
  13].02,.03,.18;
  14]ENDDATA
END
```

La línea 2 identifica el conjunto de inversiones disponibles y asocia con cada una el rendimiento promedio por dólar invertido (MEAN) y la cantidad colocada en cada inversión (AMT). La línea 3 asocia con las acciones I y J la cantidad COV(I, J) = COV($\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$). Observe que COV(I, I) = VAR $\mathbf{X}_i$. La línea 5 minimiza la varianza de la cartera. Se calcula la varianza de la cartera (en dólares^2) sumando los pares (I, J) de las inversiones AMT(I) * AMT(J) * COV(I, J). Las líneas 6 y 7 aseguran que la cantidad total invertida será igual a \$1 000 y que el rendimiento esperado de la cartera será mayor a la tasa de rendimiento requerida (RQRT), respectivamente. (Observe que RQRT se introduce en la línea 10 de la sección DATA.)

El rendimiento anual esperado en 1 dólar colocado en cada inversión se define en la línea 9. Las líneas 11−13 construyen la matriz de covarianza para completar el modelo. Después de seleccionar la solución, se obtiene la solución óptima: valor de z = 75 238 dólares^2, AMT(1) = \$380.95, AMT(2) = \$476.19 y AMT(3) = \$142.86. Véase la figura 45.

```
MODEL:
   1)  MIN= .20 * X1 ^ 2 + .08 * X2 ^ 2 + .18 * X3 ^ 2 + .10 * X1 * X2 +
       .04 * X1 * X3 + .06 * X2 * X3 ;
   2)  .14 * X1 + .11 * X2 + .10 * X3 > 120 ;
   3)  X1 + X2 + X3 = 1000 ;
   4)  X1 > 0 ;
   5)  X2 > 0 ;
   6)  X3 > 0 ;
END

SOLUTION STATUS:  OPTIMAL TO TOLERANCES.  DUAL CONDITIONS:  SATISFIED.

           OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      75238.095110

   VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X1       380.952379          .000000
         X2       476.190470         -.000001
         X3       142.857151          .000000

        ROW   SLACK OR SURPLUS         PRICE
         2)          .000000      -2761.906304
         3)          .000000        180.952513
         4)       380.952379           .000000
         5)       476.190470           .000000
         6)       142.857151           .000000
```

FIGURA 45

Al modificar los datos del modelo de LINGO, se podría resolver fácilmente una cartera de minimización de varianza que obtiene un rendimiento esperado deseado cuando están disponibles muchas acciones.

Solución con hoja de cálculo del PNL

Port.xls

Ahora se ilustra cómo usar el Solver de Excel para resolver el ejemplo 35. En la figura 46 (archivo Port.xls) se muestra la solución del ejemplo 35 obtenida con Solver, usando el procedimiento siguiente.

Solución de problemas de optimización de cartera con el Solver de Excel

Ahora se muestra cómo usar el Solver de Excel para resolver un problema de optimización de cartera. La clave es observar que las fórmulas (60) y (62) implican que para las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$\text{var}(c_1X_1 + c_2X_{2+} + \cdots + c_nX_n) = [c_1, c_2, \ldots, c_n](\text{matriz de covarianza})[c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$$

A continuación se indican los pasos del procedimiento.

Paso 1 En A3:C3, introduzca los valores de prueba para la cantidad invertida en cada acción.

Paso 2 En la celda D3, calcule el total invertido con la fórmula

=SUM(A3:C3)

Paso 3 En la celda D5, calcule el rendimiento esperado en dólares de la cartera con la fórmula

=SUMPRODUCT(A5:C5,A3:C3)

Paso 4 En la celda D8, se calcula la varianza de la cartera con la siguiente fórmula

=MMULT(A3:C3,MMULT(A8:C10,TRANSPOSE(A3:C3)))

Esta fórmula multiplica el vector de las cantidades invertidas en cada acción por la matriz de covarianza por la transpuesta del vector de las cantidades invertidas en cada acción. (*Nota*: es necesario presionar las teclas Control Shift Enter para que funcione esta fórmula.)

Paso 5 Ahora complete el cuadro de diálogo de Solver como se muestra en la figura 46. Se minimiza la varianza de la ganancia en dólares (celda D8). Se invierten exactamente \$1 000(D3 = F3) y se asegura que se obtiene un rendimiento esperado de por lo menos

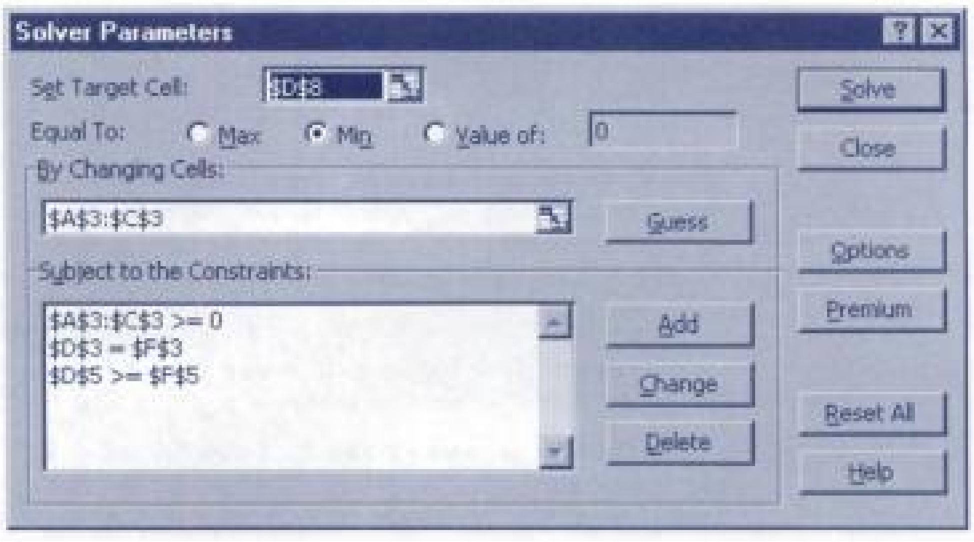


FIGURA 46

FIGURA 47

	A	B	C	D	E	F
1		PORTFOLIO	EXAMPLE			
2	X1	X2	X3	TOTALINV		
3	380.9523849	476.190461	142.8571541	1000	=	1000
4	E(X1)	E(X2)	E(X3)	MEANRET		
5	0.14	0.11	0.1	120	>=	120
6	COVARIANCE					
7	MATRIX			PORTVAR		
8	0.2	0.05	0.02	75238.09525		
9	0.05	0.08	0.03			
10	0.02	0.03	0.18			

\$120 (D5>=F5). Restringiendo la cantidad colocada en cada inversión a valores no negativos se cancelan las ventas en descubierto. De la figura 47, se encuentra la misma solución óptima que se encontró con LINGO.

Método de Wolfe para resolver problemas de programación cuadrática

El método de Wolfe se puede usar para resolver PPC en los que las variables deben ser no negativas. El método se ilustra resolviendo el siguiente PPC:

$$
\begin{aligned}
\min z = -x_1 - x_2 + (\tfrac{1}{2})x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\
\text{s.a} \qquad x_1 + \quad x_2 \le 3 \\
-2x_1 - 3x_2 \le -6 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Es posible demostrar que la función objetivo es convexa, así que cualquier punto que satisface las condiciones de Kuhn–Tucker (36′)–(39′) será solución de este PPC. Después de emplear variables de excedente e_1 para la restricción de x_1 y e_2 para la restricción de x_2 en (36′), e_2' para la restricción $-2x_1 - 3x_2 \le -6$ y una variable de holgura s_1' para la restricción $x_1 + x_2 \le 3$, las condiciones de K–T se podrían escribir como

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 = 0 && \text{[restricción de } x_1 \text{ en (36')]} \\
&2x_2 - 1 - x_1 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 = 0 && \text{[restricción de } x_2 \text{ en (36')]} \\
&x_1 + x_2 + s_1' = 3 \\
&2x_1 + 3x_2 - e_2' = 6 \\
&\text{Todas las variables no negativas} \\
&\lambda_2 e_2' = 0, \qquad \lambda_1 s_1' = 0, \qquad e_1 x_1 = 0, \qquad e_2 x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Observe que con excepción de las últimas cuatro ecuaciones, las condiciones de K–T son restricciones lineales o no negativas. Las últimas cuatro ecuaciones son las condiciones de holgura complementarias para este PPC. Para un PPC general, las condiciones de holgura complementarias se podrían expresar en forma verbal como

e_i de la restricción de x_i en (36′) y x_i no pueden ser ambas positivas
La variable de holgura o excedente para la i-ésima restricción y λ_i no pueden ser ambas positivas **(65)**

Para encontrar un punto que satisfaga las condiciones de K–T (excepto por las condiciones de holgura complementarias), el método de Wolfe aplica simplemente una versión modificada de fase I del método simple de dos fases. Primero se agrega una variable artificial a cada restricción en las condiciones de K–T que no tienen una variable básica evidente luego intentar minimizar la suma de las variables artificiales. Para asegurar que la solución final (con todas las variables artificiales iguales a cero) satisface las condiciones de holgura complementarias (65), el método de Wolfe modifica la elección del simplex de la variable entrante como sigue:

1 Nunca lleva a cabo un pivoteo que convierta a e_i de la i-ésima restricción en (36′) y x_i ambas en variables básicas.

2 Nunca efectúe un pivoteo que convierta a la variable de holgura (o de exceso) para la i-ésima restricción y λ_i ambas en variables básicas.

Para aplicar el método de Wolfe a nuestro ejemplo, se debe resolver el siguiente PL:

$$\begin{aligned}
\min w &= a_1 + a_2 + a_2' \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 + a_1 = 1 \\
& -x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 + a_2 = 1 \\
& x_1 + x_2 + s_1' = 3 \\
& 2x_1 + 3x_2 - e_2' + a_2' = 6
\end{aligned}$$

Todas las variables son no negativas

Después de eliminar las variables artificiales del renglón 0, se obtiene el tableau de la tabla 12. La solución factible básica actual es $w = 8$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $s_1' = 3$, $a_2' = 6$. Puesto que x_2 tiene el coeficiente más positivo en el renglón 0, se elige introducir x_2 en la base. El tableau resultante es la tabla 13. La solución factible básica actual es $w = 6$, $a_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $s_1' = \frac{5}{2}$, $a_2' = \frac{9}{2}$. Puesto que x_1 tiene el coeficiente más positivo en el renglón 0, ahora se introduce x_1 en la base. El tableau resultante es la tabla 14.

La solución factible básica actual $w = \frac{6}{7}$, $a_1 = \frac{6}{7}$, $x_2 = \frac{8}{7}$, $s_1' = \frac{4}{7}$, $x_1 = \frac{9}{7}$. El método simplex recomienda que se debe introducir λ_1 en la base. Sin embargo, la modificación de Wolfe del método simplex para seleccionar la variable entrante no permite que λ_1 y s_1' sean ambas variables básicas. Por consiguiente, λ_1 no puede entrar a la base. Debido a que e_2' es la única otra variable con un coeficiente positivo en el renglón 0, ahora se introduce e_2' en

TABLA 12
Tableau inicial para el método de Wolfe

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	ld
1	2	4	2	−5	−1	−1	0	−1	0	0	0	8
0	1	−1	1	−2	−1	0	0	0	1	0	0	1
0	−1	2	1	−3	0	−1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
0	2	3	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	6

TABLA 13
Primer tableau para el método de Wolfe

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	ld
1	4	0	0	1	−1	1	0	−1	0	−2	0	6
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
0	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	−1	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{2}$

TABLA 14
Segundo tableau para el método de Wolfe

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	ld
1	0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{29}{7}$	-1	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$
0	0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{29}{7}$	-1	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
0	0	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{6}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$
0	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
0	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$

TABLA 15
Tercer tableau para el método de Wolfe

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	ld
1	0	0	$\frac{5}{3}$	-4	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$\frac{2}{3}$
0	0	0	$\frac{5}{3}$	-4	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
0	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
0	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$

TABLA 16
Tableau óptimo para el método de Wolfe

w	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	s_1'	e_2'	a_1	a_2	a_2'	ld
1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0
0	0	0	1	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
0	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{6}{5}$
0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$

la base. El tableau resultante es la tabla 15. La solución factible básica actual es $w = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $e_2' = \frac{4}{3}$, y $x_1 = \frac{5}{3}$. Debido a que s_1' es ahora una variable no básica, se puede introducir λ_1 en la base. El tableau resultante es la tabla 16. Este es (¡finalmente!) un tableau óptimo. Debido a que $w = 0$, se ha encontrado una solución que satisface las condiciones de Kuhn-Tucker y es óptima para el PPC. Así, la solución óptima para el PPC es $x_1 = \frac{9}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$. Del tableau óptimo, también se encuentra que $\lambda_1 = \frac{2}{5}$ y $\lambda_2 = 0$ (debido a que $e_2' = \frac{6}{5} > 0$, se sabe que $\lambda_2 = 0$ se debe cumplir).

El método de Wolfe garantiza que se obtiene la solución óptima para un PPC si todos los menores principales del hesiano de la función objetivo son positivos. De otro modo, es posible que el método de Wolfe no converja en un número finito de pivotes. En la práctica, método de **pivoteo complementario** es el más usado para resolver PPC. Por desgracia, las limitaciones de espacio imposibilitan una explicación del pivoteo complementario. Se recomienda al lector consultar Shapiro (1979).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Se está considerando investigar en tres acciones. La variable aleatoria $\mathbf{S}_i$ representa el valor a un año de \$1 invertido en la acción i. Se sabe que $E(\mathbf{S}_1) = 1.15$, $E(\mathbf{S}_2) = 1.21$, $E(\mathbf{S}_3) = 1.09$; var $\mathbf{S}_1 = 0.09$, var $\mathbf{S}_2 = 0.04$, var $\mathbf{S}_3 = 0.01$; cov$(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = 0.006$, cov$(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_3) = -0.004$, y cov$(\mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3) = 0.005$. Se tienen \$100 para invertir y se quiere tener un rendimiento esperado de por lo menos 15% durante el siguiente año. Formule un PPC para encontrar la cartera de varianza mínima que obtiene un rendimiento esperado de por lo menos 15%.

2 Demuestre que la función objetivo para el ejemplo 35 es convexa [se puede demostrar que la varianza de cualquier cartera es una función convexa de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$].

3 En la figura 45, interprete los elementos de la columna PRICE para los renglones 2 y 3.

4 La compañía Fruit Computer produce las computadoras Pear y Apricot. Si la compañía carga un precio p_1 para las computadoras Pear y p_2 para las computadoras Apricot, puede vender q_1 computadoras Pear y q_2 Apricot, donde $q_1 = 4\,000 - 10p_1 + p_2$, y $q_2 = 2\,000 - 9p_2 + 0.8p_1$. Fabricar una computadora Pear requiere 2 horas de mano de obra y 3 chips. En el ensamblaje de una computadora Apricot se requieren 3 horas de trabajo y un chip. En la actualidad, se tienen disponibles 5 000 horas de trabajo y 4 500 chips. Formule un PPC para maximizar el ingreso de Fruit. Utilice las condiciones de K−T (o LINGO) para determinar la política de precios óptima de Fruit. ¿A lo sumo cuánto debe pagar Fruit por otra hora de trabajo? ¿Cuál es la mayor cantidad que Fruit debe pagar por otro chip de computadora?

5 Use el método de Wolfe para resolver el siguiente PPC:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1^2 - x_2 \\ \text{s.a} \quad 2x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

6 Use el método de Wolfe para resolver el siguiente PPC:

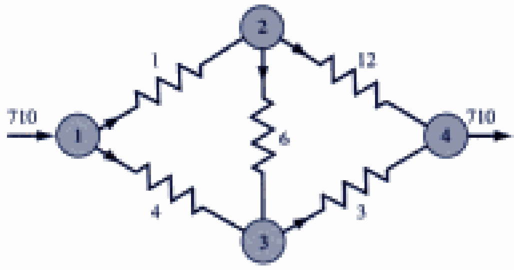
$$\begin{aligned} \min x_1 &+ 2x_2^2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7 En una red eléctrica, la potencia perdida en que se incurre cuando una corriente de I amperes fluye por una resistencia de R ohms es I^2R watts. En la figura 48, 710 amperes de corriente se deben enviar del nodo 1 al nodo 4. La corriente que fluye por cada nodo debe satisfacer la conservación del flujo. Por ejemplo, para el nodo 1, 710 = flujo por el resistor de 1 ohm + flujo por el resistor de 4 ohms. Notablemente, la naturaleza determina el flujo de corriente por cada resistor minimizando la pérdida de potencia total en la red.

a Formule un PPC cuya solución producirá que la corriente fluya por cada resistor.

b Use LINGO para determinar la corriente que fluye por cada resistor.

FIGURA 48



8 Use el método de Wolfe para hallar la solución óptima del siguiente PPC.

$$\begin{aligned} \min z &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 + x_1x_2 \\ \text{s.a} \quad x_1 + 2x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

9 (Para este problema se requiere conocer algo acerca de la regresión.) En la tabla 17, se dan los rendimientos anuales de tres tipos de activos (bonos del tesoro, acciones y oro) (archivo Invest68.xls) durante los años 1968-1988. Por ejemplo, \$1 invertido en bonos del tesoro al comienzo de 1978 crece a \$1.07 al final de 1978. Se tienen \$1 000 para invertir en estas tres inversiones. El objetivo es minimimizar la varianza del rendimiento anual en dólares de la cartera de inversiones sujeta a restricción de que el rendimiento esperado de la cartera durante un año sea por lo menos de 10%. Determine cuánto dinero se debe invertir en cada inversión. Use una hoja de cálculo para calcular la media, la desviación estándar y la varianza del rendimiento de cada activo. Para calcular la covarianza entre cada par de acciones, recuerde que una estimación de la covarianza de los bonos del tesoro y el oro está dada por cov$(T, G) = s_T s_G r_{TG}$ (donde s_T = desviación estándar del rendimiento en bonos del tesoro; s_G = desviación estándar del rendimiento en oro). Observe que $r_{TG} = \pm(R^2)^{1/2}$, donde el signo de r es el mismo que el de la pendiente de la recta de mínimos cuadrados.

Además de determinar la cantidad por invertir en cada activo, conteste las dos preguntas siguientes.

a Estoy 95% seguro de que el incremento en el valor de mis activos durante el siguiente año estará entre ______ y ______ .

b Estoy 95% seguro de que el rendimiento anual porcentual en mi cartera estará entre ______ y ______ .

10 (Refiérase a los datos del problema 9). Suponga que el rendimiento en el i-ésimo activo se podría estimar como $\mu_i + \beta_i M + \epsilon_i$, donde M es el rendimiento en el mercado. Suponga que las ϵ_i son independientes y que la desviación estándar de ϵ_i se podría estimar mediante el error estándar de la estimación a partir de la regresión, con el rendimiento en el mercado como variable independiente y el rendimiento en el i-ésimo activo como variable dependiente. Ahora se

TABLA 17
Rendimientos anuales de los activos

Año	Acciones	Oro	Bonos del tesoro
1968	11	11	5
1969	−9	8	7
1970	4	−14	7
1971	14	14	4
1972	19	44	4
1973	−15	66	7
1974	−27	64	8
1975	37	0	6
1976	24	−22	5
1977	−7	18	5
1978	7	31	7
1979	19	59	10
1980	33	99	11
1981	−5	−25	15
1982	22	4	11
1983	23	−11	9
1984	6	−15	10
1985	32	−12	8
1986	19	16	6
1987	5	22	5
1988	17	−2	6

puede expresar la varianza de la cartera sin calcular la covarianza entre cada par de inversiones. (*Sugerencia*: la varianza del mercado entrará en la ecuación). Use la ecuación de regresión estimada para estimar el rendimiento promedio en el i-ésimo activo como una función del rendimiento en el mercado.

Para los datos del problema 9, formule un PNL que se pueda usar para encontrar la cartera de varianza mínima que produzca un rendimiento esperado de por lo menos 10%. ¿Por qué este método es útil cuando están disponibles muchas inversiones posibles?

11 (Refiérase a los datos del problema 9.) Suponga que ahora mantiene 30% de su inversión en acciones, 50% en bonos del tesoro y 20% en oro. Suponga que las transacciones incurren en costos. Cada \$100 de acciones comercializados le cuestan \$1, cada \$100 de su cartera de inversiones en oro comercializados le cuestan \$2 y cada \$1 comercializado de su cartera de bonos del tesoro le cuesta 5¢. Encuentre la cartera de varianza mínima que produce, después de los costos de transacción, un rendimiento esperado de por lo menos 10%. (*Sugerencia*: defina las variables para los dólares comprados o vendidos en cada inversión.)

11.11 Programación separable[†]

Muchos PNL son de la forma siguiente:

$$\max \text{ (o min) } z = \sum_{j=1}^{j=n} f_j(x_j)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{j=n} g_{ij}(x_j) \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Debido a que las variables de decisión aparecen en términos separados de la función objetivo y las restricciones, los PNL de esta forma se llaman **problemas de programación separables.** Es común resolver estos problemas aproximando cada $f_j(x_j)$ y $g_{ij}(x_j)$ mediante una función lineal por partes (véase la sección 9.2). Antes de describir la técnica de programación separable, se da un ejemplo de problema de programación separable.

EJEMPLO 36 Programación separable

Oilco debe determinar cuántos barriles de petróleo extraer durante cada uno de los dos años siguientes. Si Oilco extrae x_1 millones de barriles durante 1 año, cada barril se puede vender en \$30 $- x_1$. Si Oilco extrae x_2 millones de barriles durante el año 2, cada barril se puede vender en \$35 $- x_2$. El costo de extraer x_1 millones de barriles durante el año 1 es x_1^2 millones de dólares y el costo de extraer x_2 millones de barriles durante el año 2 es $2x_2^2$ millones de dólares. Están disponibles un total de 20 millones de barriles, y a lo sumo

[†]Esta sección cubre temas que se pueden omitir sin perder la continuidad.

$250 millones se pueden gastar en extracción. Formule un PNL para ayudar a Oilco a maximizar las ganancias (ingresos menos costos) para los siguientes dos años.

Solución Defina

x_1 = millones de barriles de petróleo extraídos durante el año 1

x_2 = millones de barriles de petróleo extraídos durante el año 2

Entonces el PNL apropiado es

$$\begin{aligned} \max z &= x_1(30 - x_1) + x_2(35 - x_2) - x_1^2 - 2x_2^2 \\ &= 30x_1 + 35x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 \\ \text{s.a} \quad & x_1^2 + 2x_2^2 \le 250 \\ & x_1 + x_2 \le 20 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{66}$$

Éste es un problema de programación separable con $f_1(x_1) = 30x_1 - 2x_1^2$, $f_2(x_2) = 35x_2 - 3x_2^2$, $g_{11}(x_1) = x_1^2$, $g_{12}(x_2) = 2x_2^2$, $g_{21}(x_1) = x_1$, y $g_{22}(x_2) = x_2$.

Antes de aproximar las funciones f_j y g_{ij} mediante funciones lineales por partes, se deben determinar (para $j = 1, 2, \ldots, n$) números a_j y b_j tales que se tenga la seguridad de que el valor de x_j en la solución óptima satisfaga $a_j \le x_j \le b_j$. Para el ejemplo anterior, $a_1 = a_2 = 0$ y $b_1 = b_2 = 20$ será suficiente. A continuación, para cada variable x_j se eligen puntos de cuadrícula $p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{jk}$ con $a_j = p_{j1} \le p_{j2} \le \cdots \le p_{jk} = b_j$ (para simplificar la notación, suponga que cada variable tiene el mismo número de puntos de cuadrícula). Para el ejemplo anterior, se usan cinco puntos de rejilla para cada variable: $p_{11} = p_{21} = 0$, $p_{12} = p_{22} = 5$, $p_{13} = p_{23} = 10$, $p_{14} = p_{24} = 15$, $p_{15} = p_{25} = 20$. La esencia del método de programación separable es aproximar cada función f_j y g_{ij} como si fuera una función lineal en cada intervalo $[p_{j,r-1}, p_{j,r}]$.

De manera más formal, suponga que $p_{j,r} \le x_j \le p_{j,r+1}$. Entonces para alguna δ ($0 \le \delta \le 1$), $x_j = \delta p_{j,r} + (1 - \delta)p_{j,r+1}$. Se aproximan $f_j(x_j)$ y $g_{ij}(x_j)$ (véase la figura 49) mediante

$$\hat{f}_j(x_j) = \delta f_j(p_{j,r}) + (1 - \delta)f_j(p_{j,r+1})$$
$$\hat{g}_{ij}(x_j) = \delta g_{ij}(p_{j,r}) + (1 - \delta)g_{ij}(p_{j,r+1})$$

Por ejemplo, ¿cómo se aproximaría $f_1(12)$? Debido a que $f_1(10) = 30(10) - 2(10)^2 = 100$, $f_1(15) = 30(15) - 2(15)^2 = 0$, y $12 = 0.6(10) + 0.4(15)$, se aproxima $f_1(12)$ mediante $\hat{f}_1(12) = 0.6(100) + 0.4(0) = 60$ (véase la figura 50).

De manera más formal, para aproximar un problema de programación separable, se agregan constantes de la forma

$$\delta_{j1} + \delta_{j2} + \cdots + \delta_{j,k} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{67}$$
$$x_j = \delta_{j1}p_{j1} + \delta_{j2}p_{j2} + \cdots + \delta_{j,k}p_{j,k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{68}$$
$$\delta_{j,r} \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, k) \tag{69}$$

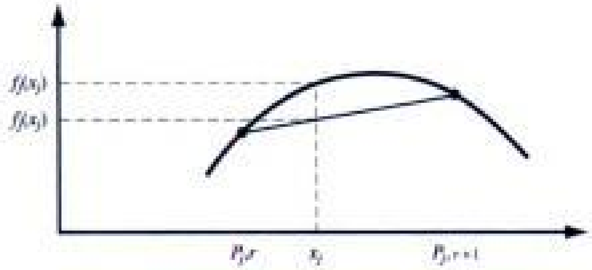


FIGURA 49
Aproximación de programación separable de $f_j(x_j)$

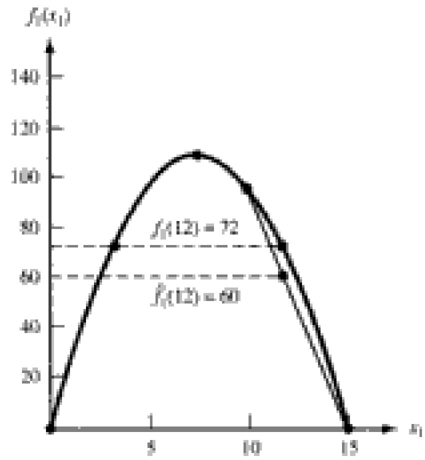


FIGURA 50
Aproximación de $f_1(12)$

Luego se sustituye $f_j(x_j)$ por

$$\hat{f}_j(x_j) = \delta_{j1}f_j(p_{j1}) + \delta_{j2}f_j(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k}f_j(p_{j,k}) \tag{70}$$

y se remplaza $g_{ij}(x_j)$ por

$$\hat{g}_{ij}(x_j) = \delta_{j1}g_{ij}(p_{j1}) + \delta_{j2}g_{ij}(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k}g_{ij}(p_{j,k}) \tag{71}$$

Para asegurar la exactitud de las aproximaciones en (70) y (71), se debe estar seguro de que para cada $j(j = 1, 2, \ldots, n)$ a lo sumo dos de las $\delta_{j,k}$ son positivas también para un j dado, supóngase que los $\delta_{j,k}$ son positivas. Si $\delta_{j,k'}$ es positiva, entonces la otra $\delta_{j,k}$ positiva debe ser $\delta_{j,k'-1}$ o $\delta_{j,k'+1}$ (se dice que $\delta_{j,k'}$ es adyacente a $\delta_{j,k'-1}$ y $\delta_{j,k'+1}$). Para ver la razón para estas restricciones, suponga que se quiere que $x_1 = 12$. Entonces nuestras aproximaciones serían más exactas si $\delta_{13} = 0.6$ y $\delta_{14} = 0.4$. En este caso, se aproxima $f_1(12)$ mediante $0.6f_1(10) + 0.4f_1(15)$. En realidad no se quiere tener $\delta_{11} = 0.4$ y $\delta_{15} = 0.6$. Esto daría $x_1 = 0.4(0) + 0.6(20) = 12$, pero podría aproximarse $f_1(12)$ mediante $f_1(12) = 0.4f_1(0) + 0.6f_1(20)$, y en la mayoría de los casos esta sería una pobre aproximación de $f_1(12)$ (véase la figura 51). Para que el problema de aproximación de una buena aproximación para las funciones f_i y $\delta_{j,k}$, se debe agregar la siguiente **suposición de adyacencia:** Para $j = 1, 2, \ldots, n$, a lo sumo dos $\delta_{j,k}$ pueden ser positivas. Si para una j particular, dos $\delta_{j,k}$ son positivas, entonces deben ser adyacentes.

Así, el problema de aproximación consiste en una función objetivo obtenida de (70) y las restricciones obtenidas de (67), (68), (69) y (71) y la suposición de adyacencia. En realidad, las restricciones (68) se utilizan sólo para transformar los valores de las $\delta_{j,k}$ en valo-

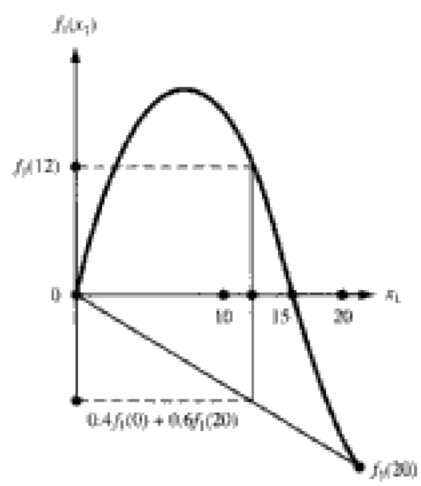


FIGURA 51
La violación de la suposición de adyacencia resulta en una pobre aproximación de $f_1(12)$

res para las variables de decisión originales (las x_j) y no es necesario determinar los valores óptimos de las $\delta_{j,k}$. Las restricciones (68) no necesitan ser parte del problema de aproximación, y el **problema de aproximación** para un problema de programación separable se podría escribir como sigue:

$$\max\ (\text{o}\ \min)\ \hat{z} = \sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} f_j(p_{j1}) + \delta_{j2} f_j(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} f_j(p_{j,k})]$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} g_{ij}(p_{j1}) + \delta_{j2} g_{ij}(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} g_{ij}(p_{jk})] \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\delta_{j1} + \delta_{j2} + \cdots + \delta_{j,k} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\delta_{j,r} \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, k)$$

Suposición de adyacencia

Para el ejemplo anterior, se tiene

$$\begin{array}{lllll}
f_1(0) = 0, & f_1(5) = 100, & f_1(10) = 100, & f_1(15) = 0, & f_1(20) = -200 \\
f_2(0) = 0, & f_2(5) = 100, & f_2(10) = 50, & f_2(15) = -150, & f_2(20) = -500 \\
g_{11}(0) = 0, & g_{11}(5) = 25, & g_{11}(10) = 100, & g_{11}(15) = 225, & g_{11}(20) = 400 \\
g_{12}(0) = 0, & g_{12}(5) = 50, & g_{12}(10) = 200, & g_{12}(15) = 450, & g_{12}(20) = 800 \\
g_{21}(0) = 0, & g_{21}(5) = 5, & g_{21}(10) = 10, & g_{21}(15) = 15, & g_{21}(20) = 20 \\
g_{22}(0) = 0, & g_{22}(5) = 5, & g_{22}(10) = 10, & g_{22}(15) = 15, & g_{22}(20) = 20
\end{array}$$

Al aplicar (70) a la función objetivo de (66) se obtiene una función objetivo de aproximación de

$$\max \hat{z} = 100\delta_{12} + 100\delta_{13} - 200\delta_{15} + 100\delta_{22} + 50\delta_{23} - 150\delta_{24} - 500\delta_{25}$$

La restricción (67) da las dos restricciones siguientes:

$$\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15} = 1$$
$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} + \delta_{25} = 1$$

La restricción (68) produce las dos restricciones siguientes:

$$x_1 = 5\delta_{12} + 10\delta_{13} + 15\delta_{14} + 20\delta_{15}$$
$$x_2 = 5\delta_{22} + 10\delta_{23} + 15\delta_{24} + 20\delta_{25}$$

Al aplicar (71) se transforman las dos restricciones en (66) en

$$25\delta_{12} + 100\delta_{13} + 225\delta_{14} + 400\delta_{15} + 50\delta_{22} + 200\delta_{23} + 450\delta_{24} + 800\delta_{25} \leq 250$$
$$5\delta_{12} + 10\delta_{13} + 15\delta_{14} + 20\delta_{15} + 5\delta_{22} + 10\delta_{23} + 15\delta_{24} + 20\delta_{25} \leq 20$$

Después de agregar las restricciones de signo, (68), y la suposición de adyacencia, se obtiene

$$\max \hat{z} = 100\delta_{12} + 100\delta_{13} - 200\delta_{15} + 100\delta_{22} + 50\delta_{23} - 150\delta_{24} - 500\delta_{25}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{s.a.} & \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14} + \delta_{15} = 1 \\
& \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24} + \delta_{25} = 1 \\
& 25\delta_{12} + 100\delta_{13} + 225\delta_{14} + 400\delta_{15} + 50\delta_{22} + 200\delta_{23} + 450\delta_{24} + 800\delta_{25} \leq 250 \\
& 5\delta_{12} + 10\delta_{13} + 15\delta_{14} + 20\delta_{15} + 5\delta_{22} + 10\delta_{23} + 15\delta_{24} + 20\delta_{25} \leq 20 \\
& \delta_{j,k} \geq 0 (j = 1, 2;\ k = 1, 2, 3, 4, 5)
\end{array}$$

Suposición de adyacencia

En primera instancia, el problema de aproximación podría parecer como un problema de programación lineal. Sin embargo, si se intenta resolver el problema de aproximación mediante el simplex, se podría violar la suposición de adyacencia. Para evitar esta dificultad, se resuelven los problemas de aproximación vía el algoritmo simplex con la siguiente regla de entrada restringida: si, para una j dada las $\delta_{j,k} = 0$, entonces cualquier $\delta_{j,k}$ podría entrar a la base. Si, para una j determinada, una sola $\delta_{j,k}$ (por ejemplo, $\delta_{j,k'}$) es positiva, entonces $\delta_{j,k'-1}$ o $\delta_{j,k'+1}$ se podría introducir a la base y nada más. Si, para una j determinada, dos $\delta_{j,k}$ son positivas, entonces ninguna otra $\delta_{j,k}$ se puede introducir a la base.

Hay dos situaciones en las que resolver el problema de aproximación vía el simplex ordinario producirá una solución que satisface de manera automática la suposición de adyacencia. Si el problema de programación separable es un problema de maximización, entonces cada $f_j(x_j)$ es cóncava y cada $g_{ij}(x_j)$ es convexa, de modo que cualquier solución al problema de aproximación obtenido vía el simplex ordinario satisfará de manera automática la suposición de adyacencia. También, si el problema de programación separable es un problema de minimización, cada $f_j(x_j)$ es convexa y cada $g_{ij}(x_j)$ es convexa, así que cualquier solución al problema de aproximación obtenido vía el simplex ordinario automáticamente satisfará de forma automática la suposición de adyacencia. El problema 3 al final de esta sección indica por qué éste es el caso.

En estos dos casos especiales, también se puede demostrar que a medida que el valor máximo de la distancia entre dos puntos de cuadrícula adyacentes tiende a cero, la solución óptima para el problema de aproximación se acerca a la solución óptima del problema de programación separable [véase Bazaraa y Shetty (1993, p. 450)].

Para el ejemplo anterior, cada $f_j(x_j)$ es cóncava y cada $g_{ij}(x_j)$ es convexa, así que para encontrar la solución óptima al problema de aproximación, se podría usar el simplex e ignorar la regla de entrada restringida. La solución óptima del problema de aproximación para el ejemplo anterior es $\delta_{12} = \delta_{22} = 1$. Esto da $x_1 = 1(5) = 5$, $x_2 = 1(5) = 5$, $\hat{z} = 200$. Compare esto con la solución óptima real para el ejemplo anterior, que es $x_1 = 7.5$, $x_2 = 5.83$, $z = 214.58$.

PROBLEMAS

Grupo A

Prepara un problema de aproximación para los siguientes problemas de programación separables:

1
$$\begin{aligned} \min z &= x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.a} \quad x_1^2 + 2x_2^2 &\le 4 \\ x_1^2 + x_2^2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2
$$\begin{aligned} \max z &= x_1^2 - 5x_1 + x_2^2 - 5x_2 - x_3 \\ \text{s.a} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 4 \\ x_1^2 - x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Grupo B

3 Este problema le dará una idea de por qué la regla de entrada restringida es innecesaria cuando (para un problema de maximización) cada $f_j(x_j)$ es cóncava y cada $g_{ij}(x_j)$ es convexa. Considere el ejemplo de Oilco. Cuando se resuelve el problema de aproximación mediante el simplex, demuestre que no se puede obtener una solución que viola la suposición de adyacencia. Por ejemplo, ¿por qué el simplex no puede dar una solución (x^*) de $\delta_{11} = 0.4$ y $\delta_{15} = 0.6$? Para demostrar que esto no puede ocurrir, encuentre una solución factible para el problema de aproximación que tiene un valor de $\hat{z}$ más grande que x^*. [*Sugerencia*: demuestre que la solución que es idéntica a x^* con la excepción de que $\delta_{11} = 0$, $\delta_{15} = 0$, $\delta_{13} = 0.6$, y $\delta_{14} = 0.4$ es factible para el problema de aproximación [use la convexidad de $g_{ij}(x_j)$ para esta parte] y tiene un valor de $\hat{z}$ más grande que x^* [use la concavidad de $f_j(x_j)$ para esta parte].]

4 Suponga que un PNL al parecer es separable excepto por el hecho de que un término de la forma $x_i x_j$ aparece en la función objetivo o las restricciones. Demuestre que un PNL de este tipo se puede convertir en un problema de programación separable al definir dos nuevas variables y_i y y_j mediante $x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_j)$ y $x_j = \frac{1}{2}(y_i - y_j)$. Use esta técnica para transformar el siguiente PNL en un problema de programación separable:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 \\ \text{s.a} \quad x_1x_2 &\le 4 \\ x_1^2 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

11.12 Método de las direcciones factibles[†]

En la sección 11.7, se usó el método del ascenso escalonado para resolver un PNL irrestricto. Ahora se describe una modificación de ese método: el **método de las direcciones factibles**, el cual se puede usar para resolver PNL con restricciones lineales. Suponga que se quiere resolver

$$\begin{aligned} \max z &= f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad A\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{72}$$

donde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, A es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{0}$ es un vector columna de n-dimensiones que consiste por completo en ceros, $\mathbf{b}$ es un vector de $m \times 1$ y $f(\mathbf{x})$ es una función cóncava.

Para empezar, se debe encontrar (quizá por medio del método de la gran M o el algoritmo simplex de dos fases) una solución factible $\mathbf{x}^0$ que satisface las restricciones $A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$. Ahora se intenta encontrar una dirección en la que nos podamos alejar de $\mathbf{x}^0$. Esta dirección debe tener dos propiedades:

1 Cuando se avanza alejándose de $\mathbf{x}^0$, se debe permanecer factible.

2 Cuando se avanza alejándose de $\mathbf{x}^0$, se incrementa el valor de z.

De la sección 11.7, se sabe que si $\nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{d} > 0$ y se avanza una distancia pequeña alejándose de $\mathbf{x}^0$ en una dirección $\mathbf{d}$, entonces aumentará $f(\mathbf{x})$ Se elige alejarse de $\mathbf{x}^0$ en una dirección $\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0$, donde $\mathbf{d}^0$ es una solución óptima para el siguiente PL:

$$\begin{aligned} \max z &= \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{d} \\ \text{s.a} \quad A\mathbf{d} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \tag{73}$$

Aquí $\mathbf{d} = [d_1 \quad d_2 \ldots d_n]^T$. Observe que si $\mathbf{d}^0$ es solución de (73) (y $\mathbf{x}^0$ no es solución), entonces $\nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{d}^0 > \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{x}^0$, o bien, $\nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot (\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0) > 0$. Esto significa que moverse una pequeña distancia de $\mathbf{x}^0$ en una dirección $\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0$ incrementará el valor de z.

Ahora se elige el nuevo punto $\mathbf{x}^1$ como $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)$, donde t_0 es solución de

$$\begin{aligned} &\max f[\mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)] \\ &0 \le t_0 \le 1 \end{aligned}$$

Se puede demostrar que $f(\mathbf{x}^1) \ge f(\mathbf{x}^0)$ se cumplirá, y que si $f(\mathbf{x}^1) = f(\mathbf{x}^0)$, entonces $\mathbf{x}^0$ es la solución óptima para (72). Así, a menos que $\mathbf{x}^0$ sea óptima, $\mathbf{x}^1$ tendrá un valor de z más grande que $\mathbf{x}^0$. Es fácil demostrar que $\mathbf{x}^1$ es un punto factible. Observe que

$$A\mathbf{x}^1 = A[\mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)] = (1 - t_0)A\mathbf{x}^0 + t_0A\mathbf{d}^0 \le (1 - t_0)\mathbf{b} + t_0\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

donde la última desigualdad se deduce del hecho de que tanto $\mathbf{x}^0$ como $\mathbf{d}^0$ satisfacen las restricciones del PNL y $0 \le t_0 \le 1$. $\mathbf{x}^1 \ge 0$ se deduce fácilmente de $\mathbf{x}^0 \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{d}^0 \ge \mathbf{0}$, y $0 \le t_0 \le 1$.

Ahora se elige alejarse de $\mathbf{x}^1$ en alguna dirección $\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1$, donde $\mathbf{d}^1$ es una solución óptima para el siguiente PL:

$$\begin{aligned} \max z &= \nabla f(\mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{d} \\ \text{s.a} \quad A\mathbf{d} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &\ge 0 \end{aligned}$$

Entonces se elige un nuevo punto $\mathbf{x}^2$ definido como $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1)$, donde t_1 es solución de

$$\begin{aligned} &\max f[\mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1)] \\ &0 \le t_1 \le 1 \end{aligned}$$

[†]Esta sección cubre temas que se pueden omitir sin perder la continuidad.

De nuevo $\mathbf{x}^2$ será factible, y se cumplirá $f(\mathbf{x}^2) \geq f(\mathbf{x}^1)$ También, si $f(\mathbf{x}^2) = f(\mathbf{x}^1)$, entonces $\mathbf{x}^1$ es la solución óptima para el PNL (72).

Se continúa de este modo y se generan las direcciones de movimiento $\mathbf{d}^2, \mathbf{d}^3, \ldots, \mathbf{d}^{n-1}$ y los nuevos puntos $\mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4, \ldots, \mathbf{x}^n$. El algoritmo se termina si $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1}$. Esto significa que $\mathbf{x}^{k-1}$ es una solución óptima para el PNL (72). Si los valores de f se incrementan de manera estricta en cada iteración del método, entonces (como con el método del ascenso más inclinado) se termina el método siempre que dos puntos sucesivos estén muy cercanos.

Después que se determinó el punto $\mathbf{x}^k$, se tiene una cota superior en el valor óptimo de z para (72). Se puede demostrar que si $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cóncava, entonces

$$[\text{Valor óptimo de } z \text{ para (71)}] \leq f(\mathbf{x}^k) + \nabla(\mathbf{x}^k) \cdot [\mathbf{d}^k - \mathbf{x}^k]^T \tag{74}$$

Así, si $f(\mathbf{x}^k)$ está cerca del límite superior del valor óptimo de z obtenido de (74), entonces se podría terminar el algoritmo.

Frank y Wolfe elaboraron la versión del método de las direcciones factibles que hemos analizado. Para un análisis de otros métodos de dirección factible, se recomienda al lector el capítulo 11 de Bazaraa y Shetty (1993).

Con el ejemplo siguiente se ilustra el método de las direcciones factibles.

EJEMPLO 37 Método de las direcciones factibles

Lleva a cabo dos iteraciones del método de las direcciones factibles en el siguiente PNL:

$$\begin{aligned} \max z = f(x, y) &= 2xy + 4x + 6y - 2x^2 - 2y^2 \\ \text{s.a} \quad x + y &\leq 2 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Comience en el punto (0, 0).

Solución $\nabla f(x, y) = [2y - 4x + 4 \quad 6 + 2x - 4y]$, así que $\nabla f(0, 0) = [4 \quad 6]$. Se encuentra una dirección para alejarse de $[0 \quad 0]$ resolviendo el siguiente PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 4d_1 + 6d_2 \\ \text{s.a} \quad d_1 + d_2 &\leq 2 \\ d_1, d_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $d_1 = 0$ y $d_2 = 2$. Así, $\mathbf{d}^0 = [0 \quad 2]^T$. Puesto que $\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0 = [0 \quad 2]^T$, ahora se elige $\mathbf{x}^1 = [0 \quad 0]^T + t_0[0 \quad 2]^T = [0 \quad 2t_0]^T$, donde t_0 es solución de

$$\begin{aligned} &\max f(0, 2t) = 12t - 8t^2 \\ &0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Con $g(t) = 12t - 8t^2$, se encuentra que $g'(t) = 12 - 16t = 0$ para $t = 0.75$. Puesto que $g''(t) < 0$, se sabe que $t_0 = 0.75$. Por consiguiente $\mathbf{x}^1 = [0, 1.5]^T$. En este punto, $z = f(0, 1.5) = 4.5$. Ahora se tiene [vía (74) con $k = 0$] el siguiente límite superior en el valor óptimo de z del PNL:

$$(\text{Valor óptimo de } z) \leq f(0, 0) + [4 \quad 6]\cdot[0 \quad 2]^T = 12$$

Ahora $\nabla(\mathbf{x}^1) = f(0, 1.5) = [7 \quad 0]$. Ahora se encuentra la dirección $\mathbf{d}^2$ para alejarse de $\mathbf{x}^1$ al resolver

$$\begin{aligned} \max z &= 7d_1 \\ \text{s.a} \quad d_1 + d_2 &\leq 2 \\ d_1, d_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución óptima para este PL es $\mathbf{d}^1 = [2 \quad 0]^T$. Ahora se encuentra $\mathbf{x}^2 = [0 \quad 1.5]^T + t_1\{[2 \quad 0]^T - [0 \quad 1.5]^T\} = [2t_1 \quad 1.5 - 1.5t_1]^T$, donde t_1 es la solución óptima para

$$\max f(2t, 1.5 - 1.5t)$$
$$0 \le t \le 1$$

Ahora $f(2t, 1.5 - 1.5t) = 4.5 - 18.5t^2 + 14t$. Sea $g(t) = 4.5 - 18.5t^2 + 14t$, se encuentra que $g'(t) = 14 - 37t = 0$ para $t = \frac{14}{37}$. Puesto que $g''(t) = -37 < 0$, se encuentra que $t_1 = \frac{14}{37}$. Así, $\mathbf{x}^2 = [\frac{28}{37} \quad \frac{69}{74}]^T = [0.76 \quad 0.93]^T$. Ahora se tiene $z = f(0.76, 0.93) = 7.15$. De (74) (con $k = 1$), se encuentra

$$(\text{Valor óptimo de } z) \le 4.5 + [7 \quad 0]\cdot\{[2 \quad 0]^T - [0 \quad 1.5]^T\} = 18.5$$

Puesto que el primer límite superior en el valor óptimo de z (12) es una mejor cota que 18.5, se ignora esta última.

En realidad, la solución óptima del PNL es $z = 8.17$, $x = .83$, y $y = 1.17$.

PROBLEMAS

Grupo A

Lleva a cabo dos iteraciones del método de las direcciones factibles para cada ceno de los siguientes PNL:

1
$$\max z = 4x + 6y - 2x^2 - 2xy - 2y^2$$
$$\text{s.a} \quad x + 2y \le 2$$
$$x, y \ge 0$$

Comience en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2
$$\max z = 3xy - x^2 - y^2$$
$$\text{s.a} \quad 3x + y \le 4$$
$$x, y \ge 0$$

Comience en el punto (1, 0).

11.13 Optimalidad de Pareto y curvas de transacción†

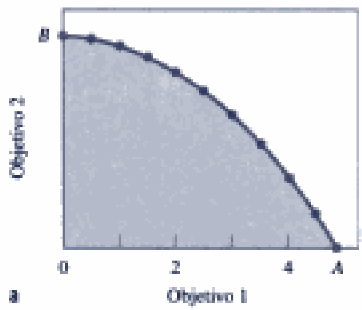
En una situación de toma de decisiones con varios atributos en ausencia de incertidumbre, a menudo se buscan soluciones de *óptimas de Pareto*. Se supondrá que nuestro tomador de decisiones tiene dos objetivos y que el conjunto de puntos posibles en consideración debe satisfacer un conjunto determinado de restricciones.

DEFINICIÓN ■ Una solución (llámela A) para un problema con varios objetivos es **óptima de Pareto** si ninguna otra solución factible es por lo menos tan buena como A con respecto a cada objetivo, y estrictamente mejor que A con respecto a por lo menos un objetivo. ■

Si se define el concepto de *solución dominada* como sigue, se puede expresar de otro modo la definición de optimalidad de Pareto.

DEFINICIÓN ■ Una solución factible B **domina** una solución factible A para un problema con varios objetivos si B es por lo menos tan buena como A con respecto a cada objetivo y es estrictamente mejor que A con respecto a por lo menos un objetivo. ■

†Esta sección cubre temas que se pueden omitir sin perder la continuidad.



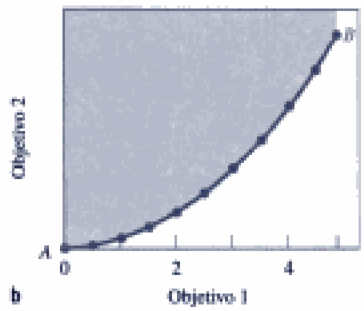


FIGURA 52

Así, las soluciones óptimas de Pareto son el conjunto de soluciones factibles no dominadas.

Si se grafica la "puntuación" de las soluciones óptimas de Pareto en el plano x–y donde la puntuación del eje x es la correspondiente al objetivo 1 y la puntuación del eje y es del objetivo 2, la gráfica se conoce como **frontera eficiente** o **curva de transacción.**

Para ilustrar, suponga que el conjunto de soluciones factibles para un problema con varios objetivos es la región sombreada acotada por la curva AB y el primer cuadrante en la figura 52a. Si se desea maximizar los objetivos 1 y 2, entonces la curva AB es el conjunto de puntos óptimos de Pareto.

Para otra ilustración, suponga que el conjunto de soluciones factibles para un problema de varios objetivos son los puntos sombreados en el primer cuadrante acotado desde abajo por la curva AB en la figura 52b. Si el propósito es maximizar el objetivo 1 y minimizar el objetivo 2, entonces la curva AB es el conjunto de puntos óptimos de Pareto.

Se ilustra el concepto de optimalidad de Pareto (y cómo determinar las soluciones óptimas de Pareto) con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 38 Curva de transacción ganancia-contaminación

Chemco está considerando producir tres productos. La contribución por unidad a la ganancia, requerimientos de mano de obra, materia prima utilizada por unidad producida y la contaminación producida por unidad de producto se dan en la tabla 18. En la actualidad, están disponibles 1 300 horas de mano de obra y 1 000 unidades de materia prima. Los dos objetivos de Chemco son maximizar la ganancia y minimizar la contaminación producida. Grafique la curva de transacción para este problema.

Solución Si se define x_i = número de unidades de producto i producido, entonces los dos objetivos de Chemco se podrían escribir como sigue:

Objetivo 1 Ganancia $= 10x_1 + 9x_2 + 8x_3$

Objetivo 2 Contaminación $= 10x_1 + 6x_2 + 3x_3$

TABLA 18
Datos para Chemco

	Producto		
	1	2	3
Ganancia ($)	10	9	8
Mano de obra (horas)	4	3	2
Materia prima (unidades)	3	2	2
Contaminación (unidades)	10	6	3

Se graficará la contaminación en el eje x y la ganancia en el eje y. Los valores de las variables de decisión deben satisfacer las siguientes restricciones:

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1\,300 \quad \text{(Restricción de mano de obra)} \tag{75}$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1\,000 \quad \text{(Restricción de materia prima)} \tag{76}$$
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{77}$$

Se puede encontrar una solución óptima de Pareto si se elige optimizar cualquiera de los objetivos, sujeto a las restricciones (75) a (77). Se empieza por maximizar la ganancia. Para esto se debe resolver el siguiente PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1\,300 \quad \text{(Restricción de mano de obra)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1\,000 \quad \text{(Restricción de materia prima)} \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{78}$$

Cuando este PL se resuelve en LINDO, se encuentra que su única solución óptima es (llámela A) $z = 4\,300$, $x_1 = 0$, $x_2 = 300$, y $x_3 = 200$. Esta solución produce un nivel de contaminación de $6(300) + 3(200) = 2\,400$ unidades. Se afirma que esta solución es óptima de Pareto. Para ver esto, observe que para que esta solución no sea óptima de Pareto, tendría que haber una solución que satisfaga (75) a (77) que produjera $z \geq 4\,300$ y contaminación $\leq 2\,400$, con por lo menos cumpliéndose una de estas desigualdades de manera estricta. Puesto que $x_1 = 0$, $x_2 = 300$, $x_3 = 200$ es la única solución para (78), no hay solución factible además de A que satisfaga (75) a (77) que pueda tener $z \geq 4\,300$. Por consiguiente, A no puede ser dominada.

Para encontrar otras soluciones óptimas de Pareto, se elige algún nivel de contaminación (llámelo POLL) y se resuelve el siguiente PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 1\,300 \quad \text{(Restricción de mano de obra)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 1\,000 \quad \text{(Restricción de materia prima)} \\ & 10x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq \text{POLL} \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{79}$$

Sea PROF el (único) valor óptimo de z cuando se resuelve este PL. Para cada valor de POLL, el punto (POLL, PROF) estará sobre la curva de transacción. Para ver esto, observe que cualquier punto (POLL', PROF) que domina (POLL, PROF') debe tener PROF' $\geq$ PROF. El hecho de que (POLL, PROF) sea la única solución para (79) significa que los puntos factibles (con excepción de [POLL, PROF]) con PROF' $\geq$ PROF deben tener POLL' $>$ POLL.

Esto significa que (POLL, PROF) no puede ser dominado, de modo que está en la curva de transacción. Eligiendo cualquier valor de POLL $> 2\,400$ no se obtienen nuevos puntos en la curva de transacción. (¿Por qué?) Así, como siguiente paso se elige POLL $= 2\,300$. Entonces LINDO produce un valor óptimo de z de $4\,266.67$ y $10x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2\,300$. Por lo tanto, el punto (2 300, 4 266.67) está en la curva de transacción. A continuación, se

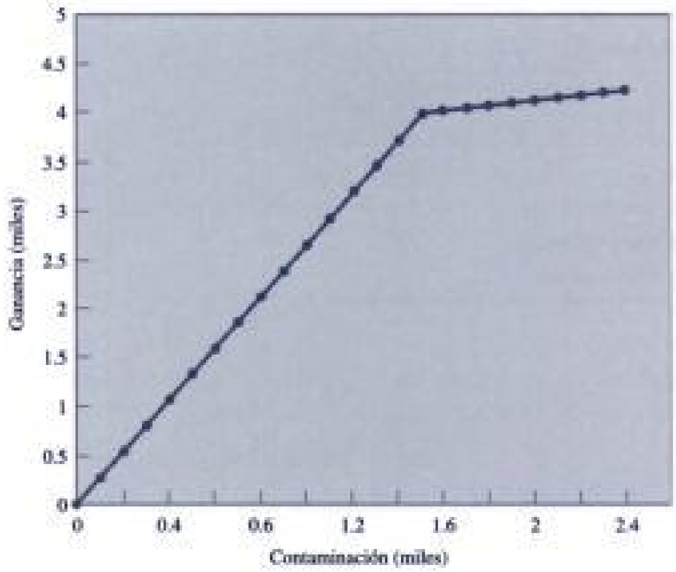


FIGURA 53
Ejemplo de curva de transacción

cambia POLL a 2 200 y se obtiene el punto (2 200, 4 233.33 en la curva de transacción. Continuando de este modo, con POLL = 2 100, 2 000, 1 900, . . . 0, se obtiene una curva de transacción entre ganancia y contaminación que se ilustra en la figura 53.

En un problema con varios objetivos en el cual tanto restricciones como objetivos son funciones lineales, la curva de transacción será una curva lineal por partes (es decir, la gráfica consistirá en un número de segmentos lineales de pendientes diferentes). Ahora, se da un ejemplo de curva de transacción para un problema en el que los objetivos son funciones no lineales.

EJEMPLO 39 Curva de transacción no lineal

Proctor y Ramble se anuncian en los juegos de futbol y comedias. Si F anuncios de un minuto se colocan en los juegos de futbol y S anuncios de un minuto se colocan en las comedias, entonces el número de hombres y mujeres (en millones) que ven los anuncios y el costo de los mismos (en miles) se dan en la tabla 19. P & R tienen $1 millón de presupuesto para publicidad y sus dos objetivos son maximizar el número de hombres y mujeres que ven sus anuncios. Construya una curva de transacción para esta situación.

Solución Para encontrar un primer punto en la curva de transacción, ignoremos el objetivo de maximizar el número de mujeres que ven los anuncios y sólo se maximiza el número de hombres que ven los anuncios. Esto requiere resolver el siguiente PL:

$$\begin{aligned} &\max z = 20\sqrt{F} + 4\sqrt{S} \\ &\text{s.a} \qquad 100F + 60S \le 1\,000 \\ &\qquad\qquad F \ge 0, S \ge 0 \end{aligned} \tag{90}$$

TABLA 19
Datos de publicidad

Tipo de anuncio	Hombres que ven el anuncio	Mujeres que ven el anuncio	Costo por anuncio (miles de dólares)
Futbol	$20\sqrt{F}$	$4\sqrt{F}$	100
Comedia	$4\sqrt{S}$	$15\sqrt{S}$	60

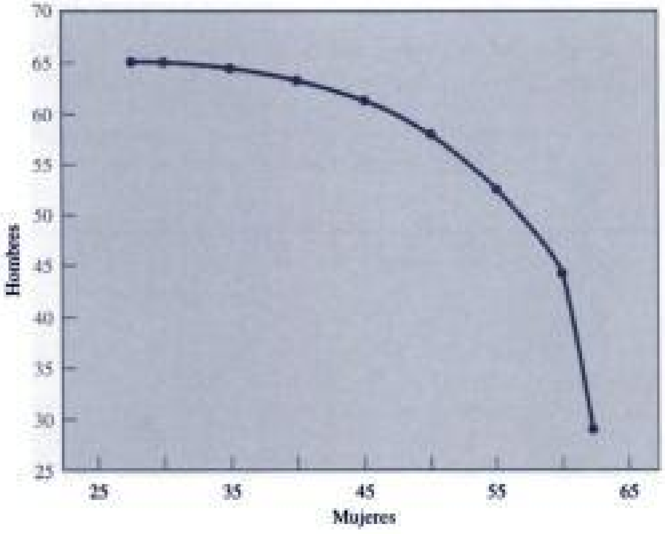


FIGURA 54
Curva de transacción para el ejemplo de publicidad

LINGO produce la solución óptima $z = 65.32$, $F = 9.38$, $S = 1.04$. Esta solución llega a $4\sqrt{9.38} + 15\sqrt{1.04} = 27.55$ millones de mujeres. Si se elige colocar el objetivo mujeres en el eje de las x y el objetivo hombres en el eje de las y, esto da lugar al punto (27.55, 65.32) en la curva de transacción. Para obtener otros puntos en la curva de transacción, elija cualquier valor $W \geq 0$ y agregue la restricción $4\sqrt{F} + 15\sqrt{S} \geq W$ a (80).

Esto produce el PNL (81):

$$\begin{aligned} \max z &= 20\sqrt{F} + 4\sqrt{S} \\ \text{s.a} \quad & 100F + 60S \leq 1\,000 \\ & 4\sqrt{F} + 15\sqrt{S} \geq W \\ & F \geq 0, S \geq 0 \end{aligned} \tag{81}$$

Suponga que la solución óptima para (81) es única y produce un valor de z de M. Entonces el punto de (W, M) está sobre la curva de transacción. Para ver esto, observe que cualquier punto (W', M') que domina (W, M) debe tener $W' \geq W$. El hecho de que (W, M) sea la solución única para (81) implica que los puntos factibles (con excepción de (W, M) tendrán $M' < M$. Esto significa que (W, M) no puede ser dominado, así que está en la curva de transacción. Usando LINGO para resolver (81) con $W = 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60$, y 62.5 se obtiene la curva de transacción de la figura 54. A propósito, se corta la curva en $W = 62.5$, debido a que la restricción de presupuesto limita el número máximo de mujeres que ven los anuncios a 62.5.

Resumen del procedimiento de la curva de transacción

El procedimiento utilizado para construir las curvas de transacción entre dos objetivos se podría resumir como sigue:

Paso 1 Elija un objetivo (por ejemplo, el objetivo 1) y determine el mejor valor de este objetivo que se pueda lograr (llámelo v_1). Para la solución que alcanza a v_1, encuentre el valor del objetivo 2 (llámelo v_2). Entonces (v_1, v_2) es un punto en una curva de transacción.

Paso 2 Para valores v del objetivo 2 que son mejores que v_2, resuelva el problema de optimización en el paso 1 con la restricción adicional: el valor del objetivo 2 es por lo menos tan bueno como v. Al variar v (en valores de v preferidos con respecto a v_2) se obtienen otros puntos en la curva de transacción.

Paso 3 En el paso 2, se obtiene un punto final de la curva de transacción. Si se determina el mejor valor del objetivo 2 que se puede lograr, se obtiene el punto final de la curva de transacción.

OBSERVACIÓN En situaciones en las que hay más de dos objetivos, a menudo es útil examinar las curvas de transacción entre diferentes pares de objetivos.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Widgetco produce dos tipos de dispositivos. Cada dispositivo se construye con acero y aluminio y se ensambla con mano de obra calificada. Los recursos utilizados y la contribución de ganancia por unidad (ignorando el costo de mano de obra de tiempo extra comprada) para cada tipo de dispositivo se dan en la tabla 20. En la actualidad, están disponibles 200 unidades de acero y 300 unidades de aluminio y 300 horas de mando de obra. La mano de obra en tiempo extra cuesta \$10 por hora. Construya una curva de intercambio entre los objetivos de maximizar la ganancia y minimizar la mano de obra en tiempo extra.

2 Plantco produce tres productos. Plantco cuenta con tres obreros y la compañía debe determinar qué producto(s) debe producir cada trabajador. El número de unidades que cada obrero produciría si pasara todo el día produciendo cada tipo de producto, se da en la tabla 21.

La compañía también está interesada en maximizar la felicidad de los obreros. La cantidad de felicidad obtenida por un trabajador que pasó todo el día produciendo un determinado producto, se da en la tabla 22.

Construya una curva de transacción entre los objetivos de maximizar las unidades totales producidas diariamente y la felicidad total del trabajador.

3 Una compañía gasta $\$a$ en publicidad y carga un precio de $\$p$ por unidad, luego vende $1\,000 - 100p + 20a^{1/2}$ unidades de producto. El costo por unidad de producir el producto es \$6. Construya una curva de comercialización entre los objetivos de ganancia y unidades vendidas.

TABLA 20

Recurso	Tipo de dispositivo 1	2
Acero (lb)	6	12
Alumnio (lb)	8	20
Mano de obra calificada (horas)	11	24
Contribución ganancia (\$)	500	1 100

TABLA 21

Trabajador	Producto 1	2	3
1	20	12	10
2	12	15	9
3	6	5	10

TABLA 22

Trabajador	Producto 1	2	3
1	6	8	10
2	6	5	9
3	9	10	8

4 GMCO produce tres tipos de automóviles: compactos, medianos y grandes. El costo variable por automóvil (en miles de dólares) y la capacidad de producción para cada tipo de automóvil, se dan en la tabla 23.

La demanda anual para cada tipo de automóvil depende de los precios de los tres tipos de automóviles, dada en la tabla 24. Aquí, PC = precio cargado para automóvil compacto (en miles de dólares), etcétera.

Suponga que cada compacto logra 30 mpg, cada automóvil mediano recorre 25 mpg y cada automóvil grande consigue 18 mpg. GMCO quiere mantener libre de contaminación al planeta, así que además de maximizar la ganancia, quiere maximizar la millas promedio por galón que logran los automóviles que vende. Utilice LINGO para construir una curva de transacción entre estos objetivos.

5 Considere el análisis de acelerar la duración del proyecto de Widgetco dado en la sección 8.4. Para este ejemplo, construya una curva de transacción entre el costo de acelerar el proyecto y la duración del mismo.

6 Para el ejemplo 35 de la sección 11.10, construya una curva de transacción entre el rendimiento esperado de la cartera elegida y la varianza. Esto suele llamarse *frontera eficiente*.

TABLA 23

Tipo de automóvil	Costo variable (\$ miles)	Capacidad de producción (por año)
Compacto	10	2 000
Mediano	14	1 500
Grande	18	1 000

TABLA 24

Tipo de automóvil	Demanda del automóvil
Compacto	$2\,500 - 100(PC) + 3(PM)$
Mediano	$1\,800 - 30\,(PM) + 2(PC) + PL$
Grande	$1\,300 - 20\,(PL) + PM$

RESUMEN

Funciones convexas y cóncavas

Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una **función convexa** sobre un conjunto convexo S si para cualquier $x' \in S$ y $x'' \in S$

$$f[cx' + (1 - c)x''] \leq cf(x') + (1 - c)f(x'') \tag{3}$$

se cumple para $0 \leq c \leq 1$.

Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una **función cóncava** sobre un conjunto convexo S si para cualquier $x' \in S$ y $x'' \in S$.

$$f[cx' + (1 - c)x''] \geq cf(x') + (1 - c)f(x'') \tag{4}$$

se cumple para $0 \leq c \leq 1$.

Considere un PNL. Suponga que la región factible S para un PNL es un conjunto convexo. Si $f(x)$ es una función cóncava (convexa) de S, entonces cualquier máximo (mínimo) local para el PNL es una solución óptima para el PNL.

Suponga que $f''(x)$ existe para toda x en un conjunto convexo S. Entonces $f(x)$ es una función convexa (cóncava) de S si y sólo si $f''(x) \geq 0[f''(x) \leq 0]$ para toda x en S.

Suponga que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden para cada punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. Entonces, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función convexa sobre S si y sólo si para cada $x \in S$, todos los menores principales de H son no negativos.

Suponga que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden para cada punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S$. Entonces, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función cóncava sobre S si y sólo si para cada $x \in S$ y $k = 1, 2, \ldots, n$, todos los menores principales no cero tienen el mismo signo que $(-1)^k$.

Solución de PNL con una variable

Para encontrar una solución óptima de

$$\begin{aligned} &\max \text{ (o min) } f(x) \\ &\text{s.a} \qquad x \in [a, b] \end{aligned}$$

se tienen que tomar en cuenta los tres tipos siguientes de puntos:

Caso 1 Puntos donde $f'(x) = 0$ [un punto estacionario de $f(x)$].

Caso 3 Puntos donde no existe $f'(x)$.

Caso 3 Puntos finales a y b del intervalo $[a, b]$.

Si $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, y $a < x_0 < b$, entonces x_0 es un máximo local. Si $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, y $a < x_0 < b$, entonces x_0 es un mínimo local.

Búsqueda de la sección áurea

Para determinar (dentro de ϵ) la solución óptima de

$$\begin{aligned} &\max f(x) \\ &\text{s.a} \qquad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

es posible ejecutar k iteraciones [donde $r^k(b - a) < \epsilon$] de la búsqueda la sección áurea. Se generan nuevos puntos como se indica:

Nuevo punto izquierdo Desplácese una distancia igual a una fracción r del intervalo actual de incertidumbre a partir del punto final de la derecha del intervalo de incertidumbre.

Nuevo punto derecho Desplácese una distancia igual a una fracción r del intervalo actual de incertidumbre a partir del punto final de la izquierda del intervalo de incertidumbre.

En cada iteración, uno de los puntos nuevos será igual al punto antiguo.

Problemas de maximización y minimización sin restricciones con varias variables

Un extremo local $\bar{x}$ para

$$\begin{aligned} &\max \text{ (o min) } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{s.a} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \end{aligned} \tag{7}$$

debe satisfacer $\dfrac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Si $H_k(\bar{x}) > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, entonces un punto estacionario $\bar{x}$ es un mínimo local para (7).

Si para 0 $k = 1, 2, \ldots, n$, $H_k(\bar{x})$ tiene el mismo signo que $(-1)^k$, entonces un punto estacionario $\bar{x}$ es un máximo local para (7).

Si $H_n(\bar{x}) \neq 0$ y las condiciones del teorema 7 y 7′ no se cumplen, entonces un punto estacionario $\bar{x}$ no es un extremo local.

Método del ascenso escalonado

Este método se utiliza para resolver problemas del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} &\max z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{s.a} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \end{aligned}$$

Con el fin de determinar un punto con un valor de z mayor, se avanza alejándose del punto actual (**v**) en la dirección de $\nabla f(\mathbf{v})$. La distancia que uno se aleja de **v** se elige para maximizar el valor de la función en el punto nuevo. Nos detenemos cuando $\|\nabla f(\mathbf{v})\|$ está muy cercano a cero.

Multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange se aplican en la solución de PNL del tipo siguiente:

$$\begin{aligned} &\max \text{ (o min) } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{s.a} \quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_1 \\ &\qquad\ \ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_2 \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\ \ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_m \end{aligned} \tag{12}$$

Para resolver (12), forme el lagrangiano

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i[b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

y busque puntos $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ para los cuales

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \cdots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$$

Condiciones de Kuhn-Tucker

Estas condiciones se utilizan en la resolución de PNL del tipo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\max \text{ (o min) } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\text{s.a} \quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1 \\
&\qquad\;\; g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2 \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\;\; g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m
\end{aligned} \tag{26}
$$

Suponga que (26) es un problema de maximización. Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es una solución óptima para (26), entonces $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ debe satisfacer las m restricciones en (26), y tiene que haber o existir multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ que satisfagan.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial xj} &= 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\
\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
\bar{\lambda}_i &\ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

Suponga que (26) es un problema de minimización. Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es una solución óptima para (26), entonces $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ debe satisfacer las m restricciones en (26), y tiene que hacer multiplicadores $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m$ que satisfagan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{i=m} \bar{\lambda}_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial xj} &= 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \\
\bar{\lambda}_i[b_i - g_i(\bar{x})] &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\
\bar{\lambda}_i &\ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son condiciones **necesarias** para que un punto resuelva (26). Si las $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son funciones convexas y la función objetivo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es cóncava (convexa), entonces para un problema de maximización (minimización) cualquier punto que satisfaga las condiciones de Kuhn-Tucker generará una solución óptima para (26).

Programación cuadrática

Un problema de programación cuadrática (PPC) es un PNL en el cual cada término de la función objetivo es de grado 2, 1 o 0, y todas las restricciones son lineales. El método de Wolfe (una versión modificada del simplex de dos fases) se podría usar también para resolver PPC.

Programación separable

Si es posible escribir un PNL en la forma siguiente

$$
\begin{aligned}
&\max \text{ (o min) } z = \sum_{j=1}^{j=n} f_j(x_j) \\
&\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{j=n} g_{ij}(x_j) \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)
\end{aligned}
$$

entonces es un **problema de programación separable**. Para aproximar la solución óptima de un problema de programación separable se resuelve el **problema de aproximación** siguiente:

$$\max \text{ (o min) } \hat{z} = \sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} f_j(p_{j1}) + \delta_{j2} f_j(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} f_j(p_{j,k})]$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^{j=n} [\delta_{j1} g_{ij}(p_{j1}) + \delta_{j2} g_{ij}(p_{j2}) + \cdots + \delta_{j,k} g_{ij}(p_{j,k})] \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\delta_{j1} + \delta_{j2} + \cdots + \delta_{j,k} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\delta_{j,r} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n; r = 1, 2, \ldots, k)$$

(Para $j = 1, 2, \ldots, n$, a lo sumo dos $\delta_{j,k}$ pueden ser positivas. Si para una j dada, dos $\delta_{j,k}$ son positivas, tienen que ser adyacentes.)

Método de las direcciones factibles

Para resolver

$$\begin{aligned} \max z &= f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

se empieza con una solución factible $\mathbf{x}^0$. Sea $\mathbf{d}^0$ una solución de

$$\begin{aligned} \max z &= \nabla f(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{d} \\ \text{s.a} \quad A\mathbf{d} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Se elige como nuevo punto $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)$, donde t_0 es solución de

$$\begin{aligned} &\max f[\mathbf{x}^0 + t_0(\mathbf{d}^0 - \mathbf{x}^0)] \\ &0 \leq t_0 \leq 1 \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{d}^1$ una solución de

$$\begin{aligned} \max z &= \nabla f(\mathbf{x}^1) \cdot \mathbf{d} \\ \text{s.a} \quad A\mathbf{d} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Se escoge como nuevo punto $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1)$, donde t_1 es solución de

$$\begin{aligned} &\max f[\mathbf{x}^1 + t_1(\mathbf{d}^1 - \mathbf{x}^1)] \\ &0 \leq t_1 \leq 1 \end{aligned}$$

Se continúa generando puntos $\mathbf{x}^3, \ldots, \mathbf{x}^k$ de este modo hasta que $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1}$ o los puntos sucesivos están lo suficientemente cercanos entre sí.

Resumen del procedimiento de la curva de transacción

El procedimiento utilizado para construir curvas de transacción entre dos objetivos se resume como se indica:

Paso 1 Elija un objetivo, por ejemplo, el objetivo 1, y determine su mejor valor alcanzable v_1. Para la solución que alcanza v_1, encuentre el valor del objetivo 2, v_2. Entonces (v_1, v_2) es un punto sobre la curva de transacción.

Paso 2 Para valores v del objetivo 2 que son mejores que v_2, resuelva el problema de optimización del paso 1 con la restricción adicional de que el valor del objetivo 2 es por lo menos tan bueno como v. Si hace variar a v (sobre valores de v preferidos en lugar de v_2) se obtienen otros puntos sobre la curva de transacción.

Paso 3 En el paso 1 obtuvo un punto final de la curva de transacción. Si determina el mejor valor del objetivo 2 que se pueden alcanzar, obtiene el otro punto final de la curva.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Demuestre que $f(x) = e^{-x}$ es una función convexa sobre R^1.

2 Cinco de los principales clientes de una tienda se ubican como se ilustra en la figura 55. Determine dónde debe ubicarse la tienda para minimizar la suma de los cuadrados de las distancias que cada cliente tendría que recorrer hasta la tienda. ¿Es capaz de generalizar este resultado al caso de n clientes localizados en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

3 Una compañía utiliza una cierta materia prima para elaborar dos tipos de productos. Luego de procesarse, cada unidad de materia prima rinde dos unidades de producto 1 y una unidad de producto 2. Si x_1 unidades de producto 1 se fabrican, entonces cada unidad se puede vender en 49 dólares $- x_1$, si x_2 unidades de producto 2 se producen, entonces cada unidad se puede vender en 30 dólares $- 2x_2$. Cuesta 5 dólares comprar y procesar cada unidad de materia prima.

a Determine mediante las condiciones de Kuhn-Tucker cómo puede la compañía maximizar las utilidades.

b Utilice LINGO o el método de Wolfe para determinar cómo puede la compañía maximizar sus ganancias.

c ¿Cuánto es lo más que la compañía estaría dispuesta a pagar por una unidad extra de materia prima?

4 Demuestre que $f(x) = |x|$ es una función convexa sobre R^1.

5 Aplique la búsqueda de la sección áurea para localizar, dentro de 0.5, la solución óptima de

$$\begin{aligned} &\max\ 3x - x^2 \\ &\text{s.a} \quad 0 \le x \le 5 \end{aligned}$$

6 Ejecute dos iteraciones del método del ascenso escalonado con el fin de maximizar

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)e^{-(x_1+x_2)} - x_1$$

Empiece en el punto (0,1).

7 El costo de producir x unidades de un producto durante un mes es x^2 dólares. Determine el método del costo mínimo para producir 60 unidades durante los tres meses siguientes. ¿Puede generalizar este resultado al caso donde el costo para producir x unidades durante un mes es una función convexa creciente?

8 Resuelva el PNL siguiente:

$$\begin{aligned} &\max\ z = xyw \\ &\text{s.a} \quad 2x + 3y + 4w = 36 \end{aligned}$$

FIGURA 55

9 Resuelva el PNL siguiente:

$$\begin{aligned} &\min\ z = \tfrac{50}{x} + \tfrac{20}{y} + xy \\ &\text{s.a} \quad x \ge 1, y \ge 1 \end{aligned}$$

10 Si una compañía carga un precio p a un producto y gasta a dólares en publicidad, puede vender $10\,000 + 5\sqrt{a} - 100p$ unidades del producto. Si la fabricación de cada unidad de producto cuesta 10 dólares, entonces ¿cómo puede la compañía maximizar las ganancias?

11 Una compañía puede producir L $L^{1/3}M^{2/3}$ unidades de disco para computadora con L horas de mano de obra y M horas de máquina. Cada unidad de disco se vende en 150 dólares. Si la mano de obra se puede comprar en 50 dólares la hora y las horas de máquina se pueden comprar a 100 dólares la hora, diga qué puede hacer la compañía para maximizar las ganancias.

Grupo B

12 En el tiempo t, un árbol puede crecer hasta un tamaño $F(t)$, donde $F'(t) \ge 0$ y $F''(t) < 0$. Suponga que para un tiempo t, grande $F'(t)$ es cercano a 0. Si el árbol se corta en el tiempo t, entonces se recibe un ingreso $F(t)$. Suponga que los ingresos se descuentan en forma continua a una tasa r, de modo que 1 dólar recibido en el tiempo t equivale a e^{-rt} dólares recibidos en el tiempo 0. El objetivo es cortar el árbol en el tiempo t^* que maximiza el ingreso descontado. Demuestre que el árbol se debe cortar en el tiempo t^* que satisface la ecuación

$$r = \frac{F'(t^*)}{F(t^*)}$$

En la respuesta explique por qué (si $\frac{F'(0)}{F(0)} > r$) esta ecuación tiene solución única. También demuestre que la respuesta es un máximo, no un mínimo. [*Sugerencia*: ¿por qué es suficiente elegir t^* para maximizar $\ln(e^{-rt}F(t))$?]

13 Suponga que contratamos un meteorólogo para que prediga las probabilidades de que el verano próximo sea lluvioso o soleado. Lo siguiente sugiere un método que se puede aplicar para asegurar que el meteorólogo es preciso. Suponga que la probabilidad real de que llueva el próximo verano es q. Con el afán de simplificar el problema, suponga además que el verano sólo puede ser lluvioso o soleado. Si el meteorólogo anuncia una probabilidad p de que el verano será lluvioso, entonces recibe un pago de $1 - (1 - p)^2$ si el verano es lluvioso y un pago de $1 - p^2$ si el verano es soleado. Demuestre que el meteorólogo maximizará las utilidades esperadas al anunciar que la probabilidad de un verano lluvioso es q.

14 Demuestre que si $b > a \geq e$, entonces $a^b > b^a$. Con ayuda de este resultado demuestre que $e^\pi > \pi^e$. [*Sugerencia*: demuestre que max$(\frac{\ln x}{x})$ sobre $x \geq a$ ocurre para $x = a$.]

15 Considere los puntos (0, 0), (1, 1) y (2, 3). Plantee una PNL cuya solución dé el círculo de radio mínimo que encierre estos tres puntos. Utilice LINGO para resolver el PNL.

16 El costo de producción de x unidades de un producto durante un mes es $x^{1/2}$ dólares. Demuestre que el método del costo mínimo para producir 40 unidades durante los dos meses siguientes, es elaborar las 40 unidades durante un solo mes. ¿Es posible generalizar este resultado al caso donde el costo de producción de x unidades durante un mes es una función cóncava creciente?

17 Considere el problema

$$\begin{aligned} &\max z = f(x) \\ &\text{s.a} \quad a \leq x \leq b \end{aligned}$$

a Suponga que $f(x)$ es una función convexa que tiene derivadas para todos los valores de x. Demuestre que $x = a$ o $x = b$ debe ser óptima para el PNL. (Trace un esquema.)

b Suponga que $f(x)$ es una función convexa para la cual $f'(x)$ podría no existir. Demuestre que $x = a$ o $x = b$ debe ser óptima para el PNL. (Utilice la definición de una función convexa.)

18 Reconsidere el problema 2. Suponga que la tienda debe estar ahora en tal sitio que sea mínima la distancia total que los clientes deben caminar hasta ella. ¿Dónde se debe situar la tienda? (*Sugerencia*: utilice el problema 4 y el hecho de que para cualquier función convexa un mínimo local resolverá el PNL; luego demuestre que ubicar la tienda donde vive uno de los clientes genera un mínimo local.) ¿Se puede generalizar el resultado?

19† Una compañía utiliza cierta materia prima para elaborar dos productos. Por c dólares, una unidad de materia prima se puede comprar y procesar en k_1 unidades del producto 1 y k_2 unidades del producto 2. Si se elaboran x_1 unidades del producto 1 se pueden vender en $p_1(x_1)$ dólares por unidad. Si se elaboran x_2 unidades del producto 2, se pueden vender en $p_2(x_2)$ dólares por unidad. Sea z la cantidad de unidades de materia prima que se compran y procesan. Para maximizar las ganancias (ignorando las restricciones de no negatividad) se debe resolver el PNL siguiente:

$$\begin{aligned} \max\ w &= x_1p_1(x_1) + x_2p_2(x_2) - cz \\ \text{s.a} \quad & x_1 \leq k_1z \\ & x_2 \leq k_2z \end{aligned}$$

a Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker para este problema. Representemos con $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ la solución óptima de este problema.

b Considere una versión modificada del problema. La compañía puede comprar ahora cada unidad del producto 1 por $\bar{\lambda}_1$ dólares y cada unidad del producto por $\bar{\lambda}_2$ dólares. Demuestre que si la compañía trata de maximizar las utilidades en esta situación, producirá, como en el inciso (a) $\bar{x}_1$ unidades del producto 1 y $\bar{x}_2$ unidades del producto 2. Demuestre también que ganancias y costos de producción se mantienen sin cambios.

c Proporcione una interpretación de $\bar{\lambda}_1$ y $\bar{\lambda}_2$ que pueda ser útil para el contador de la compañía.

20 El área de un triángulo cuyos lados con a, b y c es $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde s es la mitad del perímetro del triángulo. Contamos con 60 pies de alambre para cerca, y queremos cercar un área triangular. ¿Cómo podemos maximizar el área cercada?

21 La energía utilizada para comprimir un gas (en tres etapas) a partir de una presión inicial I hasta una presión final F se obtiene con

$$K\left\{\sqrt{\frac{p_1}{I}} + \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} + \sqrt{\frac{F}{p_2}} - 3\right\}$$

Determine cómo se puede minimizar la energía usada para comprimir el gas.

22 Demuestre el lema 1 (utilice multiplicadores de Lagrange).

BIBLIOGRAFÍA

En las siguientes obras, se resaltan los aspectos teóricos de la programación no lineal:

Bazaraa, M., H. Sherali y C. Shetty. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Nueva York: John Wiley, 1993.

Bertsetkas, D. *Nonlinear Programming. Cambridge*, Mass.: Athena Publishing, 1995.

Luenberger, D. *Linear and Nonlinear Programming*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1984.

Mangasarian, O. *Nonlinear Programming*. Nueva York: McGraw-Hill, 1969.

McCormick, G. *Nonlinear Programming: Theory, Algorithms, and Applications*. Nueva York: Wiley, 1983.

Shapiro, J. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*. Nueva York: Wiley, 1979.

Zangwill, W. *Nonlinear Programming*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1969.

En el siguiente libro, se destacan varios algoritmos de programación no lineal:

Rao, S. *Optimization Theory and Applications. Nueva Delhi: Wiley Eastern ldt., 1979.*

†Basado en Littlechild, "Marginal Pricing" (1970).

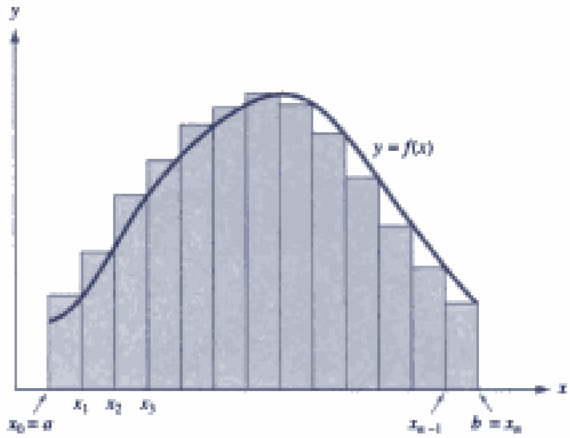


FIGURA 1
Relación entre área e integral definida

Para dos funciones $u(x)$ y $v(x)$,

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \qquad \text{(Integración por partes)}$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^{f(x)}f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$$

El concepto de integral es importante por las razones siguientes. Considere una función $f(x)$ que es continua para todos los puntos que satisfacen a $a \leq x \leq b$. Sea $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + \Delta$, $x_2 = x_1 + \Delta, \ldots, x_i = x_{i-1} + \Delta$, $x_n = x_{n-1} + \Delta = b$, donde $\Delta = \frac{b-a}{n}$. En la figura 1 se observa que a medida que Δ se aproxima a cero (o, de manera equivalente, a medida que n se incrementa),

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\,\Delta$$

se aproximará mucho al área bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$. Si $f(x)$ es continua para toda x que satisfaga $a \leq x \leq b$, se puede demostrar que el área bajo la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se obtiene con

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\Delta$$

que se expresa como

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

o **integral definida** de $f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$. El teorema fundamental del cálculo establece que si $f(x)$ es continua para toda x que satisfaga $a \leq x \leq b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier integral indefinida de $f(x)$. $F(b) - F(a)$ se escribe a menudo como $[F(x)]_a^b$. El uso de la integral definida se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Un cliente llega a un banco

Suponga que en el tiempo t (medido en horas, y el presente $t = 0$), la tasa $a(t)$ a la cual los clientes llegan al banco es $a(t) = 100t$. Durante las dos horas siguientes, ¿cuántos clientes entrarán al banco?

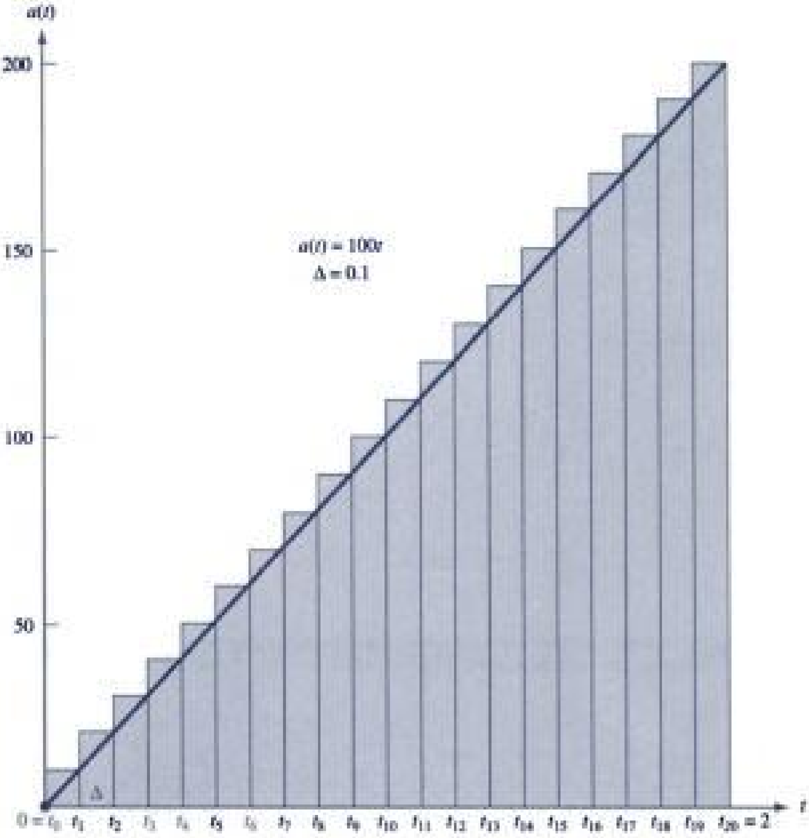


FIGURA 2
Relación entre el total de llegadas en las 2 horas siguientes y el área bajo la curva $a(t)$

Solución Sea $t_0 = 0, t_1 = t_0 + \Delta, t_2 = t_1 + \Delta, \ldots, t_n = t_{n-1} + \Delta = 2$ (naturalmente, $\Delta = \frac{2}{n}$). Entre el tiempo t_{i-1} y el tiempo t_i llegan alrededor de $100t_i\Delta$ clientes. Por lo tanto, la cantidad total de clientes que llega durante las 2 horas siguientes es igual a

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{i=n} 100t_i\Delta$$

(véase figura 2). Según el teorema fundamental del cálculo,

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{i=n} 100t_i\Delta = \int_0^2 (100t)\, dt = [50t^2]_0^2 = 200 - 0 = 200$$

Por lo tanto, llegarán 200 clientes durante las 2 horas siguientes.

PROBLEMAS

Grupo A

1 El presente es $t = 0$. En el tiempo t años a partir de ahora tendré ingresos a razón de e^{2t}. ¿Cuánto dinero ganaré durante los próximos 5 años?

2 Si se descuenta en forma continua dinero a una tasa de r% por año, entonces 1 dólar ganado t años en el futuro equivale a e^{-rt} dólares ganados en el tiempo actual. Apóyese en este hecho para determinar el valor actual del ingreso ganado en el problema 1.

3 En el tiempo 0, una compañía tiene I unidades de inventario en existencia. Los clientes demandan el producto a una tasa constante de d unidades por año (suponga que $I \geq d$). El costo de conservar 1 unidad de la existencia en inventario por un tiempo Δ es $h\Delta$ dólares. Determine el costo total por conservar el producto en el que se incurre durante el año próximo.

12.2 Diferenciación de integrales

En el estudio de teoría del inventario en el capítulo 16, se tiene que diferenciar una función cuyo valor depende de la integral. Sea $f(x, y)$ una función de variables x y y, y sean $g(y)$ y $h(y)$ funciones de y. Entonces,

$$F(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx$$

es una función sólo de y. La **regla de Leibniz para diferenciar una integral** establece que

$$\text{Si} \qquad F(y) = \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx, \qquad \text{entonces}$$

$$F'(y) = h'(y)f(h(y), y) - g'(y)f(g(y), y) + \int_{g(y)}^{h(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx$$

La regla de Leibniz se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Regla de Leibniz

Para

$$F(y) = \int_1^{y^2} \frac{y\, dx}{x}$$

encuentre $F'(y)$.

Solución Tenemos que $f(x, y) = \frac{y}{x}$, $h(y) = y^2$, $h'(y) = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$, $g(y) = 1$, $g'(y) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} F'(y) &= 2y\left(\frac{y}{y^2}\right) - 0\left(\frac{y}{1}\right) + \int_1^{y^2} \frac{dx}{x} \\ &= 2 + [\ln x]_1^{y^2} = 2 + \ln y^2 - 0 = 2 + 2\ln y \end{aligned}$$

PROBLEMAS

Grupo A

En cada una de las funciones siguientes aplique la regla de Leibniz para determinar $F'(y)$:

1 $F(y) = \int_y^{y^2} (2y + x)\, dx$

2 $F(y) = \int_0^y yx^2\, dx$

3 $F(y) = \int_0^y 6(5 - x)f(x)\, dx + \int_y^\infty 4(x - 5)f(x)\, dx$

12.3 Reglas básicas de probabilidad

En esta sección se repasan algunas reglas y definiciones básicas que usted habrá encontrado en sus estudios previos de probabilidad.

DEFINICIÓN ■ Cualquier situación donde el resultado es incierto se llama **experimento.** ■

Por ejemplo, sacar una carta de un mazo de cartas sería un experimento.

DEFINICIÓN ■ Para cualquier experimento, el **espacio muestral** S del experimento consiste en todos los resultados posibles del experimento. ■

Por ejemplo, si lanzamos un dado y estamos interesados en la cantidad de puntos que salen, entonces $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

DEFINICIÓN ■ Un **evento** E es cualquier colección de puntos (conjunto de resultados) en el espacio muestral.

Se dice que los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son **mutuamente excluyentes** si para $i \neq j$ ($i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$), E_i y E_j no tienen puntos en común. ■

Con todo evento E está asociado un $\bar{E}$. $\bar{E}$ consiste en los puntos del espacio muestral que no están en E. También se puede asociar con cada evento E un número $P(E)$, el cual es la probabilidad de que el evento E ocurra cuando efectuamos el experimento. Las probabilidades de los eventos deben satisfacer las reglas siguientes de la probabilidad:

Regla 1 Para cualquier evento E, $P(E) \geq 0$.

Regla 2 Si $E = S$ (es decir, si E contiene todos los puntos que se encuentran en el espacio muestral), entonces $P(E) = 1$.

Regla 3 Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ es una colección de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{k=1}^{k=n} P(E_k)$$

Regla 4 $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

DEFINICIÓN ■ Para dos eventos E_1 y E_2, $P(E_2|E_1)$ (la **probabilidad condicional** de E_2 dado E_1) es la probabilidad de que el evento E_2 ocurrirá dado que el evento E_1 ya ocurrió. Entonces,

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} \quad ■ \tag{1}$$

Suponga que los eventos E_1 y E_2 ocurren con probabilidad positiva. Los eventos E_1 y E_2 son **independientes** si y sólo si $P(E_2|E_1) = P(E_2)$ (o, en forma equivalente, $P(E_1|E_2) = P(E_1)$). ■

Por lo tanto, los eventos E_1 y E_2 son independientes si y sólo si el conocimiento de que ha ocurrido E_1 no cambia la probabilidad de que E_2 ha ocurrido, y viceversa. A partir de (1), E_1 y E_2 son independientes si y sólo si

$$\frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)} = P(E_2) \qquad \text{o} \qquad P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\,P(E_2) \tag{2}$$

EJEMPLO 3 Extracción de una carta

Suponga que sacamos una carta de un mazo de 52 cartas.

1 ¿Cuál es la probabilidad de que salga un corazón o una pica?

2 ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta, ésta no sea 2?

3 Dado que se sacó una carta roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de diamantes? ¿Los eventos

$$E_1 = \text{se saca una carta roja}$$
$$E_2 = \text{se saca un diamante}$$

son independientes?

4 Demuestre que los eventos

$$E_1 = \text{se saca una pica}$$
$$E_2 = \text{se saca un 2}$$

son eventos independientes.

Solución **1** Defina los eventos

$$E_1 = \text{se saca un corazón}$$
$$E_2 = \text{se saca una pica}$$

Los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes con $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{4}$. Buscamos $P(E_1 \cup E_2)$. De acuerdo con la regla 3 de la probabilidad

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = (\tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}$$

2 Defina el evento E = se saca un 2. Entonces $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Buscamos $P(\overline{E})$. De acuerdo con la regla de la probabilidad 4, $P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

3 De (1),

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$P(E_2|E_1) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Como $P(E_2) = \frac{1}{4}$, vemos que $P(E_2|E_1) \neq P(E_2)$. Por lo tanto, E_1 y E_2 no son eventos independientes. (Esto es porque al saber que se sacó una carta roja hay mayor probabilidad de que haya sido de diamantes.)

4 $P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(E_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, y $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52}$. Puesto que $P(E_1)\,P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$, E_1 y E_2 son eventos independientes. Intuitivamente, como $\frac{1}{4}$ de todas las cartas del mazo son picas, y $\frac{1}{4}$ de todas las cartas 2 del mazo son picas, al saber que se ha sacado un 2, no cambia la probabilidad de que la carta extraída sea una pica.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que se lanzan dos dados (es igualmente probable para cada dado que salga 1, 2, 3, 4, 5 o 6).

a ¿Cuál es la probabilidad de que el total de los dos dados sea 7 u 11?

b ¿Cuál es la probabilidad de que el total de los dos dados sea un número distinto de 2 o de 12?

c ¿Los eventos

E_1 = el primer dado es 3

E_2 = el total de los dos dados es 6

son independientes?

d Los eventos

E_1 = el primer dado es 3

E_2 = el total de los dos dados es 7

son independientes?

e Dado que el total de los dos dados es 5, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer dado salga 2?

f Dado que en el primer dado cayó 5, ¿cuál es la probabilidad de que el total de los dos dados sea par?

12.4 Regla de Bayes

Una decisión importante depende, a menudo, de la "situación del mundo". Por ejemplo, tal vez quisiéramos saber si una persona padece tuberculosis. Entonces tendría que interesarnos la probabilidad de las situaciones siguientes en el mundo:

S_1 = la persona tiene tuberculosis

S_2 = la persona no tiene tuberculosis

Podrían ocurrir, más generalmente, n situaciones del mundo mutuamente excluyentes (S_1, $S_2, \ldots, S_n$). Las situaciones del mundo son **colectivamente exhaustivas**: $S_1, S_2, \ldots, S_n$ comprenden todas las posibilidades. Suponga que quien toma las decisiones asigna una probabilidad $P(S_i)$ a S_i. $P(S_i)$ es la **probabilidad a priori** de S_i. Para obtener más información acerca de la situación del mundo, quien toma las decisiones podría observar el resultado de un experimento. Suponga que por cada resultado posible O_j y cada situación posible del mundo S_i, quien toma las decisiones conoce $P(O_j|S_i)$, la **verosimilitud** del resultado O_j dada la situación del mundo S_i. La regla de Bayes combina las probabilidades a priori y las verosimilitudes con los resultados experimentales para determinar una probabilidad pos experimental o **probabilidad a posteriori**, para cada situación del mundo. Para deducir la regla de Bayes, observe que (1) implica que

$$P(S_i|O_j) = \frac{P(S_i \cap O_j)}{P(O_j)} \tag{3}$$

De acuerdo con (1), se infiere que

$$P(S_i \cap O_j) = P(O_j|S_i)P(S_i) \tag{4}$$

Las situaciones del mundo $S_1, S_2, \ldots S_n$, son colectivamente exhaustivas, de tal modo que el resultado experimental O_j (si acaso ocurre) tiene que presentarse con una de las S_i (véase figura 3). Como $S_1 \cap O_j, S_2 \cap O_j, \ldots, S_n \cap O_j$ son eventos mutuamente excluyentes, la regla 3 de la probabilidad implica que

$$P(O_j) = P(S_1 \cap O_j) + P(S_2 \cap O_j) + \cdots + P(S_n \cap O_j) \tag{5}$$

Las probabilidades de la forma $P(S_i \cap O_j)$ se conocen como **probabilidades conjuntas**, y las probabilidades $P(O_j)$ se llaman **probabilidades marginales.** Al sustituir (4) en (5) obtenemos

$$P(O_j) = \sum_{k=1}^{k=n} P(O_j|S_k)P(S_k) \tag{6}$$

$P(O_j) = P(O_j \cap S_1) + P(O_j \cap S_2) + P(O_j \cap S_3) + P(O_j \cap S_4)$

Área sombreada = resultado O_j

FIGURA 3
Ejemplificación de la ecuación (5)

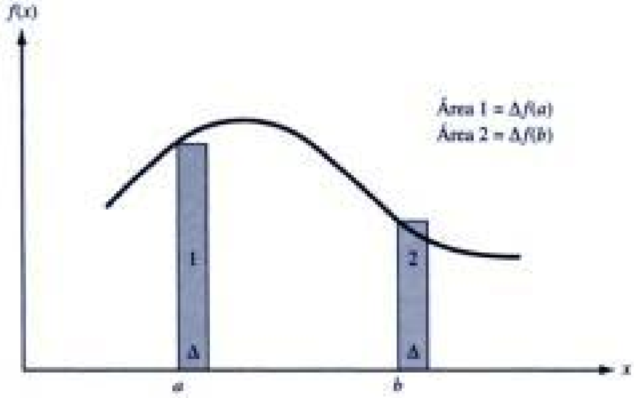


FIGURA 5
Ilustración de la función de densidad de la probabilidad

EJEMPLO 6 **Función de la distribución acumulativa**

Considere una variable aleatoria continua **X** que tiene una función de densidad $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine la fda para **X**. También encuentre $P(\frac{1}{4} \leq \mathbf{X} \leq \frac{3}{4})$.

Solución Paso $a \leq 0$, $F(a) = 0$. Para $0 \leq a \leq 1$,

$$F(a) = \int_0^a 2x\, dx = a^2$$

Para $a \geq 1$, $F(a) = 1$. $F(a)$ se grafica en la figura 6.

$$P(\tfrac{1}{4} \leq \mathbf{X} \leq \tfrac{3}{4}) = \int_{1/4}^{3/4} 2x\, dx = [x^2]_{1/4}^{3/4} = (\tfrac{9}{16}) - (\tfrac{1}{16}) = \tfrac{1}{2}$$

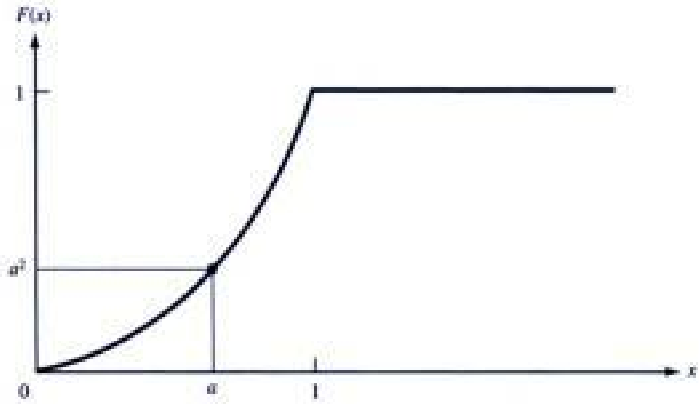


FIGURA 6
Función de la distribución acumulativa para el ejemplo 6

Media y varianza de una variable aleatoria

La **media** (o valor esperado) y la **varianza** son dos medidas importantes que se utilizan a menudo para resumir la información contenida en una distribución de la probabilidad de la variable. La media de una variable aleatoria **X** (escríbase $E(\mathbf{X})$) es una medida de tendencia central para la variable aleatoria.

Solución

$$E(\mathbf{X}) = (\tfrac{1}{6})(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \tfrac{21}{6} = \tfrac{7}{2}$$

$$\text{var } \mathbf{X} = (\tfrac{1}{6})[(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2] = \tfrac{35}{12}$$

EJEMPLO 8 Variable aleatoria continua

Determine la media y la varianza para la variable aleatoria continua **X** cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si no sucede asi} \end{cases}$$

Solución

$$E(\mathbf{X}) = \int_0^1 x(2x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{var } \mathbf{X} = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}\right) 2x\,dx$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{8x^3}{9} + \frac{8x^2}{18}\right]_0^1 = \frac{1}{18}$$

Variables aleatorias independientes

DEFINICIÓN ■ Dos variables aleatorias **X** y **Y** son independientes si y sólo si para cualquier par de conjuntos A y B,

$$P(\mathbf{X} \in A \text{ y } \mathbf{Y} \in B) = P(\mathbf{X} \in A)P(\mathbf{Y} \in B) \quad ■$$

A partir de esta definición, es posible demostrar que **X** y **Y** son variables aleatorias independientes si y sólo si el conocimiento acerca del valor de **Y** no cambia la probabilidad de cualquier evento que tenga que ver con **X**. Por ejemplo, suponga que **X** y **Y** son variables aleatorias independientes. Esto quiere decir que cuando $\mathbf{Y} = 8$, $\mathbf{Y} = 10$, $\mathbf{Y} = 0$, o $\mathbf{Y} =$ cualquier valor, $P(\mathbf{X} \geq 10)$ será la misma. Si **X** y **Y** son independientes, entonces $E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y})$. (La variable aleatoria **XY** tiene un valor esperado igual al producto del valor esperado de **X** y el valor esperado de **Y**.)

La definición de independencia se generaliza a situaciones donde más de dos variables aleatorias son de interés. En términos generales, un grupo de n variables aleatorias es independiente si el conocimiento de los valores de cualquier subconjunto de variables aleatorias no modifica la opinión que tengamos de la distribución de cualquiera de las otras variables aleatorias. (Véase problema 5 al final de esta sección.)

Covarianza de dos variables aleatorias

Un concepto importante en el estudio de los modelos financieros es la covarianza. Para dos variables aleatorias **X** y **Y**, la **covarianza** de **X** y **Y** (escríbase cov(**X**, **Y**) se define como

$$\text{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E\{[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})][\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})]\} \tag{13}$$

Si $\mathbf{X} > E(\mathbf{X})$ tiende a ocurrir cuando $\mathbf{Y} > E(\mathbf{Y})$, y $\mathbf{X} < E(\mathbf{X})$ tiende a presentarse cuando $\mathbf{Y} < E(\mathbf{Y})$, entonces cov(**X**, **Y**) será positiva. En cambio, si $\mathbf{X} > E(\mathbf{X})$ tiende a ocurrir cuando $\mathbf{Y} < E(\mathbf{Y})$ y $\mathbf{X} < E(\mathbf{X})$ tiende a ocurrir cuando $\mathbf{Y} > E(\mathbf{Y})$, entonces cov(**X**, **Y**) será negativa. El valor de cov(**X**, **Y**) mide la asociación (en este caso, la asociación lineal) entre las variables aleatorias **X** y **Y**. Se puede demostrar que si **X** y **Y** son variables aleatorias independientes, entonces cov(**X**, **Y**) = 0. (No obstante, cov(**X**, **Y**) = 0 se cumple incluso si **X** y **Y** no son variables aleatorias independientes. Véase un ejemplo en el problema 6 al final de esta sección.)

EJEMPLO 9 Los veranos en Gotham City

Cada verano, en Gotham City se clasifica como verano lluvioso o verano soleado. Las utilidades que obtienen las dos industrias líderes de Gotham City (el hotel y el centro comercial) dependen del clima de verano, según se indica en la tabla 1. De todos los veranos, 20% es lluvioso y 80% son soleados. Sean **H** y **U** las siguientes variables aleatorias:

H = ganancias obtenidas por el hotel de Gotham City durante un verano

U = ganancias obtenidas por el centro comercial de Gotham City durante un verano

Determine la cov(**H**,**U**).

Solución Encontramos que

$$E(\mathbf{H}) = .2(-1\,000) + .8(2\,000) = \$1\,400$$
$$E(\mathbf{U}) = .2(4\,500) + .8(-500) = \$500$$

Con la probabilidad 0.20, Gotham City tiene un verano lluvioso. Entonces

$$[\mathbf{H} - E(\mathbf{H})][\mathbf{U} - E(\mathbf{U})] = (-1\,000 - 1\,400)(4\,500 - 500) = -9\,600\,000(\text{dólares})^2$$

Con probabilidad 0.80, Gotham City tiene un verano soleado. Entonces

$$[\mathbf{H} - E(\mathbf{H})][\mathbf{U} - E(\mathbf{U})] = (2\,000 - 1\,400)(-500 - 500) = -600\,000(\text{dólares})^2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{cov}(\mathbf{H},\mathbf{U}) &= E\{[\mathbf{H} - E(\mathbf{H})][\mathbf{U} - E(\mathbf{U})]\} = .20(-9\,600\,000) + .80(-600\,000)\\ &= -2\,400\,000(\text{dólares})^2\end{aligned}$$

El hecho de que cov(**H**,**U**) sea negativa indica que cuando una industria va bien, la otra tiende a ir mal.

TABLA 1
Ganancias para covarianza de Gotham City

Tipo de verano	Utilidades del hotel	Utilidades del centro comercial
Lluvioso	−\$1 000	\$4 500
Soleado	\$2 000	−\$500

Media, varianza y covarianza para sumas de variables aleatorias

Creamos con frecuencia nuevas variables aleatorias a partir de variables aleatorias dadas $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ (c es una constante): $c\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_1 + c$, $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$. Las reglas siguientes se pueden usar para expresar la media, varianza y la covarianza de estas variables aleatorias en términos de $E(\mathbf{X}_1)$, $E(\mathbf{X}_2)$, var $\mathbf{X}_1$, var $\mathbf{X}_2$, y cov($\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$). El uso de estas reglas se ilustra en los ejemplos 10 y 11.

$$E(c\mathbf{X}_1) = cE(\mathbf{X}_1) \tag{14}$$

$$E(\mathbf{X}_1 + c) = E(\mathbf{X}_1) + c \tag{15}$$

$$E(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = E(\mathbf{X}_1) + E(\mathbf{X}_2) \tag{16}$$

$$\text{var } c\mathbf{X}_1 = c^2\text{var } \mathbf{X}_1 \tag{17}$$

$$\text{var}(\mathbf{X}_1 + c) = \text{var } \mathbf{X}_1 \tag{18}$$

Si $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son variables aleatorias independientes,

$$\text{var}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \text{var } \mathbf{X}_1 + \text{var } \mathbf{X}_2 \tag{19}$$

Por lo regular,

$$\text{var}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \text{var } \mathbf{X}_1 + \text{var } \mathbf{X}_2 + 2\text{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \tag{20}$$

Para las variables aleatorias $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$,

$$\text{var}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \cdots + \mathbf{X}_n) = \text{var } \mathbf{X}_1 + \text{var } \mathbf{X}_2 + \cdots + \text{var } \mathbf{X}_n + \sum_{i \neq j} \text{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \tag{21}$$

Por último, para las constantes a y b,

$$\text{cov}(a\mathbf{X}_1, b\mathbf{X}_2) = ab\,\text{cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \tag{22}$$

EJEMPLO 10 Tiro de un dado: media y varianza

Pago un dólar por participar en el siguiente juego: tiro un dado y recibo 3 dólares por cada punto que sale. Determine la media y la varianza de mi ganancia.

Solución Sea $\mathbf{X}$ la variable aleatoria que representa el número de puntos que salen cuando lanzo el dado. Entonces, el valor de la variable aleatoria $3\mathbf{X} - 1$ da mis ganancias. De acuerdo con el ejemplo 7, sabemos que $E(\mathbf{X}) = \frac{7}{2}$ y var $\mathbf{X} = \frac{35}{12}$. A su vez, las ecuaciones (15) y (14) dan

$$E(3\mathbf{X} - 1) = E(3\mathbf{X}) - 1 = 3E(\mathbf{X}) - 1 = 3(\tfrac{7}{2}) - 1 = \tfrac{19}{2}$$

A partir de las ecuaciones (18) y (17), respectivamente, se tiene

$$\text{var}(3\mathbf{X} - 1) = \text{var}(3\mathbf{X}) = 9(\text{var } \mathbf{X}) = 9(\tfrac{35}{12}) = \tfrac{315}{12}$$

EJEMPLO 11 Ganancias de Gotham City: media y varianza

Suponga que soy dueño tanto del hotel como del centro comercial del ejemplo 9. Estime la media y la varianza de la ganancia total que yo obtendría durante un verano.

Solución Las variables aleatorias $\mathbf{H} + \mathbf{U}$ dan mis ganancias totales. Por la ecuación (16) y el ejemplo 9,

$$E(\mathbf{H} + \mathbf{U}) = E(\mathbf{H}) + E(\mathbf{U}) = 1\,400 + 500 = \$1\,900$$

Ahora

$$\text{var } \mathbf{H} = .2(-1\,000 - 1\,400)^2 + .8(2\,000 - 1\,400)^2 = 1\,440\,000(\text{dólares})^2$$
$$\text{var } \mathbf{U} = .2(4\,500 - 500)^2 + .8(-500 - 500)^2 = 4\,000\,000(\text{dólares})^2$$

De acuerdo con el ejemplo 9, cov$(\mathbf{H}, \mathbf{U}) = -2\,400\,000$ (dólares)^2. Entonces, con la ecuación (20) obtengo

$$\begin{aligned}\text{var}(\mathbf{H} + \mathbf{U}) &= \text{var } \mathbf{H} + \text{var } \mathbf{U} + 2\text{cov}(\mathbf{H}, \mathbf{U}) \\ &= 1\,440\,000(\text{dólares})^2 + 4\,000\,000(\text{dólares})^2 - 2(2\,400\,000)(\text{dólares})^2 \\ &= 640\,000(\text{dólares})^2\end{aligned}$$

mediante una variable aleatoria normal $\mathbf{X}'$ que tiene $E(\mathbf{X}') = E(\mathbf{X}_1) + E(\mathbf{X}_2) + \cdots + E(\mathbf{X}_n)$ y var $\mathbf{X}' =$ var $\mathbf{X}_1 +$ var $\mathbf{X}_2 + \cdots +$ var $\mathbf{X}_n$. Este resultado se conoce como el teorema del límite central. Cuando decimos que $\mathbf{X}'$ se aproxima estrechamente a $\mathbf{X}$, queremos decir que $P(a \leq \mathbf{X}' \leq b)$.

Determinación de las probabilidades normales con ayuda de Excel

Cabe la posibilidad de determinar las probabilidades que se relacionan con variables normales estándar mediante Excel, usando la función =DISTR.NORM.ESTAND. En esta fórmula, ESTAND significa *normal estandarizada*. Por ejemplo, $P(\mathbf{Z} \leq -1)$ se puede determinar introduciendo la fórmula

Normal.xls

=DISTR.NORM.ESTAND(−1)

Excel proporciona el valor .1587. Véanse la figura 8 y el archivo Normal.xls.

La función =DISTR.NORM.ESTAND se puede usar para determinar una probabilidad normal para cualquier variable aleatoria normal (no sólo normal estándar). Si $\mathbf{X}$ es $N(\mu, \sigma^2)$, entonces, al introducir la fórmula

=DISTR.NORM.ESTAND(a,μ,σ,1)

se obtiene $P(\mathbf{X} \leq a)$. El "1" asegura que Excel calcula la probabilidad acumulativa normal. Si se cambia el último argumento a "0", entonces Excel proporciona la altura de la función de densidad normal para $\mathbf{X} = a$. Como ejemplo, sabemos que el cociente intelectual, CI (intelligence quotient, IQ) anda tras N(100, 225). Las personas con CI de 90 o menos se determinan con la fórmula

=DISTR.NORM(90,100,15,1)

Excel señala .2525. Véanse la figura 8 y el archivo Normal.xls.

La altura de la densidad para $N(100, 225)$ para $\mathbf{X} = 100$ se calcula con la fórmula

=DISTR.NORM(100,100,15,0)

Excel indica .026596.

Al variar el primer argumento en la función =NORM.DISTR podríamos graficar una densidad normal. Véanse la figura 9 y la densidad de la hoja en el archivo Normal.xls.

Considere una variable aleatoria normal dada $\mathbf{X}$, con media μ y desviación estándar σ. En muchas situaciones queremos dar respuesta a preguntas como la siguiente. (1) Eli Lilly cree que la demanda anual de Prozac estará normalmente distribuida, con $\mu = 60$ millones de días de terapia y $\sigma = 5$ millones de días de terapia. ¿Cuántas unidades se deben producir este año si Lilly quiere tener sólo 1% de oportunidad de quedarse sin Prozac? (2) El ingreso familiar en Bloomington está normalmente distribuido, con $\mu = 30\,000$ dólares y $\sigma = 8\,000$ dólares. El 10% de todas las familias más pobres es candidato a recibir ayuda federal. ¿Cuál debe ser el límite para recibir la ayuda?

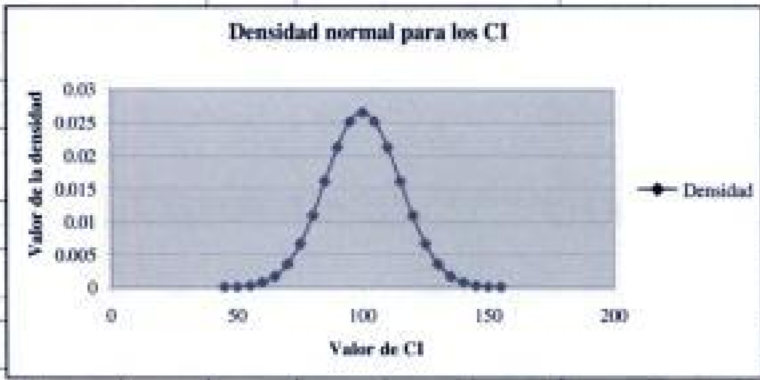
En el primer ejemplo, queremos el percentil 99 de la demanda de Prozac. Es decir, buscamos el número $\mathbf{X}$ tal que hay sólo 1% de posibilidad de que la demanda exceda $\mathbf{X}$ y 99% de oportunidades de que sea menos que $\mathbf{X}$. En el segundo ejemplo, queremos el décimo

	E	F	G	H
7				
8				
9	P(Z<=-1)	0.158655	NORMSDIST(-1)	
10	P(CI<90)	0.252492	DISTR.NORM(90,100,15,1)	
11	densidad para CI=100	0.026596	DISTR.NORM(100,100,15,0)	

FIGURA 8

FIGURA 9

	D	E	F
1			
2		CI	Densidad
3		45	3.2018E-05
4		50	0.00010282
5		55	0.00029546
6		60	0.00075973
7		65	0.00174813
8		70	0.0035994
9		75	0.00663181
10		80	0.010934
11		85	0.01613138
12		90	0.02129653
13		95	0.02515888
14		100	0.02659615
15		105	0.02515888
16		110	0.02129653
17		115	0.01613138
18		120	0.010934
19		125	0.00663181
20		130	0.0035994
21		135	0.00174813
22		140	0.00075973
23		145	0.00029546
24		150	0.00010282
25		155	3.2018E-05



percentil del ingreso familiar en Bloomington. Es decir, buscamos el número **X** tal que hay sólo 10% de oportunidades de que el ingreso familiar sea menor que **X** y 90% de que exceda **X.**

Suponga que queremos encontrar el p-ésimo percentil (expresado como un decimal) de una variable aleatoria normal **X** con media μ y desviación estándar σ. Simplemente ingrese la fórmula siguiente en Excel:

$$=\text{DISTR.NORM.INV}(p,\mu,\sigma)$$

Esta fórmula proporciona el número x que tiene la propiedad de que $P(\mathbf{X} \leq x) = p$, como se desea. Ahora ya podemos resolver los dos ejemplos descritos antes.

EJEMPLO 12 Demanda de Prozac

Eli Lilly opina que la demanda anual de Prozac está normalmente distribuida, con $\mu = 60$ millones de días de terapia y $\sigma = 5$ millones de días de terapia. ¿Cuántas unidades se deben producir este año si Lilly quiere tener sólo 1% de posibilidades de que le falte Prozac?

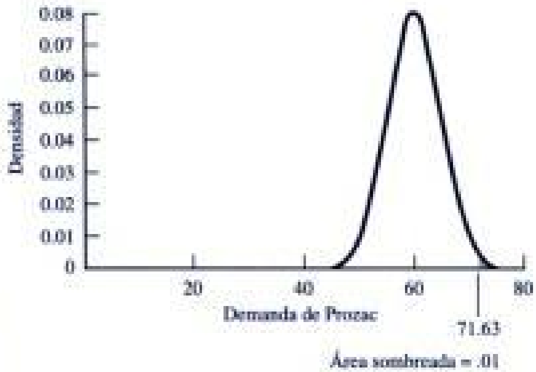


FIGURA 10
Porcentil 99 de la demanda de Prozac

Hidden page

Esto significa que podemos encontrar la media, el segundo momento ($E(\mathbf{X}^2)$) y la varianza de $\mathbf{X}$ a partir de las relaciones siguientes:

$$E(\mathbf{X}) = \left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1} \tag{23}$$

$$E(\mathbf{X}^2) = \left[\frac{d^2p_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz^2}\right]_{z=1} + \left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1} \tag{24}$$

$$\text{var } \mathbf{X} = \left[\frac{d^2p_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz^2}\right]_{z=1} + \left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1} - \left(\left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1}\right)^2 \tag{25}$$

Mediante los ejemplos siguientes se ilustra la utilidad de las transformadas z.

EJEMPLO 15 Transformadas z para la variable aleatoria binominal

Suponga que lanzamos una moneda n veces, y que la probabilidad de que salgan caras es p. Sea $q = 1 - p$. Si lanzamientos sucesivos de la moneda son eventos independientes, entonces la función de masa que describe la variable aleatoria $\mathbf{X}$ = número de caras en la bien conocida **variable aleatoria binomial** definida por

$$P(\mathbf{X} = j) = \frac{n!}{j!(n-j)!}p^j(q)^{n-j}, j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

La transformada z para la variable aleatoria $\mathbf{X}$ está dada por

$$p_{\mathbf{X}}^T(z) = \sum_{j=0}^{j=n}\frac{n!}{j!(n-j)!}p^j(q)^{n-j}z^j = \sum_{j=0}^{j=n}\frac{n!}{j!(n-j)!}(pz)^j(q)^{n-j} = (pz+q)^n$$

Ahora ya podemos usar la transformada z para determinar la media y la varianza de variable aleatoria binomial. Obsérvese que

$$\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz} = np(pz+q)^{n-1} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2p_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz^2} = n(n-1)p^2(pz+q)^{n-2}$$

Para $z = 1$, se tiene

$$\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz} = np \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2p_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz^2} = n(n-1)p^2$$

Entonces, según (23), encontramos $E(\mathbf{X}) = np$, y según (25), tenemos que var $\mathbf{X} = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq$.

EJEMPLO 16 Transformada z para una variable aleatoria geométrica

Definamos la variable aleatoria $\mathbf{X}$ como el número de lanzamientos de la moneda necesarios para obtener las primeras caras, dado que lanzamientos sucesivos son independientes, la probabilidad de que cada lanzamiento sea cara está dada por p, y la probabilidad de que cada moneda esté en la cola está dada por $q = 1 - p$. Entonces $\mathbf{X}$ sigue la dirección de una **variable aleatoria geométrica**, donde $P(\mathbf{X} = j) = pq^{j-1}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Entonces $p_{\mathbf{X}}^T(z) = \sum_{j=1}^{j=\infty} pq^{j-1}z^j$. Para $x < 1$, sabemos que $a + ax + ax^2 + \cdots = \dfrac{a}{1-x}$.

Por lo tanto, $p_{\mathbf{X}}^T(z) = \dfrac{pz}{1-qz}$. Tenemos que

$$\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz} = \frac{p}{(1-qz)^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2p_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz^2} = \frac{2pq}{(1-qz)^3}$$

Hidden page

Propiedad 3 Si $\mathbf{X}_1$ es $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathbf{X}_2$ es $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, y $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son independientes, entonces $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ es $N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Si $\mathbf{X}$ es $N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$P(a \le \mathbf{X} \le b) = F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

donde $F(x) = P(\mathbf{Z} \le x)$ y $\mathbf{Z}$ es $N(0, 1)$.

Transformadas z

Definimos (para $|z| \le 1$) la **transformada z de X** (llámela $p_{\mathbf{X}}^T(z)$) como

$$E(z^{\mathbf{X}}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n z^n$$

Podemos determinar la media, el segundo momento ($E(\mathbf{X}^2)$) y la varianza de $\mathbf{X}$ a partir de las relaciones siguientes:

$$E(\mathbf{X}) = \left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1} \tag{23}$$

$$E(\mathbf{X}^2) = \left[\frac{d^2p_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz^2}\right]_{z=1} + \left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1} \tag{24}$$

$$\text{var}\,\mathbf{X} = \left[\frac{d^2p_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz^2}\right]_{z=1} + \left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1} - \left(\left[\frac{dp_{\mathbf{X}}^T(z)}{dz}\right]_{z=1}\right)^2 \tag{25}$$

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Sea $f(x) = xe^{-x}$.

a Determine $f'(x)$ y $f''(x)$.

b ¿Para qué valores de x es $f(x)$ creciente? ¿Y decreciente?

c Determine la expansión de la serie de Taylor de primer orden para $f(x)$ con respecto a $x = 1$.

2 Sea $f(x_1, x_2) = x_1 \ln(x_2 - x_1)$. Determine todas las derivadas parciales de primero y segundo orden.

3 Algunos t años a partir de ahora, los acondicionadores de aire se venden a una tasa t por año. ¿Cuántos acondicionadores de aire se venderán durante los próximos 5 años?

4 Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria continua cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k-x}{8} & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a ¿Cuál es k?

b Encuentre la fda para $\mathbf{X}$.

c Determine $E(\mathbf{X})$ y var $\mathbf{X}$.

d Estime $P(2 \le \mathbf{X} \le 5)$.

5 Sea $\mathbf{X}_i$ el precio (en dólares) del *stock i* un año a partir de ahora. $\mathbf{X}_1$ es $N(15, 100)$ y $\mathbf{X}_2$ es $N(20, 2025)$. Hoy compré tres acciones del *stock 1* por 12 dólares/acción y dos acciones del *stock* 2 a 17 dólares/acción. Suponga que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son variables aleatorias independientes.

a Encuentre la media y la varianza del valor que tendrán mis *stocks* dentro de un año a partir de ahora.

b ¿Cuál es la probabilidad de que a un año a partir de ahora yo haya ganado por lo menos un rendimiento de 30% en mi inversión?

c Si $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ no fueran independientes, ¿por qué sería difícil responder los incisos (a) y (b)?

Grupo B

6 Un aeroplano tiene cuatro motores. Cada máquina tiene una probabilidad de fallar de 0.001 en un vuelo de Nueva York a París. La nave se estrellará si en algún momento dos o menos motores trabajan en forma adecuada. Suponga que las fallas de motores distintos son independientes.

a ¿Cuál es la probabilidad de que el aeroplano se estrelle?

b Dado que el motor 1 no fallará durante el vuelo, ¿cuál es la probabilidad de que la nave se estrelle?

c Dado que el motor 1 fallará durante el vuelo, ¿cuál es la probabilidad de que la nave no se estrelle?

7 Suponga que cada motor puede ser inspeccionado antes del vuelo. Después de la inspección, en cada motor se indica si está en buenas o malas condiciones. Usted sabe que

P(la inspección señala que el motor está en buenas condiciones | motor fallará) = .001
P(la inspección señala que el motor está en malas condiciones | motor fallará) = .999
P(la inspección señala que el motor está en buenas condiciones | el motor no fallará) = .995
P(la inspección señala que el motor está en malas condiciones | motor no fallará) = .005

a Si la inspección indica que el motor está en malas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que el motor falle en el vuelo?

b Si una inspectora revisa al azar un motor (es decir, con probabilidad .001 ella elegirá un motor que esté a punto de fallar, y con probabilidad .999 elegirá un motor que no esté por fallar), ¿cuál es la probabilidad de que cometa un error al evaluar el motor?

BIBLIOGRAFÍA

Allen, R. *Mathematical Analysis for Economists*. Nueva York: St. Martin's Press, 1938. Un repaso de cálculo avanzado.

Byrkit, D. y S. Shamma. *Calculus for Business and Economics*. Nueva York: Van Nostrand, 1981. Un repaso de cálculo para principiantes.

Chiang, A. *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1978. Un repaso de cálculo avanzado.

Harnett, D. *Statistical Methods*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1982. Un repaso de probabilidad.

Winkler, R. y W. Hays. *Statistics: Probability, Inference, and Decision*. Chicago: Holt, Rinehart & Winston, 1971. Un repaso de probabilidad.

13

Toma de decisiones bajo incertidumbre

Todos hemos tenido que tomar decisiones importantes en situaciones donde había incertidumbre acerca de los factores pertinentes para las decisiones.

El siguiente modelo abarca varios aspectos de la toma de decisiones en ausencia de certidumbre. Quien toma la decisión elige primero una acción a_i de un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de acciones disponibles. Luego se observa el estado del mundo: con probabilidad p_j, se observa el estado del mundo como $s_j \in S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Si se elige la acción a_i y el estado del mundo es s_j, quien toma la decisión recibe una recompensa r_{ij}. Se hace referencia a este modelo como *toma de decisiones observando el estado del mundo*.

En este capítulo se presenta la teoría básica de la toma de decisiones bajo incertidumbre: el ampliamente usado modelo de utilidad de Von Neumann-Morgenstern y el empleo de árboles decisión para tomar decisiones en diferentes puntos del tiempo. Se concluye considerando la toma de decisiones con varios objetivos.

13.1 Criterios de decisión

En esta sección, se consideran cuatro criterios de decisión que se pueden usar para tomar decisiones bajo incertidumbre.

EJEMPLO 1 Vendedora de periódico

La vendedora Phyllis Pauley vende periódicos en la esquina de la avenida Kirkwood y la calle Indiana, y todos los días debe determinar cuántos periódicos pedir. Phyllis paga a la compañía 20¢ por cada ejemplar y los vende a 25¢ cada uno. Los periódicos que no se venden al terminar el día no tienen valor alguno. Phyllis sabe que cada día puede vender entre 6 y 10 ejemplares, cada uno con una posibilidad equiprobable. Demuestre cómo se ajusta este problema en el modelo del estado del mundo.

Solución En este ejemplo, los elementos de $S = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ son los valores posibles de la demanda diaria de periódicos. Se sabe que $p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = p_{10} = \frac{1}{5}$. Phyllis debe elegir una acción (el número de periódicos que debe ordenar cada día) de $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Si Phyllis compra i ejemplares y la demanda es de j, entonces se compran i ejemplares a un costo de $20i$¢, y min (i, j) periódicos se venden a 25¢ cada uno.[†] Así, si Phyllis compra i periódicos y se venden j, obtiene una ganancia neta de r_{ij}, donde

$$r_{ij} = 25i - 20i = 5i \qquad (i \le j)$$
$$r_{ij} = 25j - 20i \qquad (i \ge j)$$

Los valores de r_{ij} se tabulan en la tabla 1.

[†] min(i, j) es el más pequeño de i y j.

TABLA 1
Premios para la vendedora de periódicos

Ejemplares pedidos	Demanda de ejemplares 6	7	8	9	10
6	30¢	30¢	30¢	30¢	30¢
7	10¢	35¢	35¢	35¢	35¢
8	−10¢	15¢	40¢	40¢	40¢
9	−30¢	−5¢	20¢	45¢	45¢
10	−50¢	−25¢	0¢	25¢	50¢

Acciones dominadas

¿Por qué no se consideró la posibilidad de que Phyllis ordenaria 1, 2, 3, 4, 5 o más de 10 ejemplares? Contestar esta pregunta tiene que ver con la idea de una acción dominada.

DEFINICIÓN ■ Una acción a_i es **dominada** por una acción $a_{i'}$ si para toda $s_j \in S$, $r_{ij} \leq r_{i'j}$, y para algún estado $s_{j'}$, $r_{ij'} < r_{i'j'}$. ■

Si la acción a_i es dominada, entonces en ninguna situación del mundo a_i es mejor que $a_{i'}$ y en por lo menos una situación del mundo a_i es inferior a $a_{i'}$. Así, si la acción a_i es dominada, no hay razón para elegir a_i ($a_{i'}$ sería una mejor elección).

Si Phyllis ordena i periódicos ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), obtendrá (para todas las situaciones del mundo) una ganancia de $5i$¢. A partir de la tabla de premios, se observa que, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ordenar 6 periódicos domina a ordenar i periódicos ($j' = 6, 7, 8, 9$ o 10 será suficiente). De manera similar, el lector debe comprobar que ordenar i periódicos ($i > 11$) está dominado por ordenar 10 (véase el problema 3 al final de esta sección). Una comprobación rápida muestra que ninguna de las acciones en $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ está dominada. Así, Phyllis debe de hecho elegir su acción de $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ahora se analizan cuatro criterios que se pueden usar para elegir una acción.

Criterio maximin

Para cada acción, determine el peor resultado (premio más pequeño). El criterio maximin elige la acción con el "mejor" peor resultado.

DEFINICIÓN ■ El **criterio maximin** elige la acción a_i con el valor más grande de $\min_{j \in S} r_{ij}$. ■

Para el ejemplo 1, se obtienen los resultados de la tabla 2. Así, el criterio maximin recomienda ordenar 6 periódicos. Con esto se asegura que Phyllis, sin importar el estado del mundo, obtendrá una ganancia de por lo menos 30¢. El criterio maximin tiene que ver con hacer lo más placentero que se pueda el peor resultado posible. Infortunadamente, elegir una decisión para mitigar el peor caso podría evitar que quien toma la decisión aproveche la buena fortuna. Por ejemplo, si Phyllis sigue el criterio maximin, nunca obtendrá menos de 30¢, pero nunca hará más de 30¢.

minimax elige una acción aplicando el criterio minimax a la matriz de arrepentimiento. En otras palabras, el criterio de arrepentimiento minimax intenta evitar la desilusión sobre lo que podría haber sido. De la matriz de arrepentimiento en la tabla 4, se obtiene la decisión de arrepentimiento minimax en la tabla 5. Así, el criterio de arrepentimiento minimax recomienda ordenar 6 o 7 periódicos.

Criterio del valor esperado

El criterio del valor esperado elige la acción que produce la recompensa esperada más grande. Para el ejemplo 1, el criterio del valor esperado recomendaría ordenar 6 o 7 periódicos (véase la tabla 6).

Los criterios de toma de decisiones analizados en esta sección podrían parecer razonables, pero muchas personas toman decisiones sin usar alguno de ellos. Un modelo más completo de toma de decisiones individuales, el modelo de utilidad de Von Neumann-Morgenstern (se analiza en la sección 13.2.)

TABLA 4
Matriz de arrepentimiento para la vendedora de periódicos

	Demanda de periódicos				
Periódicos pedidos	6	7	8	9	10
6	30 − 30 = 0¢	35 − 30 = 5¢	40 − 30 = 10¢	45 − 30 = 15¢	50 − 30 = 20¢
7	30 − 10 = 20¢	35 − 35 = 0¢	40 − 35 = 5¢	45 − 35 = 10¢	50 − 35 = 15¢
8	30 + 10 = 40¢	35 − 15 = 20¢	40 − 40 = 0¢	45 − 40 = 5¢	50 − 40 = 10¢
9	30 + 30 = 60¢	35 + 5 = 40¢	40 − 20 = 20¢	45 − 45 = 0¢	50 − 45 = 5¢
10	30 + 50 = 80¢	35 + 25 = 60¢	40 − 0 = 40¢	45 − 25 = 20¢	50 − 50 = 0¢

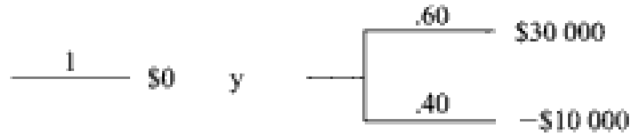
TABLA 5
Cálculo de decisión de arrepentimiento minimax para la vendedora de periódicos

Periódicos pedidos	Arrepentimiento máximo
6	20¢
7	20¢
8	40¢
9	60¢
10	80¢

TABLA 6
Cálculo de la decisión del valor esperado para la vendedora de periódicos

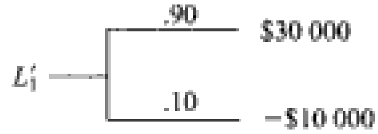
Periódicos ordenados	Recompensa esperada
6	$\frac{1}{5}(30 + 30 + 30 + 30 + 30) = 30¢$
7	$\frac{1}{5}(10 + 35 + 35 + 35 + 35) = 30¢$
8	$\frac{1}{5}(-10 + 15 + 40 + 40 + 40) = 25¢$
9	$\frac{1}{5}(-30 - 5 + 20 + 45 + 45) = 15¢$
10	$\frac{1}{5}(-50 - 25 + 0 + 25 + 50) = 0¢$

y para r_3 = \$0, indiferente entre

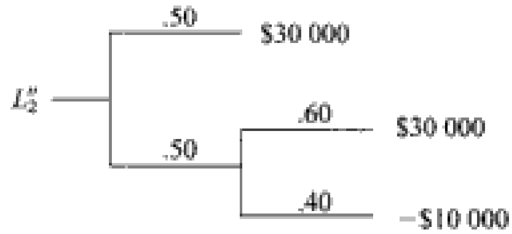


(3)

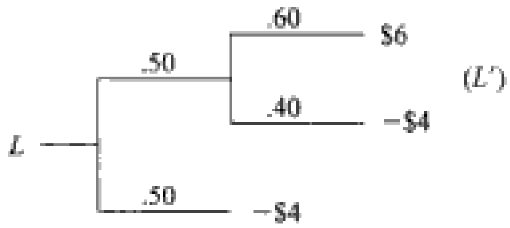
Usando (1) a (3), quien toma la decisión construye loterías L_1', L_2', L_3' y L_4' tal que $L_i' \text{i} L_i$ y cada L_i' sólo tiene que ver con el mejor resultado posible (\$30 000) y el peor (−\$10 000). Así, de (1), se encuentra que $L_1 \text{i} L_1'$, donde



De (3), se encuentra que $L_2 \text{i} L_2''$, donde

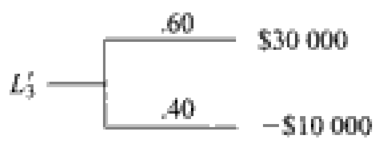


L_2'' es una lotería compuesta en la que con probabilidad 0.50 se reciben \$30 000 y con probabilidad .50 se juega una lotería que produce .60 de posibilidad en \$30 000 y .40 en −\$10 000. De manera más formal, una lotería L es una **lotería compuesta** si para alguna i, hay una probabilidad p_i de que la recompensa de quien toma la decisión sea jugar otra lotería L'. A continuación se da un ejemplo de una lotería compuesta:



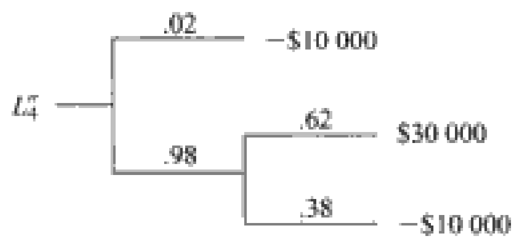
Así, con probabilidad .50, L produce una recompensa de −\$4 y con probabilidad .50, L causa que se juegue L'. Si una lotería no es compuesta, se trata de una **lotería simple.**

De regreso al análisis de L_2'', se observa que L_2'' es una lotería que produce .50 + .50(.60) = .80 de posibilidad en \$30 000 y una de .40(.50) = .20 en −\$10 000. Así, $L_2 \text{i} L_2'' \text{i} L_2'$, donde



De manera similar, usando (3), se encuentra que $L_3 \text{i} L_3'$, donde

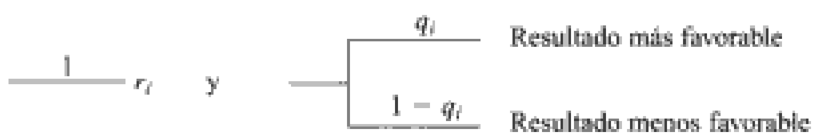
Usando (2), se encuentra que quien toma la decisión no tiene preferencia entre L_4 y L''_4, donde



En realidad, sin embargo, L''_4 da una posibilidad de $.98(.62) = .6076$ en \$30 000 y una de $.02 + .38(.98) = .3924$ en $-\$10\ 000$. Así, $L_4 \mathrm{i} L''_4 \mathrm{i} L'_4$, donde

Puesto que $L_i \mathrm{i} L'_i$, se podría clasificar L_1, L_2, L_3 y L_4 al clasificar L'_1, L'_2, L'_3 y L'_4. Considere dos loterías cuyos únicos resultados posibles son \$30 000 (el más favorable) y $-\$10\ 000$ (el menos favorable). Si a la persona se le da a elegir entre dos loterías de este tipo, al tomar la decisión simplemente elige la lotería con la mayor posibilidad de recibir el resultado más favorable. Aplicando esta idea desde L'_1 hasta L'_4 se obtiene $L'_1 \mathrm{p} L'_2 \mathrm{p} L'_4 \mathrm{p} L'_3$. Puesto que $L_i \mathrm{i} L'_i$, se podría concluir que $L_1 \mathrm{p} L_2 \mathrm{p} L_4 \mathrm{p} L_3$.

Ahora se da una descripción más formal del proceso que se utilizó para clasificar L_1, L_2, L_3 y L_4. La **utilidad** de la recompensa r_i, escrita $u(r_i)$, es el número q_i tal que quien toma la decisión es indiferente en las siguientes dos loterías:



Esta definición fuerza a que u(resultado menos favorable) = 0 y u(resultado más favorable) = 1. Para los pagos posibles de \$30 000, $-\$10\ 000$, \$0, \$500 y \$10 000, primero se encuentra que $u(\$30\ 000) = 1$ y $u(-\$10\ 000) = 0$. Entonces (1)$-$(3) producen $u(\$10\ 000) = .90$, $u(\$500) = .62$ y $u(\$0) = .60$. La especificación de $u(r_i)$ para las recompensas r_i se llama la **función de utilidad** de quien toma la decisión.

Para una lotería determinada $L = (p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$, defina la utilidad esperada de la lotería L, escrita $E(U \text{ para } L)$, por

$$E(U \text{ para } L) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i u(r_i)$$

Así, en nuestro ejemplo

$$\begin{aligned}
E(U \text{ para } L_1) &= 1(.90) = .90\\
E(U \text{ para } L_2) &= .50(1) + .50(.60) = .80\\
E(U \text{ para } L_3) &= 1(.60) = .60\\
E(U \text{ para } L_4) &= .02(0) + .98(.62) = .6076
\end{aligned}$$

Recuerde que se encontró que $L_i \mathrm{i} L'_i$, donde L'_i produjo una probabilidad $E(U \text{ para } L_i)$ en \$30 000 y una probabilidad $1 - E(U \text{ para } L_i)$ en $-10\ 000$. Así, al elegir entre las loterías

L_1', L_2', L_3' y L_4' (o en forma equivalente, L_1, L_2, L_3 y L_4), simplemente se elige la lotería con la utilidad esperada más grande. Dadas dos loterías L_1 y L_2, se podría elegir entre ellas vía los criterios de la utilidad esperada:

$$\begin{array}{lll} L_1\text{p}L_2 & \text{si y sólo si} & E(U \text{ para } L_1) > E(U \text{ para } L_2) \\ L_2\text{p}L_1 & \text{si y sólo si} & E(U \text{ para } L_2) > E(U \text{ para } L_1) \\ L_1\text{i}L_2 & \text{si y sólo si} & E(U \text{ para } L_2) = E(U \text{ para } L_1) \end{array}$$

Axiomas de Von Neumann-Morgenstern

Von Neumann y Morgenstern demostraron que si las preferencias de una persona satisfacen los axiomas siguientes, entonces debe elegir entre loterías usando el criterio de la utilidad esperada.

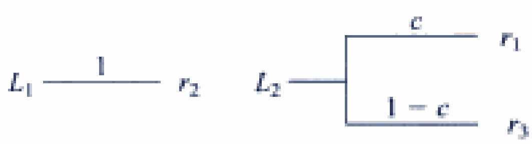
Axioma 1: axioma de ordenación completa

Para dos recompensas r_1 y r_2, uno de los siguientes enunciados debe ser cierto: la persona que toma la decisión (1) prefiere r_1 a r_2 (2) prefiere r_2 a r_1 o (3) es indiferente entre r_1 y r_2. También, si la persona prefiere r_1 a r_2 y r_2 a r_3, entonces debe preferir r_1 a r_3 (transitividad de preferencias).

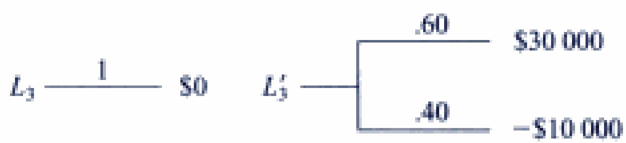
En nuestro análisis, utilizamos el axioma de ordenación completa para determinar los resultados más y menos favorables.

Axioma 2: axioma de continuidad

Si la persona que toma la decisión prefiere r_1 a r_2 y r_2 a r_3, entonces para alguna $c(0 < c < 1)$, $L_1\text{i}L_2$, donde



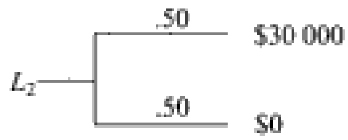
En nuestro análisis informal, utilizamos el axioma de continuidad cuando se encontró, por ejemplo, que $L_3\text{i}L_3'$, donde

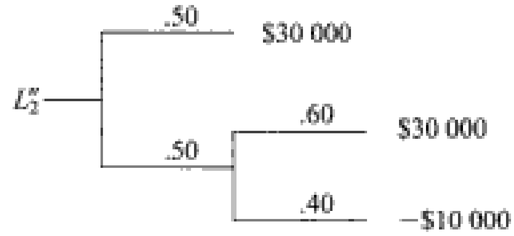


Axioma 3: axioma de independencia

Suponga que quien toma la decisión no tiene preferencia entre las recompensas r_1 y r_2. Sea r_3 cualquier otra recompensa. Entonces para cualquier c $(0 < c < 1)$, $L_1\text{i}L_2$, donde

L_1 y L_2 difieren sólo en que L_1 tiene una probabilidad c de producir una recompensa r_1, en tanto que L_2 tiene una probabilidad c de producir una recompensa r_2. Así, el axioma de independencia implica que quien toma la decisión ve una probabilidad c en r_1 y una probabilidad c en r_2 como un valor idéntico y esta perspectiva se cumple para los valores de c y r_3. Se aplica el axioma de independencia cuando se usa (3) para afirmar que $L_2 i L_2''$, donde





Axioma 4: axioma de probabilidad desigual

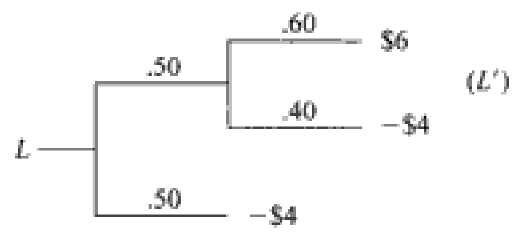
Suponga que la persona que toma la decisión prefiere la recompensa r_1 en vez de la recompensa r_2. Si las dos loterías tienen sólo r_1 y r_2 como sus resultados posibles, la persona prefiere la lotería con la mayor probabilidad de obtener r_1.

Se utiliza el axioma de probabilidad desigual cuando se concluye, por ejemplo, que se prefiere L_1' en vez de L_2' (debido a que L_1' tenía una probabilidad de .90 en $30 000 y L_2' tenía sólo una probabilidad de .80 en $30 000).

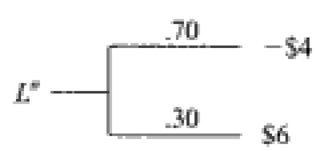
Axioma 5: axioma de lotería compuesta

Suponga que cuando se consideran todos los resultados posibles, una lotería compuesta L produce (para $i = 1, 2, \ldots, n$) una probabilidad p_i de recibir una recompensa r_i. Entonces $L i L'$, donde L' es la lotería simple $(p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$.

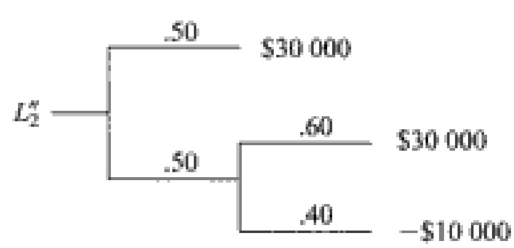
Por ejemplo, considere la siguiente lotería compuesta:



L produce una probabilidad de $.50 + .50(.40) = .70$ en −$4 y una probabilidad de $.50(.60) = .30$ en $6. Así, $L i L''$, donde



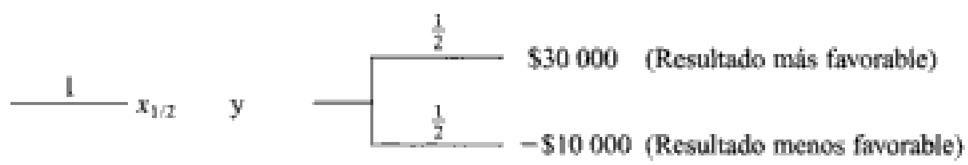
En nuestro análisis formal, usamos el axioma de lotería compuesta, por ejemplo, se expresó que el equivalente compuesto de L_2 (L_2'')



Usando el lema 1, se puede demostrar que sin cambiar la forma cómo un individuo clasifica las loterías, se puede transformar la función de utilidad de quien toma la decisión en una con u(resultado menos favorable) $= 0$ y u(resultado más favorable) $= 1$. Como ilustración, volvamos a considerar la clasificación de las loterías L_1 a L_4. Suponga que la función de utilidad de quien toma la decisión tuvo $u(-\$10\,000) = -5$ y $u(\$30\,000) = 10$. Defina $v(x) = au(x) + b$. Elija a y b de modo que $v(\$30\,000) = 10a + b = 1$ y $v(-\$10\,000) = -5a + b = 0$. Entonces $a = \frac{1}{15}$ y $b = \frac{1}{3}$. Entonces por el lema 1, la función de utilidad $v(x) = \frac{u(x)}{15} + \frac{1}{3}$ producirá la misma clasificación de loterías que $u(x)$ y se habrá construido $v(x)$ de modo que $v(\$30\,000) = 1$ y $v(-\$10\,000) = 0$. Así, se ve que sin pérdida de generalidad, se podría suponer que u(resultado menos favorable) $= 0$ y u(resultado más favorable) $= 1$.

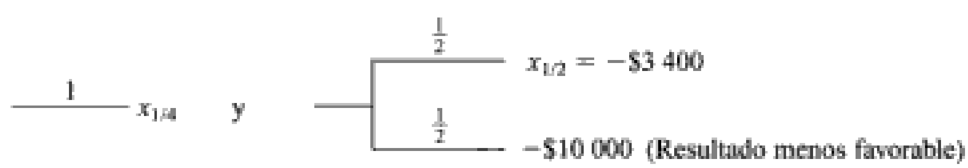
Estimación de una función de utilidad individual

¿Cómo se podría estimar la función de utilidad de una persona (llámela Jill)? Se empieza por suponer que el resultado menos favorable (digamos, $-\$10\,000$) tiene una utilidad de 0 y que el resultado más favorable (por ejemplo, \$30 000) tiene una utilidad de 1. A continuación se define un número $x_{1/2}$ que tiene $u(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$. Para determinar $x_{1/2}$, pida a Jill el número (llámelo $x_{1/2}$) que le hace ser indiferente entre



Puesto que Jill es indiferente entre las dos loterías, deben tener la misma utilidad esperada. Así, $u(x_{1/2}) = (\frac{1}{2})(1) + (\frac{1}{2})(0) = \frac{1}{2}$.

Este procedimiento produce un punto $x_{1/2}$ que tiene $u(x_{1/2}) = \frac{1}{2}$. Suponga que Jill expresa que $x_{1/2} = -\$3\,400$. Con $x_{1/2}$ y el resultado menos favorable ($-\$10\,000$) como resultados posibles, se puede construir una lotería que se utiliza para determinar el punto $x_{1/4}$ que tiene una utilidad de $\frac{1}{4}$ (es decir, $u(x_{1/4}) = \frac{1}{4}$). El punto $x_{1/4}$ debe ser tal que Jill es indiferente entre



Entonces $u(x_{1/4}) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(0) = \frac{1}{4}$. Así, $x_{1/4}$ cumplirá con $u(x_{1/4}) = \frac{1}{4}$. Suponga que Jill expresa que $x_{1/4} = -\$8\,000$. Con esto se obtiene otro punto en la función de utilidad de Jill.

Jill ahora puede usar los resultados $x_{1/2}$ y \$30 000 para construir una lotería que producirá un valor $x_{3/4}$ igual a $u(x_{3/4}) = \frac{3}{4}$. (¿Cómo?) Suponga que $x_{3/4} = \$8\,000$. De manera similar, los resultados de $x_{1/4}$ y $-\$10\,000$ se pueden usar para construir una lotería que producirá un valor $x_{1/8}$ igual a $u(x_{1/8}) = \frac{1}{8}$. Ahora la función de utilidad de Jill se puede aproximar trazando una curva (exponencialmente suave, esperamos) que una los puntos

$$(-\$10\,000, 0), (x_{1/8}, 1/8), (x_{1/4}, 1/4), \ldots, (\$30\,000, 1)$$

Este resultado se muestra en la figura 1. Infortunadamente, si las preferencias de quien toma la decisión viola alguno de los axiomas precedentes (como la transitividad), es posible que este procedimiento no produzca una curva exponencial suave. Si esto no produce una curva relativamente exponencialmente suave, se deben usar procedimientos más complejos para evaluar las funciones de utilidad que deben usarse (véanse Keeney y Raiffa (1976)).

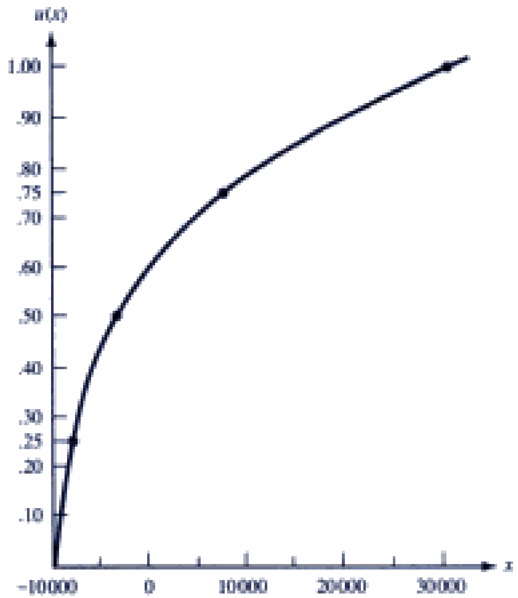


FIGURA 1
Función de utilidad de Jill

Relación entre la función de utilidad de un individuo y su actitud hacia el riesgo

La función de utilidad de quien toma la decisión contiene información acerca de su actitud hacia el riesgo. Para analizar esta información, es necesario definir los conceptos de equivalente de certidumbre y premio de riesgo de una lotería.

DEFINICIÓN ■ El **equivalente de certidumbre** de una lotería L, escrito como $EC(L)$, es el número $EC(L)$ tal que quien toma la decisión es indiferente entre la lotería L y recibir un cierto pago de $EC(L)$. ■

Por ejemplo, ya se vio que Jill era indiferente entre

$\xrightarrow{1}$ $-\$3\,400$ y L: con probabilidad $\frac{1}{2}$, $\$30\,000$; con probabilidad $\frac{1}{2}$, $-\$10\,000$

Así, $EC(L) = -\$3\,400$.

DEFINICIÓN ■ El **premio de riesgo** de una lotería L, escrito como $PR(L)$ está dado por $PR(L) = VE(L) - EC(L)$, donde $VE(L)$ es el valor esperado de los resultados de la lotería. ■

Por ejemplo,

L: con probabilidad $\frac{1}{2}$, $\$30\,000$; con probabilidad $\frac{1}{2}$, $-\$10\,000$

entonces $VE(L) = (\frac{1}{2})(\$30\,000) + (\frac{1}{2})(-\$10\,000) = \$10\,000$. Ya se ha visto que $EC(L) = -\$3400$. Así, $PR(L) = 10\,000 - (-3400) = \$13\,400$; Jill evalúa L en \$13 400 menos de su valor esperado, debido a que no le gusta el grado mayor de incertidumbre que está asociado con la recompensa producida por L.

Sea una **lotería no degenerada** en la que puede ocurrir más de un resultado. Con respecto a la actitud hacia el riesgo, quien toma la decisión es

1 **Adverso al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) > 0$

2 **Neutral al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) = 0$

3 **Buscador de riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) < 0$

La actitud de un individuo hacia el riesgo depende de la concavidad (o convexidad) de su función de utilidad.

DEFINICIÓN ■ Se dice que una función $u(x)$ es **estrictamente cóncava** (o **estrictamente convexa**) si para dos puntos cualesquiera en la curva $y = u(x)$, el segmento de línea que une esos dos puntos queda por completo (con excepción de sus puntos finales) abajo (o arriba) de la curva $y = u(x)$. ■

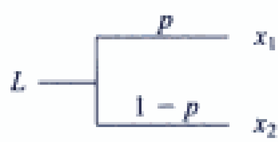
Si $u(x)$ es diferenciable, entonces $u(x)$ será estrictamente cóncava si y sólo si $u''(x) < 0$ para toda x y $u(x)$ será estrictamente convexa si y sólo si $u''(x) > 0$ para toda x. Es fácil demostrar que quien toma la decisión con una función de utilidad $u(x)$ es

1 **Adverso al riesgo** si y sólo si $u(x)$ es estrictamente cóncava

2 **Neutral al riesgo** si y sólo si $u(x)$ es una función lineal (si $u(x)$ es convexa y cóncava)

3 **Buscador de riesgo** si y sólo si $u(x)$ es estrictamente convexa

Para ilustrar estas definiciones, se muestra que una persona que toma una decisión con una función de utilidad cóncava $u(x)$ exhibe comportamiento adverso al riesgo (tiene $PR(L) > 0$). Considere una lotería binaria L (una lotería con sólo dos resultados posibles):



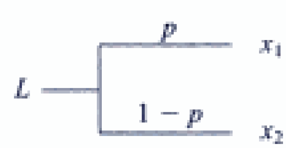
(Suponga que $x_1 < x_2$)

Suponga que $u(x)$ es estrictamente cóncava. Entonces, de la figura 2, se ve que

$$E(U \text{ para } L) = p\,u(x_1) + (1 - p)u(x_2) = \text{coordenada } y \text{ del punto } 1$$

Puesto que $EC(L)$ es el valor x^* que tiene $u(x^*) = E(U \text{ para } L)$, la figura 2 muestra que $EC(L) < VE(L)$, así que $PR(L) > 0$. Esto se deduce porque la concavidad estricta de $u(x)$ implica que el segmento de línea que une los puntos $(x_1, u(x_1))$ y $(x_2, u(x_2))$ queda debajo de la curva $u(x)$.

También se puede dar una demostración algebraica de que $u(x)$ estrictamente cóncava implica que $PR(L) = VE(L) - EC(L) > 0$. Recuerde que para



$VE(L) = px_1 + (1 - p)x_2$. Ahora la concavidad estricta de $u(x)$ implica que $u\,[px_1 + (1 - p)x_2] > pu(x_1) + (1 - p)u(x_2) = E(U \text{ para } L)$. Así que quien toma la decisión prefiere $px_1 + (1 - p)x_2 = VE(L)$ con certeza para el prospecto de jugar L. El equivalente de certidumbre

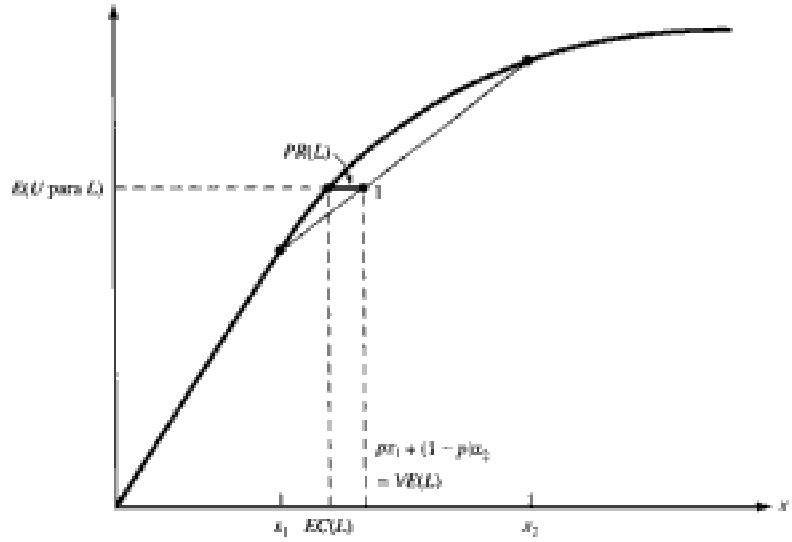


FIGURA 2
Por qué una función de utilidad cóncava implica un comportamiento adverso al riesgo

de L debe ser menor que $px_1 + (1 - p)x_2 = VE(L)$. Esto implica que $PR(L) = VE(L) - EC(L) > 0$, y quien toma la decisión exhibe comportamiento adverso al riesgo. En el problema 4 al final de esta sección, se pide al lector que demuestre que si $u(x)$ es estrictamente convexa, quien toma la decisión exhibe comportamiento que busca el riesgo.

Si quien toma la decisión es neutral al riesgo (es decir, $u(x) = ax + b$), elige entre loterías vía el criterio de recompensa esperada de la sección 13.1 (véase el problema 5 al final de esta sección). Así, al clasificar las loterías, la persona que toma la decisión y el neutral al riesgo considera sólo el valor esperado (y no el riesgo) de las loterías.

En el ejemplo 2 se ilustran los conceptos de premio al riesgo, equivalente de certidumbre y aversión al riesgo.

EJEMPLO 2 Activos de Joan

La función de utilidad de Joan para su posición de activos x está dada por $u(x) = x^{1/2}$. En la actualidad los activos de Joan consisten en 10 000 dólares en efectivo y una casa con valor de 90 000 dólares. Durante un determinado año, hay una probabilidad de .001 de que la casa de Joan sea destruida por un incendio u otras causas. ¿Cuánto estaría dispuesta a pagar Joan por una póliza de seguro que le retribuiría su casa si ésta fuera destruida?

Solución Sea x = prima anual del seguro. Luego, Joan debe elegir entre las siguientes loterías:

Posición del activo

L_1: comprar el seguro $\xrightarrow{1}$ (\$100 000 − x)

L_2: no comprar el seguro:
- $\xrightarrow{.001}$ \$100 000 − \$90 000 = \$10 000
- $\xrightarrow{.999}$ \$100 000

Joan preferiría L_1 a L_2 si la utilidad esperada de L_1 excede la utilidad esperada de L_2. Así, $L_1 pL_2$ si y sólo si

$$\begin{aligned}(100\,000 - x)^{1/2} &> .001(10\,000)^{1/2} + .999(100\,000)^{1/2}\\ &> .10 + 315.91154\\ &> 316.01154\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la última desigualdad se encuentra que $L_1 \mathrm{p} L_2$ si y sólo si

$$100\,000 - x > (316.01154)^2$$
$$x < \$136.71$$

Así, Joan pagaría hasta \$136.71 por el seguro. Por supuesto, si $p = \$136.71$, $L_1 \mathrm{i} L_2$.

Calculemos la prima de riesgo para L_2:

$$VE(L_2) = .001(10\,000) + .999(100\,000) = \$99\,910$$

(una pérdida esperada de $100\,000 - 99\,910 = \$90$). Puesto que $E(U \text{ para } L_2) = 316.01154$, se puede encontrar $EC(L_2)$ a partir de la relación $u(EC(L_2)) = 316.01154$, o bien, $[EC(L_2)]^{1/2} = 316.01154$. Así, $EC(L_2) = (316.01154)^2 = \$99\,863.29$, y

$$PR(L_2) = VE(L_2) - EC(L_2) = 99\,910 - 99\,863.29 = \$46.71$$

Por lo tanto, Joan está dispuesta a pagar un seguro anual para su casa de \$46.71 más la pérdida esperada de \$90. (Recuerde que Joan está dispuesta a pagar hasta $90 + 46.71 = \$136.71$ para evitar el riesgo que tiene que ver con la destrucción de su casa.) Joan muestra una conducta de aversión al riesgo ($PR(L_2) > 0$). Puesto que

$$u''(x) = \frac{-x^{-3/2}}{4} < 0$$

$u(x)$ es estrictamente cóncava y $PR(L) > 0$ se cumpliría para cualquier lotería no degenerada.

En realidad, muchas personas exhiben tanto conducta de búsqueda de riesgo (compran billetes de lotería, van a Las Vegas) y comportamiento de aversión al riesgo (compran seguros de casa). Una persona cuya función de utilidad contiene tanto segmentos convexos como cóncavos podría exhibir tanto comportamiento de aversión al riesgo como de búsqueda de riesgo. Considere una persona que toma una decisión cuya función de utilidad $u(x)$ para el cambio en la posición actual del activo se da en la figura 3. Si está obligada a elegir entre

$$L_1 \xrightarrow{\quad 1 \quad} 0 \qquad \text{y} \qquad L_2 \begin{cases} \xrightarrow{\quad .10 \quad} \$2\,500 \\ \xrightarrow{\quad .90 \quad} -\$300 \end{cases}$$

¿qué haría esta persona?

De la figura 3, se encuentra que $u(0) = .20$, $u(2\,500) = .50$, y $u(-300) = .18$. Así, $E(U$ para $L_1) = .20$ y $E(U$ para $L_2) = .10(.50) + .90(.18) = .212$. Así, $L_2 \mathrm{p} L_1$. Esto significa que L_2 tiene equivalente de certidumbre de por lo menos \$0. Puesto que $VE(L_2) = -\$20$, esto implica que $PR(L_2) = VE(L_2) - EC(L_2) < 0$. Quien toma la decisión exhibe comportamiento de búsqueda de riesgo en esta situación, porque para cambios en la posición del activo entre \$0 y \$2 500, $u(x)$ es una función convexa.

Ahora suponga que quien toma la decisión puede, por \$200, asegurarse a sí mismo contra una pérdida de \$2 000, lo cual ocurre con probabilidad .08. Entonces debe elegir entre

$$L_3 \xrightarrow{\quad 1 \quad} -\$200 \qquad \text{y} \qquad L_4 \begin{cases} \xrightarrow{\quad .08 \quad} -\$2\,000 \\ \xrightarrow{\quad .92 \quad} \$0 \end{cases}$$

De la figura 3, $u(-200) = .19$, $u(0) = .20$, y $u(-2\,000) = 0$. Así, $E(U$ para $L_2) = .19$ y $E(U$ para $L_4) = .80(0) + .92(.20) = .184$ y $L_3 \mathrm{p} L_4$. Esto muestra que $EC(L_4) < -\$200$. Puesto que $VE(L_4) = .08(-2\,000) + .92(0) = -\$160$, $PR(L_4) = VE(L_4) - EC(L_4) > 0$ y quien toma la decisión está exhibiendo conducta de aversión al riesgo, porque $u(x)$ es cóncava para $-2\,000 < x < 0$. Así, si su función de utilidad tiene tanto segmentos convexos como cóncavos, una persona puede exhibir comportamiento de búsqueda de riesgo y de aversión al riesgo.

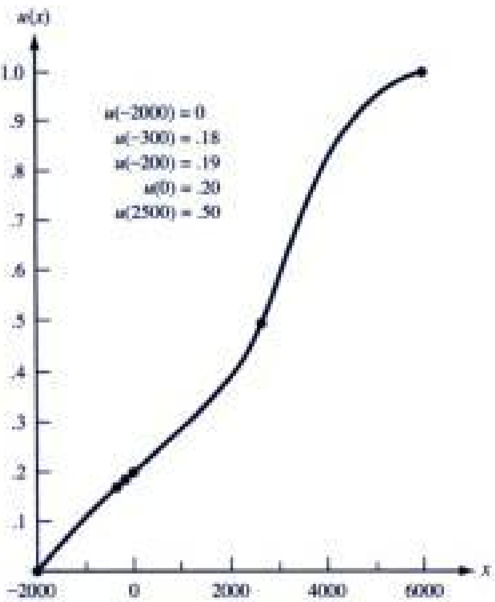


FIGURA 3
Una función de utilidad que exhibe comportamiento de búsqueda de riesgo como de aversión al riesgo

Utilidad exponencial

Se han elaborado clases de funciones de utilidad "prefabricadas". Una clase importante se llama **utilidad exponencial** y se ha usado en muchos análisis de inversión financieros. Una función de utilidad exponencial tiene sólo un parámetro numérico ajustable, y hay formas directas para descubrir el valor más apropiado de este parámetro para un individuo o compañía particular. Así que la ventaja de usar una función de utilidad exponencial es que evaluarla es relativamente fácil. La desventaja radica en que las funciones de utilidad exponenciales no captan todos los tipos de actitudes hacia el riesgo. Sin embargo, su facilidad de uso las ha hecho populares.

Una función de utilidad exponencial tiene la forma siguiente:

$$U(x) = 1 - e^{-x/R}$$

Aquí, x es un valor monetario (un pago si es positiva, un costo si es negativa), $U(x)$ es la utilidad de este valor y $R > 0$ es un parámetro ajustable llamado **tolerancia de riesgo.** En esencia, la tolerancia de riesgo mide cuánto riesgo tolerará quien toma la decisión. Mientras más grande sea el valor de R, menos aversión tiene al riesgo quien toma la decisión. Es decir, una persona con un valor grande de R está más dispuesta a tomar riesgos que una persona con un valor pequeño de R.

Para evaluar la función de utilidad exponencial de una persona (o compañía), sólo es necesario evaluar el valor de R. Hay un par de indicaciones para hacerlo. Primero, se ha demostrado que la tolerancia al riesgo es casi igual a la cantidad R en dólares tal que quien toma la decisión es indiferente entre las siguientes dos opciones:

- Opción 1: Obtener ningún pago en absoluto
- Opción 2: Obtener un pago de R dólares o una pérdida de $R/2$ dólares, dependiendo del lanzamiento de una moneda no cargada

Por ejemplo, si no tengo preferencia entre una apuesta donde gano 1000 dólares o pierdo \$500, con 0.5 de probabilidad en cada opción, y no apostar en absoluto, entonces mi R es aproximadamente \$1000. A partir de este criterio se intuye de hecho que una persona rica (o compañía) debe tener un valor grande de R. Esto se encontró en la práctica.

Otro consejo práctico para hallar R se basa en la evidencia empírica que encontró Ronald Howard, un sobresaliente analista de decisiones. A través de su experiencia como consultor de varias compañías grandes, descubrió relaciones tentativas entre tolerancia al riesgo y varias variables financieras: ventas netas, ingreso neto y recursos propios. (Véase Howard (1992).) En particular, encontró que R era aproximadamente 6.4% de las ventas netas, 124% del ingreso neto y 15.7% de recursos propios para las compañías que él estudió. Por ejemplo, de acuerdo con esta prescripción, una compañía con ventas netas de \$30 millones debe tener una tolerancia al riesgo de alrededor de \$1.92 millones. Howard admite que estos porcentajes son sólo guías. Sin embargo, indican que las compañías más grandes y rentables tienden a tener valores más grandes de R, lo que significa que están más dispuestas a tomar riesgos relacionados con determinadas cantidades de dólares.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que mi función de utilidad para la posición x del activo está dada por $u(x) = \ln x$.

a ¿Tengo aversión al riesgo, soy neutral o me gusta buscar el riesgo?

b Ahora tengo \$20 000 y estoy considerando las dos loterías siguientes:

L_1: con probabilidad 1, pierdo \$1000.
L_2: con probabilidad .9, gano \$0.
con probabilidad .1, pierdo \$10 000.

Determine qué lotería prefiero y el premio de riesgo de L_2.

2 Conteste el problema 1 para una función de utilidad $u(x) = x^2$.

3 Conteste el problema 1 para una función de utilidad $u(x) = 2x + 1$.

4 Demuestre que una persona que toma una decisión con una función de utilidad estrictamente convexa, exhibirá conducta de búsqueda de riesgo.

5 Demuestre que una persona que toma una decisión con una función de utilidad lineal clasificará dos loterías de acuerdo con su valor esperado.

6 Una persona que toma una decisión tiene una función de utilidad para ganancias monetarias x dada por $u(x) = (x + 10\,000)^{1/2}$.

a Demuestre que la persona es indiferente entre el *estatus quo* y

L: con probabilidad $\frac{1}{3}$, gana \$80 000
con probabilidad $\frac{2}{3}$, pierde \$10 000

b Si hay una posibilidad de 10% de que una pintura valuada en \$10 000 sea robada durante el año próximo, ¿cuál es la mayor cantidad (por año) que quien toma la decisión estaría dispuesto a pagar para asegurar cubrir la pérdida de la pintura?

7 Patty intenta determinar cuál de dos cursos tomar. Si toma el curso de investigación de operaciones, cree que tiene 10% de probabilidad de obtener una A, 40% de probabilidad de obtener una B y 50% de probabilidad de C. Si Patty toma un curso de estadística, tiene 70% de probabilidad de obtener B, 25% de lograr una C y 5% de que su calificación sea D. Patty es indiferente entre

Ella también es indiferente entre

Si Patty quiere tomar el curso que maximiza la utilidad esperada de su calificación final, ¿cuál curso debe tomar?

8 Se quiere invertir 1000 dólares durante un periodo de 6 meses. Están disponibles dos inversiones posibles: bonos del tesoro y oro. Si se invierten \$1000 en bonos del tesoro, se tiene la certeza al final del periodo de 6 meses de que se obtendrán \$1296. Si se invierte en oro, hay $\frac{3}{4}$ de probabilidad de que al final del periodo de 6 meses se tengan \$400 y $\frac{1}{4}$ de probabilidad de terminar el periodo de 6 meses con \$10 000. Si se termina con x dólares, la función de utilidad está dada por $u(x) = x^{1/2}$. ¿Se debe invertir en oro o bonos del tesoro?

9 En la actualidad se tienen \$5000 dólares en activos y las posibilidades de inversión 1 y 2. Con la inversión 1, 80% del tiempo se incrementa la posición del activo en \$295 000 y 20% del tiempo se incrementa en \$95 000. Con la inversión 2, 50% del tiempo la posición del activo se incrementa en \$595 000 y 50% del tiempo se incrementa en \$5000. La función de utilidad para la posición final del activo x es $u(x)$. Se tienen los siguientes valores para $u(x)$: $u(0) = 0$, $u(640{,}000) = .80$, $u(810\,000) = .90$, $u(0) = 0$, $u(90\,000) = .30$, $u(1\,000\,000) = 1$, $u(490\,000) = .7$.

a ¿Es adversa, de búsqueda o neutral la posición con respecto al riesgo? ¡Explique!

b ¿Se dará preferencia a la inversión 1 o a la 2?

10 Mi ingreso actual es de \$40 000. Creo que debo \$8000 en impuestos. Por \$500, puedo contratar un CPA para que revise mi declaración de impuestos; hay 20% de posibilidades de que ahorre \$4000 en impuestos. Mi función de utilidad para (renta disponible) = (ingreso actual) − (impuestos) − (pago al contador) está dada por $\sqrt{x}$ donde x es el ingreso disponible. ¿Debo contratar al CPA?

Grupo B

11[†] (La paradoja de Allais) Suponga que se nos ofrece elegir entre las siguientes dos loterías:

L_1: Con probabilidad 1, se recibe \$1 millón.
L_2: Con probabilidad .10, se reciben \$5 millones.
Con probabilidad .89, se recibe \$1 millón.
Con probabilidad .01, se recibe \$0.

¿Qué lotería se prefiere? Ahora considere las dos loterías siguientes:

L_3: Con probabilidad .11, se recibe \$1 millón.
Con probabilidad .89, se recibe \$0.
L_4: Con probabilidad .10, se reciben \$5 millones.
Con probabilidad .90, se recibe \$0.

[†]Basado en Allais (1953).

¿Cuál lotería se prefiere? Suponga (como la mayoría de las personas), que se prefiere L_1 a L_2. Demuestre que L_3 debe tener una utilidad esperada más grande que L_4.

12 (La paradoja de San Petersburgo) Sea L la siguiente lotería. Lanzó una moneda hasta salir cara. Si la primera cara se obtiene en el n-ésimo lanzamiento de la moneda, recibo un pago de $\$2^n$.

a Si yo fuese una persona neutral al riesgo que toma una decisión, ¿cuál sería la certeza equivalente de L? ¿Es esto razonable?

b Si la función de utilidad de una persona que toma una decisión para incrementar su riqueza en x dólares está dada por $u(x) = \log_2(x)$, ¿cuál sería el equivalente de certidumbre de L?

13 Joe es una persona que toma una decisión, pero es adversa al riesgo. ¿Cuál de las siguientes loterías preferiría Joe?

L_1: Con probabilidad .10, Joe pierde \$100.
Con probabilidad .90, Joe recibe \$0.

L_2: Con probabilidad .10, Joe pierde \$190.
Con probabilidad .90, Joe recibe \$10.

14[†] (La paradoja de Ellsberg) Una urna contiene 90 pelotas. Se sabe que 30 son rojas y que cada una de las otras 60 es amarilla o negra. Se saca una bola al azar de la urna. Considere las cuatro opciones siguientes:

Opción 1 Se reciben \$1000 si se extrae una bola roja.
Opción 2 Se reciben \$1000 si se extrae una bola amarilla.
Opción 3 Se reciben \$1000 si se extrae una bola amarilla o negra.
Opción 4 Se reciben \$1000 si se extrae una bola roja o negra.

a Explique por qué la mayoría de las personas prefieren la opción 1 en vez de la opción 2 y también prefieren la opción 3 sobre la opción 4.

b Si se prefiere la opción 1 a la opción 2, explique por qué se debe preferir la opción 4 sobre la opción 3.

15 Aunque los axiomas de Von Neumann-Morgenstern al parecer son plausibles, hay muchas situaciones en las que al parecer se violan estos axiomas. Por ejemplo, suponga que un universitario recién graduado debe elegir entre tres ofertas de trabajo con base en el salario inicial, lugar de trabajo y oportunidad de superarse. Dadas dos ofertas de trabajo que son satisfactorias con respecto a los tres atributos, el graduado decidirá entre dos ofertas de empleo eligiendo la que sea superior en por lo menos dos de los tres atributos. Suponga que el graduado tiene tres ofertas de trabajo y que las clasificó como se ilustra en la tabla 8 (E = excelente, B = buena y S = satisfactoria). Demuestre que las preferencias del graduado entre estos trabajos violan el axioma de ordenación completa.

TABLA 8

	Salario inicial	Ubicación	Oportunidad de ascenso
Empleo 1	E	S	G
Empleo 2	G	E	S
Empleo 3	S	G	E

Grupo C

16 Suponga que mi función de utilidad para mi posición de activo es $u(x) = x^{1/2}$. En la actualidad cuento con \$10 000. Considere la siguiente lotería:

L: Con probabilidad $\frac{1}{2}$, L produce un pago de \$1025.
Con probabilidad $\frac{1}{2}$, L produce un pago de $-\$199$.

a Si no tengo derecho a jugar L, encuentre una ecuación que al resolverla produzca la cantidad que estaría dispuesto a pagar por el derecho de jugar L. A esto se le conoce como **precio de compra** de la lotería L.

b Si tengo derecho a jugar L, ¿cuál es el mínimo que aceptaría de alguien que quisiera comprar el derecho a jugar L? (Después que alguien más compra L, no puedo jugar.) A esto se le llama el **precio de venta** de la lotería L.

c Conteste el inciso (b) para el caso en que tengo \$1000.

d Suponga que mi función de utilidad para mi posición de activo es $u(x) = 1 - e^{-x}$. Demuestre que para las posiciones posibles del activo, el precio de compra de L y el precio de venta de L permanecen sin cambio. Demuestre que para todas las posiciones del activo, el precio de compra de L será igual al precio de venta de L.

13.3 Fallas en la maximización esperada de la utilidad: teoría prospectiva y efectos de encuadre

Al parecer son razonables los axiomas que sustentan la maximización esperada de la utilidad (MEU), pero en la práctica, las decisiones de las personas a menudo se desvían de las predicciones de la MEU. Los psicólogos Tversky y Kahneman[‡] (1981) elaboraron la **teoría del prospecto** y **los efectos de marco para valores** a fin de tratar y explicar por qué las personas se desvían de las predicciones de la MEU.

[‡]En 2002, Kahneman recibió el premio Nóbel de economía, en gran parte honrando su trabajo con Tversky. Tversky no recibió el premio porque murió en 1966 (el premio Nóbel no se otorga después de muerto).

Ahora se debe evaluar la bifurcación de suceso que emana de la decisión de promocionar el producto. Esta bifurcación de suceso produce un estado final esperado de los activos de .60(360 000) + .40(120 000) = $264 000, que se introduce en ○.

Lo que resta es determinar la decisión correcta en la bifurcación, promocionar el producto contra ninguna promoción. Se ha encontrado que promocionar el producto produce un estado final esperado de los activos de $264 000, y no promocionar da un estado final esperado de los activos de $270 000. Así que no se || realiza una promoción del producto y se introduce $270 000 en □.

Ahora estamos en el comienzo del árbol y se encontró que la decisión óptima de Colaco es no promocionar y comercializar a nivel nacional. Esta estrategia producirá un estado final esperado de los activos de $270 000. Observe que el árbol de decisión también muestra que si se hubiera promocionado el producto y, en consecuencia, actuado de manera óptima (comercializar a nivel nacional después del éxito local y no comercializar a nivel nacional después del fracaso local), se habría obtenido un estado final esperado de los activos de $264 000.

Incorporación de la aversión al riesgo en el análisis del árbol de decisión

Observe que la estrategia óptima de Colaco produce una probabilidad de .45 de que la compañía termine con un estado o posición final de activos relativamente pequeña, igual a $50 000. Por otro lado, la estrategia de promocionar el producto y actuar de manera óptima con base en los resultados del estudio de mercado produce sólo una probabilidad de (.60)(.15) = .09 de que el estado de los activos de Colaco esté abajo de $100 000. (¿Por qué?) Así, si Colaco tiene aversión al riesgo y toma una decisión, la estrategia de comercializar de inmediato a nivel nacional no reflejaría la preferencia de la compañía.

Para ilustrar cómo se podría incorporar la aversión al riesgo en el análisis del árbol de decisión, suponga que Colaco tiene la función de utilidad con aversión al riesgo $u(x)$ de la figura 8 (x = estado final de los activos). (¿Cómo se sabe que esta función de utilidad exhibe aversión al riesgo?) *Para determinar las decisiones óptimas de Colaco (es decir, las decisiones que maximizan la utilidad esperada), simplemente sustituya cada estado final* x_0 *de los activos por su utilidad* $u(x_0)$. *Luego en cada bifurcación de suceso, calcule la utilidad esperada del estado final de los activos de Colaco, y en cada bifurcación de decisión, elija la rama que tiene la utilidad esperada más grande.*

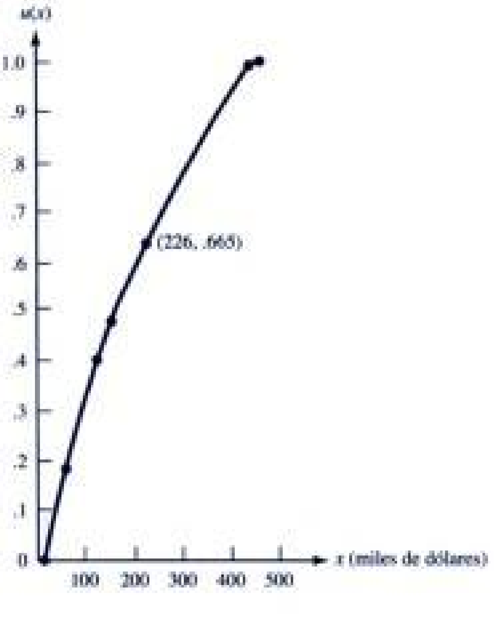


FIGURA 8
Función de utilidad de Colaco

De la figura 8 se encuentra que $u(\$450\,000) = 1$, $u(\$420\,000) = .99$, $u(\$150\,000) = .48$, $u(\$120\,000) = .40$, $u(\$50\,000) = .19$, y $u(\$20\,000) = 0$. Sustituyendo estos valores en el árbol de decisión de la figura 7 se obtiene el árbol de decisión de la figura 9. Se calcula la utilidad esperada en las tres bifurcaciones de suceso siguientes:

1 Comercializar a nivel nacional después del éxito local. Aquí se tiene una utilidad esperada de $.85(.99) + .15(0) = .8415$.

2 Comercializar a nivel nacional después del fracaso local. Aquí se tiene una utilidad esperada de $.10(.99) + .90(0) = .099$.

3 Comercializar a nivel nacional después de no promocionar el producto. Aquí se tiene una utilidad esperada de $.55(1) + .45(.19) = .6355$.

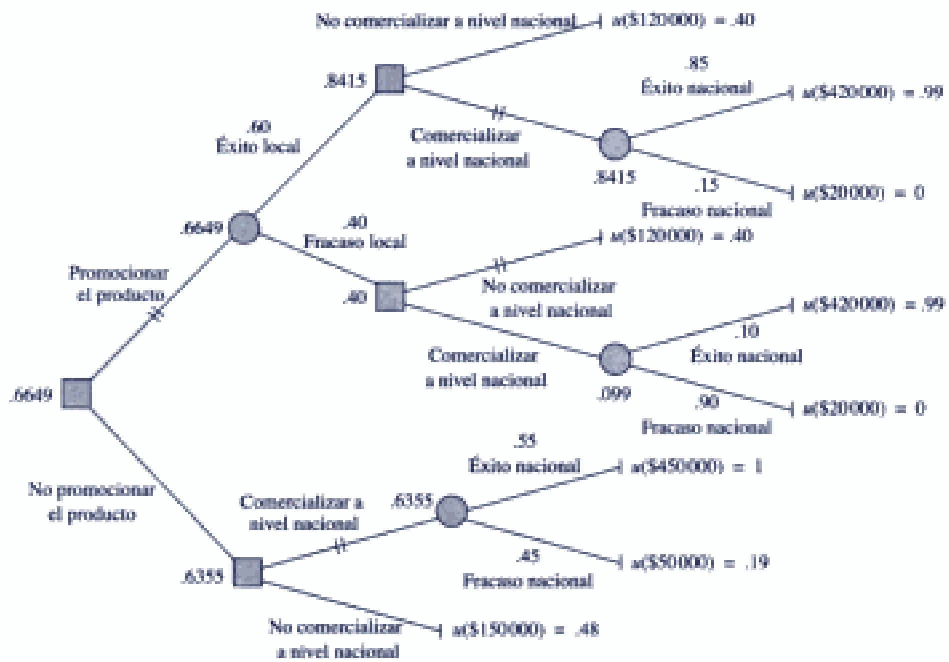
Ahora es posible evaluar tres bifurcaciones de decisión:

1 Decisión después del éxito local. Comercializar a nivel nacional produce una utilidad esperada más grande que no comercializar a nivel nacional, de modo que para esta bifurcación se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce una utilidad esperada de 0.8415.

2 Decisión después del fracaso local. No comercializar a nivel nacional produce una utilidad esperada más grande que comercializar a nivel nacional, de modo que para esta bifurcación no se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce una utilidad esperada de .40.

3 Decisión de no promocionar el producto. Comercializar a nivel nacional produce una utilidad esperada más grande que no comercializar a nivel nacional, de modo que para esta bifurcación se ‖ comercializa a nivel nacional y se introduce una utilidad esperada de .6355.

Ahora se debe evaluar la bifurcación de suceso que emana de la decisión de promocionar el producto. Esta bifurcación de suceso produce una utilidad esperada de $.60(.8415) + .40(.40) = .6649$, que se introduce en ○. Lo que resta es determinar la decisión correcta en la bifurcación de decisión de promocionar el producto contra no promocionar. Se sabe que promocionar el producto produce una utilidad esperada de .6649 y no promocionar da una utilidad esperada de .6355, así que se ‖ promociona el producto y se introduce una utilidad esperada de .6649 en □.



$u(\$226000) = .6649$, así que esta situación es equivalente a un cierto estado de activos de \$226000.

FIGURA 9
Árbol de decisión de Colaco (adversión al riesgo)

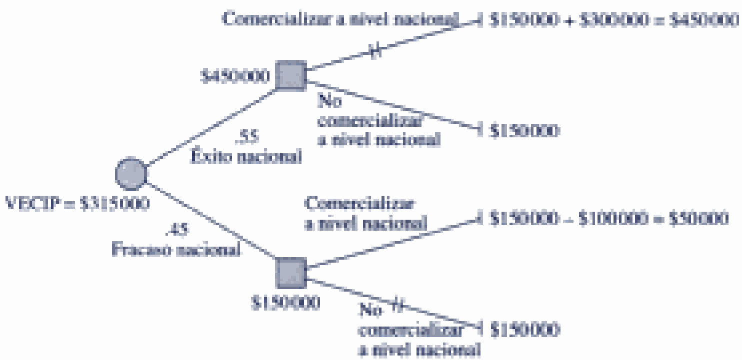


FIGURA 10
Valor esperado con la información perfecta (VECIP) para Colaco

Para el ejemplo de Colaco, se encuentra de la figura 10 que VECIP = \$315 000. Entonces VEIP = 315 000 − 270 000 = \$45 000. Así, un estudio de mercado perfecto (uno que siempre fue correcto) valdría \$45 000. El VEIP es una cota superior útil en el valor de la muestra o información de mercado; es decir, ninguna información de muestra o de mercado (sin importar cuán buena sea) puede valer más de \$45 000.

EJEMPLO 4 Comerciante de arte

Un cliente de un comerciante de arte está dispuesto a comprar la pintura *Sunplant* en \$50 000. El comerciante puede comprar la pintura hoy por \$40 000, o puede esperar un día y comprar la pintura mañana (si no se ha vendido) por \$30 000. El comerciante podría esperar también otro día y comprar la pintura (si aún está disponible) por \$26 000. Al final del tercer día, la pintura no estará disponible para venta. Cada día, hay una probabilidad de .60 de que sea vendida la pintura. ¿Qué estrategia maximiza la ganancia esperada del comerciante?

Solución El árbol de decisión para este ejemplo se da en la figura 11. La clave para trazar este árbol de decisión es que cada día, el comerciante debe elegir entre comprar la pintura y esperar otro día. Por supuesto, esperar podría significar que el comerciante nunca pudiera vender la pintura. Como se observa en el árbol de decisión, el comerciante debe comprar la pintura el primer día.

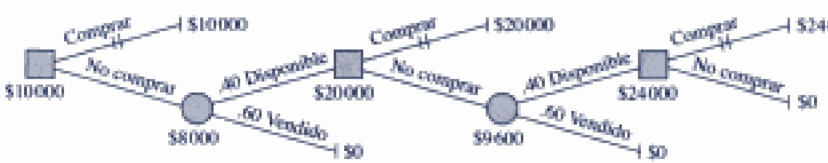


FIGURA 11
Árbol de decisión para el ejemplo 4

PROBLEMAS

Grupo A

1 Oilco debe determinar si perfora en busca de petróleo o no en el mar del sur de China. Hacer la perforación cuesta \$100 000, y si se encuentra petróleo, el valor estimado es \$600 000. En el presente, Oilco cree que hay 45% de probabilidades de que el campo contenga petróleo. Antes de perforar, Oilco puede contratar un geólogo (por \$10 000) para obtener más información acerca de la probabilidad de que el pozo contenga petróleo. Hay una probabilidad de 50% de que el geólogo emita un informe favorable y 50% de probabilidades de un informe desfavorable. Si el reporte es favorable, hay una probabilidad de 80% de que el campo contenga petróleo. Si el informe es desfavorable, hay 10% de probabilidades de que el campo contenga petróleo. Determine el curso de acción óptimo de Oilco. También determine el VEIM y el VEIP.

2 El departamento de ciencias de decisión intenta determinar cuál de dos máquinas copiadoras comprar. Ambas máquinas cumplirán las necesidades del departamento durante los diez años siguientes. La máquina 1 cuesta 2000 dólares y tiene un acuerdo de mantenimiento que, por una cuota anual de \$150, cubre todas las reparaciones. La máquina 2 cuesta 3000 dólares y su costo de mantenimiento anual es una variable aleatoria. En el presente, el departamento de ciencias de la decisión cree que hay 40% de probabilidades de que el costo de mantenimiento anual para la máquina 2 sea de $0, 40% de probabilidades de que sea $100 y 20% de probabilidades de que sea $200.

Antes de que se tome la decisión de comprar, el departamento puede pedir a un técnico capacitado que evalúe la calidad de la máquina 2. Si el técnico cree que la máquina 2 es satisfactoria, hay 60% de probabilidades de que su costo de mantenimiento anual sea $0, y 40% de probabilidades de que sea $100. Si el técnico cree que la máquina 2 es insatisfactoria, hay 20% de probabilidades de que el costo de mantenimiento anual sea $0, 40% de que sea 100 y 40% de que sea $200. Si hay 50% de probabilidades de que el técnico dé un informe satisfactorio, ¿cuál es el VEIM? Si el técnico cobra $40, ¿qué debe hacer el departamento de ciencias de la decisión? ¿Cuál es el VEIP?

3 Soy el entrenador de los Cachorros de Chicago. Suponga que hay un corredor en primera base y ningún *out* y se quiere determinar si se debe ordenar un toque de bola. Suponga que un toque de bola producirá uno de dos resultados: (1) Con probabilidad .80, el toque de bola será exitoso, en cuyo caso el bateador queda fuera y el corredor de la primera base pasa a segunda. (2) Con probabilidad .20 el toque de pelota será infructuoso y el corredor de la primera base queda fuera tratando de avanzar a la segunda y el bateador llega a la primera base.

El número de carreras esperadas que anotarán los Cachorros en una entrada en varias situaciones se da en la tabla 9.

a Si el objetivo es maximizar el número esperado de carreras anotadas en una entrada, ¿se debe tocar la bola? A pesar de esta respuesta, ¿por qué cree que los entrenadores ordenan tocar la bola?

b Si estamos considerando el robo de la segunda base sin ningún *out*, ¿qué probabilidad de éxito se necesita para que el robo de la segunda sea una decisión óptima?

4 La compañía Nitro Fertilizer está elaborando un nuevo fertilizante. Si Nitro comercializa el producto y tiene éxito, la compañía obtendrá una ganancia de $50 000; si no tiene éxito, la compañía perderá $35 000. En el pasado, productos similares han tenido éxito 60% de las veces. A un costo de $5000, se puede probar la efectividad del nuevo fertilizante. Si el resultado de la prueba es favorable, hay 80% de probabilidades de que el fertilizante tenga éxito. Si la prueba resulta desfavorable, sólo hay 30% de probabilidades de que tenga éxito el fertilizante. Hay 60% de probabilidades de un resultado de prueba favorable y 40% de probabilidades de un resultado de prueba desfavorable. Determine la estrategia óptima de Nitro. También obtenga el VEIM y el VEIP.

5 Durante el verano, el nadador olímpico Adam Johnson nada todos los días. En los días soleados va a una alberca al aire libre, donde puede nadar sin costo alguno. En los días lluviosos, él tiene la opción de comprar un pase de temporada de 15 dólares para la alberca cubierta, que le permite usarla todo el verano. Si no compra el pase de temporada, debe pagar 1 dólar cada vez que vaya ahí. En los registros meteorológicos se observa que hay 60% de probabilidades de que el verano sea soleado (en cuyo caso el promedio es de 6 días lluviosos durante el verano) y una probabilidad de 40% de que el verano sea lluvioso (un promedio de 30 días de lluvia durante el verano).

Antes que comience el verano, Adam tiene la opción de comprar un pronóstico del clima de largo alcance por 1 dólar. El pronóstico predice un verano soleado 80% del tiempo y un verano lluvioso 20% del tiempo. Si el pronóstico predice un verano soleado, hay una probabilidad de 70% de que el verano sea en realidad soleado. Si el pronóstico predice un verano lluvioso, hay una probabilidad de 80% de que en realidad el verano sea lluvioso. Suponiendo que el objetivo de Adam sea minimizar su costo total esperado para el verano, ¿qué debe hacer? Encuentre también el VEIM y el VEIP.

TABLA 9

Situación en base	*outs*	Número de de carreras	Número esperado
Corredor en primera	0		0.813
Corredor en primera	1		0.498
Corredor en segunda	1		0.671
Corredor en segunda	0		1.194
Ningún corredor en base	1		0.243

6 Pete está considerando hacer una apuesta en el juego decisivo de la NCAA entre Indiana y Purdue. Sin más información, él cree que cada equipo tiene las mismas probabilidades de ganar. Si gana la apuesta, obtiene $10 000; si la pierde, perderá $11 000. Antes de apostar, podría pagar a Bobby $1000 por su predicción confidencial acerca del juego; 60% de las veces, la predicción de Bobby es que Indiana ganará y 40% del tiempo, Bobby predice que ganará Purdue. Cuando Bobby dice que ganará la UI, la UI tiene una probabilidad de 70% de ganar, y cuando Bobby dice que ganará Purdue, la UI sólo tiene 20% de probabilidades de ganar. Determine de qué manera Pete puede maximizar su ganancia total esperada. ¿Cuál es el VEIM? ¿Cuál es el VEIP?

7 Erica va a volar a Londres el 5 de agosto y regresa a casa el 20 del mismo mes. Estamos a 1 de julio y ella podría comprar hoy un boleto de viaje sencillo (por $350) o un boleto de viaje redondo (por $660). Ella también podría esperar hasta el 1 de agosto para comprar un boleto. El primero de agosto un boleto sencillo costará $370 y uno de viaje redondo costará $730. Es posible que entre el primero de julio y el primero de agosto, su hermana (quien trabaja para una aerolínea) pueda obtener un boleto sencillo gratis para Erica. La probabilidad de que su hermana obtenga el boleto gratis es de .30. Si Erica compra un boleto de viaje redondo el primero de julio y su hermana obtiene un boleto gratis, ella puede devolver la mitad de su viaje redondo a la aerolínea. En este caso, el costo total del boleto será de $330 más una penalización de $50. Utilice un árbol de decisión para determinar cómo maximizar el costo esperado de Erica de obtener transporte de viaje redondo a Londres.

8 Soy un concursante en el programa de TV *Remote Jeopardy*, que funciona como sigue: Primero se me hace una pregunta acerca de videos estúpidos. Si mi respuesta es correcta, gano $100. Según yo tengo 80% de probabilidades de contestar correctamente la pregunta. Si mi respuesta es incorrecta, el juego se termina y no gano nada. Si mi respuesta es correcta, podría salir con $100, o continuar y contestar una pregunta acerca de los programas de TV insulsos. Si mi respuesta a esta pregunta es correcta, gano otros $300, y de lo contrario, pierdo todo lo que he ganado y todo termina. Mis posibilidades de contestar esta pregunta correctamente son de .60. Si doy una respuesta correcta a la pregunta acerca de los programas de TV insulsos, podría salir con mis "ganancias" o continuar y contestar una pregunta acerca de estadís-

TABLA 11

Solución	Probabilidad de que muera el paciente
Operación del paciente con apendicitis	.0009
Operación del paciente con dolor abdominal indeterminado	.0004
Operación en apéndice perforado	.0064
Ninguna operación en paciente con dolor abdominal indeterminado	0

B_1: 25% de probabilidades de ganar \$30

B_2: 20% de probabilidades de ganar \$45

La mayoría de las personas prefieren A_1 a A_2 y B_2 a B_1. Explique por qué este comportamiento viola la suposición de que quienes toman decisiones maximizan la utilidad esperada.

b Ahora suponga que usted juega el siguiente juego: usted tiene 75% de probabilidades de no ganar nada y 25% de jugar la segunda etapa del juego. Si usted llega a la segunda etapa, tiene dos opciones (C_1 y C_2), pero debe elegir ahora, antes de llegar a la segunda etapa.

C_1: ganar con seguridad \$30

C_2: 80% de probabilidades de ganar \$45

La mayoría de las personas eligen C_1 en vez de C_2 y B_2 en lugar de B_1 (del inciso a). Explique por qué esto viola de nuevo la suposición de maximización de la utilidad esperada. Tversky y Kahneman (1981) especulan que la mayoría de las personas son atraídas por los \$30 seguros de la segunda etapa, ¡aunque es posible que no se llegue a ella! Observe que B_1 y C_1 dan \$30 con la misma probabilidad y B_2 y C_2 dan \$45 con la misma probabilidad. ¡Al parecer las personas no actúan de manera muy racional![†]

16 ¡Usted ha sido elegido para que aparezca en Hoosier Millionaire! Las reglas son las siguientes: hay cuatro cartas ocultas. Una dice "STOP" y las otras tres tienen cantidades en dólares de \$150 000, \$200 000 y \$1 000 0000. Se tiene que elegir una carta. Si la carta dice "STOP", no se gana nada. En cualquier momento se puede salir y conservar la cantidad más grande de dinero que haya aparecido en alguna carta que haya elegido, o continuar. Sin embargo, si continúa y elige la carta que dice "STOP", no gana dinero. Por ejemplo, usted podría elegir la carta de \$150 000, luego la carta de \$200 000 y entonces podría optar por salir del juego y ¡recibir \$200 000!

a Si su objetivo es maximizar su pago esperado, ¿qué estrategia debe seguir?

b Mi función de utilidad para un aumento de efectivo satisface $u(0) = 0$, $u(\$40{,}000) = .25$, $u(\$120{,}000) = .50$, $u(\$400{,}000) = .75$, y $u(\$1{,}000{,}000) = 1$. Después de trazar una curva a través de estos puntos, determine una estrategia que maximice mi utilidad esperada. Es posible que usted quiera usar su propia función de utilidad.

[†]Basado en Tversky y Kahneman (1981).

13.5 Regla de Bayes y árboles de decisión

El ejemplo de Colaco y muchos otros problemas de árbol de decisión comparten varias características comunes.

Hay varias situaciones del mundo. Diferentes situaciones del mundo producen diferentes beneficios a la persona que toma una decisión. En el ejemplo de Colaco, las dos situaciones del mundo fueron que Chocola es un éxito nacional (*EN*) o fracaso nacional (*FN*). Asimismo, se tenían (antes de llevar a cabo el lanzamiento inicial del producto, si es que se hace) estimaciones de las probabilidades de cada estado o situación del mundo. Éstas se llaman **probabilidades a priori.** En el ejemplo de Colaco, las probabilidades a priori son $p(EN) = .55$ y $p(FN) = .45$.

En diferentes estados del mundo, decisiones distintas podrían ser óptimas. En el ejemplo de Colaco, la compañía debe comercializar a nivel nacional si el estado del mundo es *EN* y no comercializar a nivel nacional si el estado del mundo es *FN*.

Podría ser deseable comprar información que dé a quien toma la decisión más conocimiento previo acerca del estado del mundo. Esto permitiría a una persona tomar mejores decisiones. Por ejemplo, en el ejemplo de Colaco, la información obtenida de promocionar el producto podría ayudar a Colaco a decidir si promociona Chocola a nivel nacional o no.

La persona que toma la decisión recibe información al observar los resultados de un experimento. Sean $s_1, s_2, \ldots, s_n$ los posibles estados del mundo y sean $o_1, o_2, \ldots, o_m$ los posibles resultados del experimento. A menudo, a quien toma la decisión se le dan las probabilidades condicionales $p(s_i|o_j)(i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m)$. Con conocimiento del resultado del experimento, estas probabilidades dan nuevos valores para la probabilidad de cada estado del mundo. Las probabilidades $p(s_i|o_j)$ se llaman **probabilidades a posteriori.**

En el ejemplo de Colaco, el experimento fue el procedimiento de promocionar el producto y los dos resultados posibles fueron FL = fracaso local y EL = éxito local. Las probabilidades a posteriori fueron

$$p(EN|EL) = .85, \qquad p(EN|FL) = .10,$$
$$p(FN|EL) = .15, \qquad p(FN|FL) = .90$$

Así, el hecho de conocer el éxito del lanzamiento inicial del producto a nivel local, incrementaría en gran medida la estimación de Colaco de la probabilidad de éxito nacional, y el conocimiento de un fracaso en el lanzamiento inicial del producto a nivel local, disminuiría enormemente la estimación de Colaco de la probabilidad de un éxito nacional. Las probabilidades listadas se utilizaron para definir la bifurcaciones de suceso en el árbol de decisión que siguió la acción Promocionar el producto.

En muchas situaciones, sin embargo, se podrían tener las probabilidades a priori $p(s_i)$ para cada estado del mundo, y en lugar de tener las probabilidades a posteriori $p(s_i|o_j)$, se podrían tener las **posibilidades** $p(o_j|s_i)$. Para cada estado del mundo, las posibilidades dan la probabilidad de observar cada resultado experimental. Así, en el ejemplo de Colaco, se podrían tener las probabilidades a priori $p(EN) = .55$ y $p(FN) = .45$ y las probabilidades $p(EL|EN) = \frac{51}{55}$, $p(FN|EN) = \frac{4}{55}$, $p(EL|FN) = \frac{9}{45}$ y $p(FL|FN) = \frac{36}{45}$.

Para aclarar el significado de las posibilidades, suponga que 55 productos que han sido éxito nacional, habían sido promocionados con anterioridad; de estos 55 productos, 51 fueron éxitos locales y 4 fueron fracasos locales. Esto nos habría llevado a estimar $p(EL|EN)$ como $\frac{51}{55}$ y $p(FL|EN)$ como $\frac{4}{55}$.

Para completar el árbol de decisión de la figura 7, aún se necesita conocer las probabilidades a posteriori $p(EN|EL)$, $p(FN|EL)$, $p(EN|FL)$ y $p(FN|FL)$. Con la ayuda de la regla de Bayes (véase la sección 12.4), se pueden usar las probabilidades y posibilidades a priori para determinar las probabilidades a posteriori necesarias. Para empezar el cálculo de las probabilidades a posteriori, se necesitan determinar las probabilidades conjuntas de cada estado del mundo y el resultado experimental (es decir, debemos determinar $p(EN \cap EL)$, $p(EN \cap FL)$, $p(FN \cap EL)$ y $p(FN \cap FL)$). Obtenemos estas probabilidades conjuntas por medio de la definición de probabilidad condicional:

$$p(EN \cap EL) = p(EN)p(EL|EN) = .55(\tfrac{51}{55}) = .51$$
$$p(EN \cap FL) = p(EN)p(FL|EN) = .55(\tfrac{4}{55}) = .04$$
$$p(FN \cap EL) = p(FN)p(EL|FN) = .45(\tfrac{9}{45}) = .09$$
$$p(FN \cap FL) = p(FN)p(FL|FN) = .45(\tfrac{36}{45}) = .36$$

A continuación se calcula la probabilidad de cada resultado experimental posible (a menudo llamada *probabilidad marginal*) $p(EL)$ y $p(FL)$:

$$p(EL) = p(EN \cap EL) + p(FN \cap EL) = .51 + .09 = .60$$
$$p(FL) = p(EN \cap FL) + p(FN \cap FL) = .04 + .36 = .40$$

Ahora la regla de Bayes se puede aplicar para obtener las probabilidades a posteriori deseadas:

$$p(EN|EL) = \frac{p(EN \cap EL)}{p(EL)} = \frac{.51}{.60} = .85$$

$$p(FN|EL) = \frac{p(FN \cap EL)}{p(EL)} = \frac{.09}{.60} = .15$$

$$p(EN|FL) = \frac{p(EN \cap FL)}{p(FL)} = \frac{.04}{.40} = .10$$

$$p(FN|FL) = \frac{p(FN \cap FL)}{p(FL)} = \frac{.36}{.40} = .90$$

Estas probabilidades se pueden usar para completar el árbol de decisión de la figura 7.

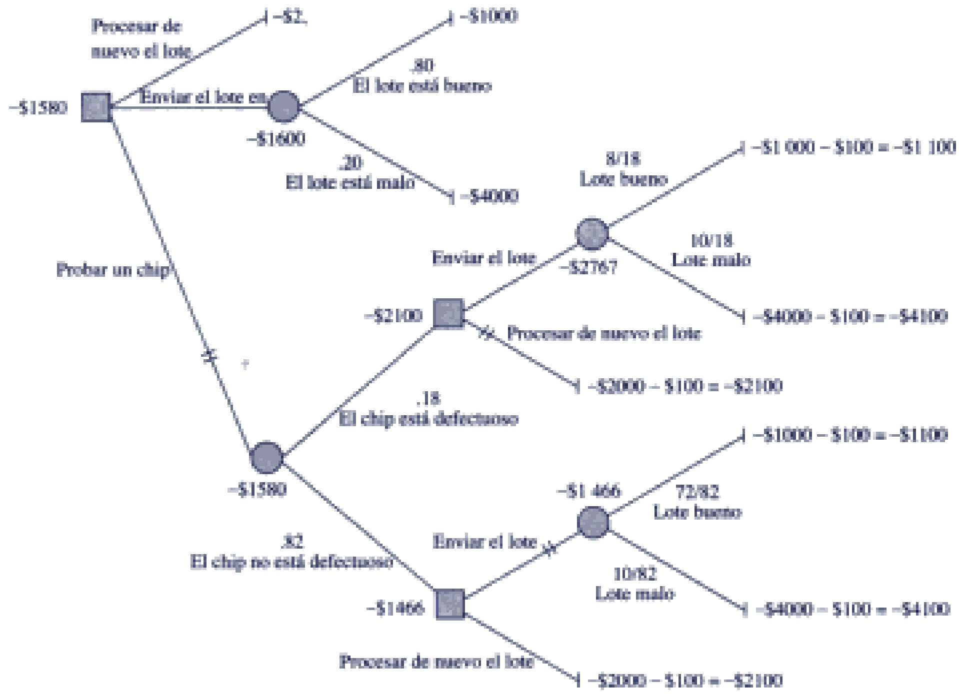


FIGURA 12
Ilustración del uso de la regla de Bayes en el árbol de decisión para Computer Co.

Luego, se utiliza la regla de Bayes para determinar las probabilidades a posteriori requeridas:

$$p(B|D) = \frac{p(D \cap B)}{p(D)} = \frac{.10}{.18} = \frac{5}{9}$$

$$p(G|D) = \frac{p(D \cap G)}{p(D)} = \frac{.08}{.18} = \frac{4}{9}$$

$$p(B|ND) = \frac{p(ND \cap B)}{p(ND)} = \frac{.10}{.82} = \frac{10}{82}$$

$$p(G|ND) = \frac{p(ND \cap G)}{p(ND)} = \frac{.72}{.82} = \frac{72}{82}$$

Estas probabilidades a posteriori se usan para completar el árbol de la figura 12. Los cálculos directos muestran cómo la estrategia óptima es probar un chip. Si el chip está defectuoso, vuelva a procesar el lote. Si el chip no está defectuoso, envíe el lote. Se incurre en un costo esperado de $1580.

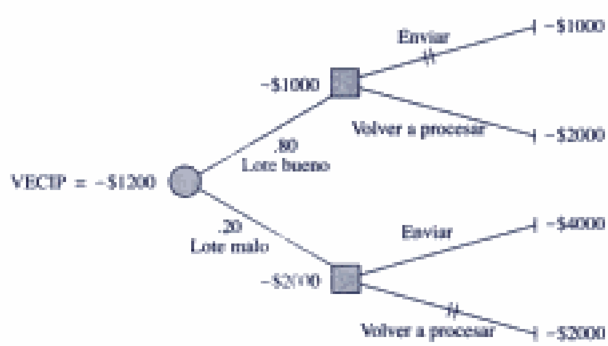


FIGURA 13
Valor esperado con información perfecta (VECIP) para Fruit Computer

Atributo 1 Elección de la actividad (ya sea un día de campo o ir al cine a ver *Antarctic Vacation*)

Atributo 2 Clima de la tarde del domingo (ya sea soleado o lluvioso)

Suponga que en un día soleado, se prefiere ir de día de campo que al cine, pero en un día lluvioso, se da preferencia a ir al cine que al día de campo. El atributo 1 no es preferencialmente independiente del atributo 2.

DEFINICIÓN ■ Si el atributo 1 es pi del atributo 2 y el atributo 2 es pi del atributo 1, entonces el atributo 1 es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) del atributo 2. ■

De nuevo refiérase la búsqueda de empleo de Joe. Suponga que las cinco ofertas de empleo de Joe se localizan en Los Ángeles, Chicago, Dallas, Nueva York e Indianápolis. Si, para algún nivel de salario determinado, Joe prefiere trabajar en Los Ángeles, entonces el atributo 2 es pi del atributo 1. Si el atributo 1 fuera también pi del atributo 2, entonces los atributos 1 y 2 serían mpi.

El concepto de independencia mutua y preferencial se puede generalizar a un conjunto de atributos.

DEFINICIÓN ■ Un conjunto de atributos S es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) de un conjunto de atributos S' si (1) los valores de los atributos en S' no afectan las preferencias para los valores de atributos en S, y (2) los valores de los atributos en S no afectan las preferencias para los valores de los atributos en S'. ■

En el ejemplo de la compra de un automóvil nuevo por parte de Joe, sea S = atributos 1 y 2 y S' = atributos 3 y 4. Entonces para que S sea mpi de S', debe ser el caso que (1) las preferencias de Joe por el tamaño y la economía de combustible no sean afectadas por un estilo y precio de automóvil, y (2) las preferencias de Joe por el estilo y precio del automóvil no son afectadas por el tamaño y economía de combustible del automóvil. Así, si S y S' fueran mpi, se podría concluir que si para un estilo determinado y nivel de precio, Joe prefirió A_1 (un automóvil grande con un rendimiento de 15 mpg) a A_2 (un automóvil pequeño que logra 25 mpg), entonces para cualquier estilo y nivel de precio, Joe preferiría A_1 a A_2.

DEFINICIÓN ■ Un conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) si para los subconjuntos S de $\{1, 2, \ldots, n\}$, S es mpi de $\bar{S}$. ($\bar{S}$ son los miembros de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no están incluidos en S.) ■

Es fácil ver que si hay sólo dos atributos (1 y 2), los atributos son mpi si y sólo si el atributo 1 es mpi del atributo 2.

El resultado siguiente da una condición que asegura que quien toma la decisión tendrá una función de valor (o costo) aditiva.

TEOREMA 1

Si el conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es mpi, las preferencias de quien toma la decisión se pueden representar por una función de valor (o costo) aditiva.

Éste no es un resultado obvio. (Para una demostración, véanse Keeney y Raiffa (1976, capítulo 3).) Para ilustrar el resultado, suponga que la función de valor de quien toma la decisión para dos atributos está dada por

$$v(x_1, x_2) = x_1 + x_1x_2 + x_2 \qquad (9)$$

Una persona que toma una decisión con la función de valor (2) preferiría, por ejemplo, (6, 6) a (4, 8) (debido a que $v(6, 6) = 48$ y $v(4, 8) = 44$). El lector debe verificar que para (2), el atributo 1 es pi del atributo 2 y el atributo 2 es pi del atributo 1 (véase el problema 3 al

Al simplificar esta ecuación se obtiene (si $k_1 \neq 0$)

$$\tfrac{1}{2}[u_1(10) + u_1(30)] = u_1(16) \tag{11}$$

Con (11) se encuentra que

$$\begin{aligned} E(U \text{ para } L_2) &= \tfrac{1}{2}[k_1u_1(10) + k_2u_2(20) + k_3u_1(10)u_2(20)] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}[k_1u_1(30) + k_2u_2(20) + k_3u_1(30)u_2(20)] \\ &= k_1u_1(16) + k_2u_2(20) + k_3u_1(16)u_2(20) \\ &= E(U \text{ para } L_2') \end{aligned}$$

Así, se ve que una función de utilidad multilineal de la forma (10) implica que el atributo 1 es iu del atributo 2. De manera similar, se puede demostrar que (10) implica que el atributo 2 es iu del atributo 1. Por consiguiente, (10) implica que los atributos 1 y 2 son miu. También se puede demostrar que si x_1 y x_2 son miu, entonces $u(x_1, x_2)$ debe ser de la forma (10) (véanse Keeney y Raiffa (1976)).

TEOREMA 2

Los atributos 1 y 2 son miu si y sólo si la función de utilidad de quien toma la decisión $u(x_1, x_2)$ es una función multilineal de la forma

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_1(x_1)u_2(x_2) \tag{10}$$

La determinación de una función de utilidad de quien toma decisiones $u(x_1, x_2)$ se puede simplificar más si muestra **independencia aditiva.** Antes de definir la independencia aditiva, se debe definir x_1(mejor) o x_2(mejor) como el nivel más favorable del atributo 1 o 2 que puede ocurrir; también x_1(peor) o x_2(peor) es el nivel menos favorable del atributo 1 o 2 que puede ocurrir.

DEFINICIÓN ■ La función de utilidad de quien toma decisiones exhibe independencia aditiva si quien toma decisiones es indiferente entre

$\frac{1}{2}$ — x_1(mejor), x_2(mejor)
$\frac{1}{2}$ — x_1(peor), x_2(peor)

y

$\frac{1}{2}$ — x_1(mejor), x_2(peor)
$\frac{1}{2}$ — x_1(peor), x_2(mejor)

(11) ■

En esencia, la independencia aditiva de los atributos 1 y 2 implica que las preferencias sobre las loterías que tienen que ver sólo con el atributo 1 (o sólo con el atributo 2) dependen únicamente de la distribución marginal para los valores posibles del atributo 1 (o del atributo 2) y no dependen de la distribución conjunta de los valores posibles de los atributos 1 y 2.

Si los atributos 1 y 2 son miu y la función de utilidad de quien toma decisiones muestra independencia aditiva, es fácil mostrar que en (10), se debe cumplir $k_3 = 0$. Como en la sección 2.2, simplemente escale $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$ tal que

$$u_1(x_1(\text{mejor})) = 1 \qquad u_1(x_1(\text{peor})) = 0$$
$$u_2(x_2(\text{mejor})) = 1 \qquad u_2(x_2(\text{peor})) = 0$$

Ahora (10) implica

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) = k_1 + k_2 + k_3 \qquad u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor})) = 0$$
$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{peor})) = k_1 \qquad u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{mejor})) = k_2$$

Entonces la independencia aditiva implica que

$$\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3) + \tfrac{1}{2}(0) = \tfrac{1}{2}(k_1) + \tfrac{1}{2}(k_2)$$
$$k_3 = 0$$

Así, los atributos 1 y 2 son miu y la función de utilidad de quien toma la decisión muestra independencia aditiva, su función de utilidad es de la forma aditiva siguiente:

$$u(x_1, x_2) = k_1 u_1(x_1) + k_2 u_2(x_2) \tag{12}$$

Evaluación de funciones de utilidad multiatributos

Si los atributos 1 y 2 son miu, ¿cómo podemos determinar $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$, k_1, k_2, y k_3? Para determinar $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$, se aplica la técnica que se utilizó para evaluar la función de utilidad en la sección 13.2. Se ilustra mediante la determinación de $u_1(x_1)$. Sea $u_1(x_1(\text{mejor})) = 1$ y $u_1(x_1(\text{peor})) = 0$. A continuación determine un valor del atributo 1 (llámelo $x_1(\frac{1}{2})$) con $u_1(x_1(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$. Por la definición de $u_1(x_1(\frac{1}{2}))$ y miu, quien toma la decisión es (para cualquier valor de x_2) indiferente entre

L — $\frac{1}{2}$ — $x_1(\text{mejor}), x_2$; $\frac{1}{2}$ — $x_1(\text{peor}), x_2$ y $\bar{L}$ — 1 — $x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2$

Así, $x_1(\frac{1}{2})$ se podría determinar a partir del hecho que el equivalente de certidumbre de L es $(x_1(\frac{1}{2}), x_2)$. De un modo similar, se pueden determinar los valores $x_1(\frac{1}{4})$ y $x_1(\frac{3}{4})$ del primer atributo que satisface $u_1(x_1(\frac{1}{4})) = \frac{1}{4}$ y $u_1(x_1(\frac{3}{4})) = \frac{3}{4}$. Continuando de este modo, podemos aproximar $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$.

Para encontrar k_1, k_2 y k_3, se empieza por cambiar la escala de $u_1(x_1)$, $u_2(x_2)$ y $u(x_1, x_2)$ tal que

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) = 1, \qquad u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor})) = 0,$$
$$u_1(x_1(\text{mejor})) = 1, \quad u_1(x_1(\text{peor})) = 0, \quad u_2(x_2(\text{mejor})) = 1, \quad u_2(x_2(\text{peor})) = 0$$

Ahora, de (10) se obtiene

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{peor})) = k_1(1) + k_2(0) + k_3(0) = k_1$$

Por consiguiente, k_1 se puede determinar a partir del hecho que quien toma la decisión es indiferente entre

— 1 — $u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{peor}))$ y — k_1 — $u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor}))$; $1 - k_1$ — $u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor}))$

De manera similar (véase el problema 3 al final de esta sección), $u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{mejor})) = k_2$ y k_2 se puede determinar del hecho que quien toma la decisión es indiferente entre

— 1 — $u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{mejor}))$ y — k_2 — $u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor}))$; $1 - k_2$ — $u(x_1(\text{peor}), x_2(\text{peor}))$

Para determinar k_3, observe que de (10) y

$$u(x_1(\text{mejor}), x_2(\text{mejor})) = u_1(x_1(\text{mejor})) = u_2(x_2(\text{mejor})) = 1$$

se encuentra que

$$1 = u(x_1(\text{best}), x_2(\text{best})) = k_1(1) + k_2(1) + k_3(1) = k_1 + k_2 + k_3$$

y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ en la mejor participación en el mercado (50%), con x_2 fija a algún nivel (por ejemplo x_2 = \$15 millones). Suponga que el equivalente de certidumbre de

$\frac{1}{2}$ — 10%, \$15
$\frac{1}{2}$ — 50%, \$15

es (30%, \$15). Para determinar si el atributo 1 es iu del atributo 2, se fija el atributo 2 en algún otro nivel (digamos, x_2 = \$20 millones) y se encuentra el equivalente de certidumbre de la siguiente lotería.

$\frac{1}{2}$ — 10%, \$20
$\frac{1}{2}$ — 50%, \$20

Si el atributo 1 es iu del atributo 2, el equivalente de certidumbre de esta lotería debe estar cerca de (30%, \$20). Para otros valores de x_2 (digamos, x_2 = \$5, \$10, \$25 y \$30), se comprueba si el equivalente de certidumbre de la lotería

$\frac{1}{2}$ — 10%, x_2
$\frac{1}{2}$ — 50%, x_2

está cercano a (30%, x_2). Suponga que éste es el caso. Entonces se repite este procedimiento con otros valores de participación en el mercado que sustituyen a 10 y 50%. Si tienen resultados similares, entonces el atributo 1 es iu del atributo 2. De manera análoga, se puede determinar si el atributo 2 es iu del atributo 1. Si el atributo 1 es iu del atributo 2 y el atributo 2 es iu del atributo 1, los dos atributos son miu. Supóngase que los atributos 1 y 2 son (por lo menos aproximadamente) miu y proceda al paso 2 (comprobando la independencia aditiva).

Para comprobar la independencia aditiva, se debe determinar si Fruit es indiferente entre

$\frac{1}{2}$ — 50%, \$30
$\frac{1}{2}$ — 10%, \$5

y

$\frac{1}{2}$ — 50%, \$5
$\frac{1}{2}$ — 10%, \$30

Suponga que Fruit no es indiferente entre estas loterías. Entonces la función de utilidad de Fruit no mostrará independencia aditiva. Se sabe que $u(x_1, x_2)$ se podría escribir como

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_1(x_1)u_2(x_2)$$

Ahora se procede al paso 3 (evaluando $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$). Suponga que se obtienen los resultados mostrados en la figura 15. Para completar la evaluación de la función de utilidad multiatributos de Fruit, se debe determinar k_1, k_2 y k_3 (paso 4). Para encontrar k_1, se pide a Fruit determinar el número k_1 que hace a Fruit indiferente entre

1 — 50%, \$5

y

k_1 — 50%, \$30
$1 - k_1$ — 10%, \$5

Hidden page

TABLA 13
Puntuación de Jane para cada empleo y objetivo

Objetivo	Empleo 1	Empleo 2	Empleo 3
Salario	.571	.286	.143
Calidad de vida	.159	.252	.589
Interés en el trabajo	.088	.669	.243
Proximidad a la familia	.069	.426	.506

Ahora elija la oferta de trabajo con la puntuación global más alta. Observe que la puntuación global da más peso a la puntuación de la oferta de empleo en los objetivos más importantes. Calculando la puntuación global de cada empleo, se obtiene

$$\begin{aligned}\text{Puntuación global del empleo 1} &= .5115(.571) + .0986(.159) + .2433(.088)\\ &\quad + .1466(.069) = .339\\ \text{Puntuación global del empleo 2} &= .5115(.286) + .0986(.252) + .2433(.669)\\ &\quad + .1466(.426) = .396\\ \text{Puntuación global del empleo 3} &= .5115(.143) + .0986(.589) + .2433(.243)\\ &\quad + .1466(.506) = .265\end{aligned}$$

Así, el PJA indicaría que Jane debe aceptar el trabajo 2.

Obtención de ponderaciones para cada objetivo

Suponga que hay n objetivos. Se empieza por escribir una matriz $n \times n$ (conocida como **matriz de comparación por pares**) A. El elemento del renglón i y la columna j de A (llámelo a_{ij}) indica cuánto más importante es el objetivo i que el objetivo j. La "importancia" se medirá en una escala de valores enteros del 1 al 9, donde cada número tiene la interpretación mostrada en la tabla 14. Para toda i, es necesario que $a_{ii} = 1$. Si por ejemplo, $a_{13} = 3$, el objetivo 1 es débilmente más importante que el objetivo 3. Si $a_{ij} = k$, entonces por consistencia, es necesario que $a_{ji} = \frac{1}{k}$. Así, si $a_{13} = 3$, entonces se debe cumplir que $a_{31} = \frac{1}{3}$

Suponga que Jane ha identificado la siguiente matriz de comparación por pares para sus cuatro objetivos (SAL = salario alto; CV = calidad de vida alta; IT = interés en el trabajo; CF = cercanía a la familia):

$$\begin{array}{c} \\ \text{SAL} \\ \text{CV} \\ \text{IT} \\ \text{CF} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{SAL} & \text{CV} & \text{IT} & \text{CF} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Infortunadamente, algunas comparaciones por pares de Jane son inconsistentes. Para ilustrar el significado de consistencia, observe que como $a_{13} = 2$, ella siente que SAL es el doble de importante que IT. Puesto que $a_{32} = 2$, ella cree que IT tiene el doble de importancia que CV. La consistencia de las preferencias implicaría que Jane debe sentir que SAL es $2(2) = 4$ veces tan importante como CV. Sin embargo, puesto que $a_{12} = 5$, Jane cree que SAL es 5 veces tan importante como CV. Esto muestra que las comparaciones por pares de Jane exhiben una ligera inconsistencia. Las inconsistencias ligeras son comunes y no causan dificultades serias. Más adelante en esta sección se analiza un índice que se puede usar para medir la consistencia de las preferencias de Jane.

TABLA 14
Interpretación de los elementos en una matriz de comparación por pares

Valor de a_{ij}	Interpretación
1	El objetivo i y el j son de igual importancia.
3	El objetivo i es débilmente más importante que el objetivo j.
5	La experiencia y el juicio indican que el objetivo i es fuertemente más importante que el objetivo j.
7	El objetivo i es fuerte o demostrablemente más importante que el objetivo j.
9	El objetivo i es absolutamente más importante que el objetivo j.
2, 4, 6, 8	Los valores intermedios, por ejemplo, un valor de 8 significa que el objetivo i está a la mitad entre fuerte y absolutamente más importante que el objetivo j.

Suponga que hay n objetivos. Sea w_i = el peso dado al objetivo i. Para describir cómo el PJA determina las w_i, suponga que quien toma la decisión es perfectamente consistente. Entonces la matriz de comparación por pares debe ser de la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Por ejemplo, suponga que $w_1 = \frac{1}{2}$ y $w_2 = \frac{1}{6}$. Entonces el objetivo 1 es tres veces tan importante como el objetivo 2, así

$$a_{12} = \frac{w_1}{w_2} = 3$$

Ahora suponga que una persona consistente que toma decisiones tiene una matriz de comparación por pares A de la forma (13). ¿Cómo se puede recuperar el vector $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$ de A? Considere el sistema de n ecuaciones

$$A\mathbf{w}^T = \Delta\mathbf{w}^T \tag{14}$$

donde Δ es un número desconocido y $\mathbf{w}^T$ es un vector columna desconocido n-dimensional. Para cualquier número Δ, (14) siempre tiene la solución trivial $\mathbf{w} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$. Se puede demostrar que si A es la matriz de comparación por pares de una persona perfectamente consistente que toma decisiones (es decir, si A es de la forma (13)) y no se permite que $\Delta = 0$, entonces la única solución no trivial para (14) es $\Delta = n$ y $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]$. Esto demuestra que para una persona consistente que toma decisiones, las ponderaciones w_i se pueden obtener de la única solución no trivial para (14). Ahora suponga que quien toma la decisión no es perfectamente consistente. Sea Δ_{max} el número más grande para el cual (14) tiene una solución no trivial (llame a esta solución $\mathbf{w}_{max}$). Si las comparaciones de quien toma la decisión no se desvían mucho de la consistencia perfecta, se esperaría que Δ_{max} estuviera cerca de n y $\mathbf{w}_{max}$ estuviera cerca de $\mathbf{w}$. Saaty verificó que esta idea intuitiva es en efecto correcta y sugirió aproximar $\mathbf{w}$ por medio de $\mathbf{w}_{max}$. Saaty también propuso medir la consistencia de quien toma la decisión observando cuán cerca de n está Δ_{max}. El paquete de software Expert Choice da (entre otros resultados) valores exactos de Δ_{max} y $\mathbf{w}_{max}$ y una medida. En lo que sigue, se describe un método sencillo (puesto

Por último, para cercanía a la familia, suponga que la matriz de comparación por pares es como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Empleo} & \text{Empleo} & \text{Empleo} \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Empleo 1} \\ \text{Empleo 2} \\ \text{Empleo 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Con los cálculos de rutina, se obtiene

Puntuación del empleo 1 para cercanía a la familia = .069

Puntuación del empleo 2 para cercanía a la familia = .426

Puntuación del empleo 3 para cercanía a la familia = .506

Como se describió antes, ahora podemos "sintetizar" las ponderaciones objetivo con las puntuaciones de cada empleo en cada objetivo para obtener una puntuación global para cada alternativa (en este caso, cada oferta de trabajo). Como antes, se encuentra que la oferta de trabajo 2 es la que tiene más preferencia, seguida por la oferta de trabajo 1 y, por último, la oferta 3.

Se concluye con la observación de que quienes toman decisiones han aplicado en incontables áreas el PJA, como contabilidad, finanzas, comercialización, planificación de recursos energéticos, selección de microcomputadoras, sociología, arquitectura y ciencias políticas. Véase en Zahedi (1986) y Saaty (1988) un análisis de las aplicaciones del PJA.

Ejecución del PJA en una hoja de cálculo

AHP.xls

En la figura 17 se ilustra cuán fácil es poner en práctica el PJA en una hoja de cálculo (archivo AHP.xls). Introduzca la matriz de comparación por pares para la objetivos de B7:E10. En B12 introduzca la fórmula =B7/**SUM**(B$7:B$10) y cópiela para el intervalo B12:E15, con lo que se obtiene A_{norm} para los objetivos. Calcule la ponderación para el salario en F12 con la instrucción **AVERAGE**(B12:E12). Copie esto a F12:F15 para calcular las ponderaciones de los objetivos restantes. De manera similar, se obtienen las matrices normalizadas y las ponderaciones para cada objetivo.

Para determinar la puntuación del empleo 1, introduzca en F17 la fórmula

=F$12 * F21 + F$13 * F29 + F$14 * F37 + F$15 * F45

Copiando esta fórmula a F17:F19 se calcula la puntuación para los empleos 2 y 3. De nuevo, se ve que el empleo 2 recibe la puntuación más alta (indicada por ****).

A fin de calcular el índice de consistencia para la matriz de comparación por pares de los objetivos, se usa la función de multiplicación de matrices de Excel MMULT, calculando $A\mathbf{w}^T$ en el intervalo C2:C5. En el intervalo D2:D5 calcule (i-ésimo elemento de $A\mathbf{w}^T$)/(i-ésimo elemento de $\mathbf{w}^T$). Por último, en E2 calcule el IC, por medio de la fórmula (**AVERAGE**(D2:D5) − 4)/3.

Es fácil multiplicar matrices por medio de la función MMULT de Excel. Para ilustrar, se usa Excel para encontrar el producto de matrices AB (véanse la figura 18 y el archivo Mmult.xls). Se procede como sigue:

Mmult.xls

Paso 1 Introduzca A y B en D2:F3 y D5:E7, respectivamente.

Paso 2 Seleccione el intervalo (D9:E10) en que se calculará el producto AB.

Paso 3 En la esquina superior izquierda (D9) del intervalo seleccionado, teclee la fórmula

= MMULT(D2:F3,D5:E7)

Luego, presione **CONTROL SHIFT ENTER** (no sólo ENTER) y se calculará el producto matricial deseado. Observe que MMULT es una función de arreglo, no una función ordinaria de hoja de cálculo. Esto explica por qué se debe preseleccionar el intervalo para AB y usar CONTROL SHIFT ENTER.

FIGURA 17
Hoja de cálculo del PJA

	A	B	C	D	E	F	G
1		CONSISTENCY	INDEX	AwT/wT	CI		
2	IMPLEMENTING		2.0774038	4.0610902	0.0158569		
3	AHP	AwT=	0.3958173	4.0160976			
4	ON		0.9894231	4.0671937			
5	A SPREADSHEET		0.5932692	4.0459016			
6	OBJECTIVES MATRIX	SAL	QL	IW	NF		
7	SAL	1	5	2	4		
8	QL	0.2	1	0.5	0.5		
9	IW	0.5	2	1	2		
10	NF	0.25	2	0.5	1		
11	ANORM(OBJECTIVES)	SAL	QL	NF	IW	WEIGHTS	
12	SAL	0.512820513	0.5	0.5	0.5333333	0.5115385	SAL
13	QL	0.102564103	0.1	0.125	0.0666667	0.0985577	QL
14	NF	0.256410256	0.2	0.25	0.2666667	0.2432692	IW
15	IW	0.128205128	0.2	0.125	0.1333333	0.1466346	NF
16	SALARY MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
17	JOB1	1	2	4	JOB1SC=	0.3395156	
18	JOB2	0.5	1	2	JOB2SC=	0.3960857	****
19	JOB3	0.25	0.5	1	JOB3SC=	0.2643988	
20	ANORM(SALARY)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
21	JOB1	0.571428571	0.5714286	0.5714286		0.5714286	JOB1
22	JOB2	0.285714286	0.2857143	0.2857143		0.2857143	JOB2
23	JOB3	0.142857143	0.1428571	0.1428571		0.1428571	JOB3
24	QL MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
25	JOB1	1	0.5	0.3333333			
26	JOB2	2	1	0.3333333			
27	JOB3	3	3	1			
28	ANORM(QL)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
29	JOB1	0.166666667	0.1111111	0.2		0.1592593	JOB1
30	JOB2	0.333333333	0.2222222	0.2		0.2518519	JOB2
31	JOB3	0.5	0.6666667	0.6		0.5888889	JOB3
32	IW MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
33	JOB1	1	0.1428571	0.3333333			
34	JOB2	7	1	3			
35	JOB3	3	0.3333333	1			
36	ANORM(IW)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
37	JOB1	0.090909091	0.0967742	0.0769231		0.0882021	JOB1
38	JOB2	0.636363636	0.6774194	0.6923077		0.6686969	JOB2
39	JOB3	0.272727273	0.2258065	0.2307692		0.243101	JOB3
40	NF MATRIX	JOB1	JOB2	JOB3			
41	JOB1	1	0.25	0.1428571			
42	JOB2	4	1	2			
43	JOB3	7	2	1			
44	ANORM(NF)	JOB1	JOB2	JOB3		WEIGHTS	
45	JOB1	0.083333333	0.0769231	0.0454545		0.0685703	JOB1
46	JOB2	0.333333333	0.3076923	0.6363636		0.4257964	JOB2
47	JOB3	0.583333333	0.6153846	0.3181818		0.5056333	JOB3

Tres mujeres (Jennifer López, Britney Spears y Mandy Moore) están rogando ser la compañera de Woody. Los puntos de vista de estas mujeres en relación con la belleza, inteligencia y personalidad se dan en las siguientes matrices de comparación por pares.

Belleza:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Jennifer} & \text{Britney} & \text{Mandy} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Jennifer} \\ \text{Britney} \\ \text{Mandy} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Inteligencia:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Jennifer} & \text{Britney} & \text{Mandy} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Jennifer} \\ \text{Britney} \\ \text{Mandy} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Personalidad:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Jennifer} & \text{Britney} & \text{Mandy} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Jennifer} \\ \text{Britney} \\ \text{Mandy} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{9} \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

a ¿A quién debe elegir Woody como su compañera de por vida?

b Evalúe la consistencia de las matrices de comparación por pares

4 Para determinar dónde invertir mi dinero, se consideran igualmente importantes dos objetivos: tasa esperada de retorno y grado de riesgo. Dos inversiones (1 y 2) tienen las siguientes matrices de comparación por pares: rendimiento esperado:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Inversión 1} & \text{Inversión 2} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Inversión 1} \\ \text{Inversión 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Grado de riesgo:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Inversión 1} & \text{Inversión 2} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Inversión 1} \\ \text{Inversión 2} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

a ¿Cómo debo clasificar estas inversiones?

b Ahora suponga que está disponible otra inversión (inversión 3). Suponga que las matrices de comparaciones por pares para estas inversiones son las siguientes. Rendimiento esperado:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Inversión 1} & \text{Inversión 2} & \text{Inversión 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Inversión 1} \\ \text{Inversión 2} \\ \text{Inversión 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & 8 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Grado de riesgo:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Inversión 1} & \text{Inversión 2} & \text{Inversión 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Inversión 1} \\ \text{Inversión 2} \\ \text{Inversión 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

c Observe que no cambiaron los elementos de las matrices de comparación para las inversiones 1 y 2. ¿Cómo debo clasificar ahora estas inversiones? Contraste la clasificación de las inversiones 1 y 2 con la respuesta del inciso (a).

5 Demuestre que para una persona perfectamente consistente que toma decisiones, el i-ésimo elemento de $A\mathbf{w}^T = n$ (i-ésimo elemento de $\mathbf{w}^T$).

6 Un consumidor está intentando determinar qué tipo de comida congelada comer. Él considera importantes tres atributos: sabor, valor nutricional y precio. Se considera que el valor nutricional está determinado por las concentraciones de colesterol y sodio. La matriz de comparación por pares para los tres atributos es como sigue:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Sabor} & \text{Valor nutricional} & \text{Precio} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Sabor} \\ \text{Valor nutricional} \\ \text{Precio} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Entre las tres comidas congeladas la matriz de comparación por pares para cada atributo es como sigue. Para el sabor:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Comida 1} & \text{Comida 2} & \text{Comida 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Sabor 1} \\ \text{Sabor 2} \\ \text{Sabor 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el sodio:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Comida 1} & \text{Comida 2} & \text{Comida 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Sodio 1} \\ \text{Sodio 2} \\ \text{Sodio 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} \\ 7 & 1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el colesterol:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Comida 1} & \text{Comida 2} & \text{Comida 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Colesterol 1} \\ \text{Colesterol 2} \\ \text{Colesterol 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el precio:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Comida 1} & \text{Comida 2} & \text{Comida 3} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Precio 1} \\ \text{Precio 2} \\ \text{Precio 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{6} \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para determinar cómo califica cada comida respecto a la nutrición, será necesario evaluar la siguiente matriz de comparación por pares para el colesterol y el sodio:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} \text{Colesterol} & \text{Sodio} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Colesterol} \\ \text{Sodio} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

¿Qué comida congelada preferiría el consumidor? (*Sugerencia*: puntuación para una comida respecto a la nutrición = (puntuación de la comida en relación con el sodio) * (ponderación para el sodio) + (puntuación para la comida en relación con el colesterol) * (ponderación para el colesterol).)

7 Se está tratando de determinar a qué programa de la MBA asistir. Usted ha sido aceptado en dos programas: Indiana y Northwestern. Usted eligió usar tres atributos como ayuda para tomar su decisión:

Atributo 1 Costo

Atributo 1 Salario inicial

Atributo 1 Ambiente escolar (¿podemos hacer fiesta allí?)

Su matriz de comparación por pares para estos atributos es como sigue:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Costo} \\ \text{Salario inicial} \\ \text{Ambiente} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Costo} & \text{Salario inicial} & \text{Ambiente} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para cada atributo de la matriz de comparación por pares para Indiana y Northwestern es como sigue: Para el costo:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Indiana} \\ \text{Northwestern} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Indiana} & \text{Northwestern} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el salario inicial:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Indiana} \\ \text{Northwestern} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Indiana} & \text{Northwestern} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para el ambiente:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Indiana} \\ \text{Northwestern} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Indiana} & \text{Northwestern} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

¿A qué programa de la MBA debe asistir?

8 Usted ha sido contratado por Arthur Ross para determinar cuál de los siguientes procedimientos de cuentas por cobrar se debe usar en una auditoria de Keating Five and Dime Store:

a Revisión analítica

b Confirmaciones

c Prueba de colecciones posteriores (recibos)

Los tres criterios utilizados para distinguir entre los procedimientos son los siguientes:

a Confiabilidad

b Costo

c Validez

La matriz de comparación por pares para los tres criterios es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Confiabilidad} \\ \text{Costo} \\ \text{Validez} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{5} & 1 & 2 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Para el criterio de confiabilidad la matriz de comparación por pares de los tres procedimientos es como sigue:

$$\begin{array}{l} \text{Revisión analítica} \\ \text{Confirmaciones} \\ \text{Prueba de colecciones posteriores} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Para el criterio de costo la matriz de comparación por pares de los tres procedimientos es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Revisión analítica} \\ \text{Confirmaciones} \\ \text{Prueba de colecciones posteriores} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el criterio de validez la matriz de comparación por pares de los tres procedimientos es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \text{Revisión analítica} \\ \text{Confirmaciones} \\ \text{Prueba de colecciones posteriores} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilice el PJA para determinar qué procedimiento de auditoria se debe usar. También compruebe la consistencia de la primera matriz de comparación por pares.[†]

9 Usted está tratando de determinar cuál de dos candidatos para el puesto de oficinista contratar (Jack y Jill). Los tres objetivos que son importantes para que usted decida son personalidad, capacidad para mecanografiar e inteligencia. Usted evaluó la siguiente matriz de comparación por pares:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Personalidad} \\ \text{Capacidad para mecanografiar} \\ \text{Inteligencia} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Personalidad} & \text{Capacidad para mecanografiar} & \text{Inteligencia} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

La "puntuación" de cada empleado en cada objetivo es como sigue:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Jack} \\ \text{Jill} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Personalidad} & \text{Capacidad para mecanografiar} & \text{Inteligencia} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .4 & .6 & .2 \\ .6 & .4 & .8 \end{bmatrix} \end{array}$$

¿Si usted sigue el método PJA qué empleado debe contratar?

[†]Basado en Lin, Mock y Wright (1984).

RESUMEN Criterios de decisión

En el **modelo de estado del mundo,** quien toma la decisión elige primero una acción a_i de un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ de acciones disponibles. Con probabilidad p_j se observa que el estado del mundo es $s_j \in S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Si se elige la acción a_i y el estado del mundo es s_j, quien toma la decisión recibe una recompensa r_{ij}.

El **criterio maximin** elige la acción a_i con el valor más grande de $\min_{j \in S} r_{ij}$. El **criterio maximax** selecciona la acción a_i con el valor mas grande de $\max_{j \in S} r_{ij}$. En cada estado, el **criterio de arrepentimiento minimax** elige una acción al aplicar el criterio minimax a la matriz de arrepentimiento. El **criterio del valor esperado** elige la decisión que produce la recompensa esperada más grande.

Teoría de la Utilidad

Una persona que toma decisiones y acepta los axiomas de Von Neumann-Morgenstern, cuando enfrenta una elección entre varias loterías, debe elegir la lotería con la utilidad esperada más grande.

El **equivalente de certidumbre** de una lotería L, escrito como $EC(L)$, es el número $EC(L)$ tal que quien toma la decisión es indiferente entre la lotería L y recibir un cierto pago de $EC(L)$. Para una determinada lotería L, el **premio de riesgo,** escrito como $PR(L)$, está dado por $PR(L) = VE(L) - EC(L)$.

Una persona que toma decisiones es **adversa al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) > 0$. Una persona que toma decisiones y es adversa al riesgo, tiene una función de utilidad estrictamente cóncava. Una persona que toma decisiones es **neutra al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $PR(L) = 0$. Una persona que toma decisiones y es neutra al riesgo, tiene una función de utilidad lineal. Una persona que toma decisiones es **favorable al riesgo** si y sólo si para cualquier lotería no degenerada L, $RP(L) < 0$. Una persona que toma decisiones y es favorable al riesgo tiene una función de utilidad convexa.

Teoría del prospecto y encuadre

Tversky y Kahneman resolvieron varios defectos en la MEU al desarrollar la teoría del prospecto y encuadre. En la teoría del prospecto se supone que no se trata con probabilidades como se dan en un problema de toma de decisiones. En vez de eso, quien toma la decisión trata una probabilidad p para un suceso como probabilidad "distorsionada" $\Pi(p)$. La idea del encuadre se basa en el hecho de que las personas a menudo establecen su función de utilidad desde el punto de vista de un marco o *status quo* desde el cual ven la situación actual.

Árboles de decisión

Para determinar las decisiones óptimas en un árbol de decisión, se trabaja hacia atrás (doblando el árbol hacia atrás) de derecha a izquierda. Suponga primero que quien toma la decisión es neutral al riesgo y quiere maximizar el estado final de los activos. En cada bifurcación de suceso, se calcula el estado final esperado de los activos y se introduce en ○. En cada bifurcación de decisión, se denota con ‖ la decisión que maximiza el estado final esperado de los activos y se introduce el estado final esperado de los activos asociado con esa decisión en □. Se continúa trabajando hacia atrás de este modo hasta llegar al comienzo del árbol. Entonces la secuencia óptima de decisiones se puede obtener siguiendo el símbolo ‖.

Para incorporar la función de utilidad de quien toma la decisión en un análisis de árbol de decisión, simplemente sustituya cada estado final de los activos x_0 por su utilidad $u(x_0)$. Luego, en cada bifurcación de suceso calcule la utilidad esperada, y en cada bifurcación de decisión, elija la rama que tiene la utilidad esperada más grande.

El **valor esperado de la información muestral** (VEIM) mide el valor asociado con la información de la prueba o la muestra: VEIM = VECIM − VECIO. El **valor esperado con la información perfecta** (VECIP) se encuentra dibujando un árbol de decisión en el que quien toma la decisión tiene información perfecta acerca de cuál estado ha ocurrido antes de tomar la decisión. Entonces el **valor esperado de la información perfecta** (VEIP) está dado por VEIP = VECIP − VECIO.

Regla de Bayes y árboles de decisión

Utilizamos la regla de Bayes en el análisis de árboles de decisión cuando se tienen las probabilidades a priori y (para cada estado del mundo) la probabilidad de que ocurrirá un resultado experimental. La regla de Bayes se utiliza entonces para calcular la probabilidad de que ocurrirá cada resultado experimental y (para cada resultado experimental) la probabilidad a posteriori de cada estado del mundo. Entonces el análisis del árbol de decisión procede como ya se describió.

Toma de decisiones con objetivos múltiples

El atributo 1 es **preferencialmente independiente** (pi) del atributo 2 si las preferencias para los valores del atributo 1 no dependen del valor del atributo 2.

Un conjunto de atributos S es **mutua y preferencialmente independiente** (mpi) de un conjunto de atributos S' si (1) los valores de los atributos en S' no afectan las preferencias para los valores de los atributos en S; (2) los valores de los atributos en S no afectan las preferencias para los valores de los atributos en S'.

Un conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es mutua y preferencialmente independiente (mpi) si para todos los subconjuntos S de $\{1, 2, \ldots, n\}$, S es mpi de $\bar{S}$. ($\bar{S}$ consiste en todos los miembros de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no están incluidos en S.)

TEOREMA 1

Si el conjunto de atributos $1, 2, \ldots, n$ es mpi, las preferencias de quien toma la decisión se pueden representar por una función de valor (o costo) aditiva.

Funciones de utilidad multiatributos

El atributo 1 es **independiente de la utilidad** (iu) del atributo 2 si las preferencias para las loterías que tienen que ver con diferentes niveles del atributo 1 no dependen del nivel del atributo 2.

Si el atributo 1 es iu del atributo 2 y el atributo 2 es iu del atributo 1, entonces los atributos 1 y 2 son **mutuamente independientes de la utilidad** (miu).

TEOREMA 2

Los atributos 1 y 2 son miu si y sólo si la función de utilidad de quien toma la decisión $u(x_1, x_2)$ es una función multilineal de la forma

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2) + k_3u_1(x_1)u_2(x_2) \tag{10}$$

Una función de utilidad de una persona que toma decisiones muestra **independencia aditiva** si quien toma la decisión es indiferente entre

$\frac{1}{2}$ x_1(mejor), x_2(mejor)
$\frac{1}{2}$ x_1(peor), x_2(peor)

y

$\frac{1}{2}$ x_1(mejor), x_2(peor)
$\frac{1}{2}$ x_1(peor), x_2(mejor)

Si los atributos 1 y 2 son mpi y la función de utilidad de quien toma la decisión muestra independencia aditiva, la función de utilidad de quien toma la decisión es de la forma aditiva siguiente:

$$u(x_1, x_2) = k_1u_1(x_1) + k_2u_2(x_2)$$

El procedimiento siguiente se usa para evaluar funciones de utilidad multiatributos:

Paso 1 Comprobar si los atributos 1 y 2 son miu. Si es así, vaya al paso 2. Si los atributos no son miu, la evaluación de la función de utilidad multiatributos está fuera del alcance del análisis de este libro.

Paso 2 Compruebe si hay independencia aditiva.

Paso 3 Evalúe $u_1(x_1)$ y $u_2(x_2)$.

Paso 4 Determine k_1, k_2 y (si no hay independencia aditiva) k_3.

Como se estableció anteriormente, a_{ij} es la recompensa del jugador de renglón (y pérdida del jugador de columna, si el jugador de renglón selecciona su i-ésima estrategia y el jugador de columna selecciona su j-ésima estrategia de columna.

Por ejemplo, en el juego de suma cero para dos personas de la tabla 2, el jugador de los renglones recibiría dos unidades (y el jugador de las columnas perdería dos unidades) si el jugador de los renglones elige su segunda estrategia y el jugador de las columnas elige su primera estrategia.

El juego de suma cero para dos personas tiene la propiedad de que para cualquier opción de estrategias, la suma de recompensas para los jugadores es cero. En este juego, cada dólar que gana un participante proviene del bolsillo del otro; así, ellos siempre tendrán conflictos de intereses. Por lo tanto, nunca habrá cooperación entre los dos jugadores.

John von Neumann y Oskar Morgenstern desarrollaron, con base en los supuestos siguientes, una teoría acerca de la manera como se deben jugar los juegos de suma cero con dos personas.

Suposición básica de la teoría de juegos de suma cero para dos personas

Cada jugador elige una estrategia que lo posibilita a hacer lo mejor que puede, dado que su oponente *conoce la estrategia que está siguiendo*. Usemos esta suposición para determinar cómo los jugadores de los renglones y de las columnas deben jugar este juego de suma cero para dos personas de la tabla 3.

¿Qué debe hacer el jugador de los renglones en este juego? Si escoge el renglón 1, entonces la suposición implica que el jugador de las columnas escogerá la columna 1 o la 2 y mantendrá al jugador de los renglones en una recompensa de cuatro unidades (el número más pequeño en el renglón 1 de la matriz del juego). De manera igual, si el jugador de los renglones escoge el renglón 2, entonces se infiere de la suposición que el jugador de las columnas elegirá la columna 3 y mantendrá la recompensa del jugador de los renglones en una unidad (el número más pequeño en el segundo renglón de la matriz del juego). Si el jugador de los renglones elige el renglón 3, entonces estará bien agarrado al número más pequeño del tercer renglón (5). Por lo tanto, de la suposición se infiere que el jugador de los renglones debe escoger el renglón que tiene el mínimo más grande. Puesto que max (4, 1, 5) = 5, el jugador de los renglones debe elegir el renglón 3. Al escoger el renglón 3, el jugador de los renglones asegura que ganará por lo menos max (mínimo del renglón) = cinco unidades.

Desde el punto de vista del jugador de las columnas, si él elige la columna 1, entonces el jugador de los renglones escogerá la estrategia que hace que las pérdidas del jugador de las columnas sean tan grandes como sea posible (y las ganancias del jugador de los renglones tan grandes como sea posible). Por lo tanto, si el jugador de las columnas elige la columna 1, entonces, el jugador de los renglones escogerá el renglón 3 (porque el número más grande en la primera columna es el 6 del tercer renglón). De manera similar, si el jugador de las columnas escoge la columna 2, entonces el jugador de los renglones escogerá de nuevo el renglón 3 porque 5 = max (4, 3, 5). Por último, si el jugador de las columnas elige la columna 3, el jugador de los renglones escogerá el renglón 1, lo cual ocasiona que el jugador de las columnas pierda 10 = max (10, 1, 7) unidades. Por lo tanto, el jugador de las columnas puede conservar sus pérdidas en un mínimo (máximo de la columna) = min (6, 5, 10) = 5 al escoger la columna 2.

TABLA 2

1	2	3	−1
2	1	−2	0

TABLA 3

Un juego con un punto silla

Estrategia del jugador de los renglones	Estrategia del jugador de las columnas: Columna 1	Columna 2	Columna 3	Mínimo de los renglones
Renglón 1	4	4	10	4
Renglón 2	2	3	1	1
Renglón 3	6	5	7	5
Máximo de la columna	6	5	10	

Ya vimos que el jugador de los renglones asegura que ganará por lo menos cinco unidades y el jugador de las columnas puede mantener cuando menos en cinco unidades las ganancias del jugador de los renglones. Por consiguiente, el único resultado razonable de este juego es que el jugador de los renglones gana exactamente cinco unidades; el jugador de los renglones no puede esperar ganar más de cinco unidades porque el jugador de las columnas (al elegir la columna 2) es capaz de mantener las ganancias del jugador de los renglones en cinco unidades.

La matriz del juego que apenas analizamos tiene la propiedad de satisfacer la condición del punto silla:

$$\max_{\substack{\text{todos los}\\ \text{renglones}}} (\text{mínimo del renglón}) = \min_{\substack{\text{todas las}\\ \text{columnas}}} (\text{máximo de la columna}) \tag{1}$$

Se dice que cualquier juego de suma cero para dos personas que satisface (1) tiene un **punto silla.** Si un juego de suma cero para dos personas tiene un punto silla, entonces el jugador de los renglones debe escoger cualquier estrategia (con los renglones) que alcance el máximo en el lado izquierdo de (1). El jugador de las columnas debe aplicar cualquier estrategia (en las columnas) que logre un mínimo en el lado derecho de (1). Por lo tanto, para el juego que apenas hemos estudiado, un punto silla ocurre donde el jugador de los renglones elige el renglón 3 y el jugador de las columnas escoge la columna 2. El jugador de los renglones podría estar seguro de recibir una recompensa de por lo menos cinco unidades (al escoger la estrategia óptima del renglón 3), y el jugador de las columnas podría asegurar que el jugador de los renglones recibiría una recompensa de cuando mucho cinco unidades (al elegir la estrategia óptima de la columna 2). Si un juego tiene un punto silla, entonces el valor común de ambos lados de (1) se llama **valor** (v) del juego del jugador de los renglones. Por lo tanto, este juego tiene un valor de cinco.

Una forma sencilla de detectar un punto silla es observar que la recompensa para un punto silla tiene que ser el número más pequeño en su renglón y el número más grande en su columna (véase problema 4 al final de esta sección). Por lo tanto, al igual que el punto central de una silla de montar, un punto silla para un juego de suma cero para dos personas es un mínimo local en una dirección (viendo a través del renglón, y un máximo local en otra dirección (viendo hacia arriba y hacia abajo de la columna).

Se puede pensar también que un punto silla es un **punto de equilibrio** porque ningún jugador puede beneficiarse con un cambio unilateral en la estrategia. Por ejemplo, si el jugador de los renglones cambiara su estrategia óptima del renglón 3 (al renglón 1 o al renglón 2), su recompensa disminuiría, mientras que si el jugador de las columnas cambiara su estrategia óptima de la columna 2 (a la columna 1 o a la columna 3), se incrementaría la recompensa del jugador de los renglones (y las pérdidas del jugador de las columnas). Por lo tanto, un punto silla es estable en cuanto a que ningún jugador tiene un incentivo para alejarse de él.

Muchos juegos de suma cero para dos personas no tienen puntos silla. Por ejemplo, el juego en la tabla 4 no tiene punto silla porque

$$\max (\text{mínimo del renglón}) = -1 < \min (\text{máximo de la columna}) = +1$$

La manera de encontrar el valor y las estrategias óptimas para los juegos de suma cero para dos personas que no tienen puntos silla se tratan en las secciones 14.2 y 14.3.

TABLA 4
Un juego sin punto silla

Estrategia del jugador de los renglones	Estrategia del jugador de las columnas		Mínimo de los renglones
	Columna 1	Columna 2	
Renglón 1	−1	+1	−1
Renglón 2	+1	−1	−1
Máximo de la columna	+1	+1	

Juegos de suma constante para dos personas

Incluso si un juego para dos personas no es de suma cero, dos jugadores pueden aun estar en conflicto total. Para ilustrarlo, consideremos ahora juegos de suma constante para dos personas.

DEFINICIÓN ■ Un **juego de suma constante para dos personas** es un juego donde participan dos contrincantes en el cual, para cualquier elección de estrategias de ambos jugadores, la recompensa del jugador de los renglones y la recompensa del jugador de las columnas suma un valor constante c. ■

Por supuesto, un juego de suma cero para dos personas es justamente un juego de suma constante para dos personas con $c = 0$. Un juego de suma constante para dos personas tiene la característica que el jugador de los renglones y el de las columnas están en conflicto total porque un incremento de una unidad en la recompensa del jugador de los renglones siempre ocasionará que disminuya una unidad la recompensa del jugador de las columnas. En general, las estrategias óptimas y el valor en un juego de suma constante para dos personas se podrían determinar mediante los mismos métodos usados para encontrar las estrategias óptimas y el valor en un juego de suma cero para dos personas.

EJEMPLO 1 Juego de suma constante para televisoras

Dos redes de televisión compiten por una audiencia de 100 millones de televidentes durante el segmento de 8 a 9 PM. Las televisoras tienen que anunciar en forma simultánea el tipo de programa que mandarán al aire en ese tiempo. Las elecciones posibles para cada red y el número de televidentes (millones) de la red 1 para cada elección se muestran en la tabla 5. Por ejemplo, si ambas redes eligen una película de vaqueros, la matriz indica que 35 millones de personas verán la red 1 y $100 - 35 = 65$ millones de personas querrán ver la red 2. Por lo tanto, se tiene un juego de suma constante para dos personas con $c = 100$ (millones). ¿Este juego tiene punto silla? ¿Cuál es el valor del juego para la red 1?

Solución Al examinar los mínimos de los renglones tenemos que la red 1 puede estar segura de por lo menos (15, 45, 14) = 45 millones de televidentes si escoge una telenovela. Al examinar los máximos de las columnas tenemos que si la red 2 escoge una película de vaqueros puede mantener a lo más en la red 1 en min (45, 58, 70) = 45 millones de televidentes. Como

$$\text{max (mínimo de los renglones)} = \text{min (máximo de las columnas)} = 45$$

se satisface entonces la ecuación (1). Por lo tanto, un punto silla se observa cuando la red 1 escoge una telenovela y la red 2 una película de vaqueros; ningún lado será mejor si la estrategia cambia unilateralmente (verifíquelo). Por consiguiente, el valor del juego para la red 1 es 45 millones de televidentes, y el valor del juego para la red 2 es $100 - 45 = 55$ millones de televidentes. La estrategia óptima para la red 1 es elegir una telenovela, y la estrategia óptima para la red 2 es escoger una película de vaqueros.

TABLA 5
Juego de suma constante

	Red 2			
Red 1	Película de vaqueros	Telenovela	Programa de comedia	Mínimo de los renglones
Película de vaqueros	35	15	60	15
Telenovela	45	58	50	45
Programa de comedia	38	14	70	14
Máximo de las columnas	45	58	70	

TABLA 9
Matriz de recompensas para Pares y nones

Jugador de los renglones (Non)	Jugador de las columnas (Par)		Mínimo de los renglones
	1 dedo	2 dedos	
1 dedo	−1	+1	−1
2 dedos	+1	−1	−1
Máximo de las columnas	+1	+1	

terminar el valor del juego y las estrategias óptimas. Observe que para cualquier estrategia que elija cada uno de los jugadores hay un jugador que puede beneficiarse al cambiar de manera unilateral su estrategia. Por ejemplo, si ambos jugadores muestran un dedo, entonces Non podría aumentar su recompensa de -1 a $+1$ al levantar dos dedos. Por lo tanto, ninguna estrategia elegida por el jugador es estable. Ahora determinaremos las estrategias óptimas y el valor de este juego.

Estrategias aleatorias o combinadas

Para avanzar más con el análisis del ejemplo 2 (y otros juegos sin puntos silla) debemos ampliar el conjunto de estrategias admisibles para cada jugador con el fin de incluir las **estrategias aleatorias.** Hemos supuesto hasta ahora que cada vez que un jugador juega, aplica la misma estrategia. ¿Por qué no dejar que cada jugador escoja una probabilidad de aplicar cada estrategia? En el caso del ejemplo 2 podríamos definir

$$x_1 = \text{probabilidad de que Non levante un dedo}$$
$$x_2 = \text{probabilidad de que Non levante dos dedos}$$
$$y_1 = \text{probabilidad de que Par levante un dedo}$$
$$y_2 = \text{probabilidad de que Par levante dos dedos}$$

Si $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_1 + x_2 = 1$, entonces (x_1, x_2) es una estrategia combinada o aleatoria para Non. Por ejemplo, Non puede seguir la estrategia $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si lanza una moneda antes de cada jugada del juego y levanta un dedo si sale cara o dos dedos si sale cruz. De igual manera, si $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ y $y_1 + y_2 = 1$, entonces (y_1, y_2) es una estrategia combinada o aleatoria para Par.

Cualquier estrategia combinada $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ para el jugador de los renglones es una **estrategia pura** si cualquiera de las x_i es igual a 1. De manera similar, cualquier estrategia combinada $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para el jugador de las columnas es una estrategia pura si cualquiera de las y_i es igual a 1. Una estrategia pura es un caso especial de una estrategia combinada en la cual un jugador siempre elige la misma acción. De acuerdo con la sección 14.1, el juego de la tabla 10 tiene un valor de 5 (que corresponde a un punto silla), por eso la estrategia óptima del jugador de los renglones se podría representar como la estrategia pura (0, 0, 1), y la estrategia óptima del jugador de las columnas se podría representar como la estrategia pura (0, 1, 0).

Continuamos suponiendo que los contrincantes entablarán juegos de suma cero para dos personas de acuerdo con la suposición básica de la sección 14.1. En el contexto de las

TABLA 10

4	4	10
2	3	1
6	5	7

que que si se compara contra cada una de las estrategias de Par $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ proporciona una recompensa esperada de cero. Por lo tanto, cero es un **piso** sobre la recompensa esperada de Non porque, al escoger la estrategia combinada $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Non está seguro de que (para cualquier elección de estrategia de Par) su recompensa esperada será siempre por lo menos cero.

Determinación de la estrategia óptima de Par

Ahora considérese de qué modo Par debe escoger una estrategia combinada (y_1, y_2). Y una vez más, como $y_2 = 1 - y_1$ podríamos preguntar cómo Par debe elegir una estrategia combinada $(y_1, 1 - y_1)$. De la suposición básica se infiere que Par debe escoger y_1 para minimizar sus pérdidas esperadas (o bien, de manera equivalente minimizar la recompensa esperada de Non) en el supuesto de que Non conoce el valor de y_1. Suponga que Par elige la estrategia combinada $(y_1, 1 - y_1)$. ¿Qué hará Non? Si Non levanta un dedo, entonces su recompensa esperada es

$$(-1)y_1 + (+1)(1 - y_1) = 1 - 2y_1$$

que es el segmento de recta AC en la figura 2. Si Non muestra dos dedos, entonces su recompensa esperada es

$$(+1)(y_1) + (-1)(1 - y_1) = 2y_1 - 1$$

que es el segmento de recta DE en la figura 2. Como se supone que Non conoce el valor de y_1, levanta el número de dedos que corresponde a max $(1 - 2y_1, 2y_1 - 1)$. Por lo tanto, para un valor dado de y_1, la recompensa esperada de Non (y la pérdida esperada de Par) se obtiene de la coordenada y sobre la curva lineal por segmentos ABE.

Ahora Par elige la estrategia combinada $(y_1, 1 - y_1)$ que hará la recompensa esperada de Non tan pequeña como sea posible. Por lo tanto, Par debe escoger el valor de y_1 que corresponda al punto más bajo sobre ABE (punto B). El punto B es donde se cortan los segmentos de recta AC y DE, o donde $1 - 2y_1 = 2y_1 - 1$, es decir, $y_1 = \frac{1}{2}$. De la suposición básica se infiere que Par debe elegir la estrategia combinada $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Por lo que se refiere a esta estrategia combinada, la pérdida esperada de Par (y la recompensa esperada de Non) es cero. Se dice que cero es el **techo** sobre la pérdida esperada de Par (es decir, la recompensa esperada de Non) porque Par, al escoger la estrategia combinada $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Par puede

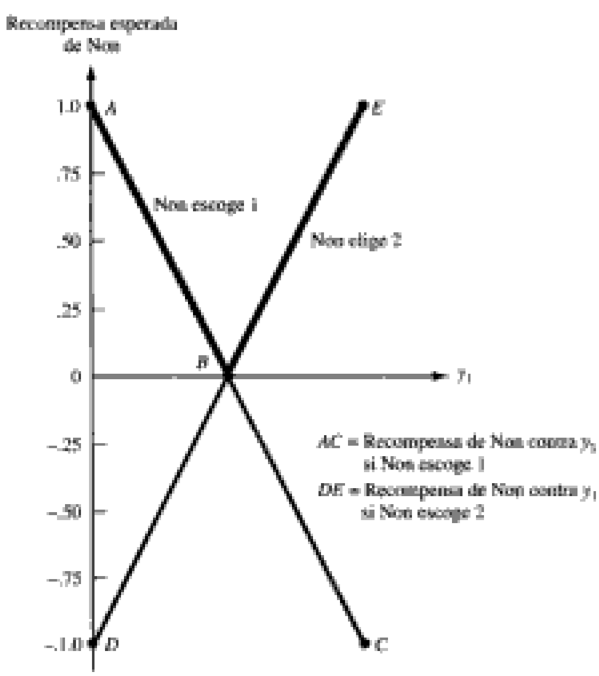


FIGURA 2
Elección de la estrategia de Par

AA domina a la estrategia **PA** del jugador 1. Después de eliminar las estrategias dominadas **PP** y **PA** nos quedamos con la matriz del juego de la tabla 14.

Del mismo modo que en Pares y nones, este juego no tiene punto silla, por lo que proseguimos con una solución gráfica. Sea

x_1 = probabilidad de que el jugador 1 elija AP

$x_2 = 1 - x_1$ = probabilidad de que el jugador 1 escoja AA

y_1 = probabilidad de que el jugador 2 escoja igualar la apuesta

$y_2 = 1 - y_1$ = probabilidad de que el jugador 2 escoja retirarse

Con el objeto de determinar la estrategia óptima del jugador 1, observe que para cualquier valor de x_1 la recompensa esperada contra el igualamiento de la apuesta es

$$(\tfrac{1}{2})(x_1) + 0(1 - x_1) = \frac{x_1}{2}$$

que es el segmento de la recta AB en la figura 3. Contra retirarse del juego, la recompensa esperada del jugador 1 es

$$0(x_1) + 1(1 - x_1) = 1 - x_1$$

que es el segmento de recta CD de la figura 3. Se supone que el jugador 2 conoce el valor de x_1, por eso la recompensa esperada del jugador 1 (como una función de x_1) se obtiene con la curva lineal por los segmentos AED de la figura 3. Por lo tanto, el jugador 1 debe elegir el valor de x_1 que corresponda al punto E, el cual soluciona $x_1/2 = 1 - x_1$, es decir, $x_1 = \frac{2}{3}$, para maximizar la recompensa esperada. Entonces $x_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, y la recompen-

TABLA 14

Matriz de recompensa para el ejemplo 3 después de eliminar las estrategias dominadas

	Jugador 2		
Jugador 1	**Igualar apuesta**	**Retirarse**	**Mínimo de los renglones**
AP	$\frac{1}{2}$	0	0
AA	0	1	0
Máximo de las columnas	$\frac{1}{2}$	1	

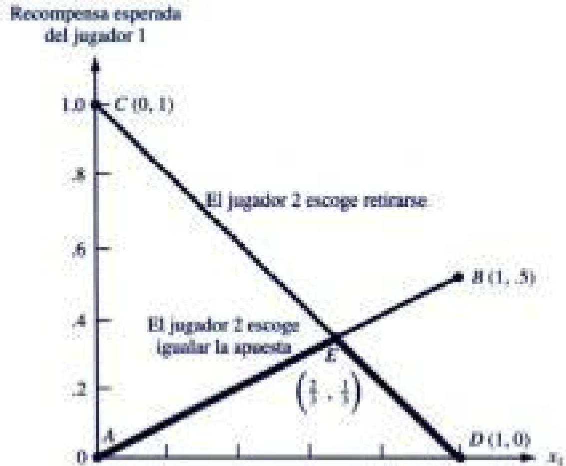


FIGURA 3
Cómo el jugador 1 escoge la estrategia óptima en el ejemplo 3

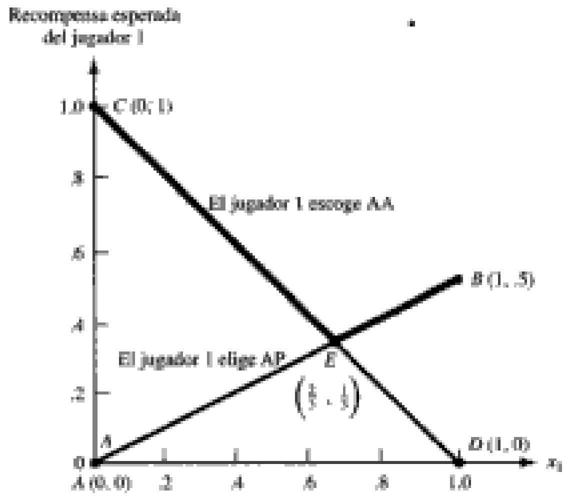


FIGURA 4
Cómo el jugador 2 escoge la estrategia óptima en el ejemplo 3

sa esperada del jugador 1 contra cualquiera de las estrategias del jugador 2 es $\frac{x_1}{2}$ (o bien, $1 - x_1) = \frac{1}{3}$.

¿Cómo debe escoger y_1 el jugador 2? (Recuerde que $y_2 = 1 - y_1$.) Para un valor dado de y_1, suponga que el jugador 1 elige **AP**. Entonces la recompensa esperada es

$$(\tfrac{1}{2})(y_1) + 0(1 - y_1) = \frac{y_1}{2}$$

que es el segmento de recta AB en la figura 4. Para un valor dado de y_1, suponga que el jugador 1 elige **AA.** Entonces la recompensa esperada es

$$0(y_1) + 1(1 - y_1) = 1 - y_1$$

que es el segmento de recta CD en la figura 4. Por lo tanto, para un valor dado de y_1, el jugador 1 elegirá una estrategia que haga que su recompensa esperada esté dada por la curva en segmentos lineales CEB de la figura 4. Sabiendo esto, el jugador 2 debe escoger el valor de y_1 que corresponda al punto E en la figura 4. El valor de y_1 en el punto E es la solución de $\frac{y_1}{2} = 1 - y_1$, es decir, $y_1 = \frac{2}{3}$ (y $y_2 = \frac{1}{3}$). Usted debe comprobar que sin importar lo que haga el jugador 1, la estrategia combinada del jugador 2 $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ asegura que el jugador 1 gana una recompensa esperada de $\frac{1}{3}$.

En resumen, el valor del juego es $\frac{1}{3}$ para el jugador 1; la estrategia combinada óptima para el jugador 1 es $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; y la estrategia óptima para el jugador 2 es también $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

OBSERVACIONES

1 Tome nota de que el jugador 1 debe apostar $\frac{1}{3}$ de las veces que tiene una moneda que pierde. Por lo tanto, nuestro modelo simple indica que la estrategia óptima del jugador 1 incluye el engaño.
2 Al final de esta sección, en el problema 4, se muestra que si el jugador 1 se aparta de su estrategia óptima, entonces el jugador 2 lo puede mantener en una recompensa esperada que es menor que el valor $(\frac{1}{3})$ del juego. Se muestra de igual manera, en el problema 5, que si el jugador 2 se aparta de su estrategia óptima, entonces el jugador 1 puede ganar una recompensa esperada que sobrepase el valor $(\frac{1}{3})$ del juego.
3 Sólo hemos aplicado el método gráfico a juegos donde cada uno de los jugadores (después de eliminar las estrategias dominadas) tiene dos estrategias, el método gráfico para resolver juegos de suma cero para dos personas en los cuales sólo un jugador tiene dos estrategias (juegos en los cuales la matriz de recompensa es $2 \times n$ o $m \times 2$). No obstante, preferimos resolver todos los juegos para dos personas no de 2×2 mediante el método de programación lineal esbozado en la sección siguiente.

14.3 Programación lineal y juegos de suma cero

Es posible determinar mediante la programación lineal el valor y las estrategias óptimas (para los jugadores de los renglones y las columnas) de un juego de suma cero para dos personas. El juego de Piedra, papel y tijeras se explica enseguida con el objeto de ilustrar las ideas principales.

EJEMPLO 4 Piedra, papel y tijeras

Dos jugadores dicen simultáneamente una de las tres palabras piedra, papel y tijeras, y hacen señales correspondientes con las manos. Si ambos jugadores dicen la misma palabra, entonces el juego se empata. Si no sucede así, un jugador gana 1 dólar al otro jugador según lo siguiente: las tijeras vencen (cortan) al papel, el papel gana (cubre) a la piedra y la piedra derrota (rompe) a las tijeras. Encuentre el valor y las estrategias óptimas para este juego de suma cero con dos personas. La solución se presenta después en esta misma sección.

La matriz de recompensas es la de la tabla 20. Observe que ninguna estrategia es dominada y que el juego no tiene punto silla. Para determinar las estrategias combinadas óptimas para el jugador de los renglones y para el jugador de las columnas defina

x_1 = probabilidad de que el jugador de los renglones elija piedra

x_2 = probabilidad de que el jugador de los renglones elija papel

x_3 = probabilidad de que el jugador de los renglones elija tijeras

y_1 = probabilidad de que el jugador de las columnas escoja piedra

y_2 = probabilidad de que el jugador de las columnas escoja papel

y_3 = probabilidad de que el jugador de las columnas escoja tijeras

PL para el jugador de los renglones

Si el jugador de los renglones elige la estrategia combinada (x_1, x_2, x_3), entonces su recompensa esperada contra cada una de las estrategias del jugador de las columnas es como la que se muestra en la tabla 21. Suponga que el jugador de los renglones escoge la estrategia combinada (x_1, x_2, x_3). Según la suposición básica, el jugador de las columnas elegirá una estrategia tal que haga la recompensa esperada del jugador de los renglones igual a min $(x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2)$. Entonces el jugador de los renglones debe escoger (x_1, x_2, x_3) para hacer min $(x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2)$ tan *grande* como sea posible. Para obtener una formulación de la PL (llamada PL del jugador de los renglones) que genere la estrategia óptima del jugador de los renglones observe que para cualquier valor de x_1, x_2, y x_3, min

TABLA 20
Matriz de recompensa para Piedra, papel y tijeras

Jugador de los renglones	Jugador de las columnas: Piedra	Papel	Tijeras	Mínimo de los renglones
Piedra	0	−1	+1	−1
Papel	+1	0	−1	−1
Tijeras	−1	+1	0	−1
Máximo de las columnas	+1	+1	+1	

TABLA 21
Recompensa esperada para el jugador de los renglones en Piedra, papel y tijeras

Elecciones del jugador de las columnas	Recompensa esperada del jugador de los renglones si éste escoge (x_1, x_2, x_3)
Piedra	$x_2 - x_3$
Papel	$-x_1 + x_3$
Tijeras	$x_1 - x_2$

$(x_2 - x_3, -x_1 + x_3, x_1 - x_2)$ es justo el número más grande (llámelo v) que es a la vez menor o igual que $x_2 - x_3$, $-x_1 + x_3$ y $x_1 - x_2$. Después de notar que x_1, x_2 y x_3 tienen que satisfacer $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ vemos que la estrategia óptima del jugador de los renglones se determina resolviendo el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\max z &= v \\
\text{s.a} \quad v &\leq x_2 - x_3 && \text{(Restricción de la piedra)} \\
v &\leq -x_1 + x_3 && \text{(Restricción del papel)} \\
v &\leq x_1 - x_2 && \text{(Restricción de las tijeras)} \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0;\ v \text{ nrs}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Observe que hay una restricción en (2) por cada una de las restricciones del jugador de las columnas. El valor de v en la solución óptima de (2) es el *piso* del jugador de los renglones porque no importa qué estrategia (pura o combinada) elija el jugador de las columnas: el jugador de los renglones está seguro de recibir una recompensa esperada de por lo menos v.

PL del jugador de las columnas

¿Cómo debe escoger el jugador de las columnas una estrategia combinada óptima (y_1, y_2, y_3)? Suponga que el jugador de las columnas eligió la estrategia combinada (y_1, y_2, y_3). Por cada una de las estrategias del jugador de los renglones se podría calcular la recompensa esperada de este jugador si el jugador de las columnas elige (y_1, y_2, y_3) (véase la tabla 22). Se supone que el jugador de los renglones conoce (y_1, y_2, y_3), entonces escogerá una estrategia que asegure obtener una recompensa esperada de max $(-y_2 + y_3, y_1 - y_3, -y_1 + y_2)$. Por consiguiente, el jugador de las columnas debe escoger (y_1, y_2, y_3) para hacer max $(-y_2 + y_3, y_1 - y_3, -y_1 + y_2)$ tan *pequeña* como sea posible. Para obtener una formulación de la PL que genere las estrategias óptimas del jugador de las columnas, observe que para cualquier elección de (y_1, y_2, y_3), max $(-y_2 + y_3, y_1 - y_3, -y_1 + y_2)$ igualará el número más pequeño, que es a la vez mayor que o igual a $-y_2 + y_3$, $y_1 - y_3$ y $-y_1 + y_2$ (llámelo w). Observe también que para que (y_1, y_2, y_3) sea una estrategia combinada, (y_1, y_2, y_3) debe satisfacer $y_1 + y_2 + y_3 = 1$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ y $y_3 \geq 0$. Por lo tanto, el jugador de las columnas podría encontrar su estrategia óptima resolviendo el PL siguiente:

$$
\begin{aligned}
\min z &= w \\
\text{s.a.} \quad w &\geq -y_2 + y_3 && \text{(Restricción de la piedra)} \\
w &\geq y_1 - y_3 && \text{(Restricción del papel)} \\
w &\geq -y_1 + y_2 && \text{(Restricción de las tijeras)} \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0;\ w \text{ nrs}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Observe que (3) contiene una restricción que corresponde a cada una de las estrategias del jugador de los renglones. Asimismo, la función objetivo óptima w para (3) es un *techo* sobre las pérdidas esperadas del jugador de las columnas (o la recompensa esperada del ju-

TABLA 22
Recompensa esperada para el jugador de los renglones en Piedra, papel y tijeras

Elecciones del jugador de los renglones	Recompensa esperada del jugador de los renglones si el jugador de las columnas escoge (y_1, y_2, y_3)
Piedra	$-y_2 + y_3$
Papel	$y_1 - y_3$
Tijeras	$-y_1 + y_2$

gador de los renglones), porque al elegir una estrategia combinada (y_1, y_2, y_3) que soluciona (3), el jugador de las columnas puede tener la certeza de que sus pérdidas esperadas serán (comparadas con cualquiera de las estrategias del jugador de los renglones) a lo más w.

Relación entre los PL del jugador de los renglones y la del jugador de las columnas

Es fácil mostrar que el PL del jugador de las columnas es el dual del PL del jugador de los renglones. Empiece por escribir de nuevo el PL (2) del jugador de los renglones como

$$\begin{aligned}
\max z &= v \\
\text{s.a} \quad -x_2 + x_3 + v &\le 0 \\
x_1 \quad - x_3 + v &\le 0 \\
-x_1 + x_2 \quad + v &\le 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1 \\
x_1, x_2, x_3 \ge 0;\ v &\text{ nrs}
\end{aligned} \tag{4}$$

Sean y_1, y_2, y_3 y w las variables del dual para las restricciones en (4), respectivamente. Ahora es posible mostrar que el dual del PL del jugador de los renglones es el PL del jugador de las columnas. De acuerdo con la sección 6.5, el PL del jugador de los renglones se lee de lado a lado de la tabla 23 y el dual del PL del jugador de los renglones se busca hacia abajo. Recuerde que la restricción del dual que corresponde a la variable v será una restricción de igualdad (porque v es nrs) y la variable w del dual correspondiente a la restricción del primal $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ será nrs (porque $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ es una restricción de igualdad). Si lee hacia abajo en la tabla 23 encontrará que el dual del PL (4) del jugador de los renglones es

$$\begin{aligned}
\min z &= w \\
\text{s.a} \quad y_2 - y_3 + w &\ge 0 \\
-y_1 \quad + y_3 + w &\ge 0 \\
y_1 - y_2 \quad + w &\ge 0 \\
y_1 + y_2 + y_3 \quad &= 1 \\
y_1, y_2, y_3 \ge 0;\ w &\text{ nrs}
\end{aligned}$$

Después de pasar los términos con y_1, y_2 y y_3 de las primeras tres restricciones al lado derecho se ve que el último PL es el mismo que el PL (3) del jugador de las columnas. Por lo tanto, el dual del PL del jugador de los renglones es el PL del jugador de las columnas. (Naturalmente, el dual del PL del jugador de las columnas sería el PL del jugador de los renglones.)

Es fácil mostrar que tanto el PL (2) del jugador de los renglones y el PL (3) del jugador de las columnas tienen una solución óptima (es decir, ningún PL puede ser no factible o no acotado). Luego entonces, del teorema del dual de la sección 6.7 se infiere que v, el valor de la función objetivo óptimo para el PL del jugador de los renglones, y w, el valor

OBSERVACIONES Suponga que no habíamos sido capaces de conjeturar que $v' = w' = 1$. Entonces el PL (7) del jugador de los renglones habría tenido tres incógnitas (x_1, x_2 y v') y habríamos esperado que la solución óptima para (7) se presentaba donde las tres restricciones (7a) a (7c) fueran activas. Al resolver en forma simultánea (7a) a (7c) se obtiene $v' = 1, x_1 = x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Si ésta es la solución óptima para el PL del jugador de los renglones, entonces la holgura complementaria implica que las restricciones (8a) a (8c) tienen que ser activas. Al resolver en forma simultánea (8a) a (8c) se obtiene $w' = 1, y_1 = y_2 = \frac{1}{3}, y_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Una vez más hemos obtenido un punto factible del primal y un punto factible del dual que tienen el mismo valor de la función objetivo, por lo que ambas soluciones deben ser óptimas.

EJEMPLO 5 Holgura complementaria y la solución de un juego de suma cero para dos personas

Halle el valor y las estrategias óptimas del juego de suma cero para dos personas de la tabla 26.

Solución El juego no tiene punto silla y ninguna estrategia dominada, de modo que se establecen los PL de los jugadores de los renglones y de las columnas. Todos los elementos en la matriz de recompensas son no negativos, así que estamos seguros de que el valor del juego es no negativo. Los PL de los jugadores de los renglones y de las columnas para este juego son

$$\begin{aligned}
&\max v\\
&\text{s.a} \quad v \le 30x_1 + 60x_2\\
&\qquad\quad v \le 40x_1 + 10x_2\\
&\qquad\quad v \le 36x_1 + 36x_2\\
&\qquad\quad x_1 + x_2 = 1\\
&\qquad\quad x_1, x_2, v \ge 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Al sustituir $x_2 = 1 - x_1$ en el PL del jugador de los renglones se obtiene

$$\begin{aligned}
&\max v\\
&\text{s.a} \quad \text{(a) } v + 30x_1 \le 60 \qquad (\text{Restricción } y_1 \text{ o de la columna 1})\\
&\qquad\quad \text{(b) } v - 30x_1 \le 10 \qquad (\text{Restricción } y_2 \text{ o de la columna 2})\\
&\qquad\quad \text{(c) } v \qquad\quad\;\; \le 36 \qquad (\text{Restricción } y_3 \text{ o de la columna 3})\\
&\qquad\qquad x_1, v \ge 0
\end{aligned} \tag{9'}$$

De modo igual, hallamos

$$\begin{aligned}
&\min w\\
&\text{s.a} \quad \text{(a) } w \ge 30y_1 + 40y_2 + 36y_3\\
&\qquad\quad \text{(b) } w \ge 60y_1 + 10y_2 + 36y_3\\
&\qquad\quad y_1 + y_2 + y_3 = 1\\
&\qquad\quad y_1, y_2, y_3, w \ge 0
\end{aligned} \tag{10}$$

y al sustituir $y_3 = 1 - y_1 - y_2$ en el PL del jugador de las columnas se tiene

$$\begin{aligned}
&\min w\\
&\text{s.a} \quad \text{(a) } w + 6y_1 - 4y_2 \ge 36 \qquad (\text{Restricción } x_1 \text{ o del renglón 1})\\
&\qquad\quad \text{(b) } w - 24y_1 + 26y_2 \ge 36 \qquad (\text{Restricción } x_2 \text{ o del renglón 2})\\
&\qquad\quad y_1, y_2, w \ge 0
\end{aligned} \tag{10'}$$

TABLA 26
Matriz de recompensas para el ejemplo 5

	Jugador de las columnas			Mínimo de las columnas
Jugador de los renglones	30	40	36	30
	60	10	36	10
Máximo de las columnas	60	40	36	

Cuando se usa la holgura complementaria para resolver un PL y su dual es más fácil, por lo común, examinar primero el PL que tenga el menor número de variables. Se examina primero, por lo tanto, (9'). Se supone que (9'a) y (9'b) son activas en la solución óptima del PL del jugador de los renglones. Entonces, $v = 35$, $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{1}{6}$ sería la solución óptima para el PL del jugador de los renglones. Esta solución es factible en el PL del jugador de los renglones y hace a la restricción (9'c) no activa. Si esta solución es óptima para el PL del jugador de los renglones, la holgura complementaria implica que (10'a) y (10'b) también deben ser activas y se debe cumplir $y_3 = 0$. Esto quiere decir que $y_1 + y_2 = 1$, es decir, $y_2 = 1 - y_1$. Al intentar con $w = 35$ y sustituir $y_2 = 1 - y_1$ en (10'a) y (10'b) se tiene $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$. Hemos encontrado, por lo tanto, una solución factible ($v = 35$, $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{1}{6}$) para el PL del jugador de los renglones y una solución factible ($w = 35$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 0$) para el PL del jugador de las columnas, y las dos tienen el mismo valor de la función objetivo. Hemos determinado, por lo tanto, el valor del juego y la estrategia óptima para cada jugador.

Para terminar observamos que, si bien la tercera estrategia del jugador de las columnas no está dominada por la columna 1 o la columna 2, nunca debe escoger la columna 3. ¿Por qué?

En el juego siguiente de suma cero para dos personas, el método de la holgura complementaria no genera estrategias óptimas.

EJEMPLO 6 Juego de la Morra

En este juego, los dos jugadores deben levantar simultáneamente uno o dos dedos. Además, cada jugador debe anunciar el número de dedos que, según él, va a mostrar su contrincante. Si ninguno de los jugadores o ambos jugadores adivinan correctamente cuántos dedos levanta el contrario, se empata el juego. Si no es así, el jugador que adivina gana (al otro jugador) la suma (en dólares) de los dedos que mostraron ambos jugadores. Si hacemos que (i, j) representen la estrategia de levantar i dedos y adivinar que el contrincante ha mostrado j dedos, la matriz de recompensas apropiada es la que se muestra en la tabla 27.

Solución Observe que, una vez más, no hay punto silla ni estrategias dominadas en este juego. Para que haya seguridad de que el valor del juego es no negativo, sume 4 a cada elemento de la matriz de recompensas. Así se genera la matriz de recompensas de la tabla 28. En el caso de este juego, el PL del jugador de los renglones y la del jugador de las columnas son las siguientes (recuerde que el valor para el juego original de la morra $= v' - 4$):

PL del jugador de los renglones

$$
\begin{array}{lll}
\max v' & & \\
\text{s.a} & \text{(a)}\quad v' \le 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4(1 - x_1 - x_2 - x_3) & (\text{Restricción } y_1) \\
 & \text{(b)}\quad v' \le 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (1 - x_1 - x_2 - x_3) & (\text{Restricción } y_2) \\
 & \text{(c)}\quad v' \le x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 8(1 - x_1 - x_2 - x_3) & (\text{Restricción } y_3) \\
 & \text{(d)}\quad v' \le 4x_1 + 7x_2 + 4(1 - x_1 - x_2 - x_3) & (\text{Restricción } y_4) \\
 & \qquad x_1, x_2, x_3, v' \ge 0 &
\end{array}
$$

PL del jugador de las columnas

$$
\begin{array}{lll}
\max w' & & \\
\text{s.a} & \text{(a)}\quad w' \ge 4y_1 + 6y_2 + y_3 + 4(1 - y_1 - y_2 - y_3) & (\text{Restricción } x_1) \\
 & \text{(b)}\quad w' \ge 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 7(1 - y_1 - y_2 - y_3) & (\text{Restricción } x_2) \\
 & \text{(c)}\quad w' \ge 7y_1 + 4y_2 + 4y_3 & (\text{Restricción } x_3) \\
 & \text{(d)}\quad w' \ge 4y_1 + y_2 + 8y_3 + 4(1 - y_1 - y_2 - y_3) & (\text{Restricción } x_4) \\
 & \qquad y_1, y_2, y_3, w' \ge 0 &
\end{array}
$$

Falla un intento para usar la holgura complementaria a fin de resolver los PL de los jugadores de los renglones y las columnas; esto se debe a que las estrategias óptimas para ambos jugadores son degeneradas. (Intente con la holgura complementaria y vea lo que

TABLA 30
Recompensa esperada del jugador de los renglones si el de las columnas juega $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

El jugador de los renglones escoge	El jugador de las columnas escoge	Recompensa para los renglones	Probabilidad de ocurrencia
(1, 2)	(1, 1)	−2	$(\frac{3}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{20}$
(1, 2)	(1, 2)	0	$(\frac{3}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{20}$
(1, 2)	(2, 1)	0	$(\frac{3}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{20}$
(1, 2)	(2, 2)	3	$(\frac{3}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{3}{20}$
(2, 1)	(1, 1)	3	$(\frac{2}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{2}{20}$
(2, 1)	(1, 2)	0	$(\frac{2}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{2}{20}$
(2, 1)	(2, 1)	0	$(\frac{2}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{2}{20}$
(2, 1)	(2, 2)	−4	$(\frac{2}{5})(\frac{1}{4}) = \frac{2}{20}$

los renglones juega con la estrategia óptima $(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0)$, la recompensa esperada del jugador de los renglones se podría calcular como se muestra en la tabla 30. En esta situación, la recompensa esperada que recibe el jugador de los renglones es $-2(\frac{3}{20}) + 0(\frac{3}{20}) + 0(\frac{3}{20}) + 3(\frac{3}{20}) + 3(\frac{2}{20}) + 0(\frac{2}{20}) + 0(\frac{2}{20}) - 4(\frac{2}{20}) = \frac{1}{20}$. Otra visión de lo anterior es que cada vez que el jugador de las columnas elija (1, 1), (1, 2) o (2, 1), los jugadores ni pierden ni ganan, pero en las jugadas en las cuales el jugador de las columnas se decide por (2, 2), el jugador de los renglones gana un promedio de $\frac{1}{5}$ de unidad. Por lo tanto, la recompensa esperada del jugador de los renglones es $(\frac{1}{4})(\frac{1}{5}) = \frac{1}{20}$ de unidad.

4 En Pares o nones y en Piedra, papel, tijeras las estrategias óptimas podrían haber sido intuitivamente obvias, pero el juego de la Morra muestra que la teoría de juegos es capaz, con frecuencia de generar percepciones sutiles de cómo se debe jugar un juego de suma cero para dos personas.

Resolución de juegos de suma cero para dos personas mediante LINDO o LINGO

Para poder usar LINDO con el fin de determinar el valor y las estrategias óptimas de un juego de suma cero para dos personas, escriba simplemente el problema del jugador de los renglones o de las columnas. Por ejemplo, si escribe el problema del jugador de los renglones, el valor óptimo de z es el valor del juego; los valores óptimos de las variables de decisión son las estrategias óptimas del jugador de los renglones, y el valor absoluto de los precios dual son las estrategias óptimas del jugador de las columnas. Dicho sea de paso, como v no tiene restricciones de signo, entonces debe usar el comando **FREE** v después del enunciado **END.**

Game.lng

El modelo siguiente de LINGO (archivo Game.lng) tiene la capacidad de que se puede usar para determinar el valor y las estrategias óptimas para el juego de la Morra (o cualquier juego de suma cero para dos personas).

```
MODEL:
 1]SETS:
 2]ROWS/1..4/:X;
 3]COLS/1..4/;
 4]MATRIX(ROWS,COLS):REW;
 5]ENDSETS
 6]@FOR(COLS(J):@SUM(ROWS(I):REW(I,J)*X(I))>V;);
 7]@SUM(ROWS(I):X(I))=1;
 8]MAX=V;
 9]@FREE(V);
10]DATA:
11]REW=0,2,-3,0,
12]-2,0,0,3,
13]3,0,0,-4,
14]0,-3,4,0;
15]ENDDATA
16]END
```

En la línea 2 definimos los renglones de la matriz de recompensas que relaciona el renglón i con X(I) = probabilidad de que el jugador de los renglones juegue el renglón i. En la línea 3 definimos las columnas de la matriz de recompensas. En la línea 4 se crea la matriz de recompensas y se define la recompensa REW(I,J) del jugador de los renglones cuando se juegan el renglón i y la columna j. Para cada columna j, con la línea 6 se origina la restricción de que $\sum_{I}$REW (I,J)*X(I) $\geq$ V. En la línea 7 uno se asegura de que las probabilidades del jugador de los renglones suman 1. En el renglón 8 se crea la función objetivo de max $z = v$. En el renglón 9 se usa el comando **@FREE** para que v pueda ser negativa. En los renglones 11 a 14 se introduce la matriz de recompensas.

Si quiere usar este modelo para determinar las estrategias óptimas en cualquier juego de suma cero para dos personas, modifique el número de renglones y de columnas y cambie los datos en la matriz de recompensas. Recuerde que los precios dual generan las estrategias óptimas del jugador de las columnas.

Resumen de cómo resolver un juego de suma cero para dos personas

Este análisis de los juegos de suma cero para dos personas finaliza con un resumen de un procedimiento que se puede usar para determinar el valor y las estrategias óptimas para cualquier juego de suma cero (o de suma constante) para dos personas.

Paso 1 Verifique si hay punto silla. Si el juego no tiene punto silla, vaya al paso 2.

Paso 2 Elimine cualquiera de las estrategias dominadas del jugador de los renglones. Inspeccione la matriz reducida (renglones dominados borrados) y elimine cualquiera de las estrategias dominadas del jugador de las columnas. Luego elimine cualquiera de las estrategias dominadas del jugador de los renglones. Continúe en este tenor hasta que no encuentre más estrategias dominadas. Prosiga con el paso 3.

Paso 3 Si la matriz del juego es ahora 2×2, resuelva el juego en forma gráfica. Solucione, en caso contrario, el juego mediante los métodos de programación lineal de esta sección.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Hay cinco trincheras (1, 2, 3, 4 y 5) en las que un soldado se puede esconder (véase figura 5). Un artillero tiene sólo un tiro y podría disparar a cualquiera de los cuatro puntos A, B, C o D. Un disparo mata a un soldado si éste está en una trinchera adyacente al punto donde pegó el disparo. Por ejemplo, un disparo hecho al punto B matará al soldado si éste se encuentra en la trinchera 2 o en la 3, y un disparo dirigido al punto D matará al soldado si éste está en la trinchera 4 o 5. Suponga que el artillero recibe una recompensa de 1 si muere el soldado y una recompensa de 0 si el soldado sobrevive al disparo.

a Suponga que es un juego de suma cero y construya la matriz de recompensas.

b Encuentre y elimine todas las estrategias dominadas.

c Sabemos que una estrategia óptima del soldado es esconderse $\frac{1}{3}$ de las veces en las trincheras 1, 3 y 5. También sabemos que una estrategia óptima del artillero es disparar $\frac{1}{3}$ de las veces a A y un tercio de las veces a D y $\frac{1}{3}$ de las veces a B o C. Determine el valor del juego con respecto al artillero.

d Suponga que el soldado elige la siguiente estrategia no óptima; $\frac{1}{2}$ de las veces se esconde en la trinchera 1; $\frac{1}{4}$ del tiempo se esconde en la trinchera 3 y $\frac{1}{4}$ del tiempo se esconde en la trinchera 5. Determine una estrategia para el artillero que asegure que su recompensa esperada excederá el valor del juego.

e Escriba el PL de cada jugador y compruebe que las estrategias del inciso (c) son estrategias óptimas.

FIGURA 5

1 A 2 B 3 C 4 D 5

2 Encuentre la estrategia óptima de cada jugador y el valor del juego de suma cero para dos personas de la tabla 31.

3 Determine la estrategia óptima de cada jugador y el valor del juego de suma cero para dos personas de la tabla 32.

4 Se aproximan dos ejércitos a dos ciudades. El primero de los ejércitos está al mando del general Custard y tiene cuatro regimientos; el segundo ejército está al mando del ge-

TABLA 31

4	5	1	4
2	1	6	3
1	0	0	2

TABLA 32

2	4	6
3	1	5

neral Peabody y consta de tres regimientos. En cada ciudad, el ejército que envía más regimientos a la ciudad captura tanto la ciudad como los regimientos del ejército contrario. Si ambos ejércitos envían el mismo número de regimientos a una ciudad, entonces la batalla en la ciudad es un empate. Cada ejército se anota un punto por ciudad capturada y un punto por regimiento capturado. Suponga que cada ejército quiere maximizar la diferencia entre su recompensa y la recompensa de su contrincante. Plantee esta situación como un juego de suma cero para dos personas y encuentre el valor del juego y las estrategias óptimas de cada jugador.

Grupo B

5 Un juego de suma cero de dos personas con una matriz $A(n \times n)$ de recompensas es un juego **simétrico** si $A = -A^T$.

a Explique la razón de que un juego que tenga $A = -A^T$ se llame juego simétrico.

b Demuestre que un juego simétrico debe tener un valor de cero.

c Demuestre que si $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es una estrategia óptima para el jugador de los renglones, entonces $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ es también una estrategia óptima para el jugador de las columnas.

d ¿Cuáles de los ejemplos tratados en este capítulo son juegos simétricos? ¿Cómo los resultados de este problema podrían facilitar la determinación del valor y las estrategias óptimas de un juego simétrico?

6 Sea $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ una solución del PL del jugador de los renglones y sea $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ una solución para el PL del jugador de las columnas en el caso de un juego de suma cero para dos personas cuya matriz de recompensas es $m \times n$. Demuestre que si el jugador de los renglones se desvía de su estrategia óptima no puede incrementar su recompensa esperada contra $\bar{y}$.

7 Interprete las condiciones de holgura complementaria para los PL de los jugadores de los renglones y de las columnas.

8 Wivco observó el costo de la producción diaria y el costo variable de producción de ciertos dispositivos en la planta de la ciudad de Nueva York. La información se reunió en la tabla 33. Wivco opina que el costo de la producción diaria y los costos variables de producción siguen la relación siguiente: para algunos números a y b,

Costo de la producción diaria $= a + b$(producción diaria)

Wivco desea encontrar estimaciones de a y b ($\hat{a}$ y $\hat{b}$) que minimicen el error máximo (en valor absoluto) en que se incurre al estimar los costos de producción diaria. Por ejemplo, si Wivco escoge $\hat{a} = 3$ y $\hat{b} = 2$, entonces los costos diarios pronosticados se muestran en la tabla 34. En este caso, el error máximo sería 3 000 dólares. Formule un PL que se pueda utilizar para hallar las estimaciones óptimas de $\hat{a}$ y $\hat{b}$.

9 Suponga que sumamos una constante c a cada elemento en una matriz de recompensas A. Llame al nuevo juego matriz A'. Demuestre que A y A' tienen las mismas estrategias óptimas y que el valor de $A' =$ (valor de A) $+ c$.

TABLA 33

Día	Producción	Costo variable de producción (dólares)
1	4 000	9 000
2	6 000	12 000
3	7 000	14 000
4	1 000	5 000
5	3 000	8 000

TABLA 34

Día	Costo pronosticado (dólares)	Error absoluto (dólares)
1	11 000	2 000
2	15 000	3 000
3	17 000	3 000
4	5 000	0
5	9 000	1 000

14.4 Juegos de suma no constante para dos personas

La mayor parte de los modelos teóricos de juegos para situaciones financieras no son juegos de suma constante, porque es inusual que los competidores comerciales estén en un conflicto total.

En esta sección se hace un breve análisis de los juegos de suma no constante para dos personas en los cuales no se permite la cooperación entre los jugadores. Para comenzar el estudio, está el famoso Dilema del prisionero.

EJEMPLO 7 Dilema del prisionero

Dos prisioneros que escaparon y participaron en un robo han sido recapturados y están en espera del juicio sobre su nuevo delito. Aunque ambos son culpables, el fiscal de Gotham City no está seguro de tener suficientes evidencias para condenarlos. Para hacer que cada

TABLA 35
Matriz de recompensas para el Dilema del prisionero

	Prisionero 2	
Prisionero 1	Confiesa	No confiesa
Confiesa	$(-5, -5)$	$(0, -20)$
No confiesa	$(-20, 0)$	$(-1, -1)$

uno testifique contra el otro, el fiscal le dice a cada uno de los prisioneros lo siguiente: "Si sólo uno de ustedes confiesa y testifica contra su compañero, el que confiese quedará libre, en tanto que el que no confiese seguramente será condenado y se le dará una sentencia de 20 años de cárcel. Si ambos confiesan, entonces ambos serán condenados y enviados a prisión 5 años. Por último, si ninguno confiesa, yo puedo condenar a ambos por un delito menor y pasará cada uno un año en prisión". ¿Qué debe hacer cada prisionero?

Solución Si suponemos que los prisioneros no se pueden comunicar entre sí, las estrategias y recompensas para cada uno son las de la tabla 35. El primer número de cada celda de esta matriz es la recompensa (negativa, porque los años en prisión son indeseables) para el prisionero 1, y la segunda matriz en cada celda es la recompensa para el prisionero 2. Observe que la suma de las recompensas en cada celda varía desde un valor alto de -2 $(-1 - 1)$ a uno bajo de -20 $(-20 + 0)$. Por lo tanto, éste no es un juego de suma constante para dos jugadores.

Suponga que cada prisionero pretende eliminar cualquier estrategia dominada. En cada prisionero, la estrategia "confesar" domina a la estrategia "no confesar". Si cada prisionero se apega a su estrategia no dominada ("confesar"), entonces cada prisionero pasará 5 años en la cárcel. En cambio, si cada prisionero escoge la estrategia dominada "no confesar", entonces cada prisionero pasará sólo un año en prisión. Por lo tanto, si cada prisionero escoge su estrategia dominada ambos están en mejores condiciones que si cada uno elige su estrategia no dominada.

DEFINICIÓN ■ Al igual que en un juego de suma cero para dos personas, una elección de estrategia por parte de cada jugador (prisionero) es un **punto de equilibrio** si ninguno de los jugadores puede beneficiarse al haber un cambio unilateral en estrategia. ■

Por lo tanto, $(-5, -5)$ es un punto de equilibrio porque si cada prisionero cambia, entonces su recompensa disminuye (de -5 a -20). Evidentemente, cada prisionero está en mejores condiciones en el punto $(-1, -1)$. Para ver que el resultado $(-1, -1)$ podría no ocurrir, observe que $(-1, -1)$ no es un punto de equilibrio porque si estamos ahora en el resultado $(-1, -1)$, cada prisionero puede aumentar su recompensa (de -1 a 0) al cambiar su estrategia de "no confesar" a "confesar" (es decir, cada prisionero se puede beneficiar si traiciona a su cómplice). Esto ilustra un aspecto importante del tipo de juego del Dilema del prisionero: si los jugadores cooperan (si cada prisionero elige "no confesar"), entonces cada jugador puede ganar al traicionar a su cómplice (suponiendo que la estrategia de su cómplice sigue sin cambiar). Si ambos jugadores se traicionan entre sí, entonces ambos estarán en una situación peor que si ellos hubieran escogido su estrategia de cooperación. Esta anomalía no puede presentarse en un juego de suma constante para dos personas. (¿Por qué no?)

TABLA 36
Una matriz de recompensas general para el Dilema del prisionero

Jugador 1	Jugador 2	
	NC	*C*
NC	*(P, P)*	*(T, S)*
C	*(S, T)*	*(R, R)*

Un juego del Dilema del prisionero se podría representar de manera más formal como en la tabla 36, donde

NC = acción de no cooperar
C = acción de cooperar
P = castigo por no cooperar
S = retribución a la persona que es traicionada
R = recompensa por cooperar si ambos jugadores cooperan
T = tentación de traicionar a su cómplice

Un punto de equilibrio es (P, P) en un juego de Dilema del prisionero. Esto requiere $P > S$. En cuanto a (R, R), para que no sea un punto de equilibrio requiere $T > R$. (Esto da a cada jugador una tentación de traicionar a su cómplice.) El juego es razonable sólo si $R > P$. Por lo tanto, para que la tabla 36 represente un juego del Dilema del prisionero, requerimos que $T > R > P > S$. El juego del Dilema del prisionero es muy interesante, porque explica la razón de que dos adversarios no cooperen, con frecuencia, entre sí. Esto se ilustra en los ejemplos 8 y 9.

EJEMPLO 8 Juego del Dilema del prisionero en la publicidad

Los restaurantes competidores Hot Dog King y Hot Dog Chef pretenden determinar sus presupuestos para publicidad del próximo año. Los dos restaurantes tendrán ventas combinadas de 240 millones de dólares y pueden gastar 6 o 10 millones en publicidad. Si un restaurante gasta más dinero que el otro, entonces el restaurante que gasta más dinero tendrá ventas de 190 millones de dólares. Si ambas compañías gastan la misma cantidad en publicidad, entonces tendrán ventas iguales. Cada dólar de ventas produce 10 centavos de ganancia. Suponga que cada restaurante está interesado en maximizar (contribución de las ventas a la ganancia) − (costos de publicidad). Encuentre un punto de equilibrio para este juego.

Solución La matriz de recompensa apropiada se muestra en la tabla 37. Si identificamos gastar 10 millones de dólares en publicidad como la acción de no cooperar y gastar 6 millones como la acción de cooperar, entonces (2, 2) (que corresponde a una fuerte publicidad por parte de ambos restaurantes) es un punto de equilibrio. Aunque ambos restaurantes están en mejores condiciones en (6, 6) que en (2, 2), (6, 6) es inestable porque cualquiera de los restaurantes podría ganar al cambiar su estrategia. Por lo tanto, para proteger su participación en el mercado, cada restaurante tiene que gastar una cantidad considerable en publicidad.

TABLA 37
Matriz de recompensas para el juego de la publicidad

	Hot Dog Chef	
Hot Dog King	Gasta 10 millones de dólares	Gasta 6 millones de dólares
Gasta 10 millones de dólares	(2, 2)	(9, −1)
Gasta 6 millones de dólares	(−1, 9)	(6, 6)

EJEMPLO 9 Dilema del prisionero en la carrera armamentista

Los Vulcans y los Klingons están enfrascados en una carrera armamentista en la cual se supone que cada nación tiene dos estrategias posibles: crear un nuevo misil o mantener el *status quo*. Se supone que la matriz de recompensas es como la que se ilustra en la tabla 38. Esta matriz de recompensas se basa en la suposición de que si sólo una nación crea un misil nuevo, la nación que lo tenga conquistará a la otra nación. En este caso, la nación conquistadora gana una recompensa de 20 unidades y la nación conquistada pierde 100 unidades. Se supone, asimismo, que el costo de crear un nuevo misil es de 10 unidades. Identifique un punto de equilibrio en este juego.

Solución Si se identifica "crear" como la acción de no cooperar y "seguir como están" como la acción de cooperar, observamos que $(-10, -10)$ (ambas naciones eligen su acción de no cooperar) es un punto de equilibrio. Aunque $(0, 0)$ deja a ambas naciones en mejores condiciones que $(-10, -10)$, vemos que en esta situación cada nación puede ganar de una traición. Por lo tanto, $(0, 0)$ no es estable. Este ejemplo muestra cómo mantener el equilibrio de fuerzas puede llevar a una carrera armamentista.

TABLA 38
Matriz de recompensas para el juego de la carrera armamentista

	Klingons	
Vulcans	**Crear un nuevo misil**	**Mantener el *status quo***
Crear un nuevo misil	$(-10, -10)$	$(10, -100)$
Mantener el *status quo*	$(-100, 10)$	$(0, 0)$

El siguiente juego de suma no constante para dos personas no es un juego del tipo del Dilema del prisionero.

EJEMPLO 10 Juego del "pollo"

Angry Max maneja su automóvil hacia James Bound por una carretera desierta. Cada uno tiene dos estrategias: virar bruscamente o no hacerlo. ¡La matriz de recompensas de la tabla 39 no necesita ninguna explicación! Determine el(los) punto(s) de equilibrio para este juego.

Solución Para ambos $(5, -5)$ y $(-5, 5)$, ningún jugador puede ganar por un cambio unilateral en la estrategia. Por lo tanto, $(5, -5)$ y $(-5, 5)$ son puntos de equilibrio.

TABLA 39
Matriz de recompensas para el juego de virar bruscamente o no

	James Bound	
Angry Max	**Giro brusco**	**No girar bruscamente**
Giro brusco	$(0, 0)$	$(-5, 5)$
No girar bruscamente	$(5, -5)$	$(-100, -100)$

Al igual que con los juegos de suma constante, un juego de suma no constante puede no tener un punto de equilibrio en estrategias puras. Es posible demostrar que si se permiten estrategias combinadas, entonces en cualquier juego de suma no constante para dos personas cada jugador tiene una estrategia de equilibrio (en que si uno de los jugadores se apega a su estrategia de equilibrio, el otro jugador no puede salir beneficiado si se aparta de su estrategia de equilibrio) [véase Owen (1982, p. 127)]. Por ejemplo, considere el jue-

Ahora ya es posible mostrar cómo determinar el núcleo de un juego para n personas, para lo cual es a menudo útil el teorema 1.

TEOREMA 1

Una atribución $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ está en el núcleo de un juego para n personas si y sólo si para cada subconjunto S o N,

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

El teorema 1 establece que una atribución $\mathbf{x}$ está en el núcleo (que $\mathbf{x}$ no está dominada) si y sólo si para toda coalición S, el total de la recompensa que reciben los jugadores en S (de acuerdo con $\mathbf{x}$) es por lo menos tan grande como $v(S)$.

Para ilustrar el uso del teorema 1, determinaremos el núcleo de los tres juegos estudiados en la sección 14.5.

EJEMPLO 11 El juego del nuevo fármaco (continuación)

Determine el núcleo del juego del nuevo fármaco.

Solución Para este juego, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ será una atribución si y sólo si

$$x_1 \geq 0 \tag{16}$$

$$x_2 \geq 0 \tag{17}$$

$$x_3 \geq 0 \tag{18}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = \$1\,000\,000 \tag{19}$$

Según el teorema 1, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ estará en el núcleo si y sólo si x_1, x_2 y x_3 satisfacen las ecuaciones (16) a (19) y las desigualdades siguientes:

$$x_1 + x_2 \geq \$1\,000\,000 \tag{20}$$

$$x_1 + x_3 \geq \$1\,000\,000 \tag{21}$$

$$x_2 + x_3 \geq \$0 \tag{22}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \$1\,000\,000 \tag{23}$$

Con el objeto de determinar el núcleo observe que si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ está en el núcleo, entonces x_1, x_2 y x_3 deben satisfacer la desigualdad que se genera al sumar las desigualdades (20) a (22). Cuando se suman se obtiene $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq \$2\,000\,000$, o bien,

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \$1\,000\,000 \tag{24}$$

Según (19), $x_1 + x_2 + x_3 = 1\,000\,000$ dólares. Por lo tanto, (20) a (22) deben ser activas.† Al resolver en forma simultánea (20) a (22) como igualdades se obtiene $x_1 = 1\,000\,000$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ (todo en dólares). Si se verifica se tiene que (1 000 000 dólares, 0 dólares, 0 dólares) sí satisface (16) a (23). En resumen, el núcleo de este juego es la atribución (1 000 000 dólares, 0 dólares, 0 dólares). Por lo tanto, el núcleo destaca la importancia del jugador 1.

OBSERVACIONES 1 En la sección 14.7 mostramos que para este juego, otro concepto de solución, el valor de Shapley, da al jugador 1 menos que 1 000 000 de dólares y proporciona tanto al jugador 2 como al jugador 3 algo de dinero.

†Si (20), (21) o (22) fueran inactivas, entonces para cualquier punto en el núcleo, la suma de (20) a (22) sería también inactiva. Como sabemos que (24) tiene que ser activa, esto implica que para cualquier punto en el núcleo, (20), (21) y (22) tienen que ser activas.

Cualquier atribución $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ está en el núcleo si y sólo si satisface las desigualdades siguientes:

$$x_1 + x_2 \geq \$20\,000 \tag{39}$$

$$x_1 + x_3 \geq \$30\,000 \tag{40}$$

$$x_2 + x_3 \geq \$0 \tag{41}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \$30\,000 \tag{42}$$

Al sumar (36) y (40), se encuentra que si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ está en el núcleo, entonces x_1, x_2, y x_3 deben cumplir con $x_1 + x_2 + x_3 \geq 30\,000$ dólares. Según (38), $x_1 + x_2 + x_3 = 30\,000$ dólares. Por lo tanto, (36) y (40) deben ser activas. Este razonamiento muestra que para que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ esté en el núcleo, x_1, x_2 y x_3 deben cumplir con

$$x_2 = \$0 \qquad \text{y} \qquad x_1 + x_3 = \$30\,000 \tag{43}$$

Ahora, de (39) se infiere que

$$x_1 \geq \$20\,000 \tag{44}$$

Por lo tanto, para que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ esté en el núcleo se tienen que satisfacer (43) y (44). Cualquier vector en el núcleo tiene que cumplir, asimismo, con $x_3 \geq 0$ y $x_1 \leq 30\,000$ dólares y cualquier vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ que satisfaga (43), (44), $x_3 \geq 0$ dólares y $x_1 \leq 30\,000$ dólares estará en el núcleo del juego de la urbanización de tierras. Por lo tanto, si 20 000 dólares $\leq x_1 \leq$ 30 000 dólares, entonces cualquier vector de la forma (x_1, 0 dólares, 30 000 dólares $- x_1$) estará en el núcleo del juego de los urbanistas. La interpretación del núcleo es la siguiente: el jugador 3 ofrece más que el jugador 2 y compra la tierra al jugador 1 a un precio x_1 (20 000 $\leq x_1 \leq$ 30 000 dólares). Entonces el jugador 1 recibe una recompensa de x_1 dólares y el jugador 3 recibe una recompensa de 30 000 dólares $- x_1$. El jugador 2 es echado fuera y recibe nada. En este ejemplo, el núcleo contiene una cantidad infinita de puntos.

Los problemas relacionados con la teoría de juegos para n personas se encuentran al final de la sección 14.7.

14.7 El valor de Shapley†

En la sección 14.6 se determinó que el núcleo del juego del nuevo fármaco dio todos los beneficios o recompensas al jugador más importante del juego (el inventor del fármaco). Ahora se trata de analizar una opción del concepto de solución para los juegos con n personas, el valor de Shapley, el cual ofrece, en general, soluciones más equitativas que el núcleo.‡

Lloyd Shapley demostró que, para cualquier función característica, hay un vector único de recompensa $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisface los axiomas siguientes:

Axioma 1 Al renombrar a los jugadores hay un intercambio en las recompensas de los jugadores. Suponga que el valor de Shapley para un juego de tres personas es $\mathbf{x} = (10, 15, 20)$. Si intercambiamos los papeles de los jugadores 1 y 3 [por ejemplo, si originalmente $v(\{1\}) = 10$ y $v(\{3\}) = 15$, se puede hacer que $v(\{1\}) = 15$ y $v(\{3\}) = 10$] entonces el valor de Shapley para el nuevo juego sería $\mathbf{x} = (20, 15, 10)$.

Axioma 2 $\Sigma_{i=1}^{i=n} x_i = v(N)$. Esto es simplemente racionalidad de grupo.

Axioma 3 Si $v(S - \{i\}) = v(S)$ se cumple para todas las coaliciones S, entonces, el valor de Shapley tiene $x_i = 0$. Si el jugador i no suma valor alguno a ninguna coalición, entonces el jugador i recibe una recompensa de cero proveniente del valor de Shapley.

Antes de establecer el axioma 4 definamos la suma de dos juegos para n personas. Sean v y $\bar{v}$ dos funciones características para juegos con jugadores idénticos. Definamos que el

†En esta sección se tratan temas que se pueden omitir sin que se pierda la continuidad.

‡Véase un análisis excelente sobre el valor de Shapley en Owen (1982). Véase también Shapley (1953).

juego $(v + \bar{v})$ es un juego cuya función característica es $(v + \bar{v})$ dada por $(v + \bar{v})(S) = v(S) + \bar{v}(S)$. Por ejemplo, si $v(\{1, 2\}) = 10$ y $\bar{v}(\{1, 2\}) = -3$, entonces en el juego $(v + \bar{v})$ la coalición $\{1, 2\}$ tendría $(v + \bar{v})(\{1, 2\}) = 10 - 3 = 7$.

Axioma 4 Sea $\mathbf{x}$ el vector del valor de Shapley para el juego v, y sea $\mathbf{y}$ el vector del valor de Shapley para el juego $\bar{v}$. Entonces, el vector del valor de Shapley para el juego $(v + \bar{v})$ es el vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

La validez de este axioma se ha cuestionado con frecuencia porque al sumar recompensas de dos juegos diferentes es como si sumáramos peras con manzanas. No obstante, si se supone que los axiomas 1 a 4 son válidos, Shapley demostró el notable resultado en el teorema 2.

TEOREMA 2

Dado cualquier juego para n personas con la función característica v, hay un vector único de recompensas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que cumple con los axiomas 1 a 4. La recompensa del i-ésimo jugador (x_i) se obtiene con

$$x_i = \sum_{\substack{\text{toda } S \text{ para la cual} \\ i \text{ no está en } S}} p_n(S)[v(S \cup \{i\}) - v(S)] \tag{45}$$

En (45),

$$p_n(S) = \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} \tag{46}$$

donde $|S|$ es el número de jugadores en S, y para $n \geq 1$, $n! = n(n-1) \cdots 2(1)$ $(0! = 1)$.

Aunque (45) parece compleja, la ecuación tiene una interpretación sencilla. Suponga que los jugadores $1, 2, \ldots, n$ llegan en orden aleatorio. Entonces, cualquiera de las $n!$ permutaciones de $1, 2, \ldots, n$ tiene $\frac{1}{n!}$ probabilidades de estar en el orden en el cual los jugadores llegan. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces hay $\frac{1}{3}! = \frac{1}{6}$ de probabilidad de que los jugadores lleguen en cualquiera de las secuencias siguientes:

1, 2, 3	2, 3, 1
1, 3, 2	3, 1, 2
2, 1, 3	3, 2, 1

Suponga que cuando el jugador i llega, se encuentra con que los jugadores que están en el conjunto S ya llegaron. Si el jugador i forma una coalición con los jugadores que están presentes cuando él llega, entonces el jugador i suma $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ a la coalición S. La probabilidad de que cuando el jugador i llegue los jugadores de la coalición S estén presentes es $p_n(S)$. Entonces (45) implica *que la recompensa del jugador i debe ser la cantidad esperada que el jugador i añade a la coalición formada por los jugadores que están presentes cuando él llega.*

Ahora mostraremos que $p_n(S)$ [como la da (46)] es la probabilidad de que cuando el jugador i llegue, estarán presentes los jugadores del subconjunto S. Obsérvese que el número de permutaciones de $1, 2, \ldots, n$ que resulta al llegar el jugador i cuando los jugadores de la coalición S están presentes está dado por

$$\underbrace{|S|(|S| - 1)(|S| - 2) \cdots + (2)(1)}_{\text{Llega } S} \underbrace{(1)}_{\text{Llega } i} \underbrace{(n - |S| - 1)(n - |S| - 2) \cdots (2)(1)}_{\text{Llegan los jugadores que no están } S \cup \{i\}}$$

$$= |S|!(n - |S| - 1)!$$

Como hay un total de $n!$ permutaciones de $1, 2, \ldots, n$, la probabilidad de que el jugador i llegue y vea a los jugadores de S es

$$\frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} = p_n(S)$$

Enseguida se calcula el valor de Shapley para el juego del nuevo fármaco.

EJEMPLO 11 El juego del nuevo fármaco (continuación)

Encuentre el valor de Shapley para el juego del nuevo fármaco.

Solución Para calcular x_1, la recompensa que debe recibir el jugador 1, listamos todas las coaliciones S de las cuales el jugador 1 no es miembro. Calculamos $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ y $p_3(S)$ para cada una de estas coaliciones (véase tabla 45). Puesto que el jugador 1 suma (en promedio)

$$(\tfrac{2}{6})(0) + (\tfrac{1}{6})(1\ 000\ 000) + (\tfrac{2}{6})(1\ 000\ 000) + (\tfrac{1}{6})(1\ 000\ 000) = \tfrac{\$4\ 000\ 000}{6}$$

el concepto del valor de Shapley recomienda que el jugador 1 reciba una recompensa de $\frac{4\ 000\ 000}{6}$ dólares.

Con el objeto de calcular el valor de Shapley para el jugador 2, se requiere la información de la tabla 46. Por lo tanto, el valor de Shapley recomienda una recompensa de

$$(\tfrac{1}{6})(1\ 000\ 000) = \tfrac{\$1\ 000\ 000}{6}$$

para el jugador 2. El valor de Shapley tiene que asignar un total de $v(\{1, 2, 3\}) =$ 1 000 000 dólares para los jugadores, de modo que el valor de Shapley recomendará que el jugador 3 reciba 1 000 000 dólares $- x_1 - x_2 = \frac{\$1\ 000\ 000}{6}$.

TABLA 45
Cálculo del valor de Shapley para el jugador 1 (Joe Willie)

S	$p_3(S)$	$v(S \cup \{1\}) - v(S)$
{ }	$\frac{2}{6}$	\$0
{2}	$\frac{1}{6}$	\$1 000 000
{2, 3}	$\frac{2}{6}$	\$1 000 000
{3}	$\frac{1}{6}$	\$1 000 000

TABLA 46
Cálculo del valor de Shapley para el jugador 2

S	$p_3(S)$	$v(S \cup \{2\}) - v(S)$
{ }	$\frac{2}{6}$	\$0
{1}	$\frac{1}{6}$	\$1 000 000
{3}	$\frac{1}{6}$	\$0
{1, 3}	$\frac{2}{6}$	\$0

OBSERVACIONES **1** Recuerde que el núcleo de este juego asignó 1 000 000 dólares al jugador 1 y nada de dinero a los jugadores 2 y 3. Por lo tanto, el valor de Shapley trata a los jugadores 2 y 3 más justamente que el núcleo. El valor de Shapley proporciona, por lo regular, soluciones más equitativas que el núcleo.
2 En el caso de un juego con pocos participantes, podría ser más fácil calcular el valor de Shapley de cada jugador aplicando el hecho de que el jugador i debe recibir la cantidad esperada que añade a la coalición presente cuando él llega. Por lo que toca al ejemplo 11, este método genera los cálculos

TABLA 47
Método opcional para determinar el valor de Shapley

Orden de llegada	Cantidad sumada por la llegada del jugador (dólares)		
	Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
1, 2, 3	0	1 000 000	0
1, 3, 2	0	0	1 000 000
2, 1, 3	1 000 000	0	0
2, 3, 1	1 000 000	0	0
3, 1, 2	1 000 000	0	0
3, 2, 1	1 000 000	0	0

que se muestran en la tabla 47. Cada una de las seis secuencias de llegadas de los jugadores es igualmente probable, así que el valor de Shapley para cada uno de los jugadores es como se indica

$$x_1 = \frac{\$4\,000\,000}{6}, \qquad x_2 = \frac{\$1\,000\,000}{6}, \qquad x_3 = \frac{\$1\,000\,000}{6}$$

3 El valor de Shapley se puede usar como una medida de la fuerza de miembros de organizaciones políticas o financieras. Por ejemplo, el Consejo de seguridad de la ONU está constituido por cinco miembros permanentes (quienes tienen poder de vetar cualquier resolución) y 10 miembros no permanentes. Para que una resolución sea aprobada por el Consejo de seguridad se requieren, por lo menos, nueve votos, sin olvidar los votos de todos los miembros permanentes. Si se asigna un valor de 1 a todas las coaliciones que pueden aprobar una resolución y un valor de 0 a todas las coaliciones que no pueden aprobar resoluciones se define una función característica. Por lo que se refiere a esta función característica, se puede demostrar que el valor de Shapley de cada miembro permanente es 0.1963, y el de cada miembro no permanente es de 0.001865, de lo que resulta $5(0.1963) + 10(0.001865) = 1$. Por lo tanto, el valor de Shapley indica que $5(0.1963) = 98.15\%$ de la fuerza del Consejo de seguridad reside en los miembros permanentes.

Como una aplicación final del valor de Shapley, analicemos enseguida cómo utilizarlo para determinar una lista de las tarifas de aterrizaje en un aeropuerto.

EJEMPLO 16 Tarifas aeroportuarias

Suponga que tres tipos de aviones (Piper Cubs, DC-10 y 707) utilizan un aeropuerto. Un Piper Cub requiere una pista de 100 yardas; un DC-10 requiere una pista de 150 yardas y un 707 necesita una pista de 400 yardas. Suponga que el costo (en dólares) del mantenimiento de una pista durante un año es igual a la longitud de la misma. Puesto que los 707 aterrizan en el aeropuerto, éste tiene una pista de 400 yardas. Con el fin de facilitar el problema, suponga que cada año aterriza sólo un avión de cada tipo en dicho aeropuerto. ¿Cuánto del costo de 400 dólares del mantenimiento anual se debe cargar a cada avión?

Solución Sean el jugador 1 = el Piper Cub, el jugador 2 = DC-10 y el jugador 3 = 707. Ahora ya podemos definir un juego de tres jugadores en el cual el valor de una coalición es el costo asociado con la longitud de la pista necesaria para dar servicio al avión más grande de la coalición. Por lo tanto, la función característica de este juego (se da un costo como un ingreso negativo) sería

$$v(\{\ \}) = \$0, \quad v(\{1\}) = -\$100, \quad v(\{1, 2\}) = v(\{2\}) = -\$150,$$
$$v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = -\$400$$

Con el objeto de determinar el valor de Shapley (costo) para cada jugador, suponemos que los tres aviones aterrizan en orden aleatorio, y determinamos cuánto costo (en promedio) suma cada avión al costo que generan los aviones que ya están presentes (véase tabla 48). El costo de Shapley para cada jugador es como se indica:

$$\text{Costo del jugador } 1 = (\tfrac{1}{6})(100 + 100) = \tfrac{\$200}{6}$$
$$\text{Costo del jugador } 2 = (\tfrac{1}{6})(50 + 150 + 150) = \tfrac{\$350}{6}$$
$$\text{Costo del jugador } 3 = (\tfrac{1}{6})(250 + 300 + 250 + 250 + 400 + 400) = \tfrac{\$1\,850}{6}$$

8 Considere el siguiente juego para tres personas:

$$v(\{\ \}) = 0, \qquad v(\{1\}) = 0.2,$$
$$v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1, 2\}) = 1.5,$$
$$v(\{1, 3\}) = 1.6, \qquad v(\{2, 3\}) = 1.8,$$
$$v(\{1, 2, 3\}) = 2$$

a Encuentre el núcleo de este juego.

b Determine el valor de Shapley para este juego.

c Halle una atribución que domine la atribución $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

9 Howard Whose dejó una herencia de 200 000 dólares para ayudar a sus tres ex-esposas. El apoderado de Howard determinó, infortunadamente, que cada ex-esposa necesita la cantidad siguiente de dinero para atender las necesidades de los hijos que dejó Howard: esposa 1, 100 000 dólares; esposa 2, 200 000 dólares; esposa 3, 300 000 dólares. El apoderado debe determinar cómo dividir la cantidad de dinero entre las tres esposas. El apoderado define que el valor de una coalición S de ex-esposas es la cantidad máxima de dinero dejado para las ex-esposas que están en S después de que todas las ex-esposas que no están en S reciban lo que necesitan. Aplique esta definición, y elabore una función característica para este problema. Luego determine el núcleo y el valor de Shapley para este juego.

10 La Universidad de Indiana contrató unas líneas telefónicas con WATS y le cobran según las reglas siguientes: 400 dólares al mes por cada una de las primeras cinco líneas; 300 dólares al mes por cada una de las cinco líneas siguientes; 100 dólares por mes por cada línea adicional. El Colegio de Ciencias y Artes hace 150 llamadas telefónicas por hora; la Escuela de Negocios hace 120 llamadas por hora y el resto de la universidad hace 30 llamadas por hora. Suponga que cada línea puede manejar 30 llamadas por hora. Por lo tanto, la universidad rentará 10 líneas con WATS. La universidad quiere determinar cuánto debe pagar cada parte de la universidad por el servicio telefónico de larga distancia.

a Establezca una representación de la función característica del problema.

b Utilice el valor de Shapley para asignar los costos por el servicio telefónico de larga distancia de la universidad.

11 Se unen tres doctores para formar una empresa común: el Port Charles Trio. Los gastos generales de la empresa son de 40 000 dólares anuales. Cada doctor tiene ingresos anuales y genera costos variables anuales como se indica a continuación: doctor 1, 155 000 dólares de ingresos, 40 000 de costos variables; doctor 2, 160 000 dólares de ingresos, 35 000 de costos variables, y doctor 3, 140 000 dólares de ingresos, 38 000 de costos variables.

El Port Charles Trio quiere usar la teoría de juegos para determinar cuánto debe pagar cada doctor. Determine la función característica pertinente y demuestre que el núcleo del juego consiste en un número infinito de puntos. Asimismo, encuentre el valor de Shapley del juego. ¿El valor de Shapley da una división razonable de las ganancias de la empresa común?

Grupo B

12 Considere un juego para n personas en el cual las únicas coaliciones ganadoras son aquellas que contienen al jugador 1 y por lo menos uno de los otros jugadores. Si una coalición ganadora recibe una recompensa de 1 dólar, encuentre el valor de Shapley de cada jugador.

RESUMEN

Juegos de suma cero y de suma constante para dos personas

John von Neumann y Oskar Morgenstern sugirieron que los juegos de suma cero y de suma constante para dos personas se realizan de acuerdo con la suposición básica siguiente de la teoría de juegos de suma cero para dos personas: cada jugador elige una estrategia que lo posibilita a hacer lo más que puede, dado que su contrincante *conoce la estrategia que está siguiendo.*

Un juego de suma cero tiene un punto silla si y sólo si

$$\max_{\substack{\text{todos los}\\ \text{renglones}}} (\text{mínimo de los renglones}) = \min_{\substack{\text{todas las}\\ \text{columnas}}} (\text{máximo de las columnas}) \tag{1}$$

Si un juego de suma cero o de suma constante para dos personas tiene un punto silla, entonces el jugador de los renglones debe escoger alguna estrategia (renglón) que alcance el máximo en el lado izquierdo de (1). El jugador de las columnas debe elegir alguna estrategia (columna) que logre el mínimo en el lado derecho de (1).

En general, podríamos usar el método siguiente para determinar las estrategias óptimas y el valor de un juego de suma cero o de suma constante para dos personas:

Paso 1 Verifique si hay punto silla. Si el juego no tiene, vaya al paso 2.

Paso 2 Elimine cualquiera de las estrategias dominadas del jugador de los renglones. Inspeccione la matriz reducida (renglones dominados eliminados) y elimine cualquiera de las estrategias dominadas del jugador de las columnas, y luego, las del jugador de los renglones. Continúe hasta que no encuentre más estrategias dominadas. Prosiga con el paso 3.

Paso 3 Si la matriz del juego es ahora 2 × 2, resuelva el juego en forma gráfica. Si no es así, resuelva el juego mediante el método de programación lineal de la tabla 24.

La ecuación (45) implica que la recompensa del jugador i debe ser la cantidad esperada que el jugador i suma a la coalición formada por los jugadores que están presentes cuando el jugador i llega.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Dos firmas competidoras pretenden decidir si ubican una nueva tienda en un punto A, B o C. Hay 52 posibles clientes para las dos tiendas. De ellos, 20 clientes viven en el pueblo A, 20 viven en el pueblo B y 12 viven en el pueblo C (véase figura 6). Cada cliente comprará en la tienda más cercana. Si un cliente está a igual distancia de ambas tiendas, entonces suponga que hay $\frac{1}{2}$ de probabilidad de que comprará en cualquiera de las tiendas. Cada empresa quiere maximizar la cantidad esperada de clientes que comprará en su tienda. ¿Dónde debe situar su tienda cada compañía? ($AB = BC = 10$ millas.)

2 Un total de 90 000 clientes acuden a los supermercados Ruby y Swamp. Para hacer que los clientes entren cada tienda regala un producto. El regalo de la semana se anuncia los lunes en el periódico. Naturalmente, ninguna tienda sabe qué producto elegirá la competencia como regalo de esta semana. Ruby está considerando regalar un paquete de bebidas carbonatadas o medio galón de leche. Swamp quisiera regalar una libra de mantequilla o medio galón de jugo de naranja. Para cada posible elección de los productos, el número de clientes que entrará a Ruby durante la semana actual se proporciona en la tabla 50. Cada tienda desea maximizar su cantidad esperada de clientes durante la presente semana. Aplique la teoría de juegos y determine una estrategia óptima para cada tienda y el valor del juego. Interprete el valor del juego.

3 Considere el juego de suma cero para dos personas de la tabla 51.

a Exprese el PL de cada jugador.

b Sabemos que la estrategia óptima del jugador 1 tiene $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $x_3 > 0$. Encuentre el valor del juego y las estrategias óptimas de cada jugador

c Suponga que el jugador de las columnas aplica la estrategia no óptima $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Señale cómo el jugador de los renglones puede ganar una recompensa esperada que excede el valor del juego.

4 Encuentre las estrategias óptimas para cada jugador y el valor del juego de suma cero para dos personas de la tabla 52.

FIGURA 6

TABLA 50

Ruby elige	Swamp escoge	
	Mantequilla	Jugo de naranja
Bebidas carbonatadas	40 000	50 000
Leche	60 000	30 000

TABLA 51

$\frac{1}{2}$	-1	-1
-1	$\frac{1}{2}$	-1
-1	-1	1

TABLA 52

20	1	2
12	10	4
24	8	-2

5 Airway (una cadena de tiendas departamentales del Oeste medio) y Corvett (una cadena de tiendas departamentales del Este) están planeando si amplían geográficamente sus bases. La única manera viable mediante la cual la expansión podría efectuarse es que una cadena abriera tiendas en el área de la otra. Si ninguna cadena se amplía, entonces las ganancias de Airway serán de 3 millones de dólares y las de Corvett serán de 2 millones. Si Airway crece y Corvett no lo hace, entonces las ganancias de Airway serán de 5 millones de dólares y Corvett perderá 2 millones. Si Airway no se amplía y Corvett sí, Airway perderá 1 millón de dólares y Corvett ganará 4 millones de dólares. Por último, si ambas cadenas se amplían, Airway ganará 1 millón de dólares y Corvett ganará 500 000 dólares de utilidades. Determine los puntos de equilibrio, si los hay, para este juego.

6 Tres personas poseen las acciones en Alden Corporation. La persona 1 es dueña del 1%, la persona 2 es dueña de 49% y la persona 3 posee 50%. Para aprobar una resolución en la reunión de accionistas anual se requiere el 51% de las acciones. Una coalición recibe una recompensa de 1 si puede aprobar una resolución y una recompensa de 0 si no puede aprobar una resolución.

a Encuentre la función característica de este juego.

b Determine el núcleo del juego.

c Estime el valor de Shapley para este juego.

d Puesto que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ no es el núcleo, tiene que haber una atribución que domine $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Encuentre una.

Grupo B

7 Además del núcleo y del valor de Shapley, el conjunto estable es otro concepto de solución para juegos con n personas. Un conjunto I de atribuciones se denomina **conjunto estable** si cada atribución en I no es dominada y cada atribución que no está en I está dominada por algún miembro de I. Considere el juego de tres personas en el cual todas las coaliciones de cero miembros y de un miembro tienen un valor de función característica de 0, y las coaliciones de dos y tres jugadores tienen un valor de 1. Demuestre que para este juego $I = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\}$ es un conjunto estable.

BIBLIOGRAFÍA

Los siguientes libros contienen un enfoque elemental y orientado a las aplicaciones de la teoría de juegos:

Davis, M. *Game Theory: An Introduction*. Nueva York: Basic Books, 1983.

Dixit, A. y B. Nalebuff, *Thinking Strategically*. Nueva York: Norton, 1991.

McMillan, J. *Games, Strategies, and Managers*. Nueva York: Oxford, 1992.

Poundstone, W. *The Prisoner's Dilemma*. Nueva York: Doubleday, 1992.

Rapoport, A. *Two-Person Game Theory*. Ann Arbor, Mich.: University of Michigan Press, 1973.

Todavía vale la pena leer los siguientes clásicos:

Luce, R. y H. Raiffa. *Games and Decisions*. Nueva York: Wiley, 1957.

Von Neumann, J. y O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*: Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1944.

Para los lectores más inclinados a la matemática, se recomiendan las 11 obras siguientes:

Dutta, P. *Strategies and Games: Theory and Practice*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1999.

Friedman, J. *Game Theory with Applications to Economics*. Nueva York: Oxford Press, 1990.

Fudenberg, D. y J. Tirole. *Game Theory*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1991.

Gibbons, R. *Game Theory for Applied Economists*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1992.

Gitnis, H. *Game Theory Evolving*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 2000.

Hargreaves, S. y Varoufakis, Y. *Game Theory: A Critical Introduction*. Nueva York: Routledge, 1995.

Osborne, M. y Rubenstein, A. *A Course in Game Theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1994.

Owen, G. *Game Theory*. Orlando, Fla.: Academic Press, 1999.

Shubik, M. *Game Theory in the Social Sciences: Concepts and Solutions*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1982.

———. *A Game-Theoretic Approach to Political Economy*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1984.

Thomas, L. C. *Games, Theory and Applications*. Chichester, England: Ellis Horwood, 1986.

Vorobev, N. *Game Theory Lectures for Economists and Social Sciences*. Nueva York: Springer-Verlag, 1977.

Littlechild, S. y G. Owen. "A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case", *Management Science* 20(1973): 370-372. Analiza aplicaciones del valor de Shapley a los aterrizajes en aeropuertos.

"Protectionism Gets Clever", *The Economist* (21 de noviembre, 1988): 78.

Shapley, L. "Quota Solutions of *n*-Person Games". In *Contributions to the Theory of Games II*, ed. H. Kuhn y A. Tucker. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1953.

15

Modelos determinísticos de inventario

En este capítulo, comenzamos el estudio formal del modelado de inventario. En capítulos anteriores, se describió cómo se puede usar la programación lineal para resolver ciertos problemas de inventario. El estudio de inventarios continúa en los capítulos 16, 18 y 19.

Se comienza con el análisis de algunos conceptos importantes de modelos de inventario. Luego, se desarrollan versiones del famoso modelo de lote económico de pedido (EOQ, *economic order quantity*) que se puede usar para tomar decisiones de inventario óptimas cuando la demanda es determinística (conocida por adelantado). En los capítulos 16 y 19, se estudian modelos en los que se permite que la demanda sea aleatoria.

15.1 Introducción a los modelos de inventario básicos

Para satisfacer la demanda a tiempo, las compañías suelen tener a la mano las mercancías que esperan vender. El propósito de la teoría de inventarios es determinar las reglas que puede usar la administración para minimizar los costos asociados con mantener el inventario y satisfacer la demanda del cliente. Los modelos de inventario responden las siguientes preguntas. (1) ¿Cuándo se debe hacer un pedido de un producto? (2) ¿Qué tan grande debe ser cada pedido?

Costos relacionados con los modelos de inventario

Los modelos de inventario considerados en este libro tienen que ver con algunos de los costos siguientes o todos.

Costo de pedido y organización

Muchos costos asociados con hacer un pedido o producir un bien internamente, no dependen del tamaño del pedido o la fase de producción. Se hace referencia a estos costos como el *costo de pedido y organización*. Por ejemplo, el costo de pedido incluiría el costo de trabajo administrativo y facturación asociado con un pedido. Si el producto se hace internamente y no se pide a una fuente externa, el costo de mano de obra (y el tiempo de inactividad) para preparar y detener una máquina para una fase de producción se incluiría en el costo de pedido y organización.

Costo de compra unitario

Éste es simplemente el costo variable asociado con la compra de una sola unidad. Por lo común, el costo de compra unitario incluye el costo de mano de obra variable, el costo fijo variable y el costo de materia prima asociado con la compra o producción de una sola unidad. Si los bienes se piden a una fuente externa, el costo de compra unitario debe incluir el costo de envío.

que llega. Por ejemplo, si $L = 3$ meses, entonces cada pedido llegará exactamente tres meses después que se hace el pedido.

Pedidos continuos

Un pedido se puede hacer en cualquier instante. Los modelos de inventario que permiten esto se llaman **modelos de revisión continua**. Si la cantidad de inventario disponible se revisa de manera periódica y los pedidos se pueden hacer sólo cada cierto tiempo, se tiene ante sí un **modelo de revisión periódica**. Por ejemplo, si una empresa revisa su inventario disponible sólo al final de cada mes y decide en este momento si se debe hacer un pedido, se está tratando con un modelo de revisión periódica. Estos modelos se estudian en los capítulos 16, 17 y 18.

Aunque las suposiciones de demanda constante y tiempo de espera constante podrían parecer demasiado restrictivas e irreales, hay muchas situaciones en las que los modelos de este capítulo proporcionan buenas aproximaciones a la realidad. Los modelos en los que la demanda no es determinística se analizan en los capítulos 16 y 19. Los modelos en los que la demanda es determinística pero ocurre a una tasa inconstante ya se revisaron en el estudio de modelos de inventario de PL del capítulo 3 y se amplía su análisis en el capítulo 18.

15.2 Modelo básico de lote económico de pedido

Suposiciones para el modelo básico de EOQ

Para que se cumpla el modelo básico de EOQ, se requieren ciertas suposiciones (por concreción, se supone que la unidad de tiempo es un año):

1 La demanda es determinística y ocurre a una tasa constante.

2 Si se hace un pedido de cualquier tamaño (por ejemplo, q unidades), se incurre en un costo K de pedido y organización.

3 El tiempo de espera de cada pedido es cero.

4 No se permite escasez.

5 El costo por unidad-año de inventario de reserva es h.

Se define D como el número de unidades pedidas por año. Entonces la suposición 1 implica que durante cualquier intervalo de tiempo de t años de duración se pide una cantidad Dt.

El costo de organización K de la suposición 2 es adicional al costo pq de comprar o producir q unidades pedidas. Observe que se está suponiendo que el costo de compra unitario p no depende del tamaño del pedido. Esto excluye muchas situaciones de interés, como descuentos de cantidad para pedidos grandes. En la sección 15.3, se analiza un modelo que permite descuentos de cantidad.

La suposición 3 implica que cada pedido llega tan pronto como se hace. Esta suposición se relaja después en esta sección.

La suposición 4 implica que todos los pedidos se deben cumplir a tiempo; no se permite un estado de inventario negativo. Esta suposición se relaja en la sección 15.5.

La suposición 5 implica que se incurrirá en un costo de mantenimiento de h dólares si durante un año se retiene una unidad, si 2 unidades se retienen durante medio año o si $\frac{1}{4}$ de unidad se mantiene durante cuatro años. En resumen, si I unidades se mantienen durante T años, se incurre en un costo de retención de ITh.

Dadas estas cinco suposiciones, el modelo EOQ determina una política de pedidos que reduce la suma anual de costos de pedido, compra y retención.

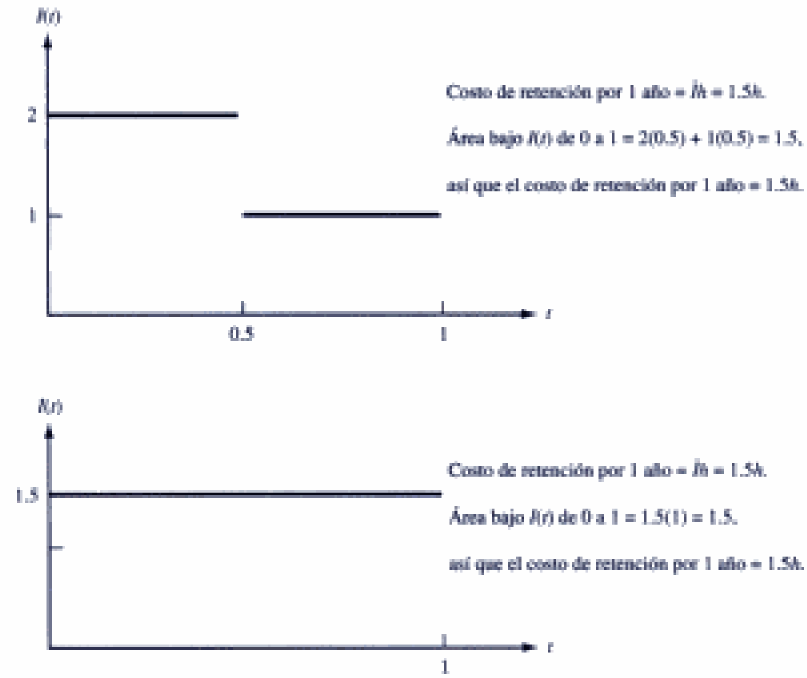


FIGURA 1
Costo de retención y nivel de inventario promedio

Un concepto importante en el estudio de modelos EOQ es la idea de un ciclo.

DEFINICIÓN ■ Cualquier intervalo de tiempo que comienza con la llegada de un pedido y termina un instante antes que se reciba el siguiente pedido se llama **ciclo**. ■

Observe que la figura 2 simplemente consiste en ciclos repetidos de duración $\frac{q}{D}$. Por consiguiente, cada año contendrá

$$\frac{1}{\frac{q}{D}} = \frac{D}{q}$$

ciclos. El inventario promedio durante cualquier ciclo es simplemente la mitad del nivel de inventario máximo obtenido durante el ciclo. Este resultado se cumplirá en cualquier modelo para el que la demanda ocurre a una tasa constante y no se permite el agotamiento de existencias. Así, para nuestro modelo, el nivel de inventario promedio durante un ciclo será de $\frac{q}{2}$ unidades.

Ahora estamos preparados para determinar el costo de retención anual. Se escribe

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo de retención}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{año}}\right)$$

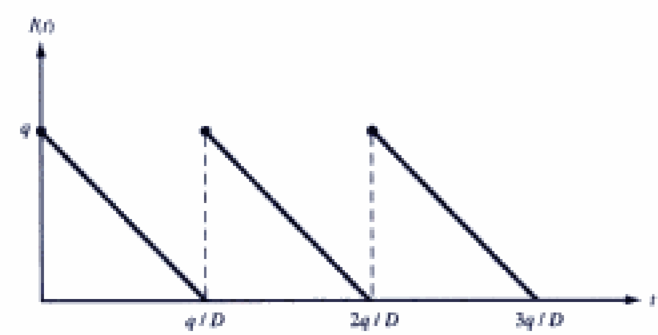


FIGURA 2
Comportamiento de $I(t)$ en el modelo básico de EOQ

Puesto que el nivel de inventario promedio durante cada ciclo es $\frac{q}{2}$ y la duración de cada ciclo es $\frac{q}{D}$,

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Ciclo}} = \frac{q}{2}\left(\frac{q}{D}\right)h = \frac{q^2h}{2D}$$

Entonces

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \frac{q^2h}{2D}\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{hq}{2}$$

Combinando los costos de pedido, compra y retención, se obtiene

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + pD + \frac{hq}{2}$$

Para encontrar el valor de q que minimiza a $TC(q)$, se establece $TC'(q)$ igual a cero. Con esto se obtiene

$$TC'(q) = -\frac{KD}{q^2} + \frac{h}{2} = 0 \tag{1}$$

La ecuación (1) se satisface para $q = \pm(2\ KD/h)^{1/2}$. Puesto que $q = -(2\ KD/h)^{1/2}$ no tiene sentido, esperemos que **el lote económico de pedido**, o EOQ,

$$q^* = \left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2} \tag{2}$$

minimice a $TC(q)$. Puesto que $TC''(q) = 2KD/q^3 > 0$ para toda $q > 0$, se sabe que $TC(q)$ es una función convexa. Entonces el teorema 1′ del capítulo 11 implica que cualquier punto donde $TC'(q) = 0$ minimizará a $TC(q)$. Así, q^* minimiza en realidad el costo total anual.

OBSERVACIONES

1 La EOQ no depende del precio de compra unitario p, debido a que el tamaño de cada pedido no cambia el costo de compra unitario. Por consiguiente, el costo de compra anual depende de q. En la sección 15.3, se estudian modelos en los que el tamaño del pedido cambia el costo de compra unitario.

2 Puesto que cada pedido consta de q^* unidades, se deben pedir al año un total de $\frac{D}{q^*}$ unidades.

3 Para ver si la fórmula de la EOQ es razonable, véase cómo al cambiar ciertos parámetros cambia q^*. Por ejemplo, cuando K aumenta, se esperaría que disminuyera el número de pedidos anuales, $\frac{D}{q^*}$. De manera equivalente, se esperaría un incremento en K para incrementar q^*. Un vistazo a la ecuación (2) deja ver que en realidad éste es el caso. De manera análoga, un incremento en h hace que sea más costoso mantener el inventario, así que se esperaría un incremento en h para reducir el nivel de inventario promedio, $\frac{q^*}{2}$. En la ecuación (2) se observa que un incremento en h reduce a q^*; también se observa que la relación entre el costo de pedidos y el costo de retención es el factor crítico para determinar q^*. Por ejemplo, si se duplican K y h, q^* permanece sin cambio. También observe que q^* es proporcional a $D^{1/2}$. Por lo tanto, al cuadruplicar la demanda q^* sólo aumenta el doble.

4 No es difícil demostrar que si se ordena la EOQ, entonces

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \frac{\text{costo de retención}}{\text{año}} \tag{3}$$

Para demostrar esto, observe que

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \frac{hq^*}{2} = \frac{h}{2}\left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2} = \left(\frac{KDh}{2}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\text{Costo de pedido}}{\text{Año}} = \frac{KD}{q^*} = \frac{KD}{\left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2}} = \left(\frac{KDh}{2}\right)^{1/2}$$

En la figura 3 se ilustran las ventajas y desventajas entre el costo de retención y el costo de pedido. En la figura se confirma el hecho de que en q^*, los costos de retención y de pedido son los mismos.

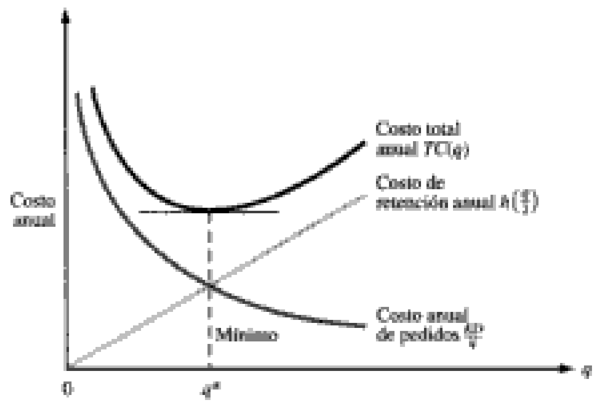


FIGURA 3
Ventajas y desventajas entre el costo de retención y el costo de pedido

Con el siguiente ejemplo se ilustra el uso de la fórmula para la EOQ.

EJEMPLO 1 Braneast Airlines

Braneast Airlines utiliza 500 luces traseras por año. Cada vez que se hace un pedido de luces traseras, se incurre en un costo de 5 dólares. Cada luz cuesta 40¢ y el costo de retención es de 8¢/luz/año. Suponga que la demanda ocurre a una tasa constante y no se permite que haya escasez. ¿Cuál es la EOQ? ¿Cuántos pedidos se harán este año? ¿Cuánto tiempo transcurrirá entre la colocación de los pedidos?

Solución Se tiene que $K = \$5$, $h = \$0.08$/luz/año, y $D = 500$ luces/año. La EOQ es

$$q^* = \left(\frac{2(5)(500)}{0.08}\right)^{1/2} = 250$$

Por consiguiente, la aerolínea debe hacer un pedido de 250 luces traseras cada vez que el inventario llega a cero.

$$\frac{\text{Pedidos}}{\text{Año}} = \frac{D}{q^*} = \frac{500}{250} = \frac{2 \text{ pedidos}}{\text{Año}}$$

El tiempo entre la colocación de pedidos (o llegada) es simplemente la duración de un ciclo. Puesto que la duración de cada ciclo es $\frac{q^*}{D}$, el tiempo entre pedidos será

$$\frac{q^*}{D} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2} \text{ año}$$

Sensibilidad del costo total a variaciones pequeñas en la cantidad de pedido

En muchas situaciones, una ligera desviación con respecto a la EOQ da como resultado un ligero incremento en los costos. Para el ejemplo 1, veamos cómo las desviaciones de la EOQ cambian el costo anual total. Puesto que la cantidad de pedido no afecta el costo de compra anual, se centra la atención en cómo los cambios en la cantidad de pedido afectan los costos de retención y pedido. Sea

$HC(q)$ = costo de retención anual si la cantidad de pedido es q

$OC(q)$ = costo de pedido anual si la cantidad de pedido es q

TABLA 1
Cálculos de costo para la figura 4

q	$HC(q)$	$OC(q)$	$HC(q) + OC(q)$
50	2.0	50.00	52.00
100	4.0	25.00	29.00
150	6.0	16.67	22.67
200	8.0	12.50	20.50
220	8.8	11.36	20.16
240	9.6	10.42	20.02
250	10.0	10.00	20.00
260	10.4	9.62	20.02
280	11.2	8.93	20.13
300	12.0	8.33	20.33
350	14.0	7.14	21.14
400	16.0	6.25	22.25

Se encuentra que

$$HC(q) = \tfrac{1}{2}(0.08q) = 0.04q \qquad OC(q) = 5\left(\frac{500}{q}\right) = \frac{2\,500}{q}$$

Usando la información de la tabla 1, se obtiene el diagrama de $HC(q) + OC(q)$ dado en la figura 4. En la figura se observa que $HC(q) + OC(q)$ es muy plana cerca de q^*. Por ejemplo, pedir 20% más que la EOQ ($q = 300$) hace que $HC(q) + OC(q)$ aumente de 20 a 20.33 (un incremento menor de 2%).

La parte plana de la curva $HC(q) + OC(q)$ es importante, debido que a menudo es difícil estimar h y K. La estimación inexacta de h y K podría dar como resultado un valor de q que difiere un poco de la EOQ real. La parte plana de la curva de $HC(q) + OC(q)$ indica que incluso un error moderado en la determinación de la EOQ sólo incrementará los costos en una cantidad pequeña.

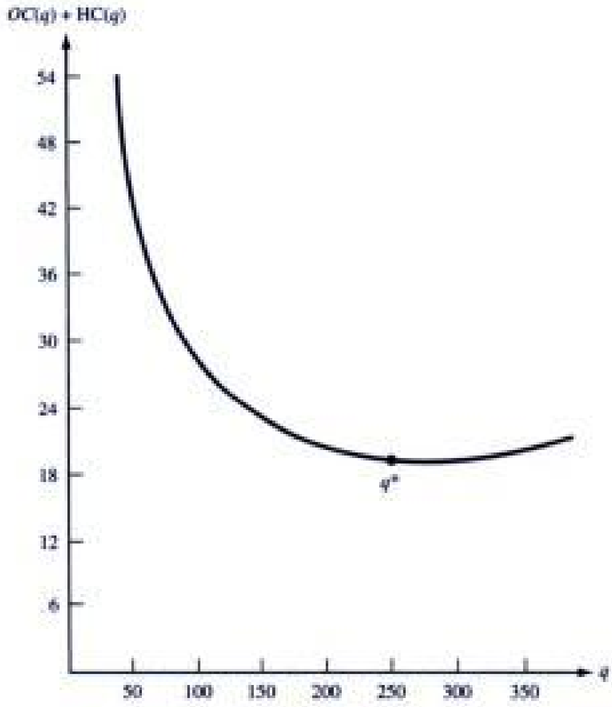


FIGURA 4
$OC(q) + HC(q)$ para el ejemplo de Braneast

Determinación de la EOQ cuando el costo de retención se expresa en términos del valor del inventario en dólares

A menudo, el costo de retención anual se expresa en términos del costo de retener un valor de inventario equivalente a un dólar durante un año. Entonces el costo de retener una unidad de inventario durante un año será ph_d, y (2) se podría escribir como

$$q^* = \left(\frac{2KD}{ph_d}\right)^{1/2} \tag{4}$$

EJEMPLO 2 Pedido de cámaras

Una tienda de departamentos vende 10 000 cámaras por año. La tienda pide las cámaras a un almacén regional. Cada vez que se hace un pedido, se incurre en un costo de 5 dólares. El almacén paga 100 dólares por cada cámara, y el costo de retener un valor de inventario de 1 dólar durante un año se estima como el costo de oportunidad de capital anual de 20¢. Determine la EOQ.

Solución Se tiene que $K = \$5$, $D = 10\,000$ cámaras por año, $h_d = 20$¢/dólar/año, y $p = 100$ dólares por cámara. Entonces

$$q^* = \left(\frac{2(5)(10\,000)}{(100)(0.20)}\right)^{1/2} = (5\,000)^{1/2} = 70.71 \text{ cámaras}$$

Por consiguiente, la EOQ recomienda que el almacén ordene 70.71 cámaras cada vez que el nivel del inventario llega a cero. Por supuesto, el número de cámaras pedidas debe ser un entero. Puesto que $TC(q)$ es una función convexa de q, ya sea $q = 70$ o $q = 71$ debe minimizar $TC(q)$. (Si esto al parecer es difícil de creer, considere la figura 4.) Como resultado de la horizontalidad de la curva $HC(q) + OC(q)$, en realidad no importa si el almacén elige pedir 70 o 71 cámaras.

Efecto de un plazo de entrega distinto de cero

Ahora se permite que el plazo de entrega L sea mayor que cero. La introducción de un plazo de espera distinto de cero deja sin cambio los costos anuales de retención y pedido. Por consiguiente, la EOQ minimiza todavía los costos totales. Para evitar que haya escasez y reducir el costo de retención, cada pedido se debe hacer a un nivel de inventario que asegure que cuando llega cada pedido, el nivel de inventario sea igual a cero.

DEFINICIÓN ■ El nivel de inventario al que se debe hacer un pedido es el **punto de reposición.** ■

Para determinar el punto de reposición para el modelo básico de EOQ, es necesario considerar dos casos.

Caso 1

La demanda durante el plazo de entrega no excede la EOQ. (Esto significa que $LD \leq$ EOQ.) En este caso, el punto de reposición ocurre cuando el nivel de inventario es igual a LD. Entonces el pedido llegará L unidades de tiempo después, y al llegar el pedido, el nivel de inventario será igual a $LD - LD = 0$. En el ejemplo 1, suponga que un envío de luces traseras tarda un mes en llegar. Entonces $L = \frac{1}{12}$ año, y el punto de reposición de Braneast será $(\frac{1}{12})(500) = 41.67$ luces traseras. Así, siempre que Braneast tenga 41.67 luces traseras disponibles, se debe hacer un pedido por más luces traseras.

Caso 2

La demanda durante el plazo de entrega (LD) excede a la EOQ. (Esto significa que $LD >$ EOQ.) En este caso, el punto de reabastecimiento no es igual a LD. Suponga que en el ejemplo 1, $L = 15$ meses. Entonces $LD = (15/12)500 = 625$ luces traseras. ¿Por qué no se puede hacer un pedido cada vez que el nivel de inventario llega a 625 luces? Puesto que la EOQ = 250, el nivel de inventario nunca llegará a 625. Para determinar el punto correcto de reabastecimiento, observe que los pedidos se hacen cada 6 meses. Suponga que un pedido llegó en el tiempo 0. Entonces se debió hacer un pedido hace $L = 15$ meses (en $T = -15$ meses). Puesto que los pedidos llegan cada seis meses, los pedidos se deben hacer en $T = -9$ meses, $T = -3$ meses, $T = 3$ meses, etcétera. Puesto que en $T = 0$ sólo ha llegado un pedido, el nivel de inventario en $T = 0$ es 250. Entonces en $T = 3$ (o cualquier otro punto en que se hace un pedido), el nivel de inventario será igual a $250 - (3/12)(500) = 125$. Así, el punto de reabastecimiento es 125 luces traseras.

En general (véase el problema 15), se puede demostrar que el punto de reabastecimiento es igual al residuo cuando LD se divide entre la EOQ. Así, en el ejemplo, el punto de reabastecimiento es el residuo cuando 625 se divide entre 250. Esto de nuevo produce un punto de reabastecimiento de 125 luces traseras.

La determinación del punto de reabastecimiento se vuelve muy importante cuando la demanda es aleatoria y puede haber agotamiento de inventario. En las secciones 16.6 y 16.7, se analiza el problema de determinar el punto de reabastecimiento cuando la demanda es aleatoria.

Esta sección se termina con un ejemplo de problema de no inventario que se puede resolver con el razonamiento que se utilizó para obtener la EOQ.

EJEMPLO 3 Servicio de autobús

Cada hora, D estudiantes quieren hacer un viaje en autobús de la unión de estudiantes a Fraternity Row. La administración asigna un valor de h dólares por cada hora que un estudiante está obligado a esperar un autobús. A la universidad le cuesta K dólares enviar un autobús de la unión de estudiantes a Fraternity Row. Suponiendo que la demanda ocurre a una tasa constante, ¿cuántos autobuses se deberán enviar cada hora desde la unión de estudiantes a Fraternity Row?

Solución Observe que

$$\frac{\text{Costo total}}{\text{Hora}} = \frac{\text{costo de enviar autobuses}}{\text{hora}} + \frac{\text{costo de esperar al estudiante}}{\text{hora}}$$

Puesto que la demanda ocurre a una tasa constante, los autobuses deben salir a intervalos regulares. Esto significa que cada autobús que llega a la unión de estudiantes encontrará el mismo número de estudiantes esperando. Sea q = número de estudiantes presentes cuando llega cada autobús. Suponiendo que un autobús llegó en el tiempo 0, el "número de estudiantes esperando" presenta el comportamiento mostrado en la figura 5. Entonces

$$\frac{\text{Costo de enviar autobuses}}{\text{Hora}} = \left(\frac{K\text{ dólares}}{\text{autobús}}\right)\left(\frac{\frac{D}{q}\text{autobuses}}{\text{hora}}\right) = \frac{\frac{KD}{q}\text{ dólares}}{\text{hora}}$$

De la figura 5, el número promedio de estudiantes esperando es $\frac{q}{2}$. Entonces

$$\frac{\text{Costo de esperar a los estudiantes}}{\text{Hora}} = \left(\frac{q}{2}\text{ estudiantes}\right)\left(\frac{h\text{ dólares/estudiante}}{\text{hora}}\right) = \frac{\frac{hq}{2}\text{ dólares}}{\text{hora}}$$

Estos cálculos demuestran que

$$\frac{\text{Costo total}}{\text{Hora}} = \frac{hq}{2} + \frac{KD}{q}$$

Políticas de pedido de potencia de dos

Suponga que una compañía pide tres productos, y las EOQ para cada producto producen tiempos entre pedidos de 3.5 días, 5.6 días y 9.2 días. Rara vez los pedidos para diferentes productos llegarían el mismo día. Si de alguna manera se pudieran sincronizar los intervalos de reabastecimiento de modo que los pedidos para diferentes productos llegaran el mismo día, se podrían reducir en gran medida los costos de coordinación. Por ejemplo, serían necesarios muchos menos camiones para entregar los pedidos si se pudiera sincronizar su llegada. Roundy (1985) diseñó un método refinado pero simple llamado **Políticas de pedido de potencia de dos** para asegurar que los pedidos para varios productos estén bien sincronizados. Sea $q^* = \text{EOQ}$. Entonces el intervalo de reabastecimiento óptimo para un producto es $t^* = q^*/D$ Se supone que t^* es por lo menos 1 día. Entonces para alguna $m \geq 0$, se debe cumplir que $2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$. Si $t^* \leq \sqrt{2} * 2^m$, se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^m. Si $t^* \geq \sqrt{2} * 2^m$, se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^{m+1}. Roundy demostró que usar este método (llamado política de *potencia de dos*) para redondear el intervalo de reabastecimiento a una potencia cercana a 2 incrementa la suma de los costos fijos y de retención a lo sumo 6%. La ventaja de una política de potencia de dos es que productos diferentes frecuentemente llegarán al mismo tiempo. En muchas circunstancias, esto reducirá en gran medida los costos de coordinación. Por ejemplo, considere los tres pedidos con intervalos de reabastecimiento de 3.5 días, 5.6 días y 9.2 días. La política de potencia de dos de Roundy elegiría pedir cantidades que corresponden a periodos de reabastecimiento de 4, 4 y 8 días, respectivamente. Así, los productos 1 y 2 llegarían siempre juntos; la mitad del tiempo, el producto 3 llega con el producto 2. En la mayoría de las circunstancias, esta política reducirá los costos de coordinación por más del incremento máximo posible de 6% en el costo total. A continuación se da una demostración del resultado de Roundy.

Para empezar, elija una cantidad de pedido arbitraria q' y defina el costo total para esta cantidad de pedidos por

$$TC(q') = \frac{hq'}{2} + \frac{KD}{q'}$$

Entonces

$$\frac{TC(q')}{TC(q^*)} = \frac{\dfrac{hq'}{2} + \dfrac{KD}{q'}}{\sqrt{2KhD}} = \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h^2}{2KDh}} + \frac{1}{q'}\sqrt{\frac{K^2D^2}{2KDh}}$$
$$= \frac{q'}{2}\sqrt{\frac{h}{2KD}} + \frac{1}{2q'}\sqrt{\frac{2KD}{h}}$$
$$= \frac{q'}{2q^*} + \frac{q^*}{2q'}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{q'}{q^*} + \frac{q^*}{q'}\right)$$

Puesto que $t^* = \dfrac{q^*}{D}$ y $t' = \dfrac{q'}{D}$, se encuentra que

$$\frac{TC(t')}{TC(t^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t'}{t^*} + \frac{t^*}{t'}\right) \tag{5}$$

Ahora ya se puede demostrar el resultado de Roundy. Se supone que t^* es por lo menos 1 día. Entonces para algún entero no negativo m, $2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$.

TEOREMA 1

Si $t^* \leq 2^m(\sqrt{2})$, entonces la política de pedidos de costo mínimo de potencia de dos es $t = 2^m$. Si $t^* \geq 2^m(\sqrt{2})$, entonces la política de pedido de costo mínimo de potencia de dos es 2^{m+1}.

4 La eficacia de un sistema de inventario suele medirse por el **índice de rotación.** El índice de rotación (IR) se define por

$$IR = \frac{\text{Costo de bienes vendidos durante un año}}{\text{Valor promedio de inventario disponible}}$$

a ¿Un índice de rotación alto indica un sistema de inventario eficaz?

b Si está siendo utilizado el modelo EOQ, determine IR en términos de K, D, h y q.

c Suponga que se incrementa D. Demuestre que también se incrementará el IR.

5 Suponga que pedimos tres tipos de aparatos para el almacén Ohm City. Los intervalos óptimos de reabastecimiento son 9.2 días, 21.2 días y 38.1 días. ¿Cuál sería la política de pedidos óptima de potencia de dos?

6 Suponga que pedimos tres tipos de ropa para Ceiling Mart. Los intervalos de reabastecimiento óptimos son 92 días, 21 días y 60 días. ¿Cuál sería la política de pedidos óptima de potencia de dos?

Grupo B

7 Suponga que estamos pidiendo chips de computadora. Suponga que en cada pedido, exactamente 10% de los chips están defectuosos. Tan pronto como llega el pedido, se encuentra cuáles chips están defectuosos y se devuelven a cambio de un reembolso completo. En este caso, ¿cuál sería la política óptima de pedidos?

8 Demuestre que para $q \leq q^*$, un tamaño de pedido de $q + q^*$ tendrá un costo menor que un tamaño de pedido $q - q^*$. ¿Cuál es el significado administrativo de este resultado?

9 Suponga que en vez de pedir la EOQ q^*, se usa la cantidad de pedido $0.8q^*$. Utilice la ecuación (3) para mostrar que $HC(q) + OC(q)$ se incrementará en 2.50%.

10 En términos de K, D y h, ¿cuál es el tiempo promedio que un artículo pasa en inventario antes de ser utilizado para satisfacer la demanda? Explique cómo se puede usar este resultado para caracterizar un artículo de movimiento lento o rápido.

11 Una farmacia vende 30 frascos de antibióticos por semana. Cada vez que pide antibióticos, hay un costo fijo de pedidos de 10 dólares y un costo de $10/frasco. Suponga que el costo de retención anual es 20% del costo de un frasco de antibióticos, y suponga que los antibióticos se echan a perder y no se pueden vender si pasan más de una semana en inventario. Cuando la farmacia hace un pedido, ¿cuántos frascos de antibiótico debe pedir?

12 Durante cada año, CSL Computer Company necesita capacitar 27 representantes de servicio. Sin importar a cuántos estudiantes se capacite, cuesta $12 000 ejecutar un programa de capacitación. Puesto que los representantes de servicio ganan un salario mensual de $1500, CSL no quiere capacitarlos antes que sea necesario. Cada sesión de capacitación toma un mes.

a Exprese las suposiciones necesarias para que sea aplicable el modelo EOQ.

b ¿Cuántos representantes de servicio debe haber en cada grupo de capacitación?

c ¿Cuántos programas de capacitación debe emprender CSL cada año?

d ¿Cuántos representantes de servicio capacitados estarán disponibles cuando comience cada programa de capacitación?

13 Un periódico tiene 500 000 suscriptores que pagan 4 dólares por mes por el periódico. A la compañía le cuesta 200 000 dólares facturar a todos sus clientes. Suponga que la compañía puede ganar intereses a una tasa de 20% por año en los ingresos. Determine con qué frecuencia el periódico debe facturar a sus clientes. (*Sugerencia*: considere las suscripciones no pagadas como el bien inventariado.)

14 Considere una empresa que sabe que el precio del producto que está pidiendo se va a incrementar de forma permanente en $X. ¿Cuánto del producto se debe pedir antes a que se ponga en práctica el incremento de precio?

Una forma de abordar esta pregunta es suponer que la empresa pide Q unidades antes de que se ponga en práctica el incremento del precio.

a ¿En qué costo de retención extra se incurre al ordenar ahora Q unidades?

b ¿Cuánto se ahorra en costos de compra al ordenar ahora Q unidades?

c ¿Qué valor de Q maximiza los ahorros de costo de compra menos los costos de retención extra?

d Suponga que la demanda anual es de 1000 unidades, el costo de retención unidad-año es de $7.50 y el precio del artículo se va a incrementar en $10. ¿Qué tan grande se debe hacer el pedido antes que se ponga en práctica el incremento de precio?

15 Demuestre que el punto de reabastecimiento en el modelo EOQ es igual a residuo cuando se divide LD entre la EOQ.

16 El municipio de Staten Island tiene dos "distritos de saneamiento". En el distrito 1, la basura de las calles se amontona a una tasa promedio de 2000 toneladas por semana, y en el distrito 2 a una tasa promedio de 1000 toneladas por semana. Cada distrito tiene 500 millas de calles. Staten Island tiene 10 cuadrillas de saneamiento y cada una puede limpiar 50 millas por semana de calles. Para minimizar el nivel promedio de la cantidad total de basura de las calles en los dos distritos, ¿con qué frecuencia se debe limpiar cada distrito? Suponga que la basura en un distrito aumenta a una tasa constante hasta que se recoge (suponga que la recolección de basura es instantánea). (*Sugerencia*: sea p_i igual al número promedio de veces que se limpia cada distrito por semana. Entonces $p_1 + p_2 = 1$.)[†]

[†]Basado en Riccio, Miller, y Little (1986).

15.3 Cálculo de la cantidad óptima de pedido cuando se permiten descuentos de cantidad

Hasta ahora, se ha supuesto que el costo de compra anual no depende del tamaño del pedido. En la sección 15.2, esta suposición nos permitió ignorar el costo de compra anual cuando se calculó la cantidad de pedido que minimiza el costo total anual. No obstante, en la vida real, los proveedores suelen reducir el precio de compra unitario para pedidos grandes. Estas reducciones de precio se conocen como *descuentos de cantidad*. Si un proveedor da descuentos de cantidad, el costo de compra anual dependerá del tamaño del pedido. Si el costo de retención se expresa como porcentaje del costo de compra de un artículo, el costo de retención anual también dependerá del tamaño del pedido. Puesto que el costo de compra anual ahora depende del tamaño del pedido, ya no se puede ignorar el costo de compra en tanto se intercambian el costo de retención y el costo de preparación. Así, el método utilizado en la sección 15.2 para encontrar la cantidad óptima ya no es válido, y se requiere un nuevo método.

Sea q la cantidad pedida cada vez que se hace un pedido, el modelo general de descuento de cantidad analizado en esta sección se podría describir como sigue:

Si $q < b_1$, cada artículo cuesta p_1 dólares.
Si $b_1 \leq q < b_2$, cada artículo cuesta p_2 dólares.
Si $b_{k-2} \leq q < b_{k-1}$, cada artículo cuesta p_{k-1} dólares.
Si $b_{k-1} \leq q < b_k = \infty$, cada artículo cuesta p_k dólares.

Puesto que $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ son puntos donde ocurre un cambio de precio (o baja brusca y pronunciada de precios), se dice que $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ son los **puntos de reducción pronunciada de precios**. Puesto que las cantidades de pedido mayores se deben asociar con precios menores, se tiene que $p_k < p_{k-1} < \cdots < p_2 < p_1$. El modelo descuento de cantidad se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Compra de discos

Una empresa local de contabilidad en Smalltown pide cajas de discos flexibles (10 discos por caja) a un almacén en Megalópolis. El precio por caja que cobra el almacén depende del número de cajas compradas (véase la tabla 2). La empresa de contabilidad utiliza 10 000 discos flexibles por año. Se supone que el costo de un pedido son 100 dólares. El único costo de retención es el costo de oportunidad del capital, que se supone es 20% por año. Para este ejemplo, $b_1 = 100$, $b_2 = 300$, $p_1 = \$50.00$, $p_2 = \$49.00$ y $p_3 = \$48.50$.

Este ejemplo continúa después en esta sección.

TABLA 2
Costos de compra para discos

Número de cajas pedidas (q)	Precio por caja
$0 \leq q < 100$	\$50.00
$100 \leq q < 300$	\$49.00
$q \geq 300$	\$48.50

Antes de explicar cómo hallar la cantidad de pedido que minimiza los costos anuales totales, se necesitan las definiciones siguientes.

1 $TC_i(q)$ = costo anual total (que incluye costos de retención, compra y formulación de pedido) si cada pedido es por q unidades a un precio p_i.

2 EOQ_i = cantidad que minimiza el costo total anual, si para cualquier cantidad de pedido, el costo de compra del artículo es p_i.

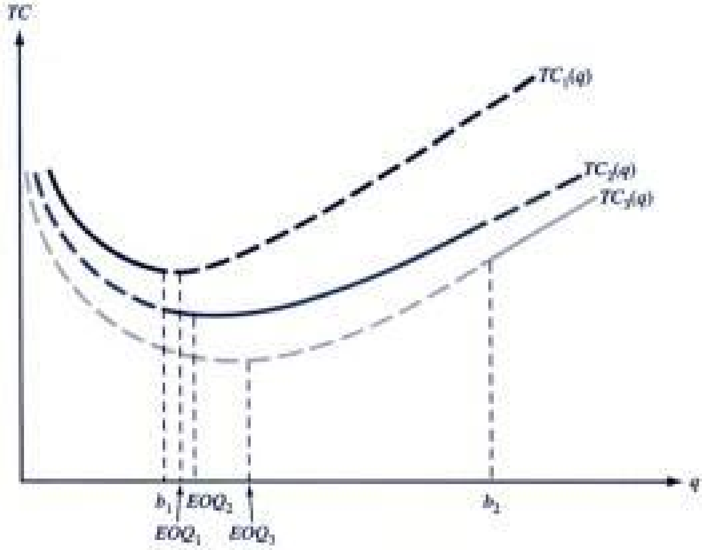
3 EOQ_i es *admisible* si $b_{i-1} \leq EOQ_i < b_i$.

4 $TC(q)$ = costo anual real si se piden q artículos cada vez que se hace un pedido. ($TC(q)$ se determina por medio del precio p_i si $b_{i-1} \leq q < b_i$.)

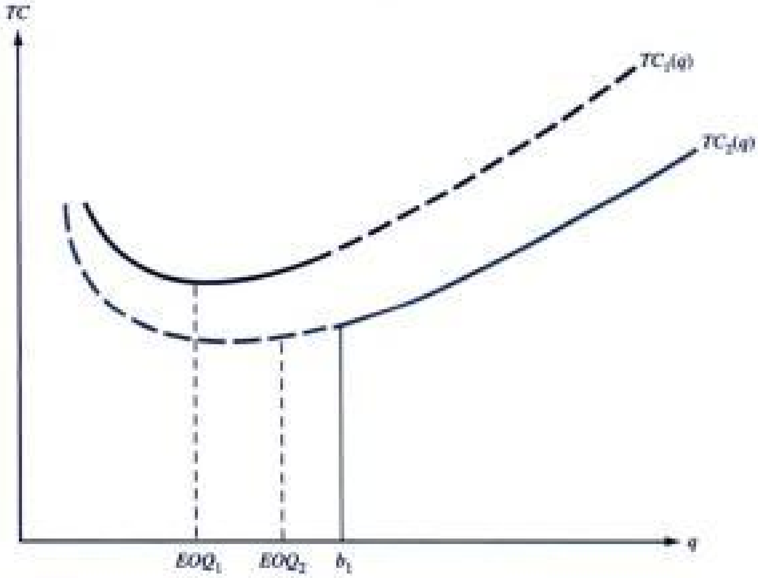
El objetivo es encontrar el valor de q que minimiza a $TC(q)$. Estas definiciones se ilustran en las figuras 7a y 7b. Observe que en la figura 7a, EOQ es admisible porque $b_1 < EOQ_2 < b_2$, pero EOQ_1 y EOQ_3 no son admisibles. En cada figura, $TC(q)$ es la parte continua de la curva. La parte con línea discontinua de cada curva representa costos inalcanzables. Por ejemplo, en la figura 7b, $TC_2(q)$ es una línea discontinua para $q < b_1$, debido a que el precio no es p_2 para $q < b_1$. Para $q < b_1$, el costo anual total está dado por la parte de línea continua de $TC_1(q)$, debido a que para $q < b_1$, el precio es p_1, y para $q \geq b_1$ el costo total anual está dado por la parte continua de $TC_2(q)$.

En general, el valor de q que minimiza a $TC(q)$ puede ser un punto de equilibrio (véase la figura 7b) o alguna EOQ_i (véase la figura 7a).

Las observaciones siguientes son útiles para determinar el punto (punto de equilibrio o EOQ_i) que minimiza a $TC(q)$.



(a) EOQ_2 minimiza a TC



(b) b_1 minimiza a TC

FIGURA 7
Ilustraciones de definiciones de $TC_i(q)$ y EOQ_i

TABLA 3

Número de cajas pedidas	Precio por caja
$q < 300$	\$10.00
$300 \le q < 500$	\$9.80
$q \ge 500$	\$9.70

TABLA 4

Número de cajas pedidas	Precio por caja
$q < 200$	\$4.40
$200 \le q < 400$	\$4.20
$q \ge 400$	\$4.00

ce a Shopalot el programa de descuentos de cantidad mostrado en la tabla 4 (q = número de cajas ordenadas por pedido). Cada vez que se hace un pedido, ¿cuántas cajas de soda debe pedir la compañía?

3 Una empresa compra un producto usando el programa de precios dado en la tabla 5. La compañía estima costos de retención a 10% del precio de compra por año y costos de pedido a 40 dólares por pedido. La demanda anual de la empresa es de 460 unidades.

a Determine con qué frecuencia la empresa debe hacer sus pedidos.

b Determine el tamaño de cada pedido.

c ¿A qué precio la empresa debe formular un pedido?

TABLA 5

Tamaño del pedido	Precio por caja
0–99 unidades	\$20.00
100–199	\$19.50
200–499	\$19.00
500 o más	\$18.75

Grupo B

4 Un hospital ordena sus termómetros de una empresa abastecedora de hospitales. El costo por termómetro depende del tamaño del pedido q, como se ilustra en la tabla 6. El costo de retención anual es 25% del costo de compra. Sea EOQ_{80} la EOQ si el costo por termómetro son 80¢ y sea EOQ_{79} la EOQ si el costo por termómetro son 70¢.

a Explique por qué EOQ_{79} será mayor que EOQ_{80}.

b Explique por qué la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{79}, EOQ_{80}, o 100.

c Si $EOQ_{80} > 100$, demuestre que la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{79}.

d Si $EOQ_{80} < 100$ y $EOQ_{79} < 100$, demuestre que la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{80} o 100.

e Si $EOQ_{80} < 100$ y $EOQ_{79} > 100$, demuestre que la cantidad óptima de pedido debe ser EOQ_{79}.

5 En el problema 4, suponga que el costo por pedido es 1 dólar y la demanda mensual es de 50 termómetros. ¿Cuál es la cantidad de pedido óptima? ¿Cuán pequeño podría ser el descuento que ofrezca el proveedor y pedir aun que el hospital acepte el descuento?

TABLA 6

Tamaño del pedido	Precio por termómetro
$q < 100$	80¢
$q \ge 100$	79¢

15.4 Modelo EOQ de tasa continua

Muchos bienes se producen internamente en vez de comprarlos a un proveedor externo. En esta situación, la suposición EOQ de que cada pedido llega en el mismo instante al parecer es irreal; es imposible producir, por ejemplo, 10 000 automóviles en un santiamén. Si una compañía satisface la demanda al hacer sus propios productos, el modelo EOQ de tasa continua será más real que el modelo EOQ tradicional. De nuevo, se supone que la demanda es determinística y ocurre a una tasa constante; también se supone que no se permite que haya escasez.

El modelo EOQ de tasa continua supone que una empresa puede producir un bien a una tasa de r unidades por unidad de tiempo (de nuevo se utiliza un año como la unidad de tiempo). Esto significa que durante cualquier periodo de duración t, la empresa puede producir rt unidades. Se define

Hidden page

da anual D. Usando esta observación y la fórmula (2) de la cantidad económica de pedido (o tamaño de lote), se podría deducir de inmediato que para el modelo EOQ de tasa continua,

$$\text{Tamaño óptimo de corrida} = \left(\frac{2KD}{\frac{h(r-D)}{r}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2KDr}{h(r-D)}\right)^{1/2} \tag{7}$$

Como siempre, se deben ejecutar $\frac{D}{q}$ corridas cada año para satisfacer la demanda anual de D unidades. Usando el hecho de que

$$\text{EOQ} = \left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2}$$

la ecuación (7) se puede rescribir como

$$\text{Tamaño óptimo de corrida} = \text{EOQ}\left(\frac{r}{r-D}\right)^{1/2} \tag{8}$$

A medida que se incrementa r, la producción ocurre a una tasa más rápida. Por consiguiente, para r grande, el modelo de tasa continua debe tender a la situación de entrega instantánea del modelo EOQ. Para ver que éste es el caso, observe que para r grande, $\frac{r}{(r-D)}$ se aproxima a 1. Entonces (8) muestra que cuando r tiende al infinito, el tamaño óptimo de corrida para el modelo de tasa continua tiende a la EOQ.

EJEMPLO 5 Macho Auto Company

Macho Auto Company necesita producir 10 000 carrocerías para automóvil por año. Cada una se evalúa en 2000 dólares. La planta tiene la capacidad para producir 25 000 carrocerías por año. Cuesta 200 dólares preparar una corrida de producción, y el costo de retención anual es de 25¢, por dólar de inventario. Determine el tamaño óptimo de corrida de producción. ¿Cuántas corridas de producción se deben hacer cada año?

Solución Se tiene que

$$\begin{aligned} r &= 25\ 000 \text{ carrocerías por año} \\ D &= 10\ 000 \text{ carrocerías por año} \\ h &= 0.25(\$2000)/\text{carrocería/año} = \$500/\text{carrocería/año} \\ K &= \$200 \text{ por corrida de producción} \end{aligned}$$

De (7),

$$\text{Tamaño de corrida óptimo} = \left(\frac{2(200)(10\ 000)(25\ 000)}{500(25\ 000 - 10\ 000)}\right)^{1/2} = 115.47$$

También, $\frac{10\ 000}{115.47} = 86.60$ corridas de producción se harán cada año.

Plantilla de hoja de cálculo para el modelo EOQ de tasa continua

ConEOQ.xls

La figura 11 (archivo ConEOQ.xls) ilustra una plantilla para el modelo EOQ de tasa continua. En la celda A6, el usuario introduce K; en B6, h; en C6, D, y en D6, la tasa de producción r. En la figura 11 hemos utilizado los valores de parámetro dados en el ejemplo 5. En A8 (asignado el nombre de intervalo Q), la fórmula (2*K*D/H)^.5*(R/(R−D))^.5 (de nuevo se están usando nombres de intervalo) calcula el tamaño óptimo de corrida. En B8, la fórmula D/Q calcula el número de corridas por año. En C8, se calcula el costo anual (exclusivo de los costos de compra) con la fórmula (H*Q*(R−D)/(2*R))+K*D/Q. El primer término de esta fórmula es igual al costo anual de inventario de reserva. Esto se deduce,

	A	B	C	D
1	MODELO			
2	EOQ			
3	DE TASA			
4	CONTINUA			
5	K	h	D	r
6	200	500	10000	25000
7	TAMAÑO DE CORRIDA	CORRIDAS POR AÑO	COSTO/AÑO	
8	115.47005383793	86.60254	34641.016	

FIGURA 11
Modelo EOQ de tasa continua

porque, de la figura 10, el nivel máximo de inventario durante un ciclo es $q(r - D)/r$. El segundo término es el costo anual de hacer pedidos.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Demuestre que el tamaño óptimo de corrida siempre excede la EOQ. Dé una explicación intuitiva para este resultado.

2 Una compañía puede producir 100 computadoras domésticas por día. El costo de preparación para una corrida de producción es de 1000 dólares. El costo de tener una computadora en inventario durante un año es \$300. La demanda de los clientes es de 2000 computadoras domésticas por mes (suponga que 1 mes = 30 días y 360 días = 1 año). ¿Cuál es el tamaño óptimo de corrida de producción? ¿Cuántas corridas de producción se deben hacer por año?

3 El proceso de producción en Father Dominic's Pizza puede producir 400 bases para pizza por día; la empresa opera 250 días por año. Father Dominic's tiene un costo de \$180 por corrida de producción y un costo de retención de \$5 por pizza-año. Las bases para pizza se congelan de inmediato después que se producen y se almacenan en una bodega refrigerada con una capacidad máxima actual de 2000 bases.

a La demanda anual es de 37500 bases por año. ¿Qué tamaño de corrida de producción se debe usar?

b ¿Cuál es el costo anual en que se incurre para satisfacer la demanda?

c ¿Cuántos días por año la compañía estará produciendo bases para pizza?

Grupo B

4 Una compañía tiene la opción de comprar un bien o fabricarlo. Si se compra el artículo, se le cobrará a la compañía \$25 unidad más un costo de \$4 por pedido. Si la compañía fabrica el artículo, tiene una capacidad de producción de 8000 unidades por año. Cuesta \$50 preparar una corrida de producción, y la demanda anual es de 3000 unidades por año. Si el costo de retención anual es 10% y el costo de fabricar una unidad son \$23, determine si la compañía debe comprar o fabricar el artículo.

15.5 Modelo EOQ en el que se permiten pedidos atrasados

En muchas situaciones de la vida real, la demanda no se satisface a tiempo y hay escasez. Cuando hay escasez, se incurre en costos (debido a los negocios perdidos, el costo de hacer pedidos especiales, pérdida futura de renombre comercial, etcétera). En esta sección, se modifica el modelo EOQ de la sección 15.2 para permitir la posibilidad de desabastecimiento. Sea s el costo por faltar una unidad durante un año. Las variables K, D y h tienen sus significados usuales. En la mayoría de los casos, es muy difícil determinar s. Suponga que la demanda se acumula y no se pierden ventas. Para determinar la política de pedidos que minimiza los costos anuales, se define

$$q = \text{cantidad de pedido}$$
$$q - M = \text{escasez máxima que ocurre en una política de formulación de pedidos}$$

De forma equivalente (suponiendo un plazo de entrega cero), la empresa tendrá un déficit de $q - M$ unidades cada vez que se hace un pedido.

Puesto que hay $\frac{D}{q}$ ciclos por año,

$$\frac{\text{Costo de retención}}{\text{Año}} = \left(\frac{M^2 h}{2D}\right)\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{M^2 h}{2q}$$

De manera similar,

$$\frac{\text{Costo de escasez}}{\text{Año}} = \left(\frac{\text{costo de escasez}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos}}{\text{año}}\right)$$

Observe también que el costo de escasez por ciclo = costo de escasez en que se incurre durante el tiempo AB. Puesto que la demanda ocurre a una tasa constante, el nivel de escasez promedio durante el tiempo AB es simplemente la mitad de la escasez máxima. Así, el nivel de escasez promedio en el intervalo de tiempo AB es $\frac{q-M}{2}$. Puesto que AB es el intervalo de tiempo de longitud $\frac{q-M}{D}$,

$$\frac{\text{Costo de escasez}}{\text{Ciclo}} = \frac{1}{2}\left(q-M\right)\left(\frac{q-M}{D}\right)s = \frac{(q-M)^2 s}{2D}$$

Puesto que hay $\frac{D}{q}$ ciclos por año,

$$\frac{\text{Costo de escasez}}{\text{Año}} = \frac{(q-M)^2 s}{2D}\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{(q-M)^2 s}{2q}$$

Como siempre, el costo de formulación de pedido por año $= \frac{KD}{q}$. Sea $TC(q, M)$ el costo total anual (excluyendo el costo de compra) si en la política de pedidos se utilizan los parámetros q y M. Del análisis, se debe elegir q y M para minimizar

$$TC(q, M) = \frac{M^2 h}{2q} + \frac{(q-M)^2 s}{2q} + \frac{KD}{q}$$

Usando el teorema 3 del capítulo 11, se puede demostrar que $TC(q, M)$ es una función convexa de q y M. De los teoremas 1′ y 7 del capítulo 11, el valor mínimo del $TC(q, M)$ ocurrirá en el punto donde

$$\frac{\partial TC}{\partial q} = \frac{\partial TC}{\partial M} = 0$$

Con un poco de álgebra tediosa se demuestra que $TC(q, M)$ se minimiza para q^* y M^*:

$$q^* = \left[\frac{2KD(h+s)}{hs}\right]^{1/2} = \text{EOQ}\left(\frac{h+s}{s}\right)^{1/2}$$

$$M^* = \left[\frac{2KDs}{h(h+s)}\right]^{1/2} = \text{EOQ}\left(\frac{s}{h+s}\right)^{1/2}$$

$$\text{Escasez máxima} = q^* - M^*$$

Cuando s tiende a infinito, q^* y M^* se aproximan a EOQ y el déficit máximo tiende a cero. Esto es razonable, debido a que si s es grande, el costo de un déficit es prohibitivo, y se esperaría que la política de pedidos óptima incurra en muy pocos, si hay, desabastecimientos. En otras palabras, si s es muy grande, se tiene ante sí (para todos los intentos y propósitos) la situación en la que no se permiten desabastecimientos de la sección 15.2.

EJEMPLO 6 Clínica de optometría Smalltown

Cada año, la clínica de optometría Smalltown vende 10 000 armazones para anteojos. La clínica pide los armazones a un proveedor regional, que cobra 15 dólares por armazón. En cada pedido se incurre en un costo de 50 dólares. La clínica considera que la demanda de armazones se puede retrasar y que el costo de tener un déficit de una armazón durante 1 año son 15 dólares (debido a la pérdida de negocios futuros). El costo de retención anual para el inventario es de 30¢ por valor en dólares de inventario. ¿Cuál es la cantidad óptima de pedido? ¿Cuál es el déficit máximo que ocurrirá? ¿Cuál es el nivel de inventario máximo que ocurrirá?

Solución Se tiene que

$$K = \$50$$
$$D = 10\,000 \text{ armazones por año}$$
$$h = 0.3(15) = \$4.50/\text{armazón/año}$$
$$s = \$15/\text{armazón/año}$$

De la fórmula para q^* y M^*, se obtiene

$$q^* = \left(\frac{2(50)(10\,000)(19.50)}{(4.50)(15)}\right)^{1/2} = 537.48$$
$$M^* = \left(\frac{2(50)(10\,000)(15)}{(4.50)(19.50)}\right)^{1/2} = 413.45$$

Entonces el déficit máximo que ocurre será $q^* - M^* = 124.03$ armazones, y cada pedido debe ser por 537 o 538 armazones. Ocurrirá un nivel de inventario máximo de $M^* = 413.45$ armazones.

Como en la sección 15.4, suponga que la producción no es instantánea y se puede producir a una tasa de r unidades por año. Si se permite que haya déficit, se puede demostrar que

$$q^* = \left(\frac{2KDr(h+s)}{h(r-D)s}\right)^{1/2}$$
$$M^* = \frac{q^*(r-D)}{r} - \left(\frac{2KD(r-D)h}{sr(h+s)}\right)^{1/2}$$

El déficit máximo que ocurre en este caso (llámelo S^*) está dado por

$$S^* = \left(\frac{2KD(r-D)h}{sr(h+s)}\right)^{1/2}$$

Plantilla de hoja de cálculo para el modelo EOQ con pedidos atrasados

BackEOQ.xls

En la figura 13 (archivo BackEOQ.xls) se ilustra una plantilla de hoja de cálculo para el modelo EOQ con pedidos atrasados. En las celdas A6, B6, C6 y D6, se introducen los valores de K, D, h y s, respectivamente, para el ejemplo 6. En A8 (con el nombre de intervalo Q), se calcula la cantidad óptima de pedido con la fórmula 2*K*D*(H+S)/(H*S))^.5. En B8 (nombre de intervalo M), se calcula el valor óptimo de M con la fórmula

A	A	B	C	D
1	MODELO			
2	EOQ CON			
3	PEDIDOS			
4	ATRASADOS			
5	K	D	h	s
6	50	10000	4.5	15
7	q*	M*	DÉFICIT MÁXIMO	COSTO ANUAL
8	537.48384989	413.44912	124.03473459	1860.52101884

FIGURA 13
Modelo EOQ con pedidos atrasados

Hidden page

- Número de pedidos recibidos por año. Observe que se supone que cada pedido contiene un envío del producto 1.
- Para los productos distintos al producto 1, el número de pedidos que se necesita recibir antes que se reciba un pedido del producto. Si, por ejemplo, el producto 2 debe estar contenido en cada tercer pedido, entonces la celda cambiante para el producto 2 será igual a 3.

Dados los valores de prueba de estas cantidades, se puede determinar fácilmente el costo fijo total (suma de costo fijo para cada producto más costo fijo para cada pedido) y el costo de retención total para cada producto. La suma de estos costos será la celda objetivo para el Solver. El modelo tiene poca linealidad. Es necesario usar el *Evolutionary Solver* para encontrar la solución óptima. A continuación se da un ejemplo del método.

EJEMPLO 7 Ohm City Appliances

Ohm City Appliances recibe de Springfield TV tres tipos de TV. En la figura 14 se da la demanda anual, el costo de compra unitario, el costo de retención anual (como porcentaje del costo de compra), el costo fijo de pedir un producto y el costo fijo de hacer un pedido. Determine la política de formulación de pedido que minimiza la suma de los costos fijo y de retención.

FIGURA 14

	A	B	C	D	E	F
4						
5						
6			Producto 1	Producto 2	Producto 3	
7		demanda anual	12000	1200	120	
8		costo unitario	$ 500.00	$ 500.00	$ 500.00	
9		costo de retención	0.2	0.2	0.2	
10		costo de pedir el producto	$ 1 000.00	$ 1 000.00	$ 1 000.00	
11		EOQ	489.8979486	154.9193338	48.989795	
12		pedidos por año	24.49489743	7.745966692	2.4494897	
13		costo de pedido global	$ 4 000.00			
14						
15		Pedidos por año P1	10.46135741			
16		Pedidos P1 por P2	1			
17		Pedidos P1 por P3	4			
18		Pedidos por año P2	10.46135741			
19		Pedidos por año P3	2.615339354			
20						
21						
22						
23		Costo anual principal de pedido	$ 41 845.43			
24						
25			Producto 1	Producto 2	Producto 3	
26		Cantidad de pedido	1147.078675	114.7078675	45.883147	
27		Inventario promedio	573.5393374	57.35393374	22.941573	
28		Costo de retención anual	$ 57 353.93	$ 5 735.39	$ 2 294.16	
29		Costo anual de formulación	$ 10 461.36	$ 10 461.36	$ 2 615.34	
30		de pedido del producto				
31						
32		Costo anual total	$ 130 766.97			
33						

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Los clientes de Joe Office Supply Store demandan un promedio de 6 000 escritorios por año. Cada vez que se hace un pedido, se incurre en un costo de formulación de pedido de \$300. El costo de retención anual para un solo escritorio es 25% del costo de 200 dólares de un escritorio. Transcurre una semana entre la fecha en que se hace el pedido y la llegada de éste. En los incisos (a)–(d), suponga que no se permite que haya escasez.

a Cada vez que se hace un pedido, ¿cuántos escritorios se deben pedir?

b ¿Cuántos escritorios se deben pedir cada año?

c Determine los costos anuales totales (excluyendo los costos de compra) de satisfacer a los clientes que requieren escritorios.

d Determine el punto de reabastecimiento. Si el tiempo de entrega fueran cinco semanas, ¿cuál sería el punto de reabastecimiento? (52 semanas = un año).

e ¿Cómo cambiarían las respuestas a los incisos (a) y (b) si se permitiera que hubiera escasez y se incurriera en un costo de 80 dólares si Joe tuviera un déficit de un escritorio durante un año?

2 Suponga que Joe está considerando fabricar escritorios. Cuesta 250 dólares preparar una corrida de producción y Joe tiene capacidad para fabricar hasta 10 000 escritorios por año. ¿Cuál es el tamaño óptimo de corrida de producción? ¿Cuántas corridas de producción se harán cada año?

3 Una tienda de cámaras vende un promedio de 100 cámaras por mes. El costo de tener una cámara en inventario durante un año es 30% del precio que la tienda paga por la cámara. A la tienda le cuesta \$120 dólares cada vez que la tienda hace un pedido con su proveedor. El precio cargado por cámara depende del número de cámaras pedido (véase la tabla 8). Cada vez que la tienda de cámaras hace un pedido, ¿cuántas cámaras se deben pedir?

TABLA 8

Número de cámaras pedidas	Precio por cámara
1–10	\$10.00
11–40	\$9.00
41–100	\$7.00
Más de 100	\$5.50

TABLA 9

	Artículo 1	Artículo 2
Demanda anual	6000	4000
Costo por unidad	\$4.00	\$3.50
Costo retención anual	30% por año	25% por año
Precio por pedido	\$35	\$20

Grupo B

4 Una compañía hace una lista detallada de dos artículos. Los datos pertinentes para cada artículo se muestran en la tabla 9. Determine la política de inventarios óptima si no se permite que haya déficit y si la inversión promedio en inventario se mantiene abajo de 700 dólares. Si esta restricción se pudiera relajar por un dólar, ¿por cuánto disminuirían los costos anuales de la compañía? (Este problema requiere conocer la sección 11.8).

5 Una compañía produce tres clases de artículos. Se utiliza una sola máquina para producir los tres artículos en una base cíclica. La compañía tiene la política de que cada artículo se produce una vez durante cada ciclo y quiere determinar el número de ciclos de producción por año que minimizarán la suma de los costos de retención y preparación (no se permite que haya escasez). Se tienen los datos siguientes:

P_i = número de unidades del producto i que se podrían producir por año si la máquina estuviera dedicada por completo a producir el producto i.

D_i = demanda anual para el producto i.

K_i = costo de preparar la producción del producto i.

h_i = costo de mantener una unidad de producto i en inventario durante un año.

a Suponga que hay N ciclos por año. Suponiendo que durante cada ciclo se satisface una fracción $\frac{1}{N}$ de toda la demanda para cada producto, determine el costo de retención anual y el costo de preparación anual.

b Sea q_i^* el número de unidades del producto i producidas durante cada ciclo. Determine el valor óptimo de N (llámelo N^*) y q_i^*.

c Sea $EROQ_i$ el tamaño óptimo de corrida de producción para el producto i si se ignora la naturaleza cíclica del problema. Suponga que q_i^* es mucho menor que $EROQ_i$. ¿Qué conclusión de podría sacar?

d En qué circunstancias podría no ser deseable producir cada artículo durante cada ciclo. Cuál de los factores siguientes tendería a hacer indeseable producir el producto i durante cada ciclo: (1) La demanda es relativamente baja. (2) El costo de preparación es relativamente alto. (3) El costo de retención es relativamente alto.

16

Modelos probabilísticos de inventarios

Todos los modelos de inventarios estudiados en el capítulo 15 requieren que la demanda durante cualquier periodo se conozca con certeza. En este capítulo se tratan los modelos de inventario en los cuales la demanda es incierta o aleatoria en un periodo dado; modelos de inventario único donde un problema finaliza una vez que se toma la decisión de un solo pedido; modelos de licitación única; versiones del modelo EOQ para demanda incierta que incorporan los conceptos importantes de existencias de seguridad y nivel de servicio; el modelo de la revisión periódica (R, S); el sistema de clasificación de inventario ABC y curvas de cambio.

16.1 Modelos de decisión única

En muchas situaciones, el que toma las decisiones se enfrenta al problema de determinar el valor q de una variable (q podría ser la cantidad ordenada de un bien inventariado, por ejemplo, o la oferta sobre un contrato). Después de determinar q, se observa el valor d que asume una variable aleatoria $\mathbf{D}$. El que toma las decisiones genera un costo $c(d, q)$, lo cual depende de los valores de d y q. Suponemos que la persona es neutral en cuanto al riesgo y quiere elegir q para reducir al mínimo su costo esperado. Como la decisión se toma una sola vez, un modelo de este tipo se llama *modelo de decisión única*.

16.2 Concepto de análisis marginal

En el modelo de decisión única que se trató en la sección 16.1, se supone que $\mathbf{D}$ es una variable aleatoria discreta de valores enteros con $P(\mathbf{D} = d) = p(d)$. Sea $E(q)$ el costo esperado de quien toma las decisiones si se elige q. Entonces

$$E(q) = \sum_{d} p(d)c(d, q)$$

En la mayor parte de las aplicaciones prácticas, $E(q)$ es una función convexa de q. Sea q^* el valor de q que minimiza $E(q)$. Si $E(q)$, es una función convexa, la gráfica de $E(q)$ debe parecerse a la figura 1. Según la figura, se ve que q^* es el valor mínimo de q para el cual

$$E(q^* + 1) - E(q^*) \geq 0 \tag{1}$$

Por lo tanto, si $E(q)$, es una función convexa de q es posible determinar el valor de q que minimice el costo esperado estimando el valor más pequeño de q que satisface la Desigualdad (1). Obsérvese que $E(q + 1) - E(q)$ es el cambio en el costo esperado que se presenta si se incrementa la variable de decisión q a $q + 1$.

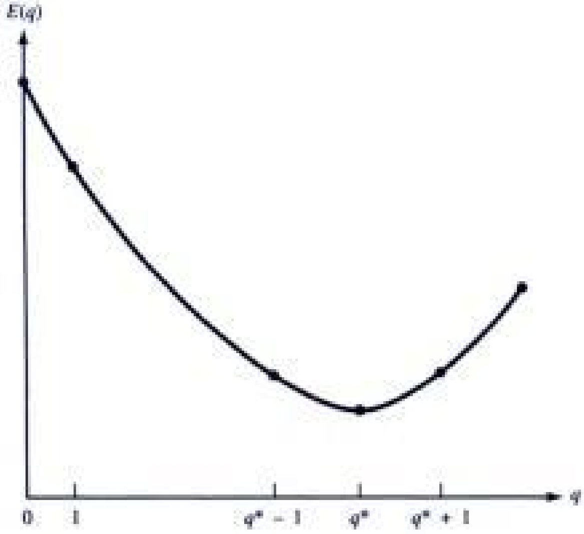


FIGURA 1
Determinación de q^* mediante análisis marginal

Para determinar q^*, se empieza con $q = 0$. Si $E(1) - E(0) \leq 0$, entonces es posible lograr un beneficio al incrementar q desde 0 hasta 1. Ahora se verifica que $E(2) - E(1) \leq 0$. Si se cumple, entonces el incremento de q desde 1 hasta 2 reducirá el costo esperado. Si se continúa de este modo se observa que al incrementar q una unidad se reducirán los costos esperados hasta el punto donde se trata de incrementar q desde q^* hasta $q^* + 1$. En este caso, al incrementar q una unidad aumentará el costo esperado. Según la figura 1 (la cual es la apropiada si $E(q)$, es una función convexa), se observa que si $E(q^* + 1) - E(q^*) \geq 0$, entonces para $q \geq q^*$, $E(q + 1) - E(q) \geq 0$. Por lo tanto, q^* debe ser el valor de q que minimice $E(q)$, Si $E(q)$ no es convexa, quizá este razonamiento no funcione. (Véase el problema 1 al final de esta sección.)

Este método determina q^* mediante el cálculo repetido del efecto de sumar una unidad marginal al valor de q. Por esta razón se denomina a menudo **análisis marginal**. Este método se utiliza si es fácil determinar una expresión simple para $E(q + 1) - E(q)$. En la sección siguiente se aplica el análisis marginal para resolver el problema clásico del vendedor de periódicos.

PROBLEMA

Grupo A

1 Suponga que $E(q)$ es $E(0) = 8$, $E(1) = 6$, $E(2) = 5$, $E(3) = 7$, $E(4) = 6$, $E(5) = 5.5$, $E(6) = 4.5$, y $E(7) = 5$.

a ¿Qué valor de q minimiza $E(q)$?

b Si se utiliza el análisis marginal para determinar el valor de q que minimiza $E(q)$, ¿cuál es la respuesta?

c Explique por qué el análisis marginal no determina el valor de q que minimiza $E(q)$.

16.3 El problema del vendedor de periódicos: demanda discreta

Las empresas enfrentan a menudo problemas de inventario en los que se presenta la sucesión de eventos siguiente:

1 La compañía decide cuántas unidades pedir. Representemos con q la cantidad de unidades pedidas.

2 Con probabilidad $p(d)$ se presenta una demanda de d unidades. En esta sección se supone que d tiene que ser un entero no negativo. Sea **D** la variable aleatoria que representa la demanda.

3 Se genera un costo $c(d, q)$ que depende de d y q.

Los problemas que siguen esta secuencia reciben a menudo el nombre de **problemas del vendedor de periódicos**. Para ver por qué, considere un vendedor que tiene que decidir cuántos periódicos pedir cada día en el expendio de periódicos. Si el vendedor pide demasiados periódicos, acabará el día con varios periódicos sin valor alguno. En cambio, si un vendedor pide muy pocos periódicos, perderá ganancias que podía haber obtenido si hubiera pedido los suficientes para cumplir con la demanda que le hubieran pedido los clientes, y además, los clientes estarán disgustados. El vendedor tiene que pedir la cantidad de periódicos que equilibre en forma adecuada estos dos costos. Otro problema del vendedor de periódicos se estudia en la sección 13.1 cuando se trata la teoría de decisiones.

En esta sección se muestra cómo utilizar el análisis marginal para resolver problemas del vendedor de periódicos cuando la demanda es una variable aleatoria discreta y $c(d, q)$ tiene la forma siguiente:

$$c(d, q) = c_o q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \leq q) \tag{2}$$

$$c(d, q) = -c_u q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \geq q + 1) \tag{2.1}$$

El costo por unidad por tener existencias excesivas es c_o en (2). Si $d \leq q$, se ha pedido más de lo que es la demanda, es decir, se tiene un surtido excesivo (abarrotamiento). Si el tamaño del pedido se incrementa desde q hasta $q + 1$, entonces (2) muestra que el costo se incrementa en c_o. Por lo tanto, c_o es el costo debido a tener un exceso de existencias igual a una unidad extra. A c_o se le conoce como **costo por existencias excesivas**. Si $d \geq q + 1$, entonces hay falta de surtido (se pidió una cantidad menor que la demanda). Si $d \geq q + 1$, y se pide una unidad más, hay una falta de existencias, pero ya falta una unidad menos. Entonces (2.1) implica que el costo disminuye en c_u, de modo que c_u es el costo por unidad por tener inventario menor al necesario. A c_u se le llama **costo por falta de inventario**.

Con el objeto de deducir mediante el análisis marginal la cantidad óptima para el pedido, sea $E(q)$ el costo esperado si se coloca un pedido de q unidades. Suponga que la meta de quien toma las decisiones es determinar el valor de q^* que minimice $E(q)$. Si $c(d, q)$ puede describirse mediante (2) y (2.1), y $E(q)$ es una función convexa de q, entonces sí se puede utilizar el análisis marginal para determinar q^*.

A raíz de (1), hay que determinar el valor mínimo de q para el cual $E(q + 1) - E(q) \geq 0$. Se tienen que considerar las dos posibilidades siguientes para calcular $E(q + 1) - E(q)$:

Caso 1 $d \leq q$. En este caso, al ordenar $q + 1$ unidades en lugar de q unidades se ocasiona que haya un exceso de existencias con una unidad de más. Esto incrementa el costo en c_o. La probabilidad de que se presente el caso 1 es simplemente $P(\mathbf{D} \leq q)$, donde $\mathbf{D}$ es la variable aleatoria que representa la demanda.

Caso 2 $d \geq q + 1$. En este caso, pedir $q + 1$ unidades en lugar de q unidades, posibilita que falte una unidad menos. Esto disminuye el costo en c_u. La probabilidad de que ocurra el caso 2 es $P(\mathbf{D} \geq q + 1) = 1 - P(\mathbf{D} \leq q)$.

En resumen, una fracción $P(\mathbf{D} \leq q)$ del tiempo, ordenar $q + 1$ unidades costará c_o más que ordenar q unidades; y una fracción $1 - P(\mathbf{D} \leq q)$ de las veces, ordenar $q + 1$ unidades costará un costo c_u menos que pedir q unidades. Por lo tanto, en promedio, ordenar $q + 1$ unidades costará

$$c_o P(\mathbf{D} \leq q) - c_u[1 - P(\mathbf{D} \leq q)]$$

más que pedir q unidades.

Se ha demostrado con más formalidad que

$$\begin{aligned} E(q + 1) - E(q) &= c_o P(\mathbf{D} \leq q) - c_u[1 - P(\mathbf{D} \leq q)] \\ &= (c_o + c_u) P(\mathbf{D} \leq q) - c_u{}^{\dagger} \end{aligned}$$

†Como $P(\mathbf{D} \leq q)$ se incrementa cuando q aumenta, $E(q + 1) - E(q)$ se incrementará a medida que q aumente. Por lo tanto, si $c_o + c_u \geq 0$, $E(q)$ es una función convexa de q, por lo que se justifica el uso del análisis marginal.

Entonces $E(q + 1) - E(q) \geq 0$ se cumplirá si

$$(c_o + c_u)\, P(\mathbf{D} \leq q) - c_u \geq 0 \qquad \text{o} \qquad P(\mathbf{D} \leq q) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u}$$

Sea $F(q) = P(\mathbf{D} \leq q)$ la función de la distribución de la demanda. Puesto que el análisis marginal se puede aplicar, ya mostramos que $E(q)$ será minimizada mediante el valor más pequeño de q (llamado q^*) que satisface

$$F(q^*) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{3}$$

El uso de (3) se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Ventas de calendarios en Walton Bookstore

Walton Bookstore tiene que decidir en agosto cuántos calendarios acerca de la naturaleza debe pedir para el año próximo. Cada calendario le cuesta a la tienda 2 dólares, y se vende en 4.50 dólares. Todos los calendarios que no se hayan vendido el primero de enero se regresan al editor, quien reembolsa 75 centavos por calendario. Walton opina que la cantidad de calendarios vendidos al primero de enero sigue la distribución de probabilidad que se muestra en la tabla 1. Walton desea maximizar la utilidad neta esperada por las ventas de los calendarios. ¿Cuántos calendarios debe pedir la librería en agosto?†

Solución Sean

q = cantidad de calendarios pedidos en agosto

d = cantidad de calendarios demandados antes del primero de enero

Si $d \leq q$, se generan los costos que se muestran en la tabla 2 (los ingresos son un costo negativo). Según (2), $c_o = 1.25$.

Si $d \geq q + 1$, se generan los costos mostrados en la tabla 3. De acuerdo con (2), $-c_u = -2.5$ o $c_u = 2.50$. Entonces,

$$\frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{2.50}{3.75} = \frac{2}{3}$$

TABLA 1
Función de la masa de probabilidad para la venta de calendarios

No. de calendarios vendidos	Probabilidad
100	.30
150	.20
200	.30
250	.15
300	.05

TABLA 2
Cálculo de los costos totales si $d \leq q$

	Costo
Compra de q calendarios a 2 dólares por calendario	$2q$
Venta de d calendarios a 4.50 dólares por calendario	$-4.50d$
Devolución de $q - d$ calendarios a 75 centavos por calendario	$-0.75(q - d)$
Costo total	$1.25q - 3.75d$

†Basado en Barron (1985).

16.4 Problema del vendedor de periódicos: demanda continua

Ahora considere el escenario del vendedor de periódicos de la sección 16.3 en donde la demanda **D** es una variable aleatoria continua cuya función de densidad es $f(d)$. Si modificamos el razonamiento del análisis marginal de la sección 16.3 (o si utilizamos la regla de Leibniz para diferenciar una integral –véase problema 7 al final de esta sección), es posible demostrar que el costo esperado de quien toma las decisiones se minimiza al ordenar q^* unidades, donde q^* es la cantidad más pequeña que satisface

$$P(\mathbf{D} \leq q^*) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{4}$$

Como la demanda es una variable aleatoria continua, podemos encontrar un número q^* para el cual (4) se cumple en cuanto a la igualdad. Por lo tanto, la cantidad pedida óptima, en este caso, se puede determinar al encontrar el valor de q^* que satisface

$$P(\mathbf{D} \leq q^*) = \frac{c_u}{c_o + c_u} \qquad \text{o} \qquad P(\mathbf{D} \geq q^*) = \frac{c_o}{c_o + c_u} \tag{5}$$

Según (5), lo óptimo es ordenar unidades hasta el punto donde la última unidad pedida tiene una probabilidad

$$\frac{c_o}{c_o + c_u}$$

de ser vendida. El uso de (5) se ilustra en los ejemplos 2 y 3.

EJEMPLO 2 Reservación de habitaciones para ABA

La American Bar Association (ABA) está realizando su convención anual en Las Vegas. Seis meses antes de que la convención empiece, ABA tiene que decidir cuántas habitaciones reservar en el hotel donde se efectúa la convención. En este momento puede reservar habitaciones a un costo de 50 dólares por cuarto, pero seis meses antes de la convención, ABA tiene la incertidumbre de cuántas personas asistirán a la convención. ABA cree, no obstante, que la cantidad de habitaciones requerida está normalmente distribuida, que su media es de 5000 cuartos y tiene una desviación estándar de 2000 habitaciones. Si la cantidad de habitaciones requerida excede las habitaciones reservadas en el hotel donde se efectuará la convención, se tienen que encontrar habitaciones extra en los hoteles vecinos a un costo de 80 dólares por habitación. Para los participantes representa un inconveniente estar en un hotel vecino. Esta inconveniencia se mide al valorar un costo adicional de 10 dólares por cada habitación que se encuentre en un hotel vecino. Si el objetivo es minimizar el costo esperado para ABA y sus miembros, ¿cuántos cuartos debe reservar ABA en el hotel donde se efectúa la convención?

Solución Definamos

q = cantidad de habitaciones reservadas
d = cantidad de habitaciones que se requieren realmente

Si $d \leq q$, entonces el único costo que se genera es el costo de las habitaciones reservadas con anticipación, de modo que si $d \leq q$, el costo total es $50q$. Por lo tanto, $c_o = 50$. Si $d \geq q + 1$, se incurre en los costos siguientes:

Costo por reservar q habitaciones $= 50q$
Costo por rentar $d - q$ habitaciones en los hoteles vecinos $= 80(d - q)$
Costo por la inconveniencia en los participantes inesperados $= 10(d - q)$
Costo total $= 90d - 40q$ y $c_u = 40$

Como $\frac{c_u}{c_u + c_o} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$, vemos que, según (5), la cantidad óptima de habitaciones que se deben reservar es el número q^* que satisface

$$P(\mathbf{D} \le q^*) = \frac{4}{9} \tag{6}$$

La función de Excel, NORMINV, se usa para calcular q^*. Como

=NORMINV(4/9 5000 2000)

es igual a 4720.58, ABA debe reservar 4720 o 4721 habitaciones.

EJEMPLO 3 Sobreboletaje en aerolíneas

El precio de un vuelo Nueva York-Indianápolis es de 200 dólares. Cada avión puede transportar hasta 100 pasajeros. Por lo común, algunos de los pasajeros que han comprado boletos para un vuelo no se presentan. Como una forma de protección contra este tipo de pasajeros, la aerolínea tratará de vender más de 100 boletos por cada vuelo. Las leyes federales establecen que cualquier cliente con boleto que no aborda el avión tiene derecho a una compensación (podrían ser 100 dólares). Según la información pasada, la cantidad de pasajeros que no aborda el vuelo Nueva York-Indianápolis sigue una distribución normal, con una media de 20 y una desviación estándar de 5. Para maximizar los ingresos esperados menos los costos de compensación, ¿cuántos boletos debe vender la aerolínea por cada vuelo? Suponga que cualquiera que no usa el boleto recibe una devolución 200 dólares.

Solución Sean

q = cantidad de boletos que vende la aerolínea
d = cantidad de pasajeros que no se presenta

Observe que $q - d$ será la cantidad de clientes que en realidad abordan el avión. Si $q - d \le 100$, entonces todos los clientes que se presentan abordarán el avión, por lo que el costo de la aerolínea es $-200(q - d) = 200d - 200q$. Si $q - d \ge 100$, entonces 100 pasajeros abordarán el avión (la aerolínea paga $200(100) = 20\,000$ dólares), y $q - d - 100$ clientes serán rechazados. Estos $q - d - 100$ clientes recibirán compensación de $100(q - d - 100)$. Por lo tanto, si $q - d \ge 100$, el costo total para la aerolínea se obtiene con $100(q - d - 100) - 200(100) = 100(q - 100) - 100d - 20\,000$. En resumen, el costo neto de la aerolínea se podría expresar como se muestra en la tabla 10.

Si $q - 100$ se considera una variable de decisión, entonces tenemos un problema del vendedor de periódicos con $-c_u = -200$ (o $c_u = 200$) y $c_o = 100$. De acuerdo con (5), debemos elegir $q - 100$ para que satisfaga

$$P(\mathbf{D} \le q - 100) = \frac{c_u}{c_o + c_u} = \frac{2}{3} \tag{7}$$

El problema se puede resolver con ayuda de Excel. Como

=DIST.NORM.INV(2/3,120,5)

da 122.15, podríamos concluir que la aerolínea debe intentar vender 122 o 123 boletos. Esto quiere decir que una vez que las ventas de boletos alcanzan 122 (o 123), ya no se

TABLA 10
Cálculo del costo total

	Costo total
$q - d \ge 100$ (o $d \le q - 100$)	$100(q - 100) - 100d - 20\,000$
$q - d \le 100$ (o $d \ge q - 100$)	$200d - 200(q - 100) - 200(100)$

deben vender más boletos para el vuelo. Naturalmente, si menos de 122 personas quieren comprar boletos, la aerolínea no debe rehusarse a vender un boleto más para el vuelo.

PROBLEMAS

Grupo A

1 **a** Refiérase al ejemplo 3. ¿Por qué es irreal suponer que la distribución de la cantidad de pasajeros que no se presentan es independiente de q?

b Si la cantidad de pasajeros que no se presenta tuviera una distribución normal, con una media de $.05q$ y una desviación estándar de $.05q$, ¿todavía sería un problema como el del vendedor de periódicos?

2 Condo Construction Company va a pedir un préstamo al First National Bank. En el momento presente, el banco está dispuesto a prestar a Condo hasta 1 millón de dólares con costos de intereses de 10%. Condo opina que la cantidad de fondos prestados necesarios durante el año actual tiene una distribución normal, con una media de 700 000 dólares y una desviación estándar de 300 000 dólares. Si Condo requiere otro préstamo durante el año, tendrá que ir con Louie, el prestamista. El costo por dólar prestado por Louie es de 25 centavos. Si Condo desea minimizar los costos del interés esperado para el año, ¿cuánto dinero debe pedir prestado al banco?

3 Joe vende árboles de navidad para pagar la inscripción a la universidad. Compra árboles a 10 dólares cada uno, y los vende a 25 dólares. La cantidad de árboles que puede vender sigue una distribución normal con una media de 100 y una desviación estándar de 30. ¿Cuántos árboles debe comprar Joe?

4 Un vendedor en Wrigley Field da los perritos calientes a 1.50 dólares cada uno. Él los compra a 1.20 dólares. Todos los perritos calientes que no se venden en Wrigley Field por la tarde, se pueden vender por la noche en Comiskey Park a sólo 1 dólar. La demanda diaria de perritos calientes en Wrigley Field tiene una distribución normal con una media de 40 y una desviación estándar de 10.

a Si el vendedor compra perritos calientes una vez al día, ¿cuántos debe comprar?

b Si compra 52 perritos calientes, ¿cuál es la probabilidad de que el vendedor cumpla con toda la demanda del día de perritos calientes en Wrigley Field?

Grupo B

5[†] Motorama TV estima que la demanda anual de sus televisores está (y estará en el futuro) normalmente distribuida, con una media de 6000 y desviación estándar de 2000. Motorama tiene que determinar cuánta capacidad de producción debe tener. El costo de conformar suficiente capacidad de producción para fabricar 1000 aparatos por año es 1 000 000 de dólares (equivalente en términos de valor presente a un costo de 100 000 dólares por año por siempre). Si se excluye el costo de conformación de la capacidad, cada aparato vendido contribuye con 250 dólares a las ganancias. ¿Cuánta capacidad de producción debe tener Motorama?

6 I. L.Pea es una compañía reconocida que surte pedidos por correo. Durante el ajetreo de fin de año (del primero de noviembre al 15 de diciembre), la cantidad de pedidos que I. L.Pea debe surtir cada día (cinco días a la semana) está normalmente distribuida, con una media de 2000 y desviación estándar de 500. I. L.Pea debe determinar cuántos empleados tienen que trabajar durante esa temporada. Cada empleado trabaja cinco días a la semana, ocho horas diarias, puede procesar 50 pedidos por día y recibe como pago 10 dólares por hora. Si la mano de obra de tiempo completo no puede manejar los pedidos del día durante el horario regular, algunos empleados tendrán que trabajar tiempo extra. Cada empleado recibe entonces 15 dólares por hora por el tiempo extra. Por ejemplo, si se reciben 300 pedidos en un día y hay cuatro empleados, entonces $300 - 4(50) = 100$ pedidos tienen que ser procesados por empleados que trabajan tiempo extra. Como cada empleado es capaz de llenar $\frac{50}{8} = 6.25$ pedidos por hora, I. L.Pea necesitaría pagar a los trabajadores $\frac{100}{6.25} = 16$ horas de tiempo extra por ese día. Para minimizar sus costos esperados de mano de obra, ¿cuántos empleados de tiempo completo debería tener I. L.Pea durante la ventas de la temporada de fin de año?

7 Suponga que la demanda es una variable aleatoria continua que tiene una función de densidad de probabilidad $f(d)$. $c(d, q)$ se obtiene con la ecuación (2). Demuestre que si q unidades se piden, el costo esperado $E(q)$ se podría expresar como

$$E(q) = \int_0^q c_o q f(t)dt + \int_q^\infty (-c_u) q f(t)dt$$
$$+ \text{ (términos sin } q \text{ en el integrando)}$$

Ahora aplique la regla de Leibniz para deducir la ecuación (5).

[†]Basado en Virts y Garrett (1970).

16.5 Otros modelos de periodo único

Muchos modelos de periodo único, muy interesantes, son inmanejables en investigación de operaciones con el análisis marginal. En estos casos, expresamos la función objetivo del analista (por lo regular, ganancia esperada o costo esperado) como una función $f(q)$

de la variable de decisión q. Luego determinamos un máximo o un mínimo de $f(q)$ al hacer $f'(q) = 0$. En esta sección ilustramos esta idea mediante un breve análisis de un modelo de licitación.

EJEMPLO 4 Constructora Condo

Esta compañía participa en la licitación de una obra importante. La obra costará de principio a fin 2 millones de dólares. Otra compañía también presenta una licitación. Condo opina que es igualmente probable que la licitación de la otra constructora sea de cualquier cantidad entre 2 y 4 millones. Si Condo desea maximizar la ganancia esperada, ¿de cuánto debe ser la licitación?

Solución Sea

$\mathbf{B}$ = variable aleatoria que representa la oferta del contrincante de Condo

b = oferta actual del contrincante de Condo

Entonces $f(q)$, la función de densidad para $\mathbf{B}$, está dada por

$$f(b) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,000\,000} & (2\,000\,000 \le b \le 4\,000\,000) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea q = oferta de Condo. Si $b > q$, Condo ofrece más que el contrincante y obtiene una utilidad de $q - 2\,000\,000$. Si $b < q$, la otra constructora ofrece más que Condo, y ésta no gana nada. El evento $b = q$ tiene una probabilidad de cero de que ocurra y se podría ignorar. Sea $E(q)$ la ganancia esperada de Condo si ésta ofrece q. Entonces,

$$E(q) = \int_{2\,000\,000}^{q} (0)f(b)db + \int_{q}^{4\,000\,000} (q - 2\,000\,000)f(b)db$$

Como $f(b) = \frac{1}{2\,000\,000}$ para $2\,000\,000 \le b \le 4\,000\,000$, se obtiene

$$E(q) = \frac{(q - 2\,000\,000)(4\,000\,000 - q)}{2\,000\,000}$$

Con el objeto de encontrar el valor de q que maximiza $E(q)$, se calcula

$$E'(q) = \frac{-(q - 2\,000\,000) + (4\,000\,000 - q)}{2\,000\,000} = \frac{6\,000\,000 - 2q}{2\,000\,000}$$

Por lo tanto, $E'(q) = 0$ para $q = 3\,000\,000$. Puesto que $E''(q) = \frac{-2}{2\,000\,000} < 0$, entonces se sabe que $E(q)$ es una función cóncava de q, y $q = 3\,000\,000$ en realidad sí maximiza a $E(q)$. Por lo tanto, Condo debe proponer 3 000 000. La ganancia esperada de Condo será $E(3\,000\,000) = 500\,000$ dólares.

PROBLEMAS

Grupo A

1 La ciudad de Rulertown consta del intervalo unitario [0, 1] (véase figura 2). Rulertown necesita determinar dónde ubicar su única estación de bomberos. Se sabe que para un Δx pequeño, la probabilidad de que ocurra un incendio en un lugar entre x y $x + \Delta x$ es $2x(\Delta x)$. Rulertown desea minimizar la distancia promedio entre la estación de bomberos y el incendio. ¿Dónde se debe construir la estación de bomberos?

FIGURA 2

Grupo B

2 Suponga que la Oficina de la Reserva Federal es capaz de controlar la tasa de crecimiento del aprovisionamiento de dinero estadounidense. Suponga, asimismo, que durante un año en que el aprovisionamiento de dinero creció x%, el Producto Nacional Bruto (PIB) creció $\mathbf{Z}x$%, donde $\mathbf{Z}$ es una variable aleatoria conocida. El gobierno ha decidido que el PIB crezca k% cada año. (Una tasa de crecimiento muy alta ocasiona una inflación excesiva, y una demasiado baja origina desempleo.) Para modelar la opinión del gobierno, éste evalúa un costo de $(d - k)^2$ durante un año en el cual el PIB crece d%.

a Determine la tasa de crecimiento del aprovisionamiento de dinero que debe establecer la Oficina de la Reserva Federal si el objetivo es minimizar el costo esperado del gobierno.

b Demuestre que para un valor dado de $E(\mathbf{Z})$, un incremento en var $\mathbf{Z}$ disminuirá la tasa de crecimiento óptima del aprovisionamiento de dinero determinado en el inciso (a). (*Sugerencia:* aplique el hecho de que var $\mathbf{Z} = E(\mathbf{Z}^2) - E(\mathbf{Z})^2$.)

16.6 La EOQ con demanda incierta: modelos (r, q) y (s, S)

En esta sección se estudia una modificación de la EOQ que se usa cuando el plazo de entrega (o también demora en la entrega o tiempo de espera) no es cero y la demanda durante cada plazo de entrega es aleatoria. Se empieza por suponer que toda la demanda puede ser acumulada. Al igual que en el capítulo 15, se supone un modelo de revisión continuo, de tal modo que los pedidos se pueden hacer en cualquier momento, y se define

K = costo por hacer los pedidos
h = costo por almacenamiento/unidad/año
L = plazo de entrega de cada pedido (se supone que se conoce con certeza)
q = cantidad ordenada cada vez que se hace un pedido

Se requieren también las definiciones siguientes:

$\mathbf{D}$ = variable aleatoria (se supone que es continua) que representa la demanda anual, con media $E(\mathbf{D})$, varianza var $\mathbf{D}$ y desviación estándar $\sigma_{\mathbf{D}}$
c_B = costo generado por cada unidad faltante, el cual no depende de cuánto tome agotar las existencias
$OHI(t)$ = inventario disponible (existencias) en el tiempo t

De acuerdo con la figura 3, se puede ver que $OHI(1) = 100$, $OHI(0) = 200$ y $OHI(6) = OHI(7) = 0$.

$B(t)$ = cantidad de pedidos pendientes en el tiempo t
$I(t)$ = nivel neto de existencias en el tiempo $t = OHI(t) - B(t)$
r = nivel de existencias en el cual se hace el pedido (punto de reabastecimiento)

En la figura 3, $B(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 6$ y $B(7) = 100$. $I(t)$ concuerda con el concepto de inventario usado en el capítulo 15; $I(0) = 200 - 0 = 200$, $I(3) = 260 - 0 = 260$ y $I(7) =$

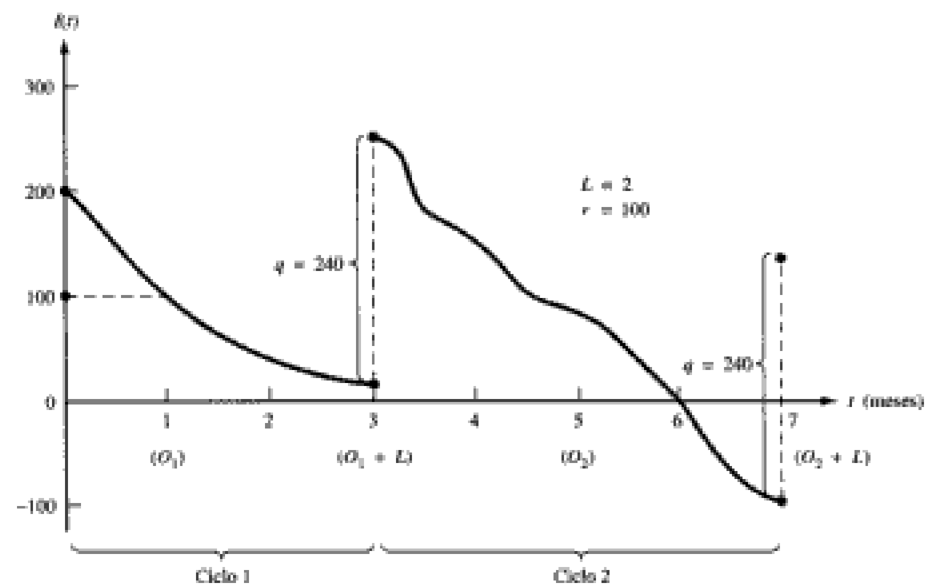


FIGURA 3
Evolución respecto al tiempo del inventario en el modelo del punto de reabastecimiento

$0 - 100 = -100$. El punto de reabastecimiento $r = 100$; siempre que el nivel de existencias llega a r, se hace un pedido de q unidades.

X = variable aleatoria que representa la demanda durante el plazo de la entrega

Suponemos que **X** es una variable aleatoria continua que tiene función de densidad $f(x)$ y media, varianza y desviación estándar de $E(\mathbf{X})$, var **X** y σ_x, respectivamente. Si suponemos, además, que las demandas en puntos distintos en el tiempo son independientes, entonces, se puede demostrar que la demanda aleatoria en el plazo de entrega, **X**, satisface

$$E(\mathbf{X}) = LE(\mathbf{D}), \qquad \text{var } \mathbf{X} = L(\text{var } \mathbf{D}), \qquad \sigma_{\mathbf{X}} = \sigma_{\mathbf{D}}\sqrt{L} \tag{8}$$

Suponemos que si **D** está normalmente distribuida, entonces **X** también seguirá una distribución normal.

Suponga que la demora en la entrega L es una variable aleatoria (que se denota con **L**), con media $E(\mathbf{L})$, varianza var **L** y desviación estándar $\sigma_{\mathbf{L}}$. Si el plazo para la entrega es independiente de la demanda por unidad de tiempo durante el plazo de entrega, entonces

$$E(\mathbf{X}) = E(\mathbf{L})E(\mathbf{D}) \qquad \text{y} \qquad \text{var } \mathbf{X} = E(\mathbf{L})(\text{var } \mathbf{D}) + E(\mathbf{D})^2(\text{var } \mathbf{L}) \tag{8'}$$

Queremos elegir q y r de tal manera que minimicen el costo total anual esperado (exclusivo de costo de compra). Antes de mostrar cómo encontrar los valores óptimos de r y q, examinemos una explicación de cómo el inventario evoluciona con el tiempo. Suponga que un pedido de $q = 240$ unidades llega justo en el tiempo 0. También supongamos que $L = 2$. En la figura 3, los pedidos de tamaño q se hacen en los tiempos $O_1 = 1$ y $O_2 = 5$. Estos pedidos se reciben en los tiempos $O_1 + L = 3$ y $O_2 + L = 7$, respectivamente. Un **ciclo** se define como el tiempo entre dos instantes cualesquiera en los cuales se recibe un pedido. La figura 3 tiene dos ciclos completos: el ciclo 1, desde la llegada del pedido en el tiempo 0 hasta el instante antes de que el pedido llegue en el tiempo $O_1 + L = 3$; y el ciclo 2, desde la llegada del pedido en el tiempo $O_1 + L = 3$ hasta el instante antes de que el pedido llegue en el tiempo $O_2 + L = 7$.

Durante el ciclo 1, la demanda durante el plazo de entrega es menor que r, de modo que no hay déficit. Durante el ciclo 2, la demanda durante el plazo de entrega excede r, así que se agotan las existencias entre el tiempo 6 y el tiempo $O_2 + L = 7$. Debe quedar claro que al incrementar r podemos reducir el agotamiento de existencias. Infortunadamente, al incrementar r nos obligamos a llevar más inventario, y, por lo tanto, sube el costo por tener almacenados los bienes. Por consiguiente, un valor óptimo de r tiene que representar algún tipo de transacción entre los costos por almacenar los productos y los costos generados al agotarse las existencias.

A continuación mostraremos cómo se pueden definir los valores de q y r.

Determinación del punto de reabastecimiento: el caso de pedidos pendientes

La situación en la cual toda la demanda debe cumplirse a la larga y no perder venta alguna se llama el **caso de pedidos pendientes**, para la cual mostraremos cómo determinar el punto de reabastecimiento y pedir la cantidad que minimice el costo anual esperado.

Supongamos que cada unidad se compra al mismo precio; por lo tanto, los costos de compra son fijos. Definamos $TC(q, r)$ = costo anual esperado (sin incluir costo de compra) que se genera si cada pedido es por q unidades y se hace cuando el punto de reabastecimiento es r. Entonces, $TC(q, r)$ = (costo anual esperado por conservar los bienes) + (costo anual esperado por hacer el pedido) + (costo anual esperado debido a la falta de producto). Con el objeto de determinar el punto de reabastecimiento óptimo y cantidad del pedido, supongamos que la cantidad promedio de pedidos pendientes es pequeña en relación con el nivel promedio de existencias disponibles. Esta suposición es razonable en la mayoría de los casos porque la falta de existencias (si se presentan) por lo regular ocurren durante sólo una pequeña parte del ciclo. (Véase problema 5 al final de esta sección.) Entonces, $I(t) = OHI(t) - B(t)$ genera

$$\text{Valor esperado de } I(t) \cong \text{valor esperado de } OHI(t) \tag{9}$$

Ahora ya podemos aproximar el costo por conservar los bienes que se espera en el año. Sabemos que costo por conservar los bienes anual esperado $= h$ (valor esperado del nivel de existencias disponible). Entonces, de acuerdo con (9), podemos obtener un valor aproximado del costo por conservar los bienes esperado al año mediante h(valor esperado de $I(t)$). Al igual que en el capítulo 3, el valor esperado de $I(t)$ será igual al valor esperado de $I(t)$ durante un ciclo. Como la tasa media a la cual se presenta la demanda es constante, escribimos

$$\begin{aligned}&\text{Valor esperado de } I(t) \text{ durante un ciclo}\\ &\quad = \tfrac{1}{2}[(\text{valor esperado de } I(t) \text{ al principio del ciclo})\\ &\qquad + (\text{valor esperado de } I(t) \text{ al final del ciclo})]\end{aligned} \tag{10}$$

Al final del ciclo (un instante antes de que llegue un pedido), el nivel de existencias será igual al nivel de existencias en el punto de reabastecimiento (r) menos la demanda $\mathbf{X}$ durante el plazo en la entrega. Por lo tanto, el valor esperado de $I(t)$ al final del ciclo $= r - E(\mathbf{X})$.

Al principio de un ciclo, el nivel de existencias al final del ciclo aumenta con la llegada de un pedido de tamaño q. Por lo tanto, el valor esperado de $I(t)$ al principio del ciclo es igual a $= r - E(\mathbf{X}) + q$. Ahora, con (10) obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Valor esperado de } I(t) \text{ durante el ciclo} &= \tfrac{1}{2}(r - E(\mathbf{X}) + r - E(\mathbf{X}) + q)\\ &= \tfrac{q}{2} + r - E(\mathbf{X})\end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo anual esperado por almacenar los productos $\cong h(\frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X}))$.

Para determinar el costo anual esperado debido al agotamiento de las existencias o los pedidos pendientes, debemos definir

$\mathbf{B}_r =$ variable aleatoria que representa el agotamiento de existencias o pedidos pendientes durante un ciclo si el punto de reabastecimiento es r

Ahora,

$$\text{Costo del déficit anual esperado} = \left(\frac{\text{costo esperado del déficit}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclos esperados}}{\text{año}}\right)$$

Con la definición de $\mathbf{B}_r$,

$$\frac{\text{Costo esperado del déficit}}{\text{Ciclo}} = c_B E(\mathbf{B}_r)$$

Como la demanda se cumplirá a la larga, un promedio de $\frac{E(\mathbf{D})}{q}$ pedidos se hará cada año. Entonces,

$$\frac{\text{costo esperado del déficit}}{\text{Año}} = \frac{c_B E(\mathbf{B}_r) E(\mathbf{D})}{q}$$

Por último,

$$\text{Costo anual esperado por hacer los pedidos} = K\left(\frac{\text{pedidos esperados}}{\text{año}}\right) = \frac{KE(\mathbf{D})}{q}$$

Luego de reunir el costo anual esperado por conservar los bienes, el costo por déficit y el costo por hacer pedidos, obtenemos

$$TC(q, r) = h\left(\frac{q}{2} + r - E(\mathbf{X})\right) + \frac{c_B E(\mathbf{B}_r) E(\mathbf{D})}{q} + \frac{KE(\mathbf{D})}{q} \tag{11}$$

Por medio del método descrito en la sección 11.5, podríamos hallar el valor de q y r que minimice (11) determinando q^* y r^* de q y r que satisface

$$\frac{\partial TC(q^*, r^*)}{\partial q} = \frac{\partial TC(q^*, r^*)}{\partial r} = 0 \tag{12}$$

En el problema de repaso 7 se ilustra el uso de LINGO para determinar los valores de q

Luego sustituimos $q^* = 100$ en (13) para determinar el punto de reabastecimiento. Para hacerlo, requerimos encontrar la distribución de probabilidad de **X**, la demanda en el plazo de entrega. Como $L = 2$ semanas, **X** estará normalmente distribuida con

$$E(\mathbf{X}) = \frac{E(\mathbf{D})}{26} = \frac{1\,000}{26} = 38.46 \qquad \text{y} \qquad \sigma_{\mathbf{X}} = \frac{\sigma_{\mathbf{D}}}{\sqrt{26}} = \frac{40.8}{\sqrt{26}} = 8$$

Ya que $c_B = 20$ dólares, (13) ahora genera

$$P(\mathbf{X} \geq r) = \frac{10(100)}{20(1\,000)} = .05 \tag{14}$$

Usamos la función de Excel DISTR.NORM.INV. Como

=NORMINV(0.95,38.46,8)

da 51.62, tenemos que el nivel de las existencias de seguridad es $r - E(\mathbf{X}) = 51.62 - 38.46 = 13.16$.

Para ver cómo un plazo de entrega variable afectaría el punto de reabastecimiento y el nivel de las existencias de seguridad, suponga que el plazo de entrega tiene una media de dos semanas, pero tiene una desviación estándar de una semana ($\frac{1}{52}$ de año). Luego, con (8′) se obtiene

$$\sigma^2_{\mathbf{X}} = (\tfrac{1}{26})(40.8)^2 + (1000)^2\,(\tfrac{1}{52})^2 = 64.02 + 369.82 = 433.84$$
$$\sigma_{\mathbf{X}} = \sqrt{433.84} = 20.83$$

Encontraríamos que $r = 38.46 + 1.65(20.83) = 72.83$ y que las existencias de seguridad se mantienen en $1.65(20.83) = 34.37$, si supusiéramos que la demanda en el plazo de entrega está normalmente distribuida. Por lo tanto, la variabilidad del plazo de entrega ¡es más del doble del nivel de existencias de seguridad requerido!

Determinación del punto de reabastecimiento: el caso de las ventas perdidas

Enseguida se supone que el agotamiento de las existencias ocasiona pérdida de ventas y que se genera un costo de c_{LS} dólares por cada venta perdida. (Además de las penalizaciones por la pérdida de la clientela futura, c_{LS} debería incluir la pérdida de ganancias debido a la venta perdida.)

Al igual que en el caso de los pedidos pendientes o incumplidos, suponemos que se puede aproximar en forma apropiada la cantidad pedida óptima mediante la EOQ, e intentar usar el análisis marginal para determinar el punto de reabastecimiento óptimo r^* (véase problema 6 al final de esta sección). La cantidad pedida óptima q^* y el punto de reabastecimiento r^* para el caso de las ventas perdidas son

$$q^* = \left(\frac{2KE(\mathbf{D})}{h}\right)^{1/2}$$
$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(\mathbf{D})} \tag{15}$$

La clave para deducir (15) es darse cuenta que el inventario esperado en el caso de las ventas perdidas = (inventario esperado en el caso de los pedidos incumplidos) + (cantidad esperada de déficit por ciclo). Esta ecuación se deduce porque en el caso de las ventas perdidas encontramos que, durante cada ciclo, un promedio de (déficit esperado por ciclo) pocos pedidos se surtirán del inventario, con lo cual se elevaría el nivel promedio del inventario por una cantidad igual a los déficit esperados por ciclo. Observe que el lado derecho de (15) es menor que el lado derecho de (13). Por lo tanto, la suposición de las ventas perdidas genera una probabilidad de agotamiento de las existencias menor (y un punto de reabastecimiento y nivel de existencias de seguridad más grandes que en la suposición de los pedidos pendientes.

Con el fin de ilustrar el uso de (15) continuamos el estudio del ejemplo 5. Suponga que cada caja de discos se vende en 50 dólares y a la tienda le cuesta 30 dólares. Si se supone que el costo del agotamiento de las existencias de 20 dólares mencionado en el ejemplo 5 representa la clientela perdida, obtenemos c_{LS} al sumar la ganancia perdida (50 − 30) dólares a la clientela perdida de 20 dólares. Por lo tanto, $c_{LS} = 20 + 20 = 40$. Recuerde que, según el ejemplo 5, $E(\mathbf{D}) = 1000$ cajas por año, $h = 10$ dólares/caja/año, EOQ = 100 cajas y $K = 50$ dólares. Ahora (15) da

$$P(\mathbf{X} \geq r^*) = \frac{10(100)}{10(100) + 40(1000)} = .024$$

Se usa Excel para calcular r. Como con

=NORMINV(.976,38.46,8)

se obtiene 54.28, tenemos que $r = 54.28$. Por lo tanto, en el caso de las ventas perdidas, el nivel de existencias de seguridad es $54.28 - 38.46 = 15.82$.

Estrategias de revisión continua (r, q)

Una estrategia de revisión continua del inventario, en la cual se pide una cantidad q siempre que el nivel del inventario llegue a un nivel de reabastecimiento r, se llama a menudo **estrategia (r, q)**. Una estrategia (r, q) también se llama **estrategia de las dos urnas** porque se puede poner en marcha mediante dos recipientes para almacenar un producto. Por ejemplo, para poner en marcha una estrategia (30, 500), surtimos los pedidos de la urna 1 con la condición de que la urna 1 contenga algunos productos. Tan pronto como la urna 1 se vacíe, sabemos que se ha alcanzado el punto de reabastecimiento $r = 30$, y entonces hacemos un pedido de $q = 500$ unidades. Cuando el pedido llega, colocamos 30 unidades en la urna 2, y el resto de las 500 unidades pedidas las ponemos en la urna 1. Por lo tanto, cada vez que la urna 1 queda vacía, sabemos que ya se alcanzó el punto de reabastecimiento.

Estrategias de revisión continua (s, S)

En la deducción de la mejor estrategia (r, q), supusimos que un pedido se puede hacer exactamente en el punto cuando el nivel de inventario alcanza el punto de reabastecimiento r. Usamos este supuesto para calcular el nivel esperado del inventario en el principio y el final de un ciclo. Suponga que una demanda por más de una unidad puede llegar en un momento particular. Luego entonces, un pedido se podría activar cuando el nivel de inventario es menor que r, y entonces es incorrecto el cálculo del nivel esperado del inventario al final y al principio de un ciclo. Por ejemplo, suponga que $r = 30$ y el nivel de inventario actual es 35. Si llega un pedido de 10 unidades, se hará un pedido cuando el nivel del inventario es 25 (no $r = 30$), lo cual invalida los cálculos que llevaron a (11). A partir de este análisis se ve que es posible por lo que se refiere al nivel de inventario quedarse abajo del punto de reabastecimiento.

Observe que no ocurriría este problema si todas las demandas fueran de una unidad, porque entonces el nivel del inventario caería de (por decir algo) 32 a 31, y luego a 30, y cada pedido se haría cuando el nivel de inventario igualara el punto de reabastecimiento r. De acuerdo con este ejemplo, vemos que si las demandas de tamaño mayor que una unidad se presentan en un punto en el tiempo, entonces el modelo (r, q) no proporcionaría una estrategia que minimice el costo anual esperado.

Se ha demostrado que para tales situaciones una **estrategia (s, S)** es óptima. Para organizar una estrategia (s, S) se hace un pedido cada vez que el nivel de inventario es menor que o igual a s. El tamaño del pedido es suficiente para elevar el nivel del inventario a S (suponiendo que el plazo de entrega es cero). Por ejemplo, si estuviéramos poniendo en marcha una estrategia (5, 40) y el nivel del inventario bajara en forma súbita de 7 a 3, haríamos inmediatamente un pedido de $40 - 3 = 37$ unidades. Es difícil el cálculo exacto de la estrategia (s, S) óptima. Si ignoramos el problema de "quedarse por abajo", podríamos encontrar un valor aproximado de la estrategia (s, S) de la manera siguiente. Se

16.7 La EOQ con demanda incierta: método del nivel de servicio para determinar el nivel de existencias de seguridad

Ya se estableció que es muy difícil, por lo regular, determinar con exactitud el costo de que falte una unidad. Por esta razón, los administradores deciden, a menudo, controlar los faltantes aproximándose a un nivel de servicio especificado. Dos medidas del nivel de servicio se tratan en esta sección.

Medida del nivel de servicio 1 SLM_1, la fracción esperada (por lo regular se expresa como porcentaje) de toda la demanda que se cumple a tiempo.

Medida del nivel de servicio 2 SLM_2, número esperado de ciclos al año durante los cuales se presenta un déficit.

Se supone, a lo largo de toda esta sección, que todos los faltantes se acumulan. Mediante el ejemplo siguiente se ilustra el significado de las dos medidas de nivel de servicio.

EJEMPLO 6 ***SLM_1* Y *SLM_2***

Suponga que para una situación de inventario dada, la demanda anual promedio es 1000 y la EOQ es 100. La demanda durante un plazo de entrega es aleatoria y se expresa mediante la distribución de probabilidad de la tabla 12. Determine SLM_1 y SLM_2 para el caso de un punto de reabastecimiento de 30 unidades.

Solución La demanda esperada durante un plazo de entrega es $\frac{1}{5}(20) + \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{5}(40) + \frac{1}{5}(50) + \frac{1}{5}(60) = 40$ unidades. Si el punto de reabastecimiento es de 30 unidades, entonces nos reabasteceremos durante cada ciclo en el momento en que el nivel del inventario llegue a 30 unidades. Si la demanda en el plazo de entrega durante un ciclo es de 20 o 30 unidades, no experimentaremos déficit alguno. Durante un ciclo en el cual la demanda en el plazo de entrega es 40, habrá un déficit de 10 unidades; si la demanda en el plazo de entrega es 50, habrá un déficit de 20 unidades; si la demanda en el plazo de entrega es 60, habrá un déficit de 30 unidades. Por lo tanto, la cantidad esperada de unidades faltantes por ciclo está dada por $\frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(0) + \frac{1}{5}(10) + \frac{1}{5}(20) + \frac{1}{5}(30) = 12$.

Puesto que EOQ = 100 y se debe cumplir a la larga con toda la demanda, el número promedio de pedidos hechos cada año será $\frac{E(\mathbf{D})}{q} = \frac{1000}{100} = 10$. Entonces, la cantidad promedio de faltantes que ocurre durante un año será igual a $10(12) = 120$ unidades. Por consiguiente, en promedio, la demanda de $1\,000 - 120 = 880$ unidades se cumple, cada año, a tiempo. En este caso, $SLM_1 = \frac{880}{1000} = 0.88$, es decir, 88%. Esto demuestra que aun cuando el punto de reabastecimiento es menor que la demanda media en el plazo de entrega, podría resultar una SLM_1 relativamente alta, porque el agotamiento de las existencias sólo se presenta durante el plazo de entrega, el cual es a menudo una pequeña parte de cada ciclo.

Ahora determinaremos SLM_2 para un punto de reabastecimiento de 30. Con este punto puede ocurrir un agotamiento de existencias durante cualquier ciclo en el cual la demanda en el plazo de entrega exceda 30 unidades. Por lo tanto, la probabilidad de que se agoten las existencias durante un ciclo es $= P(\mathbf{X} = 40) + P(\mathbf{X} = 50) + P(\mathbf{X} = 60) = \frac{3}{5}$.

TABLA 12
Función de masa para la demanda en el plazo de entrega

Demanda en el plazo de entrega	Probabilidad
20	$\frac{1}{5}$
30	$\frac{1}{5}$
40	$\frac{1}{5}$
50	$\frac{1}{5}$
60	$\frac{1}{5}$

Como hay un promedio de 10 ciclos por año, el número esperado de ciclos por año que dará por resultado déficit es 10 $(\frac{3}{5}) = 6$. Por lo tanto, un punto de reabastecimiento de 30 genera una $SLM_2 = 6$ agotamientos de existencias por año.

Determinación del punto de reabastecimiento y nivel de existencias de seguridad para *SLM*$_1$

Si tenemos un valor deseado de SLM_1, ¿cómo determinaremos un punto de reabastecimiento que proporcione el nivel de servicio deseado? Suponga que pedimos la EOQ (q) y usamos un punto de reabastecimiento r. Según la sección 16.6,

$$\frac{\text{Déficit esperados}}{\text{Ciclo}} = E(\mathbf{B}_r)$$

$$\frac{\text{Déficit esperados}}{\text{Año}} = \frac{E(\mathbf{B}_r)E(\mathbf{D})}{q}$$

Aquí, $E(\mathbf{D})$ es la demanda anual promedio. Sea SLM_1 el porcentaje de toda la demanda que se cumple a tiempo. Entonces, para valores dados de q (para la cantidad pedida q) y r (para el punto de reabastecimiento) tenemos

$$1 - SLM_1 = \frac{\text{déficit esperado por año}}{\text{demanda esperada por año}} = \frac{E(\mathbf{B}_r)E(\mathbf{D})/q}{E(\mathbf{D})} = \frac{E(\mathbf{B}_r)}{q} \tag{16}$$

Mediante la ecuación (16) se puede determinar el punto de reabastecimiento que genera un nivel de servicio deseado. Ahora suponemos que la demanda en el plazo de entrega sigue una distribución normal, con media $E(\mathbf{X})$ y desviación estándar σ_x. Para poder usar (16), requerimos conocer $E(\mathbf{B}_r)$. Si $\mathbf{X}$ está normalmente distribuida, para la determinación de $E(\mathbf{B}_r)$ necesitamos conocer la función de pérdida normal.

DEFINICIÓN ■ La **función de pérdida normal**, $NL(y)$, está definida por el hecho de que $\sigma_X NL(y)$ es el número esperado de déficit que ocurrirá durante un plazo de entrega si (1) la demanda en el plazo de entrega está normalmente distribuida con media $E(\mathbf{X})$ y distribución estándar σ_x y (2) el punto de reabastecimiento es $E(\mathbf{X}) + y\sigma_X$. ■

En pocas palabras, si conservamos y desviaciones estándar (desde el punto de vista de la demanda en el plazo de entrega) de las existencias de seguridad, entonces $NL(y)\sigma_x$ es el número esperado de déficit durante un plazo de entrega.

Puesto que un punto de reabastecimiento elevado ocasiona pocos faltantes, esperaríamos que $NL(y)$ sea una función no creciente de y. De hecho, éste es el caso. La función $NL(y)$ se presenta en la tabla 13. Por ejemplo, $NL(0) = 0.3989$ significa que si el punto de reabastecimiento es igual a la demanda esperada en el plazo de entrega y la desviación estándar de la demanda en el plazo de entrega es σ_X, entonces ocurrirá un promedio de $0.3989\sigma_X$ déficit durante un plazo de entrega. De igual modo, $NL(2) = 0.0085$ significa que si el punto de reabastecimiento excede por $2\sigma_X$ la demanda media en el plazo de entrega, entonces un promedio de $0.0085\sigma_x$ déficit se presentará durante un plazo de entrega dado. $NL(y)$ no se tabula para valores negativos de y. La razón es que se puede demostrar que para $y \leq 0$, $NL(y) = NL(-y) - y$. Por ejemplo, $NL(-2) = NL(2) + 2 = 2.0085$. Esto quiere decir que si el punto de reabastecimiento es $2\sigma_x$ menor que la demanda media en el plazo de entrega, entonces habrá un promedio de $2.0085\sigma_X$ déficit durante cada ciclo.

Se puede aplicar LINGO con la función **@PSL** para calcular valores de la función de pérdida normal. En LINGO, el programa

```
MODEL:
 x = @PSL(2);
END
```

genera un valor de $x = .0085$.

TABLA 13
Función de pérdida normal

x	$NL(x)$	x	$NL(x)$	x	$NL(x)$
0.00	0.3989	0.40	0.2304	0.80	0.1202
0.01	0.3940	0.41	0.2270	0.81	0.1181
0.02	0.3890	0.42	0.2236	0.82	0.1160
0.03	0.3841	0.43	0.2203	0.83	0.1140
0.04	0.3793	0.44	0.2169	0.84	0.1120
0.05	0.3744	0.45	0.2137	0.85	0.1100
0.06	0.3697	0.46	0.2104	0.86	0.1080
0.07	0.3649	0.47	0.2072	0.87	0.1061
0.08	0.3602	0.48	0.2040	0.88	0.1042
0.09	0.3556	0.49	0.2009	0.89	0.1023
0.10	0.3509	0.50	0.1978	0.90	0.1004
0.11	0.3464	0.51	0.1947	0.91	0.09860
0.12	0.3418	0.52	0.1917	0.92	0.09680
0.13	0.3373	0.53	0.1887	0.93	0.09503
0.14	0.3328	0.54	0.1857	0.94	0.09328
0.15	0.3284	0.55	0.1828	0.95	0.09156
0.16	0.3240	0.56	0.1799	0.96	0.08986
0.17	0.3197	0.57	0.1771	0.97	0.08819
0.18	0.3154	0.58	0.1742	0.98	0.08654
0.19	0.3111	0.59	0.1714	0.99	0.08491
0.20	0.3069	0.60	0.1687	1.00	0.08332
0.21	0.3027	0.61	0.1659	1.01	0.08174
0.22	0.2986	0.62	0.1633	1.02	0.08019
0.23	0.2944	0.63	0.1606	1.03	0.07866
0.24	0.2904	0.64	0.1580	1.04	0.07716
0.25	0.2863	0.65	0.1554	1.05	0.07568
0.26	0.2824	0.66	0.1528	1.06	0.07422
0.27	0.2784	0.67	0.1503	1.07	0.07279
0.28	0.2745	0.68	0.1478	1.08	0.07138
0.29	0.2706	0.69	0.1453	1.09	0.06999
0.30	0.2668	0.70	0.1429	1.10	0.06862
0.31	0.2630	0.71	0.1405	1.11	0.06727
0.32	0.2592	0.72	0.1381	1.12	0.06595
0.33	0.2555	0.73	0.1358	1.13	0.06465
0.34	0.2518	0.74	0.1334	1.14	0.02034
0.35	0.2481	0.75	0.1312	1.15	0.06210
0.36	0.2445	0.76	0.1289	1.16	0.06086
0.37	0.2409	0.77	0.1267	1.17	0.05964
0.38	0.2374	0.78	0.1245	1.18	0.05844
0.39	0.2339	0.79	0.1223	1.19	0.05726

(Continúa)

TABLA 13
(Continuación)

x	$NL(x)$	x	$NL(x)$	x	$NL(x)$
3.60	0.00003911	3.75	0.00002103	3.90	0.00001108
3.61	0.00003755	3.76	0.00002016	3.91	0.00001061
3.62	0.00003605	3.77	0.00001933	3.92	0.00001016
3.63	0.00003460	3.78	0.00001853	3.93	0.00000972
3.64	0.00003321	3.79	0.00001776	3.94	0.000009307
3.65	0.00003188	3.80	0.00001702	3.95	0.000008908
3.66	0.00003059	3.81	0.00001632	3.96	0.000008525
3.67	0.00002935	3.82	0.00001563	3.97	0.000008158
3.68	0.00002816	3.83	0.00001498	3.98	0.000007806
3.69	0.00002702	3.84	0.00001435	3.99	0.000007469
3.70	0.00002592	3.85	0.00001375	4.00	0.000007145
3.71	0.00002486	3.86	0.00001317		
3.72	0.00002385	3.87	0.00001262		
3.73	0.00002287	3.88	0.00001208		
3.74	0.00002193	3.89	0.00001157		

Fuente: Tomado con autorización de R. Peterson y E. Silver, *Decision Systems for Inventory and Production Planning*, © 1998 John Wiley & Sons, Nueva York.

Si suponemos una demanda normal en el plazo de entrega, calculemos ahora el punto de reabastecimiento r que generará un nivel deseado de SLM_1 (expresado como una fracción). Un punto de reabastecimiento de r corresponde a sostener

$$y = \frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}$$

desviaciones estándar de existencias de seguridad. En estas circunstancias, de la definición de la función de pérdida normal se infiere que durante un plazo de entrega, un punto de reabastecimiento r origina un número esperado de faltantes $E(\mathbf{B}_r)$ dado por

$$E(\mathbf{B}_r) = \sigma_{\mathbf{X}} NL\left(\frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}\right) \tag{17}$$

Al sustituir (17) en (16), se obtiene el punto de reabastecimiento para SLM_1 con demanda normal en el plazo de entrega:

$$1 - SLM_1 = \frac{\sigma_{\mathbf{X}} NL\left(\frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}\right)}{q}$$

$$NL\left(\frac{r - E(\mathbf{X})}{\sigma_{\mathbf{X}}}\right) = \frac{q(1 - SLM_1)}{\sigma_{\mathbf{X}}} \tag{18}$$

Con excepción de r, se conocen todas las cantidades de (18). Por lo tanto, (18) y la tabla 13 se pueden utilizar para determinar el punto de reabastecimiento que corresponde a un nivel dado de SLM_1.

EJEMPLO 7 Bads, Inc

Esta compañía vende cada año un promedio de 1000 procesadores de alimentos. Cada pedido de este electrodoméstico que hace Bads cuesta 50 dólares. El plazo de entrega es de un mes. Cuesta 10 dólares sostener un procesador de alimentos en inventario durante un año. La demanda anual de estos aparatos sigue una distribución normal, con desviación

TABLA 14
Puntos de reabastecimiento para varios niveles de servicio

SLM_1	Punto de reabastecimiento
80%	65.33
90%	79.53
95%	90.13
99%	108.33
99.9%	127.13

Por último, para un nivel de servicio de 99.9%, r debe satisfacer

$$\frac{r - 83.33}{20} = \frac{(1 - 0.999)100}{20} = 0.005$$

Ya que $NL(2.19) = 0.005$,

$$\frac{r - 83.33}{20} = 2.19$$

$$r = 83.33 + 20(2.19) = 127.13$$

En resumen, los puntos de reabastecimiento que corresponden a los distintos valores de SLM_1 se proporcionan en la tabla 14. Observe que para pasar de un nivel de servicio de 80% a uno de 90% es necesario aumentar el punto de reabastecimiento en 14.20, pero para ir de un nivel de servicio de 90% a uno de 99.9%, el punto de reabastecimiento debe aumentar 47.60. Para niveles de servicio superiores se requiere un incremento mucho mayor en el punto de reabastecimiento, a fin de producir un incremento del mismo tamaño en el nivel de servicio.

Cálculo del nivel del punto de reabastecimiento para SLM_1 mediante LINGO

Si se usa la función **@PSL** de LINGO, es un asunto sencillo calcular el nivel del punto de reabastecimiento para SLM_1. Por ejemplo, para calcular el punto de reabastecimiento del ejemplo 7 que corresponde a $SLM_1 = .90$ con LINGO, usaríamos el programa

```
MODEL:
1) @PSL((R - 83.33)/20) = 100*(1 - SLM1)/20;
2) SLM1 = .9;
```

Este programa proporciona una $r = 79.57$. Observe que al modificar el lado derecho del renglón 2 se calculan rápidamente los puntos de reabastecimiento para varios valores de SLM_1.

Cálculo de la función de pérdida normal mediante Excel

Se puede demostrar que

$NL(y)$ = (altura de la densidad normal en y) − y*(probabilidad normal estándar es mayor que o igual a y)

Normalloss.xls

por lo tanto, en el archivo Normalloss.xls, calculamos $NL(y)$ con la fórmula de Excel

=NORMDIST(D3,0,1,0)-D3*(1-NORMSDIST(D3))

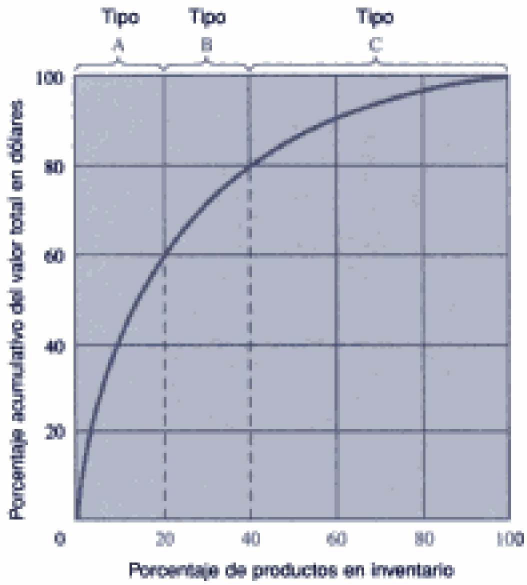


FIGURA 8
Ejemplo de la clasificación de inventario ABC

plazo de entrega, desviación estándar de la demanda anual y costos por los faltantes se deben revisar con frecuencia regular.

En lo que se refiere a los productos tipo B, Hax y Candea (1984), recomiendan que SLM_1 debe fijarse en 95%. Las estrategias de inventario para los productos tipo B se controlan por lo regular mediante una computadora. Los parámetros para los productos tipo B se deben revisar con menor frecuencia que los de los productos tipo A.

El sencillo sistema de las dos urnas es, por lo común, adecuado para los productos tipo C. Los parámetros se revisan una o dos veces al año. La demanda de los productos tipo C se podría predecir aplicando métodos de extrapolación simple. Se recomienda un valor alto para SLM_1 (casi siempre 98 o 99%). Se requiere poca inversión extra en existencias de seguridad para mantener estos altos niveles de servicio.

DEVRO Incorporated, un fabricante de membranas comestibles para cubrir las carnes frías, puso en marcha un análisis ABC de su inventario de sus repuestos, y encontró que 2.5% de todos los productos (los productos tipo A) explicaban el 49% del uso de los dólares y 24.7% de todos los productos (productos tipo B), el 38%. Luego de preparar por anticipado formas para requisición en el caso de los productos tipo A y tipo B, DEVRO fue capaz de disminuir de manera importante el plazo de entrega necesario para conseguir dichos productos. Esto ayudó a DEVRO a hacer grandes ahorros en los costos anuales de inventario. Véanse los detalles en Flowers y O'Neill (1978).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Trace una gráfica ABC para los datos de la tabla 16. ¿Qué productos se podrían clasificar como A, B y C?

TABLA 16

Producto	Uso anual	Costo unitario (en dólares)
1	20 000	20
2	23 000	10
3	20 000	3
4	30 000	2
5	5000	10
6	10 000	7
7	1000	30
8	2000	15
9	3000	10
10	5000	6

16.10 Curvas de cambio

Es difícil estimar exactamente los costos por conservar un producto y por déficit en muchos casos. Entonces se pueden usar las **curvas de cambio** para identificar estrategias "razonables" de inventario. Considere una compañía que tiene en inventario dos productos (1 y 2). Son posibles varias estrategias para los pedidos. Por ejemplo, la compañía podría pedir el producto 1 cinco veces al año, y el producto 2, diez veces al año (estrategia 1), o bien, se podría pedir cada producto una vez al año (estrategia 2). Evidentemente, la estrategia 1 ocasiona costos más altos por hacer los pedidos que la estrategia 2, pero la estrategia 2 genera costos más altos por guardar los productos y un nivel promedio de inventario superior que la estrategia 1. Una curva de cambio permite mostrar en forma gráfica la transacción entre los costos por hacer los pedidos y la inversión promedio en el inventario.

Con el fin de ilustrar el trazo de una curva de cambio, suponga que una compañía tiene en inventario dos productos (producto 1 y producto 2), y que

c_i = costo de compra de cada unidad del producto i

h = costo por mantener el valor de 1 dólar de cada producto en inventario durante un año

K_i = costo por hacer un pedido del producto i

q_i = EOQ para el producto i

D_i = demanda anual del producto i

Luego

$$q_i = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{hc_i}}$$

Suponga que la compañía quiere minimizar la suma de los costos de los pedidos anuales y de conservar en inventario un producto. Entonces debe seguir una estrategia EOQ para cada producto y pedir q_i del producto i $\frac{D_i}{q_i}$ veces por año. Dos medidas de efectividad para esta (o cualquier otra) estrategia de pedidos, son

AII = valor promedio del dólar de los costos de inventario

AOC = costos anuales por hacer los pedidos

Si seguimos la estrategia EOQ para cada producto, entonces

$$\begin{aligned}
\text{AII} &= \left(\frac{q_1}{2}\right)c_1 + \left(\frac{q_2}{2}\right)c_2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left\{c_1\sqrt{\frac{2K_1D_1}{c_1h}} + c_2\sqrt{\frac{2K_2D_2}{c_2h}}\right\} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{h}}\right)\{\sqrt{K_1D_1c_1} + \sqrt{K_2D_2c_2}\} \\
\text{AOC} &= K_1\left(\frac{D_1}{q_1}\right) + K_2\left(\frac{D_2}{q_2}\right) \\
&= K_1D_1\sqrt{\frac{c_1h}{2K_1D_1}} + K_2D_2\sqrt{\frac{c_2h}{2K_2D_2}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2h}}{2}\right)\{\sqrt{K_1D_1c_1} + \sqrt{K_2D_2c_2}\}
\end{aligned}$$

La expresión para AII se infiere del hecho de que el nivel promedio de inventario de un producto es igual a la mitad de la cantidad pedida. La expresión para AOC proviene del hecho de que se hacen $\frac{D_i}{q_i}$ pedidos por año del producto i.

Hidden page

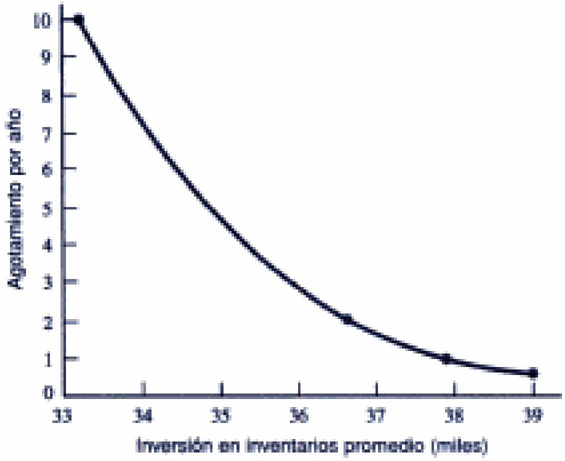


FIGURA 10
Curva de cambio para AII y *SY*

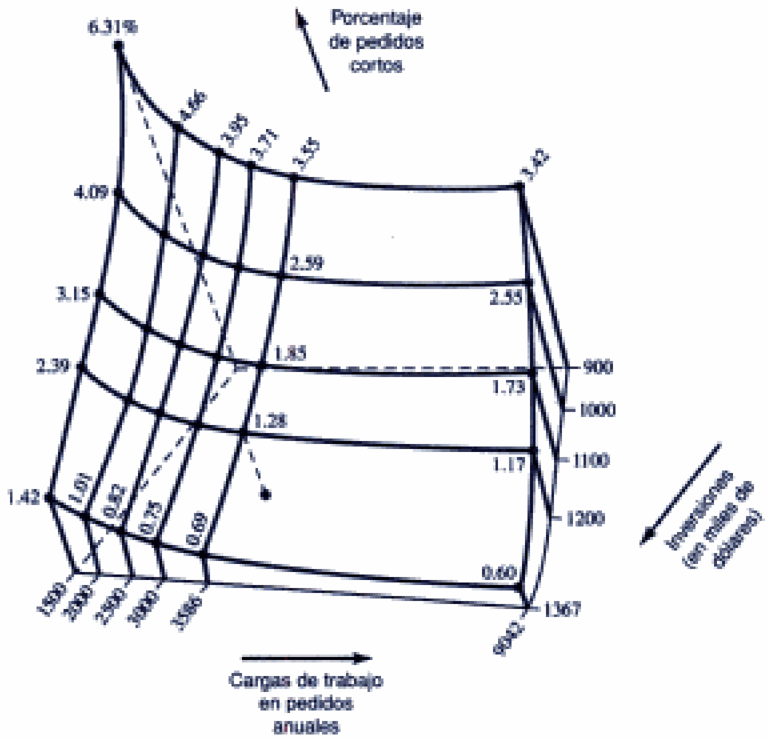


FIGURA 11
Ejemplo de una superficie de cambio†

medio en el inventario (en miles de dólares), y la coordenada z es el porcentaje de solicitudes que generan déficit. Por ejemplo, suponga que la fuerza armada ha fijado una inversión promedio del inventario de 900 000 dólares. Al variar la cantidad de pedidos por año entre 1500 y 9042, la fuerza armada puede variar el porcentaje de solicitudes que generan déficit entre 6.3 y 3.42%. Asimismo, si los pedidos anuales se fijan en 3000, entonces el porcentaje de solicitudes que origina faltantes varía entre 0.75 y 3.71%. Una superficie de cambio facilita la identificación de las transacciones que se dan entre el servicio mejorado, inversión incrementada en el inventario y carga de trabajo incrementado (pedidos por año).

†Reimpreso con permiso de E. Gardner y D. Dannenbring, "Using Optimal Policy Surfaces to Analize Aggregate Inventory Tradeoffs," *Management Science*, Vol. 25, No. 8, agosto 1979. Copyright 1979, the Institute of Management Sciences.

P R O B L E M A S

Grupo A

1 Considere un sistema de inventario para dos productos con los atributos de la tabla 21.

a Trace una curva de cambio para estos productos (utilice AOC y AII como las coordenadas x y y).

b La administración pide, en la actualidad, cada producto dos veces al año. ¿Cómo puede mejorar esta estrategia?

c Los costos por hacer los pedidos corresponden a tiempos de preparación de la maquinaria. El tiempo de máquina se valora en 50 dólares por hora. Si la administración quiere limitar el tiempo de preparación de las máquinas a 500 horas por año, ¿cuáles son las estrategias disponibles?

TABLA 21

	K_i	D_i	c_i
Producto 1	\$500	10 000	\$2000
Producto 2	\$800	20 000	\$250

2 Explique cómo trazar una curva de cambio donde la abscisa es AII y la ordenada es el porcentaje de todas las solicitudes de existencias que da por resultado déficit.

3 Considere la superficie de cambio de la figura 11. La estrategia actual de inventario ha generado 3586 pedidos al año, una AII de 1 367 000 dólares y 0.89% de faltantes.

a Sin cambiar los pedidos por año y la AII, ¿qué tanto pueden mejorar los faltantes?

b Si AII y los faltantes se mantienen en los niveles actuales, ¿qué tanto se pueden reducir los pedidos al año?

c Si los faltantes y los pedidos anuales se mantienen en los niveles presentes, ¿en cuánto se puede reducir la AII?

R E S U M E N

Modelos de decisión única

Un analista empieza por elegir un valor q de una variable de decisión. Entonces una variable aleatoria **D** sume un valor d. Por último, se genera un costo $c(d, q)$. El objetivo del que toma las decisiones es escoger q tal que minimice el costo esperado.

Problema del vendedor de periódicos

Si $c(d, q)$ tiene la estructura

$$c(d, q) = c_o q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \leq q) \tag{2}$$

$$c(d, q) = -c_u q + (\text{términos que no contienen } q) \qquad (d \geq q + 1) \tag{2.1}$$

el modelo de decisión de un solo periodo es un **problema del vendedor de periódicos**. Aquí

$$c_o = \text{costo por existencias excesivas por unidad}$$
$$c_u = \text{costo por falta de inventario por unidad}$$

Si **D** es una variable aleatoria discreta, el valor mínimo de q (q^*) que satisface la ecuación siguiente da la decisión óptima

$$F(q^*) \geq \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{3}$$

Si **D** es una variable aleatoria continua, la decisión óptima es el valor de q (q^*) que satisface

$$P(\mathbf{D} \leq q^*) = \frac{c_u}{c_o + c_u} \tag{5}$$

BIBLIOGRAFÍA

Las obras siguientes destacan más las aplicaciones que la teoría:

Brown, R. *Decision Rules for Inventory Management.* Nueva York: Holt, Rinehart and Winston, 1967.

Peterson, R. y E. Silver. *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning.* Nueva York: Wiley, 1998.

Tersine, R. *Principles of Inventory and Materials Management.* Nueva York: North-Holland, 1982.

Vollman, T., W. Berry y C. Whybark. *Manufacturing Planning and Control Systems.* Homewood, Ill.: Irwin, 1997.

En las obras siguientes se encuentran extensos análisis teóricos, así como aplicaciones.

Hadley, G. y T. Whitin. *Analysis of Inventory Systems.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1963.

Hax, A. y D. Candea. *Production and Inventory Management.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Johnson, L. y D. Montgomery. *Operations Research in Production, Scheduling, and Inventory Control.* Nueva York: Wiley, 1974.

Barron, H. "Payoff Matrices Pay Off at Hallmark", *Interfaces* 15(no. 4, 1985):20-25.

Bruno, J. "The Use of Monte-Carlo Techniques for Determining the Size of Substitute-Teacher Pools", *Socio-Economic Planning Science* 4(1970):415-428.

Flowers, D. y J. O'Neill. "An Application of Classical Inventory Analysis to a Spare Parts Inventory", *Interfaces* 8(no. 2, 1978):76-79.

Rosenfeld, D. "Optimal Management of Tax-Sheltered Employment Reimbursement Programs", *Interfaces* 16(no. 3, 1986):68-72.

Virts, J. y R. Garrett. "Weighting Risk in Capacity Expansion", *Harvard Business Review* 48(1970).

Véase un estudio sobre curvas y superficie de cambio en:

Gardner, E. y D. Dannenbring. "Using Optimal Policy Surfaces to Analyze Aggregate Inventory Tradeoffs", *Management Science* 25(1979):709-720.

17

Cadenas de Markov

Algunas veces se está interesado en cómo cambia una variable aleatoria con el tiempo. Por ejemplo, es posible que se desee saber cómo evoluciona el precio de una parte de las acciones o la participación en el mercado de una empresa. El estudio de cómo una variable aleatoria cambia con el tiempo incluye procesos estocásticos, los cuales se explican en este capítulo. En particular, se fija la atención en un tipo de proceso estocástico conocido como cadena de Markov. Las cadenas de Markov se han aplicado en áreas como educación, comercialización, servicios de salud, finanzas, contabilidad y producción. Comenzamos por definir el concepto de proceso estocástico. En el resto del capítulo, se analizan las ideas básicas necesarias para entender las cadenas de Markov.

17.1 ¿Qué es un proceso estocástico?

Suponga que se observan algunas características de un sistema en puntos discretos en el tiempo (identificados con 0, 1, 2, . . .). Sea $\mathbf{X}_t$ el valor de la característica del sistema en el tiempo t. En la mayoría de las situaciones, $\mathbf{X}_t$ no se conoce con certeza antes del tiempo t y se podría considerar como una variable aleatoria. Un **proceso estocástico discreto en el tiempo** es simplemente una descripción de la relación entre las variables aleatorias $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ A continuación se dan algunos ejemplos de procesos estocásticos discretos en el tiempo.

EJEMPLO 1 La ruina del jugador

En el tiempo 0, tengo \$2. En los tiempos 1, 2, . . . , participo en un juego en el que apuesto \$1. Con probabilidad p, gano el juego, y con probabilidad $1 - p$, pierdo el juego. Mi objetivo es incrementar mi capital a \$4, y cuando lo logre se termina el juego. El juego también se termina si mi capital se reduce a \$0. Si se define $\mathbf{X}_t$ como mi capital después de que se juega el juego en el tiempo t (si existe), entonces $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_t$ se podría considerar como un proceso estocástico discreto en el tiempo t. Observe que $\mathbf{X}_0 = 2$ es una constante conocida, pero $\mathbf{X}_1$ y las $\mathbf{X}_t$ posteriores son aleatorias. Por ejemplo, con probabilidad p, $\mathbf{X}_1 = 3$, y con probabilidad $(1 - p)$, $\mathbf{X}_1 = 1$. Observe que si $\mathbf{X}_t = 4$, entonces $\mathbf{X}_{t+1}$ y las $\mathbf{X}_t$ posteriores también serán igual a 4. De manera similar, si $\mathbf{X}_t = 0$, entonces todas las posteriores $\mathbf{X}_{t+1}$ y las adicionales $\mathbf{X}_t$ también serán igual a 0. Por razones evidentes, este tipo de situaciones se llama problema de la *ruina del jugador*.

EJEMPLO 2 Elección de colas de una urna

Por ejemplo, una urna tiene dos bolas sin pintar. Se elige una bola al azar y se lanza una moneda. Si la bola elegida no está pintada y resulta cara en la moneda, se pinta de rojo la bola; si la bola elegida está sin pintar y la moneda muestra una cruz, la bola elegida se pinta de negro. Si la bola ya está pintada, entonces (ya sea que resulte cara o cruz en los lanzamientos de la moneda) se cambia el color de la bola (de rojo a negro y de negro a rojo). Para modelar esta situación como un proceso estocástico, se define el tiempo t como el tiempo después que se lanzó la moneda por t-ésima vez y se pintó la bola elegida.

El estado en cualquier instante se podría describir mediante el vector $[u \quad r \quad b]$, donde u es el número de bolas sin pintura en la urna, r es el número de bolas rojas en la urna y b es el número de bolas negras en la urna. Se tiene que $\mathbf{X}_0 = [2 \quad 0 \quad 0]$. Después del lanzamiento de la primera moneda, se tiene una bola pintada de rojo o negro y el estado será $[1 \quad 1 \quad 0]$ o $[1 \quad 0 \quad 1]$. Por consiguiente, se puede estar seguro de que $\mathbf{X}_1 = [1 \quad 1 \quad 0]$ o $\mathbf{X}_1 = [1 \quad 0 \quad 1]$. Resulta claro que debe haber alguna clase de relación entre las $\mathbf{X}_t$. Por ejemplo, si $\mathbf{X}_t = [0 \quad 2 \quad 0]$, se puede estar seguro de que $\mathbf{X}_{t+1}$ será $[0 \quad 1 \quad 1]$.

EJEMPLO 3 Acciones de CSL Computer

Sea $\mathbf{X}_0$ el precio de una parte de las acciones de CSL Computer al comienzo de la jornada financiera actual. También, sea $\mathbf{X}_t$ el precio de una parte de la acción de CSL al comienzo de la t-ésima jornada financiera en el futuro. Resulta claro que conocer los valores de $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_t$ nos dice algo acerca de la distribución de probabilidad de $\mathbf{X}_{t+1}$; la pregunta es, ¿qué nos dice el pasado (precio de las acciones hasta el tiempo t) acerca de $\mathbf{X}_{t+1}$? La respuesta a esta pregunta es de importancia crítica en finanzas. (Véase la sección 17.2 para más detalles).

Esta sección se cierra con una breve explicación del proceso estocástico continuo en el tiempo. Un **proceso estocástico continuo en el tiempo,** es simplemente un proceso estocástico en el que el estado del sistema se puede ver en cualquier instante, no sólo en instantes discretos del tiempo. Por ejemplo, el número de personas en un supermercado t minutos después que la tienda abre se podría considerar como un proceso estocástico continuo en el tiempo. (Los modelos que tienen que ver con procesos estocásticos continuos en el tiempo, se estudian en el capítulo 20). Puesto que el precio de una parte de la acción se puede observar en cualquier instante (no sólo al comienzo de cada jornada financiera), se podría considerar como un proceso estocástico continuo en el tiempo. Ver el precio de una parte de la acción como un proceso estocástico continuo en el tiempo ha dado lugar a muchos resultados importantes en la teoría de finanzas, como la famosa fórmula de Black-Scholes para evaluar opciones.

17.2 ¿Qué es una cadena de Markov?

Un tipo especial de proceso discreto en el tiempo se llama *cadena de Markov*. Para simplificar la exposición, se supone que en cualquier instante, el proceso estocástico discreto en el tiempo puede estar en un número finito de estados identificados con $1, 2, \ldots, s$.

DEFINICIÓN ■ Un proceso estocástico discreto en el tiempo es una Cadena de Markov, si para $t = 0, 1, 2, \ldots$ y los estados

$$P(\mathbf{X}_{t+1} = i_{t+1} | \mathbf{X}_t = i_t, \mathbf{X}_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, \mathbf{X}_1 = i_1, \mathbf{X}_0 = i_0)$$
$$= P(\mathbf{X}_{t+1} = i_{t+1} | \mathbf{X}_t = i_t) \quad ■ \tag{1}$$

Básicamente, (1) dice que la distribución de probabilidad del estado en el tiempo $t + 1$ depende del estado en el tiempo t (i_t) y no depende de los estados por los que pasa la cadena en el camino a i_t en el instante t.

En el estudio de las cadenas de Markov, se hace la suposición adicional de que para los estados i y j y toda t, $P(\mathbf{X}_{t+1} = j | \mathbf{X}_t = i)$ es independiente de t. Esta suposición permite escribir

$$P(\mathbf{X}_{t+1} = j | \mathbf{X}_t = i) = p_{ij} \tag{2}$$

donde p_{ij} es la probabilidad de que dado que el sistema está en el estado i en el tiempo t, estará en un estado j en el tiempo $t + 1$. Si el sistema se mueve del estado i durante un periodo al estado j durante el siguiente periodo, se dice que ocurrió una **transición** de i a j. Las p_{ij} se denominan **probabilidades de transición** para la cadena de Markov.

La ecuación (2) implica que la ley de probabilidad que relaciona el estado del siguiente periodo con el estado actual no cambia (o permanece estacionaria) con el tiempo. Por esta razón, (2) se llama **suposición estacionaria.** Cualquier cadena de Markov que satisface (2) se llama **cadena de Markov estacionaria.**

Nuestro estudio de las cadenas de Markov también requiere que definamos q_i como la probabilidad de que la cadena está en el estado i en el tiempo 0; en otras palabras, $P(\mathbf{X}_0 = i) = q_i$. Llamamos al vector $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_s]$ **distribución de probabilidad inicial** para la cadena de Markov. En la mayoría de las aplicaciones, las probabilidades de transición se muestran como una **matriz de probabilidad de transición** P de orden $s \times s$. La matriz de probabilidad de transición P se puede escribir como

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

Dado que el estado en el tiempo t es i, el proceso en alguna parte debe estar en el tiempo $t + 1$. Esto significa que para cada i,

$$\sum_{j=1}^{j=s} P(\mathbf{X}_{t+1} = j | P(\mathbf{X}_t = i)) = 1$$

$$\sum_{j=1}^{j=s} p_{ij} = 1$$

También sabemos que cada elemento de la matriz P debe ser no negativo. Por consiguiente, los elementos de la matriz de probabilidad de transición son no negativos, y la suma de los elementos de cada renglón debe ser igual a 1.

EJEMPLO 1 La ruina del jugador (continuación)

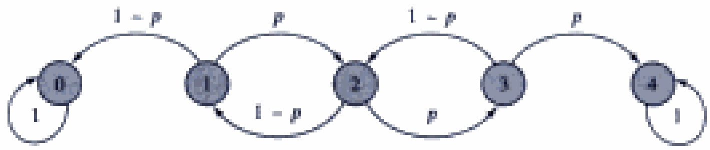
Encuentre la matriz de transición para el ejemplo 1.

Solución Puesto que la cantidad de dinero que tengo después de $t + 1$ jugadas depende de lo sucedido antes en el juego sólo por la cantidad de dinero que tengo después de t jugadas, en definitiva se tiene una cadena de Markov. Puesto que las reglas del juego no cambian con el tiempo, se tiene una cadena de Markov estacionaria. La matriz de transición es como sigue (el estado i significa que se tienen i dólares):

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ P = \end{array} \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{Estado} \\ \begin{array}{ccccc} \$0 & \$1 & \$2 & \$3 & \$4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si el estado es \$0 o \$4, el juego se termina, así que el estado ya no cambia; por consiguiente, $p_{00} = p_{44} = 1$. Para los otros estados, se sabe que con probabilidad p, el estado del siguiente periodo excederá el estado actual por 1, y con probabilidad $1 - p$, el estado del siguiente periodo será 1 menos que el estado actual.

FIGURA 1
Representación gráfica de la matriz de transición para la ruina del jugador



Una matriz de transición se puede representar mediante una gráfica en la que cada nodo representa un estado y un arco (i, j) representa la probabilidad de transición p_{ij}. La figura 1 es una representación gráfica de la matriz de probabilidad de transición del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Elección de bolas (continuación)

Determine la matriz de transición para el ejemplo 2.

Solución Puesto que el estado de la urna después del siguiente lanzamiento de la moneda depende únicamente de lo sucedido antes en el proceso hasta el estado de la urna después del lanzamiento actual de la moneda, se tiene una cadena de Markov. Puesto que las reglas no cambian con el tiempo, se tiene una cadena de Markov estacionaria. La matriz de transición para el ejemplo 2 es como sigue:

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ [0\ 1\ 1] \\ [0\ 2\ 0] \\ [0\ 0\ 2] \\ [2\ 0\ 0] \\ [1\ 1\ 0] \\ [1\ 0\ 1] \end{array} \begin{array}{c} \text{Estado} \\ \begin{array}{cccccc} [0\ 1\ 1] & [0\ 2\ 0] & [0\ 0\ 2] & [2\ 0\ 0] & [1\ 1\ 0] & [1\ 0\ 1] \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para ilustrar la determinación de la matriz de transición, se determina el renglón [1 1 0] de esta matriz de transición. Si el estado actual es [1 1 0], entonces debe ocurrir uno de los eventos mostrados en la tabla. Así, el siguiente estado será [1 0 1] con probabilidad $\frac{1}{2}$, [0 2 0] con probabilidad $\frac{1}{4}$, y [0 1 1] con probabilidad $\frac{1}{4}$. En la figura 2 se tiene una representación gráfica de esta matriz de transición.

TABLA 1
Cálculos de las probabilidades de transición si el estado actual es [1 1 0]

Evento	Probabilidad	Estado nuevo
En el lanzamiento se obtiene cara y se elige un bola sin pintar	$\frac{1}{4}$	[0 2 0]
Se elige una bola roja	$\frac{1}{2}$	[1 0 1]
En el lanzamiento se obtiene cruz y se elige una bola sin pintar	$\frac{1}{4}$	[0 1 1]

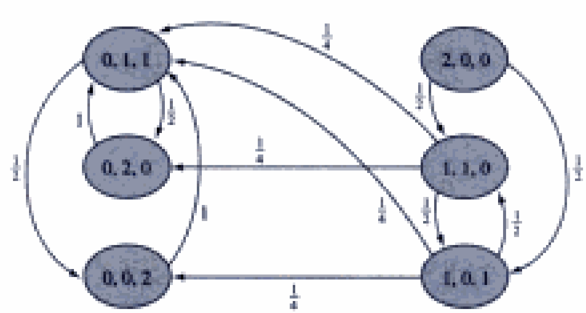


FIGURA 2
Representación gráfica de la matriz de transición para la urna

EJEMPLO 3 Acciones de CSL computer (continuación)

En años recientes, los estudiantes de finanzas han dedicado mucho esfuerzo a contestar la pregunta de si el precio diario de una participación bursátil se puede describir por una cadena de Markov. Suponga que el precio diario de un valor bursátil (como las acciones de CSL Computer) se puede describir mediante una cadena de Markov. ¿Qué nos indica eso? Simplemente que la distribución de probabilidad del precio de mañana para una acción de CSL depende *sólo* del precio de hoy de la acción de CSL, *no* de los precios anteriores de la acción de CSL. Si mediante una cadena de Markov se puede describir el precio de un valor bursátil, entonces los "cartistas" que intentan predecir los precios futuros de las acciones con base en los patrones seguidos por los precios anteriores de las acciones están metiendo la pata. Por ejemplo, suponga que el precio diario de una participación de la acción de CSL sigue una cadena de Markov, y el precio actual para una parte de la acción de CSL es \$50. Entonces, para predecir el precio de mañana de una parte de la acción de CSL, no importa si el precio se incrementó o disminuyó durante cada uno de los últimos 30 días. En cualquiera de los dos casos (o en cualquier otra situación que pudiera haber dado lugar a un precio actual de \$50), una predicción del precio de la acción para el día siguiente se debe basar sólo en el hecho de que el precio actual de la acción de CSL es \$50. Esta vez, el consenso es que para la mayor parte de las acciones el precio diario de la acción se puede describir como una cadena de Markov. A esta idea se le conoce como **hipótesis del mercado eficaz.**

PROBLEMAS

Grupo A

1 En Smalltown, 90% de los días soleados van acompañados de días soleados y 80% de los días nublados van acompañados de días nublados. Utilice esta información para modelar el clima de Smalltown como una cadena de Markov.

2 Considere un sistema de inventario en el que la secuencia de sucesos durante cada periodo es como sigue. (1) Se observa el nivel de inventario (llámelo i) al comienzo del periodo. (2) Si $i \leq 1$, se piden $4 - i$ unidades. Si $i \geq 2$, se piden 0 unidades. La entrega de las unidades pedidas es inmediata. (3) Con probabilidad $\frac{1}{3}$, la demanda durante el periodo es de 0 unidades; con probabilidad $\frac{1}{3}$, la demanda durante el periodo es de 1 unidad, y con probabilidad $\frac{1}{3}$, se piden durante el periodo 2 unidades. (4) Se observa el nivel de inventario al comienzo del siguiente periodo.

Defina el estado de un periodo como el nivel de inventario inicial del periodo. Determine la matriz de transición que permita modelar este sistema de inventario como una cadena de Markov.

3 Una compañía tiene dos máquinas. Durante cualquier día, cada máquina que está trabajando al comienzo del día tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de descomponerse. Si durante el día se descompone una máquina, se envía a la instalación de reparación y estará funcionando dos días después de que se descompuso. (Así, si una máquina se descompone durante el día 3, estará funcionando el día 5). Haciendo que el estado del sistema sea el número de máquinas que funcionan al principio del día, formule una matriz de probabilidad de transición para esta situación.

Grupo B

4 Respecto al problema 1, suponga que el clima de mañana de Smalltown depende del clima de los dos últimos días de Smalltown, como sigue: (1) Si los dos últimos días han sido soleados, entonces 95% de las veces, mañana será soleado. (2) Su ayer estuvo lluvioso y hoy está soleado, entonces 70% de las veces, mañana estará soleado. (3) Si ayer estuvo soleado y hoy está nublado, entonces 60% de las veces, mañana estará nublado. (4) Si los dos últimos días han sido nublados, entonces 80% de las veces, mañana estará nublado.

Con esta información, modele el clima de Smalltown como una cadena de Markov. Si el clima de mañana depende del clima de Smalltown en los tres últimos días, ¿cuántos estados serán necesarios para modelar el clima de Smalltown como una cadena de Markov? (*Nota*: el método utilizado en este problema se puede usar para modelar un proceso estocástico discreto en el tiempo como una cadena de Markov incluso si $\mathbf{X}_{t+1}$ depende de los estados anteriores a $\mathbf{X}_t$, como $\mathbf{X}_{t-1}$ en el ejemplo actual.

5 Sea $\mathbf{X}_t$ el lugar de su ficha en el tablero de Monopolio después de t lanzamientos de los dados. ¿Se puede modelar $\mathbf{X}_t$ como una cadena de Markov? Si no, ¿cómo se modifica la definición del estado en el tiempo t de modo que $\mathbf{X}_0$, $\mathbf{X}_1$, . . . , $\mathbf{X}_t$, sea una cadena de Markov? (*Sugerencia*: ¿cómo un jugador va a la cárcel? En este problema, suponga que los jugadores enviados a la cárcel permanecen allí hasta que obtengan pares o hasta que hayan pasado tres turnos allí, lo que suceda primero).

6 En el problema 3, suponga que una máquina que se descompone vuelve al servicio tres días después (por ejemplo, una máquina que se descompone durante el día 3 estaría funcionando de nuevo al comienzo del día 6). Determine una matriz de probabilidad de transición para esta situación.

EJEMPLO 4 Ejemplo de la bebida de cola

Suponga que toda la industria de bebidas de cola produce sólo dos. Dado que una persona la última vez compró cola 1, hay 90% de probabilidades de que su siguiente compra sea cola 1. Dado que la última compra de una persona fue cola 2, hay 80% de probabilidades de que su siguiente compra sea cola 2.

1 Si una persona en la actualidad es comprador de cola 2, ¿cuál es la probabilidad de que compre cola 1 dos veces a partir de ahora?

2 Si una persona en la actualidad es comprador de cola 1, ¿cuál es la probabilidad de que compre cola 1 tres ocasiones a partir de ahora?

Solución Vemos las compras de cada persona como una cadena de Markov con el estado, en cualquier tiempo dado, del tipo de cola que compró la persona en la última vez. Así, las compras de cada individuo pueden representarse como una cadena de Markov de dos estados, donde

Estado 1 = La persona compró cola del tipo 1 la última vez.

Estado 2 = La persona compró cola del tipo 2 la última vez.

Si se define $\mathbf{X}_n$ como el tipo de cola que una persona compra en su n-ésima compra futura (compra actual de cola = $\mathbf{X}_0$), entonces $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots$ se podría describir como la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{Cola 1} \\ \text{Cola 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Cola 1} & \text{Cola 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora se pueden contestar las preguntas 1 y 2.

1 Se busca $P(\mathbf{X}_2 = 1|\mathbf{X}_0 = 2) = P_{21}(2) =$ elemento 21 de P^2:

$$P^2 = \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .83 & .17 \\ .34 & .66 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $P_{21}(2) = .34$. Esto significa que la probabilidad de que un bebedor de cola 2 en el futuro compre dos veces cola 1 es .34. Mediante la teoría de probabilidad básica, se podría obtener esta respuesta de una manera distinta (véase la figura 4). Observe que $P_{21}(2) =$ (probabilidad de que la siguiente compra sea cola 1 y la segunda compra sea cola 1) + (probabilidad de que la siguiente compra sea cola 2 y la segunda compra sea cola 1) $= p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} = (.20)(.90) + (.80)(.20) = .34$.

2 Se busca $P_{11}(3) =$ elemento 11 de P^3:

$$P^3 = P(P^2) = \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .83 & .17 \\ .34 & .66 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .781 & .219 \\ .438 & .562 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $P_{11}(3) = .781$.

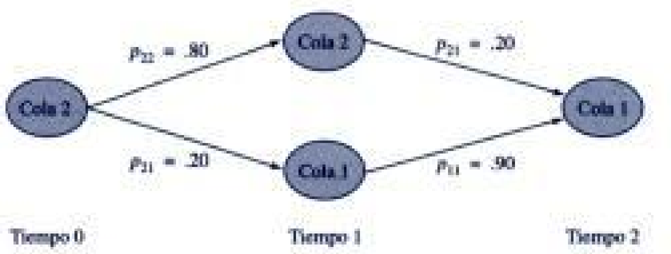


FIGURA 4
La probabilidad de que dos periodos a partir de ahora, un comprador de cola 2 compre cola 1 es .20(.90) + .80(.20) = .34

DEFINICIÓN ■ Si un estado no es transitorio, se llama **estado recurrente**.

En el ejemplo 1, los estados 0 y 4 son estados recurrentes (y también estados absorbentes), y en el ejemplo 2, [0 2 0], [0 0 2] y [0 1 1] son estados recurrentes. Para la matriz de transición P de la figura 6, los estados son recurrentes.

DEFINICIÓN ■ Un estado i es **periódico** con periodo $k > 1$ si k es el número más pequeño tal que las trayectorias que conducen del estado i de regreso al estado i tienen una longitud que es un múltiplo de k. Si un estado recurrente no es periódico, se conoce como **aperiódico.**

Para la cadena de Markov con matriz de transición

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cada estado tiene periodo 3. Por ejemplo, si comenzamos en el estado 1, la única forma de volver al estado 1 es seguir la trayectoria 1-2-3-1 para cierto número de veces (por ejemplo, m). (Véase la figura 7.) Por consiguiente, cualquier retorno al estado 1 tendrá $3m$ transiciones, así que el estado 1 tiene periodo 3. Sin importar dónde estemos, se tiene la seguridad de volver tres periodos después.

DEFINICIÓN ■ Si los estados en una cadena son recurrentes, aperiódicos y se comunican entre sí, se dice que la cadena es **ergódica**.

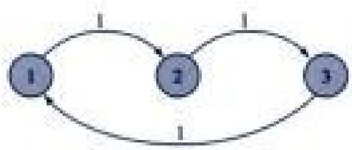
El ejemplo de la ruina del jugador no es una cadena ergódica, debido a que (por ejemplo) los estados 3 y 4 no se comunican. El ejemplo 2 también no es una cadena ergódica, debido a que (por ejemplo) [2 0 0] y [0 1 1] no se comunican. El ejemplo 4, el de la bebida de cola, es una cadena de Markov ergódica. De las siguientes tres cadenas de Markov, P_1 y P_3 son ergódicas y P_2 no es ergódica.

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{Ergódica}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{No ergódica}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{Ergódica}$$

FIGURA 7
Una cadena de Markov periódica $k = 3$



meses de atraso puede seguir la trayectoria 2 meses-cobrada, pero no hay retorno de cobrada a 2 meses.

Una nueva cuenta característica será absorbida como deuda cobrada o incobrable. Una pregunta de mayor interés es ¿cuál es la probabilidad de que finalmente sea cobrada una cuenta nueva? Más adelante en esta sección, se da la respuesta.

EJEMPLO 8 Planificación de la fuerza de trabajo

El bufete jurídico de Mason y Burger emplea tres tipos de abogados: principiantes, experimentados y asociados. Durante un año determinado, hay una probabilidad .15 de que un abogado principiante sea promovido a experimentado y una probabilidad .05 de que salga de la empresa. También, hay una probabilidad .20 de que un abogado experimentado sea promovido a asociado y una probabilidad .10 de que salga de la empresa. La probabilidad de que un asociado salga de la empresa es de .05. La empresa nunca degrada a un abogado.

Hay muchas preguntas interesantes que la empresa de abogados quisiera contestar. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que un abogado principiante recién contratado salga de la empresa antes de llegar a asociado? En promedio, ¿cuánto tiempo permanece en la empresa un abogado principiante recién contratado? Las respuestas se dan más adelante en esta sección.

Modelamos la carrera de un abogado por Mason y Burger como una cadena de Markov absorbente con la siguiente matriz de probabilidades de transición:

	Principiante	Experimentado	Asociado	Sale como NA (no asociado)	Sale como A (asociado)
Principiante	.80	.15	0	.05	0
Experimentado	0	.70	.20	.10	0
Asociado	0	0	.95	0	.05
Sale como NA (no asociado)	0	0	0	1	0
Sale como A (asociado)	0	0	0	0	1

Los dos últimos estados son absorbentes y los otros son transitorios. Por ejemplo, experimentado es un estado transitorio, debido a que hay una trayectoria de experimentado a salir como no asociado, pero no hay trayecto de retorno de salir como no asociado a experimentado (se supone que una vez que un abogado sale de la empresa, nunca regresa).

Para cualquier cadena absorbente, uno querría saber ciertas cosas. (1) Si la cadena comienza en un determinado estado transitorio, y antes de alcanzar un estado absorbente, ¿cuál es el número esperado de veces que se ingresa a cada estado? ¿Cuántos periodos se espera pasar en un determinado estado transitorio antes de que tenga lugar la absorción? (2) Si una cadena comienza en un estado transitorio específico, ¿cuál es la probabilidad de que terminemos en cada estado absorbente?

Para contestar estas preguntas, es necesario escribir la matriz de transición con los estados listados en el siguiente orden: primero los estados transitorios, luego los estados absorbentes. Para garantizar concreción, supóngase que hay $s - m$ estados transitorios ($t_1, t_2, \ldots, t_{s-m}$) y m estados absorbentes ($a_1, a_2, \ldots, a_m$). Entonces la matriz de transición para la cadena absorbente se podría escribir como sigue:

$$P = \begin{array}{r} \\ s-m \text{ renglones} \\ m \text{ renglones} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s-m & m \\ \text{columnas} & \text{columnas} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \end{array}$$

En este formato, los renglones y la columna de P corresponden (en orden) a los estados t_1, $t_2, \ldots, t_{s-m}, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Aquí, I es una matriz identidad de $m \times m$ que refleja el hecho de que nunca se puede dejar un estado absorbente: Q es una matriz de $(s-m) \times (s-m)$ que representa transiciones entre estados transitorios; R es una matriz de $(s-m) \times m$ que representa transiciones de estados transitorios a estados absorbentes; 0 es una matriz de $m \times (s-m)$ que consiste por completo en ceros. Esto refleja el hecho de que es imposible ir de un estado absorbente a uno transitorio.

Aplicando esta notación al ejemplo 7, sea

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \text{Nuevo}\\
t_2 &= 1 \text{ mes}\\
t_3 &= 2 \text{ meses}\\
t_3 &= 3 \text{ meses}\\
a_1 &= \text{Pagada}\\
a_2 &= \text{Deuda incobrable}
\end{aligned}
$$

Entonces para el ejemplo 7, la matriz de probabilidades de transición se podría escribir como

$$
\begin{array}{l}
\\ \text{Nueva} \\ 1 \text{ mes} \\ 2 \text{ meses} \\ 3 \text{ meses} \\ \text{Pagada} \\ \text{Deuda incobrable}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
\text{Nueva} & 1 \text{ mes} & 2 \text{ meses} & 3 \text{ meses} & \text{Pagada} & \text{Deuda incobrable}
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccc|cc}
0 & .6 & 0 & 0 & .4 & 0\\
0 & 0 & .5 & 0 & .5 & 0\\
0 & 0 & 0 & .4 & .6 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & .7 & .3\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Entonces $s = 6$, $m = 2$ y

$$
Q = \begin{bmatrix} 0 & .6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & .5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & .4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad R = \begin{bmatrix} .4 & 0\\ .5 & 0\\ .6 & 0\\ .7 & .3 \end{bmatrix}_{4\times 2}
$$

Para el ejemplo 8, sea

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \text{Principiante}\\
t_2 &= \text{Experimentado}\\
t_3 &= \text{Asociado}\\
t_3 &= \text{Sale como no asociado}\\
a_1 &= \text{Sale como asociado}
\end{aligned}
$$

y la matriz de probabilidades de transición se podría escribir como

$$
\begin{array}{l}
\\ \text{Principiante} \\ \text{Experimentado} \\ \text{Asociado} \\ \text{Sale como NA} \\ \text{Sale como A}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\text{Principiante} & \text{Experimentado} & \text{Asociado} & \text{Sale como NA} & \text{Sale como A}
\end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc}
.80 & .15 & 0 & .05 & 0\\
0 & .70 & .20 & .10 & 0\\
0 & 0 & .95 & 0 & .05\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$\text{Tiempo esperado como principiante} = (I - Q)^{-1}_{11} = 5$$
$$\text{Tiempo esperado como abogado experimentado} = (I - Q)^{-1}_{12} = 2.5$$
$$\text{Tiempo esperado como asociado} = (I - Q)^{-1}_{13} = 10$$

Por consiguiente, el tiempo total esperado que un abogado principiante pasa con la empresa es $5 + 2.5 + 10 = 17.5$ años.

2 La probabilidad de que un nuevo abogado principiante llegue a asociado es la probabilidad de que salga de la empresa como asociado. Puesto que t_1 = abogado principiante y a_2 = sale como asociado, la respuesta es el elemento 12 de $(I - Q)^{-1}R = .50$.

3 Puesto que t_3 = asociado, se busca el número esperado de años que se pasa en t_3, dado que se empieza en t_3. Éste es el elemento 33 de $(I - Q)^{-1} = 20$ años. Esto es razonable porque durante cada año, hay una probabilidad en 20 de que un asociado salga de la empresa, así que debe pasar un promedio de 20 años antes de que un asociado deje la empresa.

OBSERVACIONES Los cálculos con cadenas absorbentes se facilitan mucho si se multiplican las matrices en una hoja de cálculo con el comando MMULT, y se encuentra la matriz inversa de $(I - Q)$ con la función MINVERSE.

IQinverse.xls

Para usar el comando MINVERSE de Excel a fin de calcular $(I - Q)^{-1}$, se introduce $(I - Q)$ en una hoja de cálculo (véase el intervalo de celda C4:E6 del archivo IQinverse.xls) y seleccione el intervalo (C8:E10) donde se quiera calcular $(I - Q)^{-1}$. A continuación escriba la fórmula

= MINVERSE(C4:E6)

en la esquina superior izquierda (celda C8) del intervalo de salida C8:E10. Por último, seleccione **CONTROL SHIF ENTER** (no nada más ENTER) para completar el cálculo de la inversa deseada. La función MINVERSE se debe introducir con CONTROL SHIFT ENTER porque es una función matriz. No se puede editar o borrar ninguna parte de un intervalo calculado mediante una función matriz. Véase la figura 8.

	B	C	D	E	F
2					
3					
4		0.2	-0.15	0	
5	I-Q	0	0.3	-0.2	
6		0	0	0.05	
7					
8		5	2.5	10	
9	(I-Q)$^{-1}$	0	3.333333	13.33333	
10		0	0	20	
11					

FIGURA 8

PROBLEMAS

Grupo A

1[†] La oficina de admisiones de State College modeló la trayectoria de un estudiante por State College como una cadena de Markov:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Principiante} \\ \text{Estudiante de segundo año} \\ \text{Estudiante de penúltimo año} \\ \text{Estudiante de último año} \\ \text{Deserciones} \\ \text{Graduados} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{P.} & \text{E.S.A.} & \text{E.P.A.} & \text{E.U.A.} & \text{D.} & \text{G.} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .10 & .80 & 0 & 0 & .10 & 0 \\ 0 & .10 & .85 & 0 & .05 & 0 \\ 0 & 0 & .15 & .80 & .05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .10 & .05 & .85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

El estado de cada estudiante se observa al comienzo de cada trimestre de otoño. Por ejemplo, si un estudiante está en el penúltimo año al comienzo del trimestre del otoño actual, hay una probabilidad de 80% de que esté en el último año al comienzo del siguiente trimestre de otoño, 15% de probabilidades de que aún sea estudiante de penúltimo año y 5% de probabilidades haya sido dado de baja. (Suponga que una vez que el estudiante abandona la escuela, nunca regresa).

a Si un estudiante entra a State College como principiante, ¿cuántos años espera pasar como estudiante de State College?

b ¿Cuál es la probabilidad de que se gradúe un principiante?

[†]Basado en Bessent y Bessent (1980).

Hidden page

durante su primer año de vida. Suponga que 100 bebés nacen cada año y nadie sobrevive después de 110 años de edad.

a ¿Cuál es el promedio de edad de las personas en Estados Unidos?

b Suponga que las personas cuya edad está entre 21 y 65 años trabaja, y las personas con más de 65 años están retiradas. Si se quiere pagar a cada persona retirada 20 000 dólares al año, ¿cuánto dinero debe pagar cada trabajador para asegurar que durante cada año, el plan de retiro sea autofinanciable?

RESUMEN

Sea $\mathbf{X}_t$ el valor de una característica del sistema en el instante t. Un **proceso estocástico discreto en el tiempo** es simplemente una descripción de la relación entre las variables aleatorias $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$. Un proceso estocástico discreto en el tiempo es una **cadena de Markov** si, para $t = 0, 1, 2, \ldots$ y los estados,

$$P(\mathbf{X}_{t+1} = i_{t+1} | \mathbf{X}_t = i_t, \mathbf{X}_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, \mathbf{X}_1 = i_1, \mathbf{X}_0 = i_0)$$
$$= P(\mathbf{X}_{t+1} = i_{t+1} | \mathbf{X}_t = i_t)$$

Para una cadena de Markov estacionaria, la **probabilidad de transición** p_{ij} es la probabilidad de que dado que el sistema está en el estado i en el tiempo t, el sistema estará en el estado i en el tiempo $t + 1$.

El vector $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_s]$ es la distribución de probabilidad inicial para la cadena de Markov. $P(\mathbf{X}_0 = i)$ está dada por q_i.

Probabilidades de transición del n-ésimo paso

La **probabilidad de transición del n-ésimo paso,** $p_{ij}(n)$, es la probabilidad de que n periodos a partir de ahora, el estado será j, dado que el estado actual es i. $P_{ij}(n) = ij$-ésimo elemento de P^n.

Dado el vector de probabilidad inicial $\mathbf{q}$, la probabilidad de estar en el estado j en el tiempo n está dada por $\mathbf{q}$(columna j de P^n).

Clasificación de los estados en una cadena de Markov

Dados dos estados i y j, una **trayectoria** de i a j es una secuencia de transiciones que comienza en i y termina en j, tal que cada transición en la secuencia tiene una probabilidad positiva de ocurrir. Un estado j es **alcanzable** desde un estado i si hay una trayectoria que conduce de i a j. Se dice que dos estados i y j se **comunican** si j es alcanzable desde i, e i es alcanzable desde j.

Un conjunto de estados S en una cadena de Markov es un **conjunto cerrado** si ningún estado fuera de S es alcanzable desde cualquier estado en S.

Un estado i es un **estado absorbente** si $p_{ii} = 1$. Un estado i es un **estado transitorio** si existe un estado j que es alcanzable desde i, pero el estado i no es alcanzable desde el estado j.

Si un estado no es transitorio, es un **estado recurrente**. Un estado i es **periódico** con periodo $k > 1$ si las trayectorias que llevan del estado i de regreso al estado i tienen una longitud que es un múltiplo de k. Si un estado recurrente es no periódico, es **aperiódico.** Si todos los estados de una cadena son recurrentes, aperiódicos y se comunican entre sí, se dice que la cadena es **ergódica**.

Probabilidades de estado estable

Sea P la matriz de probabilidades de transición para una cadena de Markov ergódica con estados $1, 2, \ldots, s$ (con ij-ésimo elemento p_{ij}). Después de transcurrido un gran número de periodos, la probabilidad (llámela π_j) de que la cadena de Markov esté en el estado j es independiente del estado inicial. La probabilidad de largo plazo, o **estado estable**, π_j se determina resolviendo el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{k=s} \pi_k p_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s;\ \text{omita una de estas ecuaciones})$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_s = 1$$

Cadenas absorbentes

Una cadena de Markov en la que uno o más estados es un estado absorbente es una **cadena de Markov absorbente.** Para contestar preguntas importantes acerca de una cadena de Markov absorbente, se listan los estados en el siguiente orden: primero los estados transitorios, luego los estados absorbentes. Suponga que hay $s - m$ estados transitorios (t_1, t_2, $\ldots$, t_{s-m}) y m estados absorbentes (a_1, a_2, $\ldots$,a_m). Se escribe la matriz de probabilidades de transición P como sigue:

$$P = \begin{array}{r} \\ s - m \text{ renglones} \\ m \text{ renglones} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \begin{array}{c} s-m \\ \text{columnas} \end{array} & \begin{array}{c} m \\ \text{columnas} \end{array} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \end{array}$$

Ahora es posible contestar las siguientes preguntas. (1) Si una cadena comienza en un determinado estado transitorio, y antes que se llegue a un estado absorbente, ¿cuál es el número esperado de veces que se entrará a cada estado? ¿Cuántos periodos se espera pasar en un determinado estado transitorio antes que tenga lugar la absorción? *Respuesta*: si en el presente se está en un estado transitorio t_i, el número esperado de periodos que se pasará en un estado transitorio t_j antes de la absorción es el ij-ésimo elemento de la matriz $(I - Q)^{-1}$. (2) Si una cadena comienza en un determinado estado transitorio, ¿cuál es la probabilidad de que se termine en cada estado absorbente? *Respuesta*: Si en el presente estamos en un estado transitorio t_i, la probabilidad de que finalmente seamos absorbidos en un estado absorbente a_j es el ij-ésimo elemento de la matriz $(I - Q)^{-1}R$.

Modelos de planificación de fuerza de trabajo

Para una organización en la que cada miembro se clasifica en uno de s grupos,

p_{ij} = fracción de miembros que comienzan un periodo en el grupo i que empiezan el siguiente periodo en el grupo j

$p_{i,s+1}$ = fracción de los miembros del grupo i que dejan la organización durante un periodo

P = matriz de $s \times (s + 1)$ cuyo ij-ésimo elemento es p_{ij}

H_i = número de miembros del grupo i contratados al comienzo de cada periodo

N_i = número límite (si existe) de miembros del grupo i

N_i se podría calcular igualando el número de personas por periodo que entran al grupo i con el número de personas por periodo que salen del grupo i. Así, (N_1, N_2, $\ldots$, N_s) se puede calcular resolviendo

$$H_i + \sum_{k \neq i} N_k p_{ki} = N_i \sum_{k \neq i} p_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Una máquina se utiliza para producir herramientas de precisión. Si hoy la máquina está en buenas condiciones, entonces 90% del tiempo, estará en buenas condiciones mañana. Si la máquina está en malas condiciones hoy, entonces 80% del tiempo estará en malas condiciones mañana. Si la condición de la máquina es buena, produce 100 herramientas por día. Si la máquina está en mala condición, produce 60 herramientas por día. En promedio, ¿cuántas herramientas por día se producen?

2 Los clientes compran automóviles de tres compañías de autos. Dada la compañía de la cual un cliente compró por última vez un automóvil, la probabilidad de que compre su siguiente automóvil de cada compañía es como sigue:

$$\begin{array}{c} \text{La última compra} \\ \text{fue con la} \\ \text{Co. 1} \\ \text{Co. 2} \\ \text{Co. 3} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{La siguiente vez comprará con} \\ \begin{array}{ccc} \text{Co. 1} & \text{Co. 2} & \text{Co. 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .80 & .10 & .10 \\ .05 & .85 & .10 \\ .10 & .20 & .70 \end{bmatrix} \end{array}$$

a Si alguien en la actualidad tiene un automóvil de la compañía 1, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de los siguientes dos automóviles que compre el cliente será de la compañía 1?

b En el presente, a la compañía 1 le cuesta un promedio de 5 000 producir un automóvil, y el precio promedio que paga un cliente por uno es 8 000 dólares. La compañía 1 está considerando instituir una garantía de cinco años. Estima que esto incrementará el costo por automóvil en 300 dólares, pero un estudio de investigación de mercado indica que las probabilidades cambiarán como sigue:

$$\begin{array}{c} \text{La última compra} \\ \text{fue con la} \\ \text{Co. 1} \\ \text{Co. 2} \\ \text{Co. 3} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{La siguiente vez comprará con} \\ \begin{array}{ccc} \text{Co. 1} & \text{Co. 2} & \text{Co. 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .85 & .10 & .05 \\ .10 & .80 & .10 \\ .15 & .10 & .75 \end{bmatrix} \end{array}$$

¿Debe la compañía 1 instituir la garantía de cinco anõs?

3† Un equipo de beisbol consta de 2 estrellas, 13 abridores y 10 sustitutos. Para propósitos de impuestos, el dueño del equipo debe evaluar a los jugadores. El valor de cada jugador se define como el valor total del salario que percibirá hasta el retiro. Al comienzo de cada temporada, se clasifica a los jugadores en una de cuatro categorías:

Categoría 1 Estrella (gana 1 millón de dólares al año)
Categoría 2 Abridor (gana 400 000 dólares al año)
Categoría 3 Sustituto (gana 100 000 dólares al año)
Categoría 4 Retirado (ya no percibe salario)

Dado que un jugador es estrella o sustituto al comienzo de la temporada actual, las probabilidades de que sea una estrella, abridor o sustituto al comienzo de la siguiente temporada son como sigue:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Esta temporada} \\ \text{Estrella} \\ \text{Abridor} \\ \text{Sustituto} \\ \text{Retirado} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Siguiente temporada} \\ \begin{array}{cccc} \text{Estrella} & \text{Abridor} & \text{Sustituto} & \text{Retirado} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .50 & .30 & .15 & .05 \\ .20 & .50 & .20 & .10 \\ .05 & .15 & .50 & .30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determine el valor de los jugadores del equipo.

†Basado en Flamholtz, Geis y Perle (1984).

4 Del libro de estadística universitaria más vendido, *The Thrill of Statistics*, se venden 5 millones de copias cada otoño. Algunos usuarios conservan el libro y algunos lo venden de nuevo a la librería. Suponga que 90% de los estudiantes que compran un libro nuevo lo venden otra vez, 80% de los estudiantes que compran un libro y que lo han sido utilizado una vez lo venden de nuevo y 60% de los estudiantes que compran un libro usado por segunda vez lo vuelven a vender. Si un libro tiene cuatro o más veces de uso, la pasta se desprende y ya no puede ser vendido otra vez.

a En el estado estable, ¿cuántas nuevas copias del libro podría vender el editor cada año?

b Suponga que la ganancia de una librería en cada tipo de libro es como sigue:

Libro nuevo: \$6
Libro usado una vez: \$3
Libro usado dos veces: \$2
Libro usado tres veces: \$1

Si el censo de estado estable es representativo de las ventas de la librería, ¿cuál es su ganancia promedio por libro?

5 Hearts Dog Food y Corporal Dog Food pelean encarnizadamente por el mercado nacional de alimento para perro. El dueño de un perro compra una caja de croquetas por mes. Si el dueño de un perro la última vez compró una caja de croquetas Hearts, hay una probabilidad de .8 de que la siguiente vez compre también Hearts. Si el dueño de un perro compró la última vez una caja de croquetas Corporal, hay una probabilidad .9 de que su siguiente compra también sea de Corporal. A Hearts le cuesta 80¢ producir una caja de croquetas, que vende en 1 dólar.

a Si en Estados Unidos hay 40 millones de personas que poseen un perro, ¿cuál es la ganancia anual esperada de Hearts?

b Si Hearts vende cada caja de croquetas en $100 - x$ centavos ($0 \le x \le 20$), entonces una fracción $.8 + x/100$ de los dueños de perros cuya última compra fue de Hearts, comprarán a esta compañía la siguiente caja de croquetas. ¿Cómo puede Hearts maximizar la ganancia?

6 Una pequeña tienda de videos lleva un control del número de veces por semana que es rentado un video y estima las siguientes probabilidades de transición:

$$\begin{array}{c} \\ \text{5 veces} \\ \text{4 veces} \\ \text{3 veces} \\ \text{2 veces} \\ \text{1 vez} \\ \text{0 veces} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{5 veces} & \text{4 veces} & \text{3 veces} & \text{2 veces} & \text{1 vez} & \text{0 veces} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .8 & .1 & .1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .7 & .2 & .1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .6 & .3 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .4 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .6 & .4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por ejemplo, si un video se rentó 5 veces esta semana, entonces hay una probabilidad de 80% de que sea rentado 5 veces la siguiente semana, 10% de probabilidades de que sea rentado 4 veces y 10% de probabilidades de que sea rentado 3 veces.

a Suponga que un video fue rentado 5 veces esta semana. En promedio, ¿cuántas veces será rentado durante las dos semanas siguientes?

18

Programación dinámica determinista

La programación dinámica es una técnica que se utiliza para resolver diversos problemas de optimización. Esta técnica llega a la solución trabajando hacia atrás partiendo del final del problema hacia el principio, por lo que un problema enorme e inmanejable se convierte en una serie de problemas más pequeños y manejables.

La idea de trabajar hacia atrás se introduce mediante la resolución de dos acertijos muy bien conocidos y, luego, se muestra cómo la programación dinámica es útil para solucionar redes, inventarios y problemas de asignación de recursos. Al final del capítulo, se explica el uso de las hojas de cálculo para resolver problemas de programación dinámica.

18.1 Dos acertijos†

En esta sección se muestra cómo trabajar hacia atrás para hacer de un problema aparentemente difícil uno casi trivial.

EJEMPLO 1 Acertijo de las cerillas

Suponga que hay 30 cerillas sobre una mesa. Yo empiezo eligiendo 1, 2 o 3 cerillas. Luego mi contrincante debe tomar 1, 2 o 3 cerillas. Así continuamos hasta que alguno de los jugadores toma la última cerilla. Este jugador es el que pierde. ¿Cómo puedo yo (el primer jugador) estar seguro de ganar el juego?

Solución Si puedo tener la certeza de que le tocará el turno a mi oponente cuando quede una cerilla, claro que ganaré. Al regresar un paso hacia atrás, si yo puedo tener la seguridad de que le tocará su turno a mi contrario cuando queden 5 cerillas, ganaré. La razón es que no importa lo que él haga cuando queden 5 cerillas, yo puedo estar seguro de que cuando le toque su siguiente turno sólo quedará una cerilla. Por ejemplo, suponga que el turno de mi contrincante es cuando quedan 5 cerillas. Si mi contrario toma 2 cerillas, yo elegiré 2 y le dejaré una cerilla, con lo que aseguro mi victoria. De manera similar, si soy capaz de obligar a mi contrario a jugar cuando quedan 5, 9, 13, 17, 21, 25, o 29 cerillas, tengo la victoria asegurada. Por lo tanto, no puedo perder si tomo $30 - 29 = 1$ la primera vez que me toque jugar. Luego simplemente me aseguro que mi contrario siempre se quede con 29, 25, 21, 17, 13, 9, o 5 cerillas cuando le toque jugar. Obsérvese que hemos resuelto este acertijo al ir hacia atrás desde el final hacia el principio del problema. ¡Intente resolver el problema sin trabajar hacia atrás!

EJEMPLO 2 Leche

Tengo una taza de 9 onzas y otra de 4 onzas. Mi madre me pidió traer a casa exactamente 6 onzas de leche. ¿Cómo puedo cumplir lo pedido?

†Esta sección trata temas que se podrían omitir sin que se rompa la continuidad.

TABLA 1
Movimientos en el problema de las tazas y la leche

Onzas en la taza de 9 onzas	Onzas en la taza de 4 onzas
6	0
6	4
9	1
0	1
1	0
1	4
5	0
5	4
9	0
0	0

Solución Al empezar cerca del final del problema, me doy cuenta sagazmente de que el problema se puede resolver si soy capaz de poner de alguna manera una onza de leche en la taza de 4 onzas. Luego lleno la taza de 9 onzas y vierto 3 onzas de la leche de la taza de 9 onzas en la taza parcialmente llena de 4 onzas. En este momento me quedo con 6 onzas de leche. Después de que tengo este vislumbre de ingenio, la solución al problema se podría describir como en la tabla 1 (la situación inicial se escribe al último, y la final se escribe primero).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que hay 40 cerillas sobre una mesa. Yo empiezo por recoger 1, 2, 3 o 4 cerillas. Luego mi contrincante debe recoger 1, 2, 3 o 4 cerillas. Continuamos así hasta que la última cerilla es recogida. El jugador que toma la última cerilla es el perdedor. ¿Puedo estar seguro de mi victoria? Si es así, ¿cómo puedo hacerlo?

2 Tres jugadores jugaron tres rondas de un juego de apuestas. Cada ronda tuvo un perdedor y dos ganadores. El jugador que pierde pagará a cada ganador la cantidad de dinero que el jugador ganador tenía al principio de la ronda. Al final de las tres rondas cada jugador tiene 10 dólares. Usted sabe que cada jugador ganó una ronda. Determine, trabajando hacia atrás, la apuesta original de los tres jugadores. [*Nota*: si resulta que la respuesta es (por ejemplo) 5, 15, 10, no debe preocuparle qué jugador hizo cuál apuesta; no podemos decir en realidad qué jugador terminó con cuánto, pero podemos determinar los valores numéricos de las apuestas originales.]

Grupo B

3 Tenemos 21 monedas y nos advirtieron que una es más pesada que cualquiera de las otras. ¿Cuántas pesadas en una balanza nos tomará encontrar la moneda más pesada? (*Sugerencia*: si la moneda más pesada está en un grupo de tres monedas, podemos encontrarla en una pesada. Luego nos vamos hacia atrás a dos pesadas y así sucesivamente.

4 Explique cómo podemos sacar de un pozo 5 onzas de agua si tenemos una taza de 7 onzas y otra de 3 onzas.

18.2 Un problema de redes

Muchas aplicaciones de programación dinámica se reducen a determinar el camino más corto (o más largo) que une dos puntos en una red dada. Mediante el ejemplo siguiente se ilustra cómo la programación dinámica (trabajando hacia atrás) se puede utilizar con el objeto de encontrar la trayectoria más corta en una red.

a las ciudades reales, vemos que el camino más corto desde Nueva York a Los Ángeles pasa por Nueva York, Columbus, Kansas City, Denver y Los Ángeles. Este camino tiene una distancia de $f_1(1) = 2870$ millas.

Eficiencia de cálculo de la programación dinámica

Por lo que se refiere al ejemplo 3, habría sido cosa fácil determinar el camino más corto desde Nueva York a Los Ángeles enumerando todas las posibles trayectorias [después de todo, hay sólo 3(3)(2) = 18 caminos]. Por lo tanto, en este problema, el uso de la programación dinámica no tiene mucho caso. Pero en cuanto a redes más grandes, la programación dinámica es más eficiente para determinar la trayectoria más corta que la enumeración explícita de todos los caminos. Para ejemplificar lo anterior, considere la red de la figura 2. En esta red es posible viajar desde cualquier nodo en la etapa k hasta cualquier nodo en la etapa $k + 1$. Sea c_{ij} la distancia entre el nodo i y el nodo j. Suponga que queremos determinar el camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 27. Un modo de resolver el problema es enumerar todas las trayectorias. Hay 5^5 trayectorias posibles desde el nodo 1 hasta el 27. Se requieren 5 sumas para determinar la distancia de cada trayectoria. Por lo tanto, enumerar explícitamente la longitud de todas las trayectorias requiere $5^5(5) = 5^6 = 15\,625$ sumas.

Suponga que utilizamos la programación dinámica para determinar el camino más corto entre el nodo 1 y el 27. Sea $f_t(i)$ la longitud del camino más corto desde el nodo i hasta el nodo 27, dado que el nodo i está en la etapa t. Para determinar la trayectoria más corta desde el nodo 1 hasta el 27 empezamos por encontrar $f_6(22)$, $f_6(23)$, $f_6(24)$, $f_6(25)$ y $f_6(26)$. Esto no requiere suma alguna. Luego hallamos $f_5(17)$, $f_5(18)$, $f_5(19)$, $f_5(20)$ y $f_5(21)$. Por ejemplo, para determinar $f_5(21)$ aplicamos la ecuación siguiente:

$$f_5(21) = \min_j \{c_{21,j} + f_6(j)\} \qquad (j = 22, 23, 24, 25, 26)$$

Para encontrar $f_5(21)$ de esta manera se requieren cinco sumas. Por lo tanto, son necesarias 5(5) = 25 sumas para el cálculo de todas las $f_5(\cdot)$. De igual modo, se necesitan 25 sumas para calcular todas las $f_4(\cdot)$ y el cálculo de todas las $f_3(\cdot)$, 25 sumas. Encontrar todas las $f_2(\cdot)$ requiere también 25 sumas, y hallar $f_1(1)$ también requiere 5 sumas. Por lo tanto, el total de sumas que requiere la programación dinámica es de 4(25) + 5 = 105 sumas para determinar el camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 27. Como la enumera-

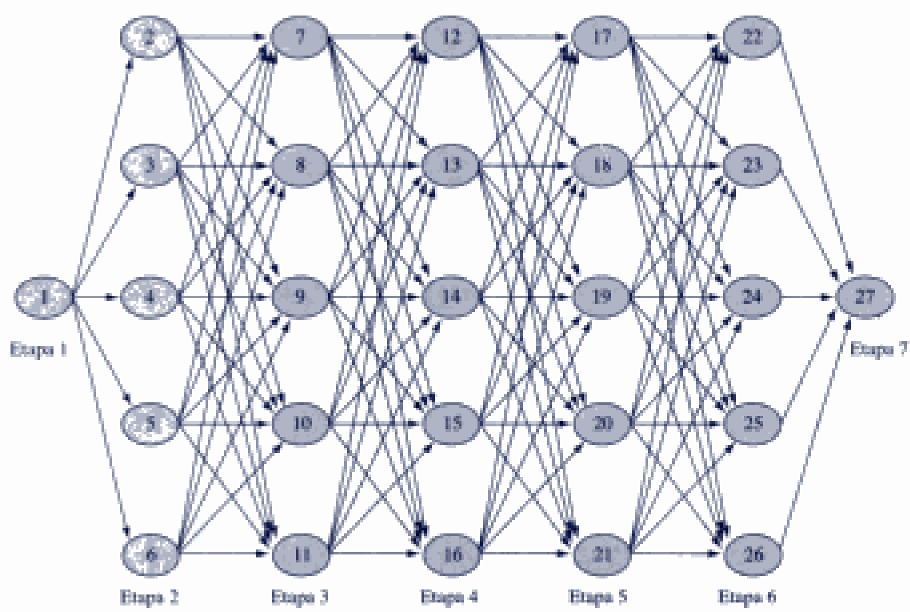


FIGURA 2
Ejemplo de la eficiencia de cálculo de la programación dinámica

ción explícita requiere 15 625 sumas, vemos que la programación dinámica necesita sólo 0.007 veces tantas sumas como la numeración explícita. En las redes grandes son más espectaculares los ahorros en cálculo con la programación dinámica.

A la par de las sumas, la determinación del camino más corto en una red requiere comparar las distancias de las trayectorias. Si se usa la enumeración explícita, entonces se tienen que efectuar $5^5 - 1 = 3124$ comparaciones (es decir, se comparan la distancia de las primeras dos trayectorias, luego se compara la distancia del tercer camino con el más corto de los dos primeros caminos, y así sucesivamente). Si se usara la programación dinámica, entonces para $t = 2, 3, 4, 5$, la determinación de cada $f_t(i)$ requiere $5 - 1 = 4$ comparaciones. Luego, para calcular $f_1(1)$, se necesitan $5 - 1 = 4$ comparaciones. Por lo tanto, en la programación dinámica se requiere un total de $20(5 - 1) + 4 = 84$ comparaciones para encontrar el camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 27. Una vez más, la programación dinámica es muy superior a la enumeración explícita.

Características de las aplicaciones de la programación dinámica

Esta sección termina con un estudio de las características del ejemplo 3 que son comunes a la mayor parte de las aplicaciones de la programación dinámica.

Característica 1

Es posible dividir el problema en etapas, y se requiere una decisión en cada etapa. En el ejemplo 3, la etapa t consta de las ciudades donde Joe podría estar al inicio del día t de su viaje. Como se ve más adelante, la etapa es la cantidad de tiempo que transcurre desde el inicio del problema en muchos problemas de programación dinámica. Obsérvese que en algunas situaciones no se requieren las decisiones en cada etapa (véase sección 18.5).

Característica 2

Cada etapa se relaciona con una cierta cantidad de etapas. Por **estado** se quiere dar a entender la información que se necesita en cualquier etapa para tomar una decisión óptima. En el ejemplo 3, el estado en la etapa t es simplemente la ciudad donde Joe está al principio del día t. Por ejemplo, en la etapa 3, los posibles estados son Kansas City, Omaha y Dallas. Obsérvese que para tomar la decisión correcta en cualquier etapa Joe no requiere conocer cómo llegó al lugar donde está actualmente. Por ejemplo, si Joe está en Kansas City, entonces sus decisiones restantes no dependen de cómo va hasta Kansas City; sus decisiones futuras dependen del hecho de que él está ahora en Kansas City.

Característica 3

La decisión tomada en cualquier etapa describe el modo en que el estado en la etapa actual se transforma en el estado en la etapa siguiente. En el ejemplo 3, la decisión de Joe, en cualquier etapa, es simplemente la ciudad siguiente por visitar. Esto determina el estado en la etapa siguiente de un modo obvio. Sin embargo, una decisión no determina, con certeza, el estado de la etapa siguiente en muchos problemas; en lugar de ello, la decisión actual sólo indica la distribución probabilidad del estado en la etapa siguiente.

Característica 4

Dado el estado actual, la decisión óptima para cada una de las etapas restantes no tiene que depender de los estados ya alcanzados o de las decisiones tomadas previamente. Esta idea se conoce como **principio de la optimalidad**. En el contexto del ejemplo 3, el principio de optimalidad se reduce a lo siguiente: suponga que el camino más corto (llámelo R) que va de la ciudad 1 a la ciudad 10 pasa por la ciudad i. Entonces, la parte de R que va de la ciudad i a la ciudad 10 tiene que ser el camino más corto desde la ciudad i a la ciudad 10.

Si no fuera así, entonces podríamos crear un camino desde la ciudad 1 hasta la ciudad 10 que fuera más corto que R añadiendo un camino más corto desde la ciudad i hasta la ciudad 10 a la parte de R que va de la ciudad 1 a la ciudad i. Esto crearía un camino desde la ciudad 1 hasta la ciudad 10 que es más corto que R, con lo que se contradice el hecho de que R es la trayectoria más corta desde la ciudad 1 hasta la ciudad 10. Por ejemplo, si se sabe que el camino más corto desde la ciudad 1 a la ciudad 10 pasa por la ciudad 2, entonces el camino más corto desde la ciudad 1 hasta la ciudad 10 debe incluir la trayectoria más corta desde la ciudad 2 hasta la ciudad 10 (2−5−8−10). Esto así se infiere porque cualquier trayectoria desde la ciudad 1 hasta la ciudad 10 que pasa por la ciudad 2 y no contiene un camino más corto desde la ciudad 2 a la ciudad 10 tendrá una longitud de c_{12} + [algo más grande que $f_2(2)$]. Naturalmente, tal camino no puede ser la trayectoria más corta desde la ciudad 1 hasta la ciudad 10.

Característica 5

Si los estados del problema se clasifican dentro de uno de T etapas, debe haber una RECURSIÓN que relacione el costo o la recompensa ganada durante las etapas $t, t+1, \ldots, T$ con el costo o la recompensa ganada a partir de las etapas $t+1, t+2, \ldots, T$. La RECURSIÓN formaliza, en esencia, el procedimiento de ir hacia atrás. En el ejemplo 3, la RECURSIÓN se podría expresar como

$$f_t(i) = \min_j \{c_{ij} + f_{t+1}(j)\}$$

donde j debe ser una ciudad de la etapa $t+1$ y $f_5(10) = 0$.

Ahora ya podemos explicar cómo tomar la decisión óptima. Supongamos que el estado inicial durante la etapa 1 es i_1. Con el objeto de usar la RECURSIÓN, empezamos por determinar la decisión óptima para cada estado relacionado con la última etapa. Luego aplicamos la RECURSIÓN tratada en la característica 5 para determinar $f_{T-1}(\cdot)$ (junto con la decisión óptima) de cada estado de la etapa $T-1$. Luego usamos la RECURSIÓN para determinar $f_{T-2}(\cdot)$ (junto con la decisión óptima) de cada estado de la etapa $T-2$. Continuamos de este modo hasta que hayamos calculado $f_1(i_1)$ y la decisión óptima cuando estamos en la etapa 1 y el estado i_1. Luego elegimos la decisión óptima en la etapa 1 a partir del conjunto de decisiones que llegue a $f_1(i_1)$. Elegir esta decisión en el estado 1 nos lleva a algún estado 2 (llámelo estado i_2) en la etapa 2. Luego, en la etapa 2, escogemos cualquier decisión que alcance a $f_2(i_2)$. Proseguimos de esta manera hasta que hayamos tomado una decisión para cada etapa.

Diversas aplicaciones de la programación dinámica se estudian en el resto de este capítulo. La presentación es más fácil si usted intenta determinar cómo se ajusta cada problema al contexto de red introducido en el ejemplo 3. La sección siguiente se inicia con el estudio de cómo la programación dinámica se usa para resolver problemas de inventario.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Encuentre el camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 10 en la red mostrada en la figura 3. Además determine el camino más corto desde el nodo 3 hasta el nodo 10.

2 Un representante de ventas vive en Bloomington y tiene que ir el próximo jueves a Indianápolis. Los lunes, martes y miércoles, puede vender su mercancía en Indianápolis, Bloomington o Chicago. De acuerdo con sus experiencias pasadas, cree que puede ganar 12 dólares si pasa un día en Indianápolis, 16 dólares si pasa un día en Bloomington y 17 dólares si pasa un día en Chicago. ¿Dónde debe pasar el pri-

FIGURA 3

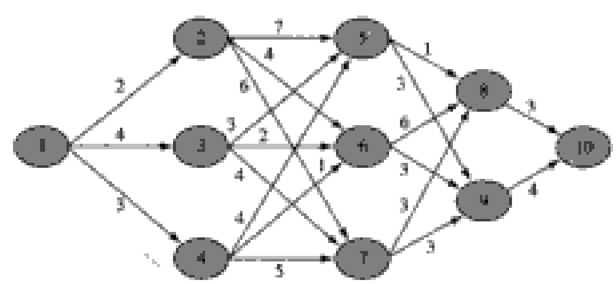
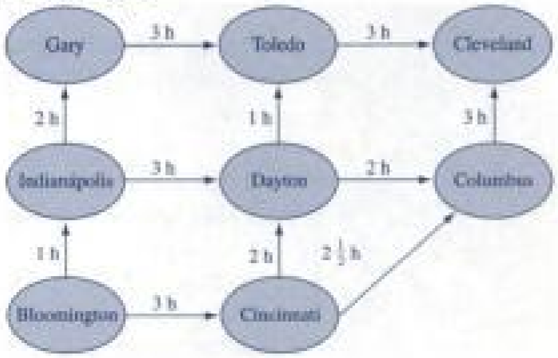


TABLA 2

De	A		
	Indianápolis	Bloomington	Chicago
Indianápolis	—	5	2
Bloomington	5	—	7
Chicago	2	7	—

mero de los tres días y noches de la semana para maximizar su ingreso por las ventas menos costos del viaje? Los costos del viaje se proporcionan en la tabla 2.

FIGURA 4



Grupo B

3 Debo viajar en mi automóvil desde Bloomington hasta Cleveland. Hay varios caminos (véase figura 4). El número en cada arco es el tiempo que toma viajar de una ciudad a otra. Por ejemplo, se requieren 3 horas para ir en automóvil desde Bloomington hasta Cincinnati. Determine el camino más corto (en términos de tiempo) de Bloomington a Cleveland mediante el procedimiento de ir hacia atrás. [*Sugerencia:* vaya hacia atrás y no se preocupe por las etapas, sólo por los estados.]

18.3 Un problema de inventario

En esta sección se ilustra la manera en que se puede usar la programación dinámica para resolver un problema de inventario con las características siguientes:

1 El tiempo se divide en periodos, el periodo actual es el periodo 1, el periodo siguiente es el 2 y el periodo final es el periodo *T*. Se conoce la demanda durante cada periodo al principio del periodo 1.

2 La compañía debe determinar al principio de cada periodo cuántas unidades debe fabricar. La capacidad de producción durante cada periodo es limitada.

3 La demanda de cada periodo se debe cumplir a tiempo con el inventario o con la producción actual. Durante cualquier periodo en el cual la producción tiene lugar, se generan un costo fijo de producción, así como un costo variable por unidad.

4 La compañía tiene capacidad limitada de almacenamiento. Un límite sobre el inventario de fin de periodo refleja lo anterior. Se genera un costo de almacenamiento por unidad sobre el inventario final de cada periodo.

5 El objetivo de la compañía es minimizar el costo total por cumplir a tiempo con la demanda de los periodos $1, 2, \ldots, T$.

En este modelo, la posición del inventario de la compañía se revisa al final de cada periodo (digamos, al final de cada mes), y entonces se toma la decisión sobre la producción. Tal modelo se denomina **modelo de revisión periódica**. Este modelo contrasta con los modelos de revisión continua en los cuales la compañía conoce su inventario todo el tiempo y puede hacer un pedido o empezar la producción en cualquier momento.

Si excluimos el costo preliminar por la producción de algunas unidades, el problema del inventario apenas descrito es similar al problema del inventario de Sailco que se resuelve mediante programación lineal en la sección 3.10. Ahora ilustramos cómo aplicar la programación dinámica para determinar un plan de producción que minimice el costo total en que se incurre en un problema de inventario que cumple con la descripción anterior.

Cálculos del mes 3

¿Cómo podemos determinar $f_3(i)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$? El costo $f_3(i)$ es el costo mínimo que se genera en los meses 3 y 4 si el inventario al principio del mes 3 es i. Por cada nivel de producción posible x durante el mes 3, el costo total durante los meses 3 y 4 es

$$(\tfrac{1}{2})(i + x - 2) + c(x) + f_4(i + x - 2) \tag{1}$$

Esto es lo que se infiere porque si x unidades se producen durante el mes 3, el inventario final del mes 3 es $i + x - 2$. Entonces, el costo por almacenamiento del mes 3 es $(\frac{1}{2})(i + x - 2)$, y el costo de producción del mes 3 es $c(x)$. Luego entramos al mes 4 con $i + x - 2$ unidades disponibles. Puesto que proseguimos en forma óptima a partir de este punto hacia delante (recuerde el principio de optimalidad), el costo para el mes 4 es $f_4(i + x - 2)$. Queremos elegir el nivel de producción del mes 3 para minimizar (1), de modo que escribimos

$$f_3(i) = \min_x \{(\tfrac{1}{2})(i + x - 2) + c(x) + f_4(i + x - 2)\} \tag{2}$$

En (2), x debe ser elemento de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, y x debe satisfacer $4 \geq i + x - 2 \geq 0$. Esto refleja el hecho de que la demanda del mes actual se debe cumplir ($i + x - 2 \geq 0$), y que el inventario final no puede ser mayor a la capacidad 4($i + x - 2 \leq 4$). Recuerde que $x_3(i)$ es cualquier valor de x que alcance a $f_3(i)$. Los cálculos para $f_3(0)$, $f_3(1)$, $f_3(2)$, $f_3(3)$ y $f_3(4)$ se proporcionan en la tabla 3.

Cálculos del mes 2

Ahora ya podemos calcular $f_2(i)$, el costo mínimo que se genera durante los meses 2, 3 y 4, dado que al principio del mes 2 el inventario disponible es i unidades. Suponga que la producción del mes 2 = x. Puesto que la demanda del mes 2 es 3 unidades, se genera un costo por almacenamiento de $(\frac{1}{2})(i + x - 3)$ al final del mes 2. Por lo tanto, el costo total

TABLA 3
Cálculos para $f_3(i)$

i	x	$(\frac{1}{2})(i + x - 2) + c(x)$	$f_4(i + x - 2)$	Costo total de los meses 3, 4	$f_3(i)$ $x_3(i)$
0	2	$0 + 5 = 5$	7	$5 + 7 = 12^*$	$f_3(0) = 12$
0	3	$\frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}$	6	$\frac{13}{2} + 6 = \frac{25}{2}$	$x_3(0) = 2$
0	4	$1 + 7 = 8$	5	$8 + 5 = 13$	
0	5	$\frac{3}{2} + 8 = \frac{19}{2}$	4	$\frac{19}{2} + 4 = \frac{27}{2}$	
1	1	$0 + 4 = 4$	7	$4 + 7 = 11$	$f_3(1) = 10$
1	2	$\frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$	6	$\frac{11}{2} + 6 = \frac{23}{2}$	$x_3(1) = 5$
1	3	$1 + 6 = 7$	5	$7 + 5 = 12$	
1	4	$\frac{3}{2} + 7 = \frac{17}{2}$	4	$\frac{17}{2} + 4 = \frac{25}{2}$	
1	5	$2 + 8 = 10$	0	$10 + 0 = 10^*$	
2	0	$0 + 0 = 0$	7	$0 + 7 = 7^*$	$f_3(2) = 7$
2	1	$\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$	6	$\frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2}$	$x_3(2) = 0$
2	2	$1 + 5 = 6$	5	$6 + 5 = 11$	
2	3	$\frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$	4	$\frac{15}{2} + 4 = \frac{23}{2}$	
2	4	$2 + 7 = 9$	0	$9 + 0 = 9$	
3	0	$\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}^*$	$f_3(3) = \frac{13}{2}$
3	1	$1 + 4 = 5$	5	$5 + 5 = 10$	$x_3(3) = 0$
3	2	$\frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2}$	4	$\frac{13}{2} + 4 = \frac{21}{2}$	
3	3	$2 + 6 = 8$	0	$8 + 0 = 8$	
4	0	$1 + 0 = 1$	5	$1 + 5 = 6^*$	$f_3(4) = 6$
4	1	$\frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$	4	$\frac{11}{2} + 4 = \frac{19}{2}$	$x_3(4) = 0$
4	2	$2 + 5 = 7$	0	$7 + 0 = 7$	

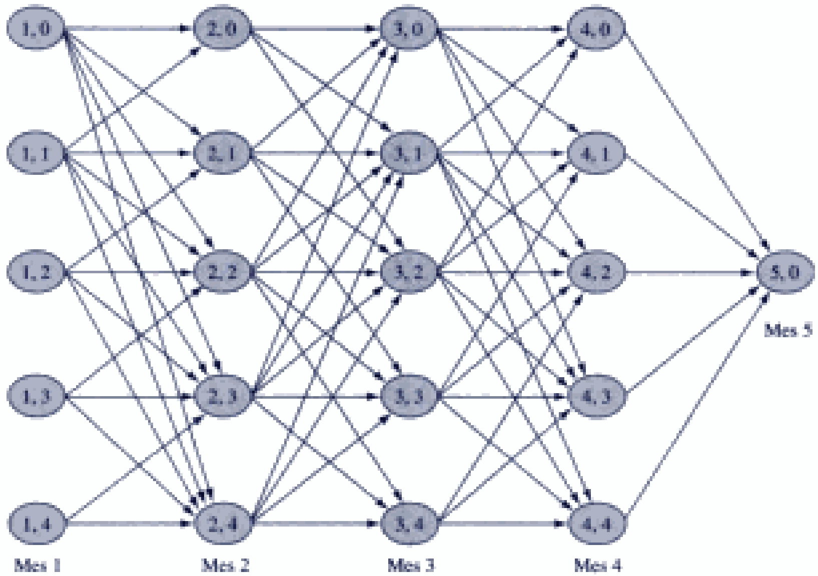


FIGURA 5
Representación de la red del ejemplo del inventario

Regresemos al ejemplo 4. El plan de producción de costo mínimo corresponde al camino más corto que une (1, 0) y (5, 0). Como ya se vio, ésta sería la trayectoria que corresponde a los niveles de producción de 1, 5, 0 y 4. Refiérase a la figura 5; esto correspondería al camino que empieza en (1, 0), luego va a (2, 0 + 1 − 1) = (2, 0), luego va a (3, 0 + 5 − 3) = (3, 2), después a (4, 2 + 0 − 2) = (4, 0) y, por último, a (5, 0 + 4 − 4) = (5, 0). Por lo tanto, el plan de producción corresponde al camino (1, 0)–(2, 0)–(3, 2)–(4, 0)–(5, 0) en la figura 5.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Determine el plan de producción óptimo para el ejemplo 4, si el inventario inicial es de 3 unidades.

2 Una compañía de aparatos eléctricos tiene un contrato para entregar las cantidades siguientes de radios durante los tres meses próximos: mes 1, 200 radios; mes 2, 300 radios; mes 3, 300 radios. Por cada radio producido durante los meses 1 y 2 se genera un costo variable de 10 dólares; por cada radio fabricado durante el mes 3 se incurre en un costo variable de 12 dólares. El costo de inventario es de 1.50 dólares por cada radio en existencia al final del mes. El costo por preparar la producción durante un mes es de 250 dólares. Los radios fabricados en el mes se pueden usar para cumplir con la demanda para ese mes o para cualquier mes futuro. Suponga que la producción de cada mes debe ser un múltiplo de 100. Dado que el nivel de inventario inicial es 0 unidades, utilice la programación dinámica para determinar un plan de producción óptimo.

3 En la figura 5 encuentre el nivel de producción y el costo asociado con cada uno de los arcos siguientes:

a (2, 3)–(3, 1)

b (4, 2)–(5, 0)

18.4 Problemas de asignación de recursos

Estos problemas, en los cuales los recursos limitados se reparten entre varias actividades, frecuentemente se resuelven mediante programación dinámica. Recuerde que ya resolvimos estos problemas con programación lineal (por ejemplo, el problema de Giapetto). Para usar la programación lineal en la asignación de recursos se tienen que hacer tres suposiciones:

Suposición 1 La cantidad de recursos asignados a una actividad, podría ser cualquier número no negativo.

Suposición 2 El beneficio conseguido de cada actividad es proporcional a la cantidad del recurso asignado a la actividad.

Suposición 3 El beneficio obtenido de más de una actividad es la suma de los beneficios logrados por las actividades individuales.

Incluso si las suposiciones 1 y 2 no se cumplen, es posible usar la programación dinámica para resolver de modo eficiente problemas de asignación de recursos cuando la suposición 3 es válida y cuando la cantidad de los recursos asignados a cada actividad es un elemento de un conjunto finito.

EJEMPLO 5 Asignación de recursos

Finco tiene 6000 dólares para invertir, y hay tres opciones. Si d_j dólares (en miles) se colocan en la inversión j, entonces se obtiene un valor presente neto (en miles) de $r_j(d_j)$, donde los $r_j(d_j)$ son como se indica

$$\begin{aligned} r_1(d_1) &= 7d_1 + 2 \qquad && (d_1 > 0) \\ r_2(d_2) &= 3d_2 + 7 && (d_2 > 0) \\ r_3(d_3) &= 4d_3 + 5 && (d_3 > 0) \\ r_1(0) &= r_2(0) = r_3(0) = 0 \end{aligned}$$

La cantidad colocada en cada inversión debe ser un múltiplo exacto de 1000 dólares. Para maximizar el valor neto actual obtenido de las inversiones, ¿cómo debe repartir Finco los 6000 dólares?

Solución El rendimiento de cada inversión no es proporcional a la cantidad invertida en ella [por ejemplo, $16 = r_1(2) \neq 2r_1(1) = 18$]. Por lo tanto, la programación lineal no puede aplicarse para encontrar una solución óptima a este problema.†

Desde el punto de vista matemático, el problema de Finco se podría expresar como

$$\begin{aligned} &\max\{r_1(d_1) + r_2(d_2) + r_3(d_3)\} \\ &\text{s.a} \qquad d_1 + d_2 + d_3 = 6 \\ &d_j \text{ entero no negativo} \qquad (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

Naturalmente, si los $r_j(d_j)$ fueran lineales, entonces tendríamos un problema de la mochila como los estudiados en la sección 9.5.

Para plantear el problema de Finco como un problema de programación dinámica, empezamos por identificar la etapa. Al igual que en los problemas del inventario y del camino más corto, la etapa se debe escoger de tal modo que cuando quede una etapa el problema sea fácil de resolver. Luego, dado que el problema se resuelve para el caso donde queda una etapa, debe ser fácil resolverlo cuando quedan dos etapas, y así sucesivamente. Sería más fácil resolverlo, evidentemente, cuando sólo hay una inversión disponible, de modo que definimos a la etapa t para que represente el caso donde los fondos se asignan a las inversiones $t, t + 1, \ldots, 3$.

Para una etapa dada, ¿qué debemos saber para determinar la cantidad óptima de inversión? Simplemente cuánto dinero está disponible para las inversiones $t, t + 1, \ldots, 3$. Por lo tanto, definimos el estado de cualquier etapa como la cantidad de dinero (en miles) disponible para las inversiones $t, t + 1, \ldots, 3$. No podemos tener nunca más de 6 000 dólares disponibles, de modo que los estados posibles en cualquier etapa son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Definimos $f_t(d_t)$ como el valor presente neto máximo (VPN) que se puede conseguir al colocar d_t miles de dólares en inversiones $t, t + 1, \ldots, 3$. Definimos también a $x_t(d_t)$ como la cantidad que se debe colocar en la inversión t para llegar a $f_t(d_t)$. Empezamos a trabajar hacia atrás cuando calculamos $f_3(0), f_3(1), \ldots, f_3(6)$ y luego determinamos $f_3(0)$, $f_2(0), f_2(1), \ldots,$

†El procedimiento de cargos fijos, explicado en la sección 9.2, se podría usar para resolver este problema.

TABLA 8
Ejemplos de un problema generalizado de asignación de recursos

Interpretación de $r_t(x_t)$	Interpretación de $g_t(x_t)$	Interpretación de w
Beneficios por colocar x_t productos tipo t en una mochila	Peso de x_t productos tipo t	Peso máximo que la mochila puede aguantar
Grado conseguido en el curso t si estudiamos este curso x_t horas a la semana	Horas por semana x_t pasadas estudiando el curso t	Número total de horas de estudio disponibles cada semana
Ventas de un producto en la región t si x_t representantes de ventas están asignados a la región t	Costo por asignar x_t representantes de ventas a la región t	Presupuesto total para el personal de ventas
Cantidad de llamadas por incendios por semana contestadas en menos de un minuto si la estación t tiene asignadas x_t bombas para incendios	Costo por semana por mantener x_t bombas para incendios en la estación t	Presupuesto total por semana para el mantenimiento de las bombas

$x_1(w)$. En este punto se tienen $w - g_1[x_1(w)]$ unidades del recurso disponible para las actividades 2, 3, . . . , T. Entonces la actividad 2 se debe organizar en un nivel de $x_2\{w - g_1[x_1(w)]\}$. Así se continúa hasta haber determinado el nivel en el cual todas las actividades se deben poner en marcha.

Solución de los problemas de la mochila mediante programación dinámica

El uso de (7) se ilustra mediante la solución de un sencillo problema de la mochila (véase sección 9.5). Luego se desarrolla otra RECURSIÓN que se puede utilizar para resolver problemas de la mochila.

EJEMPLO 6 La mochila

Suponga que se va a llenar una mochila de 10 lb con los productos de la tabla 9. ¿Con qué se debe llenar la mochila si desea maximizar el beneficio total?

Solución Así tenemos $r_1(x_1) = 11x_1$, $r_2(x_2) = 7x_2$, $r_3(x_3) = 12x_3$, $g_1(x_1) = 4x_1$, $g_2(x_2) = 3x_2$ y $g_3(x_3) = 5x_3$. Definamos $f_t(d)$ como el máximo beneficio que se puede conseguir con una mochila de d libras que se llena con productos del tipo $t, t + 1, \ldots, 3$.

Cálculos de la etapa 3

Ahora (7) genera

$$f_3(d) = \max_{x_3}\{12x_3\}$$

TABLA 9
Peso y beneficio para el ejemplo de la mochila

Producto	Peso (lb)	Beneficio
1	4	11
2	3	7
3	5	12

donde $5x_3 \leq d$ y x_3 es un entero no negativo. Entonces se obtiene

$$\begin{aligned} &f_3(10) = 24 \\ &\quad f_3(5) = f_3(6) = f_3(7) = f_3(8) = f_3(9) = 12 \\ &\quad f_3(0) = f_3(1) = f_3(2) = f_3(3) = f_3(4) = 0 \\ &x_3(10) = 2 \\ &\quad x_3(9) = x_3(8) = x_3(7) = x_3(6) = x_3(5) = 1 \\ &\quad x_3(0) = x_3(1) = x_3(2) = x_3(3) = x_3(4) = 0 \end{aligned}$$

Cálculos de la etapa 2

Ahora se obtiene con (7)

$$f_2(d) = \max_{x_2} \{7x_2 + f_3(d - 3x_2)\}$$

donde x_2 debe ser un número entero no negativo que satisface $3x_2 \leq d$. Ahora se tiene:

$$f_2(10) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(10) = 24^* & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(7) = 19 & x_2 = 1 \\ 7(2) + f_3(4) = 14 & x_2 = 2 \\ 7(3) + f_3(1) = 21 & x_2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(10) = 24$ y $x_2(10) = 0$.

$$f_2(9) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(9) = 12 & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(6) = 19 & x_2 = 1 \\ 7(2) + f_3(3) = 14 & x_2 = 2 \\ 7(3) + f_3(0) = 21^* & x_2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(9) = 21$ y $x_2(9) = 3$.

$$f_2(8) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(8) = 12 & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(5) = 19^* & x_2 = 1 \\ 7(2) + f_3(2) = 14 & x_2 = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(8) = 19$ y $x_2(8) = 1$.

$$f_2(7) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(7) = 12 & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(4) = 7 & x_2 = 1 \\ 7(2) + f_3(1) = 14^* & x_2 = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(7) = 14$ y $x_2(7) = 2$.

$$f_2(6) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(6) = 12 & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(3) = 7 & x_2 = 1 \\ 7(2) + f_3(0) = 14^* & x_2 = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(6) = 14$ y $x_2(6) = 2$.

$$f_2(5) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(5) = 12^* & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(2) = 7 & x_2 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(5) = 12$ y $x_2(5) = 0$.

$$f_2(4) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(4) = 0 & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(1) = 7^* & x_2 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(4) = 7$ y $x_2(4) = 1$.

$$f_2(3) = \max \begin{cases} 7(0) + f_3(3) = 0 & x_2 = 0 \\ 7(1) + f_3(0) = 7^* & x_2 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f_2(3) = 7$ y $x_2(3) = 1$.

$$f_2(2) = 7(0) + f_3(2) = 0 \qquad x_2 = 0$$

Por lo tanto, $f_2(2) = 0$ y $x_2(2) = 0$.

$$f_2(1) = 7(0) + f_3(1) = 0 \qquad x_2 = 0$$

Por lo tanto, $f_2(1) = 0$ y $x_2(1) = 0$.

$$f_2(0) = 7(0) + f_3(0) = 0 \qquad x_2 = 0$$

Por lo tanto, $f_2(0) = 0$ y $x_2(0) = 0$.

Cálculos de la etapa 1

Por último se llega a $f_1(10)$ a partir de

$$f_1(10) = \max \begin{cases} 11(0) + f_2(10) = 24 & x_1 = 0 \\ 11(1) + f_2(6) \;\; = 25^* & x_1 = 1 \\ 11(2) + f_2(2) \;\; = 22 & x_1 = 2 \end{cases}$$

Determinación de la solución óptima para el problema de la mochila

Tenemos $f_1(10) = 25$ y $x_1(10) = 1$. Por lo tanto, podríamos incluir un producto tipo 1 en la mochila. Entonces quedan $10 - 4 = 6$ libras para los productos de los tipos 2 y 3, de modo que incluiríamos $x_2(6) = 2$ productos tipo 2. Por último, hay $6 - 2(3) = 0$ libras para los productos del tipo 3, por lo que llevaríamos $x_3(0) = 0$ productos del tipo 3. En resumen, el beneficio máximo que podemos lograr con una mochila de 10 libras es $f_3(10) = 25$. Para obtener un beneficio de 25 debemos llevar un producto del tipo 1 y dos del tipo 2.

Representación con redes del problema de la mochila

Encontrar la solución óptima del ejemplo 6 equivale a determinar el camino más largo en la figura 7 desde el nodo (10, 1) a algún nodo de la etapa 4. En la figura 7, para $t \leq 3$, el nodo (d, t) representa una situación en la cual d libras de espacio se podrían asignar a productos de los tipos $t, t + 1, \ldots, 3$. El nodo $(d, 4)$ representa d libras de espacio sin utilizar. Cada arco desde un nodo de la etapa t a un nodo de la etapa $t + 1$ representa una decisión de cuántos productos del tipo t se colocan en la mochila. Por ejemplo, el arco de (10, 1) a (6, 2) representa colocar un producto tipo 1 en la mochila. Así quedan $10 - 4 = 6$ lb para productos de los tipos 2 y 3. Este arco tiene una longitud de 11, lo que representa el beneficio conseguido al llevar un producto del tipo 1 en la mochila. La solución del ejemplo 6 muestra que el camino más largo de la figura 7 desde el nodo (10, 1) a un nodo de la etapa 4 es (10, 1)–(6, 2)–(0, 3)–(0, 4). Obsérvese que la solución óptima de un problema de la mochila no siempre usa todo el peso disponible. Por ejemplo, verifique que si un producto tipo 1 consigue 16 unidades de beneficio, la solución óptima sería llevar dos productos tipo 1, lo que corresponde al camino (10, 1)–(2, 2)–(2, 3)–(2, 4). Esta solución dejaría 2 lb de espacio libre.

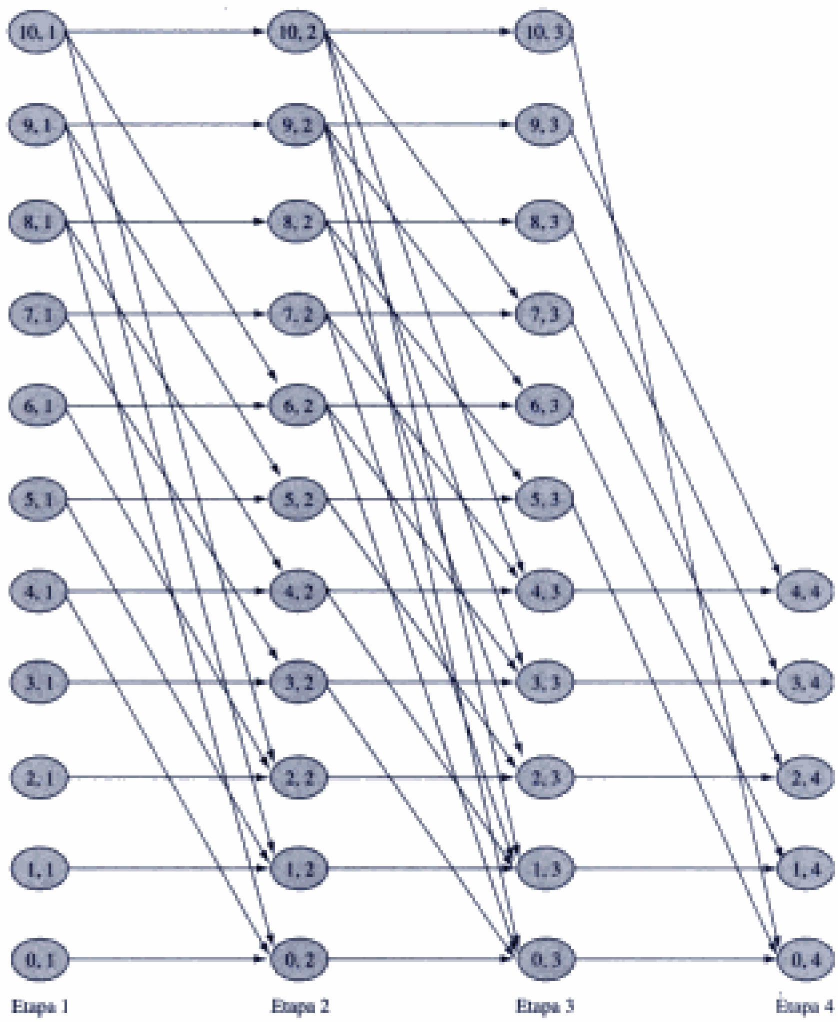


FIGURA 7
Red para representar la mochila

RECURSIÓN opcional para los problemas de la mochila

Para resolver los problemas de la mochila hay más procedimientos con programación dinámica. El que se estudia enseguida construye la mochila óptima determinando primero de qué manera llenar en forma óptima una mochila pequeña y, luego, con esta información, cómo llenar una mochila más grande, también en forma óptima. Definimos $g(w)$ como el beneficio máximo que se puede lograr con una mochila de w lb. En lo que sigue, b_j es el beneficio obtenido por un solo producto del tipo j, y w_j es el peso de un solo producto del tipo j. Evidentemente, $g(0) = 0$, y para $w > 0$.

$$g(w) = \max_j \{b_j + g(w - w_j)\} \tag{8}$$

donde j debe ser un elemento de $\{1, 2, 3\}$, y j debe satisfacer $w_j \leq w$. El razonamiento en el que se apoya (8) es el siguiente: para llenar en forma óptima una mochila de w lb, tenemos que empezar por meter algún tipo de producto en la mochila. Si empezamos por introducir un producto tipo j en una mochila de w lb, lo más que podemos ganar es b_j + [lo mejor que podemos hacer con una mochila de $(w - w_j)$ lb]. Luego de observar que un producto tipo j se puede meter en una mochila de w lb sólo si $w_j \leq w$, llegamos a (8). Definimos $x(w)$ como cualquier tipo de producto que llegue al máximo en (8) y con $x(w) = 0$ queremos dar a entender que ningún producto puede caber en una mochila de w lb.

Con el fin de ilustrar el uso de (8) volveremos a resolver el ejemplo 6. Como ningún producto cabe en una mochila de 0, 1 o 2 libras, entonces $g(0) = g(1) = g(2) = 0$ y $x(0) =$

En términos de beneficio por peso unitario, el mejor producto es el que tiene el valor más grande de $\frac{c_j}{w_j}$. Suponga que hay n tipos de productos que se han pedido, de modo que

$$\frac{c_1}{w_1} \geq \frac{c_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{w_n}$$

Por lo tanto, los productos del tipo 1 son los mejores, los productos del tipo 2 son los siguientes mejores y así sucesivamente. Recuerde que, según la sección 9.5, es posible no usar ninguno de los mejores productos en la solución óptima de un problema de mochila. Por ejemplo, la solución óptima del problema de mochila

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 14 \\ & x_i \text{ entero no negativo} \end{aligned}$$

es $z = 44$, $x_2 = 2$, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, y en esta solución no se utiliza ninguno de los mejores productos del tipo 1. Suponga que

$$\frac{c_1}{w_1} > \frac{c_2}{w_2}$$

Por consiguiente, hay un tipo único de mejor producto. Es posible demostrar que para algún número w^* es óptimo usar por lo menos un producto tipo 1 si la mochila puede aguantar w libras, donde $w \geq w^*$. Usted demostrará que este resultado se cumple para la ecuación siguiente en el problema 6 al final de la sección:

$$w^* = \frac{c_1 w_1}{c_1 - w_1\left(\frac{c_2}{w_2}\right)}$$

Por lo tanto, para el problema de la mochila,

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{s.a} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq w \\ & x_i \text{ entero no negativo} \end{aligned}$$

por lo menos un producto del tipo 1 se usa si

$$w \geq \frac{16(5)}{16 - 5(\frac{22}{7})} = 280$$

Este resultado puede reducir notablemente el cálculo necesario para resolver un problema de la mochila. Por ejemplo, suponga que $w = 4000$. Sabemos que para $w \geq 280$, en la solución óptima se usa por lo menos un producto tipo 1, por eso podemos concluir que la manera óptima de llenar una mochila de 4000 es meter un producto del tipo 1 más la manera óptima de llenar una mochila de $4000 - 5 = 3\,995$ libras. Si repetimos este razonamiento observaremos que la manera óptima de llenar una mochila de 4000 libras es con $\frac{4000-280}{5} = 744$ productos del tipo 1 más la manera óptima de llenar una mochila de 280 libras. Los cálculos necesarios para determinar cómo llenar una mochila de 4000 libras se reducen de modo importante mediante este razonamiento. (En realidad, la mochila de 280 libras contendrá por lo menos un producto del tipo 1, así que para llenar en forma óptima una mochila de 4000 libras es posible introducir 745 productos del tipo 1 y luego llenar de modo óptimo una mochila de 275 libras).

¿Por qué este resultado recibe el nombre de un **teorema de la autopista de peaje**? Imagine que hacemos un viaje en automóvil en el cual el objetivo es minimizar el tiempo necesario para completar el viaje. Si se trata de un viaje suficientemente largo, sería de provecho alejarnos un poco de nuestro camino de tal manera que la mayor parte del viaje se haga por autopistas, en las cuales podemos viajar a la mayor velocidad. Por lo que se refiere a un viaje corto, no serviría de mucho el tiempo que requiere salirse del camino para viajar por una autopista de peaje.

Lo mismo ocurre con un problema largo de mochila (gran peso): siempre es óptimo usar algunos de los mejores productos, pero no en un problema de la mochila pequeño. Los

FIGURA 8
Horizonte de tiempo para el reemplazo de equipo

lizador de i años de antigüedad se da como pago inicial, se consigue un valor de salvamento s_i, donde $s_1 = 800$ dólares, $s_2 = 600$ dólares, $s_3 = 500$ dólares. Dado que una máquina nueva se debe comprar ahora (tiempo 0; véase figura 8), el taller desea determinar una estrategia de reemplazo y de pago inicial que minimice los costos netos = (costos de mantenimiento) + (costos de reemplazo) − (valor de salvamento recibido) durante los cinco años siguientes.

Solución Observemos que, después de haber comprado una máquina nueva, la compañia debe decidir cuándo se debe dar esta máquina recién comprada como pago inicial de una nueva. Sin olvidar lo anterior, definamos $g(t)$ como el costo neto mínimo generado a partir del tiempo t hasta el tiempo 5 (incluido el costo de compra y el valor de salvamento para la máquina recién comprada) dado que se compró una nueva máquina en el tiempo t. También definamos c_{tx} como el costo neto (incluido costo de compra y valor de salvamento) de la compra de una máquina en el tiempo t y de operarla hasta el tiempo x. Entonces la RECURSIÓN apropiada es

$$g(t) = \min_x \{c_{tx} + g(x)\} \qquad (t = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{9}$$

donde x debe satisfacer las desigualdades $t + 1 \leq x \leq t + 3$ y $x \leq 5$. Como el problema termina en el tiempo 5, no se genera costo alguno a partir de este tiempo en adelante, de modo que se podría escribir $g(5) = 0$.

Para justificar (9), observe que después de comprar una máquina nueva en el tiempo t, hay que decidir cuándo reemplazarla. Sea x el tiempo en el cual ocurre el reemplazo. Éste debe efectuarse después del tiempo t, pero dentro de tres años del tiempo t. Lo anterior explica la restricción de que $t + 1 \leq x \leq t + 3$. Como el problema termina en el tiempo 5, debemos tener también $x \leq 5$. Si la elección es reemplazar la máquina en el tiempo x, entonces, ¿cuál será el costo desde el tiempo t hasta el tiempo 5? Sencillamente la suma del costo generado desde la compra de la máquina hasta la venta de la misma en el tiempo x (el cual es por definición c_{tx}) y el costo total en que se incurre desde el tiempo x hasta el tiempo 5 (dado que se compró una máquina nueva en el tiempo x). Por el principio de la optimalidad el último costo es, naturalmente, $g(x)$. Por lo tanto, si se conserva la máquina que se compró en el tiempo t hasta el tiempo x, es decir, desde el tiempo t hasta el tiempo 5, se genera un costo de $c_{tx} + g(x)$. Por consiguiente, se debe escoger x de tal manera que minimice esta suma, y esto es precisamente lo que hace (9). Se ha supuesto que los costos de mantenimiento, el valor de salvamento y el precio de compra permanecen sin cambio en el tiempo, de modo que cada c_{tx} depende sólo de cuánto tiempo se conserva la máquina; es decir, cada c_{tx} depende sólo de $x - t$. Más específicamente,

$$c_{tx} = \$1000 + m_1 + \cdots + m_{x-t} - s_{x-t}$$

Esto genera

$$c_{01} = c_{12} = c_{23} = c_{34} = c_{45} = 1000 + 60 - 800 = \$260$$
$$c_{02} = c_{13} = c_{24} = c_{35} = 1000 + 60 + 80 - 600 = \$540$$
$$c_{03} = c_{14} = c_{25} = 1000 + 60 + 80 + 120 - 500 = \$760$$

Se empieza por calcular $g(4)$ y se trabaja hacia atrás hasta no calcular $g(0)$. Entonces se aplica lo que se sabe de los valores de x que llegan a $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(4)$ para determinar la estrategia de reemplazo óptima. A continuación se presentan los cálculos.

En el tiempo 4 hay sólo una decisión sensible (conservar la máquina hasta el tiempo 5 y venderla en su valor de salvamento), de modo que se tiene

$$g(4) = c_{45} + g(5) = 260 + 0 = \$260^*$$

Por lo tanto, si se compra una máquina nueva en el tiempo 4, se debe dar como pago inicial de otra en el tiempo 5.

TABLA 13

Edad del automóvil (años)	Valor de reventa (dólares)	Costos de operación (dólares)	
1	7000	300	(año 1)
2	6000	500	(año 2)
3	4000	800	(año 3)
4	3000	1200	(año 4)
5	2000	1600	(año 5)
6	1000	2200	(año 6)

TABLA 14

Año	Costo de mantenimiento (dólares)
1	20
2	30
3	40
4	60
5	70

18.6 Planteamiento de recursiones en programación dinámica

En muchos problemas de programación dinámica (como los ejemplos del inventario y del camino más corto), una etapa dada consiste simplemente en todos los estados posibles que el sistema puede ocupar en esa etapa. En este caso, la RECURSIÓN de la programación dinámica (si es un problema de minimización) se escribe con frecuencia de la manera siguiente:

$$f_t(i) = \min\{(\text{costo durante la etapa } t) + f_{t+1}\ (\text{nuevo estado en la etapa } t+1)\} \quad \textbf{(11)}$$

donde el mínimo en (11) está por encima de todas las decisiones que son admisibles, o factibles, cuando i es el estado en la etapa t. En (11), $f_t(i)$ es el costo mínimo que se genera desde la etapa t hasta el final del problema (es decir, el problema termina después de la etapa T), dado que el estado es i en la etapa t.

Mediante la ecuación (11) se refleja el hecho de que el costo mínimo en que se incurre desde la etapa t al final del problema debe ser alcanzado al escoger, en la etapa t, una decisión que minimice la suma de los costos que se generan durante la etapa actual (etapa t) más el costo mínimo que se genera desde la etapa $t+1$ hasta el final del problema. El planteamiento correcto de una RECURSIÓN de la forma (11) requiere la identificación de tres aspectos importantes del problema:

Aspecto 1 *El conjunto de decisiones que es admisible, o factible, para el estado y etapa dados.* El conjunto de decisiones factibles depende, con frecuencia, de t y de i. Por ejemplo, en el ejemplo del inventario de la sección 18.3, sean

$$d_t = \text{demanda durante el mes } t$$
$$i_t = \text{inventario al inicio del mes}$$

En este caso, el conjunto de decisiones admisibles en el mes t (sea x_t un nivel de producción admisible que consiste de los elementos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ que satisface $0 \leq (i_t + x_t - d_t) \leq 4$. Observe ahora que el conjunto de decisiones admisibles en el tiempo t depende de la etapa t y del estado en el tiempo t, que es i_t.

Aspecto 2 *Debemos especificar cómo el costo durante el periodo actual (etapa t) depende del valor de t, el estado actual, y de la decisión tomada en la etapa t.* Por ejemplo, en el caso del inventario de la sección 18.3, suponga que se escoge un nivel de producción x_t durante el mes t. Entonces el costo durante el mes t está dado por $c(x_t) + (\frac{1}{2})(i_t + x_t - d_t)$.

Aspecto 3 *Debemos especificar el modo en que el estado en la etapa t + 1 depende del valor de t, el estado en la etapa t y la decisión tomada en la etapa t.* De nuevo, al referirnos al ejemplo del inventario, el estado del mes $t+1$ es $i_t + x_t - d_t$.

Si usted ya identificó en forma apropiada el estado, la etapa y la decisión, entonces los aspectos 1 a 3 no deben ser difíciles de manejar. No obstante, hay una advertencia más: no todas las recursiones son de la forma (11). Por ejemplo, la primera RECURSIÓN de la renovación de equipo pasa por alto el tiempo $t+1$.

Ahora ya podemos usar (11) para desarrollar la RECURSIÓN apropiada. Definimos $f_t(i_t)$ como el costo mínimo generado por la planta durante los años $t, t+1, \ldots, T$, dado que están disponibles i_t kwh de capacidad al principio del año t. Al empezar el año T no hay costos futuros por considerar, de modo que

$$f_T(i_T) = \min_{x_T}\{c_T(x_T) + m_T(i_T + x_T)\} \tag{13}$$

donde x_T debe satisfacer $x_T \geq r_T - i_T$. Para $t < T$,

$$f_t(i_t) = \min_{x_T}\{c_t(x_t) + m_t(i_t + x_t) + f_{t+1}(0.9i_t + x_t)\} \tag{14}$$

donde x_t debe cumplir $x_t \geq r_t - i_t$. Si la planta no inicia con algún exceso de capacidad, entonces podemos suponer con toda seguridad que el nivel de capacidad nunca sería mayor que $r_{\text{MÁX}} = \max\limits_{t=1,2,\ldots,T}\{r_t\}$. Esto significa que necesitamos tomar en cuenta sólo estados $0, 1, 2, \ldots, r_{\text{MÁX}}$. Para empezar a calcular recurrimos a (13) para estimar $f_T(0), f_T(1), \ldots, f_T(r_{\text{MÁX}})$. Luego aplicamos (14) para trabajar hacia atrás hasta no haber determinado $f_1(100\,000)$. Para obtener la cantidad óptima de capacidad que debería sumarse durante cada año, proceda como se indica. Durante el año 1, sume una cantidad de capacidad x_1 que alcanza el mínimo en la ecuación (14) para $f_1(100\,000)$. Entonces la planta comenzará el año 2 con $90\,000 + x_1$ kwh de capacidad. Luego, durante el año 2, se deben sumar x_2 kwh de capacidad, donde x_2 llega al mínimo en la ecuación (14) para $f_2(90\,000 + x_1)$. Continúe de este modo hasta determinar el valor óptimo de x_T.

EJEMPLO 10 Venta de trigo

El agricultor Jones posee ya 5000 dólares en efectivo y 1000 bushels de trigo. Durante el mes t, el precio del trigo es p_t. Debe decidir durante cada mes cuántos bushels de trigo debe comprar (o vender). Hay tres restricciones en las transacciones con el trigo, cada mes: (1) la cantidad de dinero gastado en el trigo en el curso de cualquier mes no puede ser mayor que el efectivo disponible al principio del mes; (2) en cualquier mes el agricultor no puede vender más trigo que el que tenía al inicio del mes, (3) debido a la capacidad limitada de almacenamiento, el inventario final del trigo de cada mes no puede ser mayor de 1000 bushels.

Demuestre cómo usar la programación dinámica para maximizar la cantidad de efectivo que el agricultor Jones tiene disponible al final de seis meses.

Solución Hagamos de nuevo que el tiempo sea la etapa. Al empezar el mes t (el presente es el inicio del mes 1), el agricultor Jones debe decidir en cuánto cambiar la cantidad de trigo que tiene disponible. Definimos Δw_t como el cambio en la posición del trigo del agricultor Jones en el curso del mes t: $\Delta w_t \geq 0$ corresponde a una compra de trigo en el mes t, y $\Delta w_t \geq 0$ corresponde a la venta de trigo en el mes t. Tenemos que saber dos cosas para determinar un valor óptimo de Δw_t: la cantidad de trigo disponible al principio del mes t (llámela w_t) y el efectivo disponible al iniciar el mes t (llámelo c_t). Definimos $f_t(c_t, w_t)$ como el efectivo máximo que el agricultor Jones puede obtener al final del mes 6, dado que tiene c_t dólares y w_t bushels de trigo al principio del mes t. Enseguida analizaremos los aspectos 1 a 3 de la formulación.

Aspecto 1 ¿Cuáles son las decisiones admisibles? Si el estado en el tiempo t es (c_t, w_t), entonces las restricciones 1 a 3 limitan a Δw_t de la manera siguiente:

$$p_t(\Delta w_t) \leq c_t \qquad \text{o} \qquad \Delta w_t \leq \frac{c_t}{p_t}$$

asegura que no podríamos quedarnos sin dinero al final del mes t. La desigualdad $\Delta w_t \geq -w_t$ asegura que, durante el mes t, no venderemos más trigo del que teníamos al iniciar el mes t; y $w_t + \Delta w_t \leq 1000$, o bien $\Delta w_t \leq 1000 - w_t$ asegura que terminaremos, a lo más, el mes t con 1000 bushels de trigo. Al reunir estas tres restricciones observamos que

día y y_t barriles de gasolina por día, entonces generamos un costo de $c_t(x_t, y_t)$ en el sitio t. Luego necesitamos construir una capacidad total de refinación de petróleo crudo de $o_t - x_t$, y una capacidad de refinación de gas de $g_t - y_t$ en los sitios $t + 1, t + 2, \ldots, 4$. Por el principio de la optimalidad, el costo de efectuar lo anterior será $f_{t+1}(o_t - x_t, g_t - y)$. Puesto que se debe cumplir $0 \le x_t \le o_t$ y $0 \le y_t \le g_t$, obtenemos la RECURSIÓN siguiente:

$$f_t(o_t, g_t) = \min \{c_t(o_t, g_t) + f_{t+1}(o_t - x_t, g_t - y_t)\} \tag{17}$$

donde $0 \le x_t \le o_t$ y $0 \le y_t \le g_t$. Como ya lo hemos hecho otras veces, trabajamos hacia atrás hasta determinar $f_1(5000, 10\,000)$. Luego Sunco escoge x_1 y y_1 de tal modo que lleguen al mínimo en la ecuación (17) para $f_1(5000, 10\,000)$. Después, Sunco debe elegir x_2 y y_2 que sean mínimas en la ecuación (17) para $f_2(5000 - x_1, 10\,000 - y_1)$. Sunco debe continuar de este modo hasta que encuentre los valores óptimos de x_4 y y_4.

EJEMPLO 12 Agente viajero

El problema del agente viajero (véase sección 9.6) se puede resolver mediante la programación dinámica. Para ejemplificar lo anterior, se resuelve enseguida un problema del agente viajero: es el último fin de semana de la campaña de elecciones del 2004, y el candidato Walter Glenn está en Nueva York. Antes del día de las elecciones, Walter debe visitar Miami, Dallas y Chicago, y luego regresar a sus oficinas centrales en Nueva York. Walter desea minimizar la distancia total que debe recorrer. ¿En qué orden debe visitar las ciudades? Las distancias en millas entre las cuatro ciudades se proporcionan en la tabla 15.

Solución Sabemos que Walter tiene que visitar cada ciudad exactamente una vez, que la última ciudad que visita debe ser Nueva York, y que su viaje empieza en Nueva York. Cuando a Walter sólo le queda una ciudad por visitar, su problema es trivial: sencillamente va desde el lugar donde se encuentre a Nueva York. Luego podemos trabajar hacia atrás hasta un problema en el que él está en alguna ciudad y sólo le faltan dos ciudades por visitar, y, por último, podemos encontrar el camino más corto que se origina en Nueva York, y le quedan cuatro ciudades por visitar. Por lo tanto, señalaremos la etapa con el número de ciudades que Walter ya visitó. En cualquier etapa necesitamos saber dos cosas para determinar qué ciudad debe ser la siguiente en ser visitada: la ubicación actual de Walter y las ciudades que ya visitó. En cualquier etapa, el estado consiste en la última ciudad visitada y el conjunto de ciudades que ya fueron visitadas. Definimos entonces $f_t(i, S)$ como la distancia mínima que se debe recorrer para completar un tour si las ciudades $t - 1$ en el conjunto S ya fueron visitadas y la ciudad i fue la última visitada. Sea c_{ij} la distancia entre las ciudades i y j.

Cálculos de la etapa 4

Observamos que, en la etapa 4, S debe ser $\{2, 3, 4\}$ (¿por qué?), y los únicos estados posibles son $(2, \{2, 3, 4\})$, $(3, \{2, 3, 4\})$ y $(4, \{2, 3, 4\})$. En la etapa 4 debemos ir desde la ubicación actual hasta Nueva York. Con esta observación se obtiene

$f_4(2, \{2, 3, 4\}) = c_{21} = 1334^*$ (Ir de la ciudad 2 a la ciudad 1)
$f_4(3, \{2, 3, 4\}) = c_{31} = 1559^*$ (Ir de la ciudad 3 a la ciudad 1)
$f_4(4, \{2, 3, 4\}) = c_{41} = 809^*$ (Ir de la ciudad 4 a la ciudad 1)

TABLA 15
Distancias que debe recorrer el agente viajero

	Ciudad			
	Nueva York	Miami	Dallas	Chicago
1 Nueva York	—	1334	1559	809
2 Miami	1334	—	1343	1397
3 Dallas	1559	1343	—	921
4 Chicago	809	1397	921	—

Cálculos de la etapa 3

Al ir hacia atrás en la etapa 3, se genera

$$f_3(i, S) = \min_{\substack{j \notin S \\ y\ j \neq 1}} \{c_{ij} + f_4[j, S \cup \{j\}]\} \tag{18}$$

Se llega a este resultado porque, si Walter está ahora en la ciudad i, y viaja a la ciudad j, recorre una distancia c_{ij}. Entonces está en la etapa 4, visitó por último la ciudad j, y ya visitó las ciudades en $S \cup \{j\}$. De aquí que la distancia del resto de su viaje debe ser $f_4(j, S \cup \{j\})$. Para usar (18), obsérvese que en la etapa 3, Walter tiene que haber visitado $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ o $\{3, 4\}$, y luego debe visitar al elemento que no está en S que no es igual a 1. Es posible aplicar (18) para determinar $f_3(\cdot)$ para todos los estados posibles:

$f_3(2, \{2, 3\}) = c_{24} + f_4(4, \{2, 3, 4\}) = 1397 + 809 = 2206^*$ (Ir de la ciudad 2 a la ciudad 4)

$f_3(3, \{2, 3\}) = c_{34} + f_4(4, \{2, 3, 4\}) = 921 + 809 = 1730^*$ (Ir de la ciudad 3 a la ciudad 4)

$f_3(2, \{2, 4\}) = c_{23} + f_4(3, \{2, 3, 4\}) = 1{,}343 + 1559 = 2902^*$ (Ir de la ciudad 2 a la ciudad 3)

$f_3(4, \{2, 4\}) = c_{43} + f_4(3, \{2, 3, 4\}) = 921 + 1559 = 2480^*$ (Ir de la ciudad 4 a la ciudad 3)

$f_3(3, \{3, 4\}) = c_{32} + f_4(2, \{2, 3, 4\}) = 1343 + 1334 = 2677^*$ (Ir de la ciudad 3 a la ciudad 2)

$f_3(4, \{3, 4\}) = c_{42} + f_4(2, \{2, 3, 4\}) = 1397 + 1334 = 2731^*$ (Ir de la ciudad 4 a la ciudad 2)

En general, para $t = 1, 2, 3$ tenemos

$$f_t(i, S) = \min_{\substack{j \notin S \\ y\ j \neq 1}} \{c_{ij} + f_{t+1}[j, S \cup \{j\}]\} \tag{19}$$

Se llega a este resultado porque si Walter está en la actualidad en la ciudad i y luego visita la ciudad j, entonces recorre una distancia c_{ij}. El resto de su *tour* se originará en la ciudad j, y habrá visitado las ciudades en $S \cup \{j\}$. Por lo tanto, la distancia del resto de su recorrido debe ser $f_{t+1}(j, S \cup \{j\})$. Ahora sigue la ecuación (19).

Cálculos de la etapa 2

Walter visitó sólo una ciudad en la etapa 2, de modo que los únicos estados posibles son $(2, \{2\})$, $(3, \{3\})$ y $(4, \{4\})$. Si se aplica (19) se obtiene

$$f_2(2, \{2\}) = \min \begin{cases} c_{23} + f_3(3, \{2, 3\}) = 1343 + 1730 = 3073^* \\ \text{(Ir de 2 a 3)} \\ c_{24} + f_3(4, \{2, 4\}) = 1397 + 2480 = 3877 \\ \text{(Ir de 2 a 4)} \end{cases}$$

$$f_2(3, \{3\}) = \min \begin{cases} c_{34} + f_3(4, \{3, 4\}) = 921 + 2731 = 3652 \\ \text{(Ir de 3 a 4)} \\ c_{32} + f_3(2, \{2, 3\}) = 1343 + 2206 = 3549^* \\ \text{(Ir de 3 a 2)} \end{cases}$$

$$f_2(4, \{4\}) = \min \begin{cases} c_{42} + f_3(2, \{2, 4\}) = 1397 + 2902 = 4299 \\ \text{(Ir de 4 a 2)} \\ c_{43} + f_3(3, \{3, 4\}) = 921 + 2677 = 3598^* \\ \text{(Ir de 4 a 3)} \end{cases}$$

Cálculos de la etapa 1

Por último, volvemos a la etapa 1 (donde ninguna ciudad ha sido visitada. Como Walter está ahora en Nueva York y no ha visitado ciudad alguna, la etapa 1 debe ser $f_1(1, \{\cdot\})$. Al aplicar (19),

$$f_1(1, \{\cdot\}) = \min \begin{cases} c_{12} + f_2(2, \{2\}) = 1334 + 3073 = 4407^* \\ \text{(Ir de 1 a 2)} \\ c_{13} + f_2(3, \{3\}) = 1559 + 3549 = 5108 \\ \text{(Ir de 1 a 3)} \\ c_{14} + f_2(4, \{4\}) = 809 + 3598 = 4407^* \\ \text{(Ir de 1 a 4)} \end{cases}$$

De modo que desde la ciudad 1 (Nueva York), Walter podría ir a la ciudad 2 (Miami) o a la ciudad 4 (Chicago). Le hemos escogido arbitrariamente que vaya a la ciudad 4. Entonces debe escoger visitar la ciudad que llegue a $f_2(4, \{4\})$, para lo cual se requiere que luego visite la ciudad 3 (Dallas). Después debe visitar la ciudad que alcance a $f_3(3, \{4\})$, lo cual requiere que luego visite la ciudad 2 (Miami). Entonces Walter debe visitar la ciudad que llegue a $f_4(2, \{2, 3, 4\})$, lo cual quiere decir, naturalmente, que luego debe ir a visitar a la ciudad 1 (Nueva York). Ya está ahora el *tour* completo (1–4–3–2–1, es decir, Nueva York-Chicago-Dallas-Miami-Nueva York). La distancia recorrida en este *tour* es $f_1(1, \{\cdot\}) =$ 4 407. A manera de comprobación, obsérvese que

Distancia de Nueva York a Chicago = 809 millas
Distancia de Chicago a Dallas = 921 millas
Distancia de Dallas a Miami = 1343 millas
Distancia de Miami a Nueva York = 1334 millas

de modo que la distancia total que Walter recorre es 809 + 921 + 1343 + 1334 = 4407 millas. Naturalmente, si primero lo hemos enviado a la ciudad 2, habríamos obtenido otro tour óptimo (1–2–3–4–1) que sería un inverso del *tour* original óptimo.

Dificultades en el cálculo al usar la programación dinámica

Por lo que toca a los problemas del agente viajero, que son muy grandes, el espacio del estado se vuelve enorme, por lo que el método de ramificar y acotar, estudiado en el capítulo 9 (así como otros procedimientos de este tipo) es mucho más eficaz que el método de programación dinámica tratado en esta parte. Por ejemplo, para un problema de 30 ciudades, suponga que estamos en la etapa 16 (esto significa que 15 ciudades ya fueron visitadas). Entonces, se puede demostrar que hay más de mil millones de estados posibles. Esto origina un problema que limita la aplicación práctica de la programación dinámica. En muchos problemas, *el espacio del estado se vuelve tan grande que se requiere un tiempo excesivo de cálculo para resolver el problema mediante programación dinámica*. Para ilustrarlo, suponga en el ejemplo 8 que $T = 20$. Es posible que si ningún robalo se capturara en los primeros 20 años, entonces el lago podría contener $10\,000(1.2)^{20} = 383\,376$ robalos al iniciar el año 21. Si planteáramos este ejemplo como una red en la cual es necesario hallar el camino más grande desde el nodo (1, 10 000) (que representa el año 1 y 10 000 robalos en el lago) hasta algún nodo de la etapa 21, entonces la etapa 21 tendría 383 377 nodos. Incluso una computadora muy potente tendría dificultades para resolver este problema. Las técnicas para hacer que los problemas con espacios enormes para los estados se vuelvan fáciles de trabajar se tratan en Bersetkas (1987) y Denardo (1982).

$$f_3(6) = \min \begin{cases} \max\,[c_{67}, f_4(7)] = 13 & \text{(Ir de 6 a 7)} \\ \max\,[c_{68}, f_4(8)] = 8^* & \text{(Ir de 6 a 8)} \\ \max\,[c_{69}, f_4(9)] = 9 & \text{(Ir de 6 a 9)} \end{cases}$$

$$f_2(2) = \max\,[c_{25}, f_3(5)] = 9^* \qquad \text{(Ir de 2 a 5)}$$

$$f_2(3) = \max\,[c_{35}, f_3(5)] = 8^* \qquad \text{(Ir de 3 a 5)}$$

$$f_2(4) = \min \begin{cases} \max\,[c_{45}, f_3(5)] = 11 & \text{(Ir de 4 a 5)} \\ \max\,[c_{46}, f_3(6)] = 8^* & \text{(Ir de 4 a 6)} \end{cases}$$

$$f_1(1) = \min \begin{cases} \max\,[c_{12}, f_2(2)] = 10 & \text{(Ir de 1 a 2)} \\ \max\,[c_{13}, f_2(3)] = 8^* & \text{(Ir de 1 a 3)} \\ \max\,[c_{14}, f_2(4)] = 8^* & \text{(Ir de 1 a 4)} \end{cases}$$

Para determinar la estrategia óptima, observe que Joe puede empezar por ir de la ciudad 1 a la ciudad 3, o bien, de la ciudad 1 a la 4. Suponga que Joe empieza por ir a la ciudad 3. Luego debe elegir el arco que alcance $f_2(3)$, lo cual significa que después debe viajar a la ciudad 5. Entonces Joe debe elegir el arco que llegue a $f_3(5)$, e ir luego a la ciudad 8. Después debe ir, naturalmente, a la ciudad 10. Por consiguiente, la trayectoria 1–3–5–8–10 es óptima, y Joe encontrará una altitud máxima igual a $f_1(1) = 8000$ pies. Compruebe que el recorrido 1–4–6–8–10 también es óptimo.

EJEMPLO 14 Asignación de ventas

Glueco planea introducir un producto nuevo en tres regiones distintas. Las estimaciones actuales son que el producto se venderá bien en cada región con las probabilidades respectivas de .6, .5 y 3. La compañía dispone de dos representantes de ventas de primer nivel a los cuales puede enviar a cualquiera de las tres regiones. En la tabla 16 se proporcionan las probabilidades estimadas de que el producto se venderá muy bien en cada región cuando 0, 1 o 2 representantes de ventas sean enviados a una región. Si Glueco desea maximizar la probabilidad de que su nuevo producto se venda muy bien en las tres regiones, entonces, ¿a dónde debe asignar los representantes de ventas? Usted podría suponer que las ventas en las tres regiones son independientes.

Solución Si Glueco tuviera que preocuparse sólo por una región y quisiera maximizar la probabilidad de que el nuevo producto se venda allí, entonces la estrategia adecuada sería evidente: asignar ambos representantes de ventas a dicha región. Luego podríamos trabajar hacia atrás y resolver un problema en el cual el objetivo de Glueco es maximizar la probabilidad de que el producto se venda en las dos regiones. Por último, podríamos trabajar hacia atrás y resolver un problema con tres regiones. Definamos $f_t(s)$ como la probabilidad de que el nuevo producto se venda en las regiones t, $t + 1, \ldots, 3$ si s representantes de ventas se asignan en forma óptima a esas regiones. Entonces,

$$f_3(2) = .7 \qquad \text{(Asignar 2 representantes de ventas a la región 3)}$$

$$f_3(1) = .55 \qquad \text{(Asignar 1 representante de ventas a la región 3)}$$

$$f_3(0) = .3 \qquad \text{(Asignar 0 representantes de ventas a la región 3)}$$

TABLA 16
Relación entre ventas y representantes de ventas regionales

No. de representantes de ventas adicionales	Probabilidad de vender muy bien		
	Región 1	Región 2	Región 3
0	.6	.5	.3
1	.8	.7	.55
2	.85	.85	.7

desea gastar D dólares en publicidad. Desarrolle una RECURSIÓN para programación dinámica con la que MacBurger pueda maximizar la cantidad de clientes constantes que la compañía tendrá al final del mes 12. (Ignore la posibilidad de una fracción de clientes constantes.)

9 La empresa Public Service Indiana (PSI) planea construir plantas de generación de energía eléctrica en cinco posibles lugares en los próximos 20 años. Costará c_i dólares construir una planta en el lugar i y h_i dólares operarla un año. Una planta en el lugar i es capaz de suministrar k_i kilowatts-hora (kwh) de capacidad de generación. Se requieren durante el año t, d_t kwh de capacidad de generación. Suponga que se puede construir cuando mucho una planta en un año, y si se decide edificar una planta en el sitio i durante el año t, entonces la planta del sitio i se puede utilizar para cumplir con la generación necesaria del año t (y posteriores). Al principio PSI dispone de 500 000 kwh de capacidad de generación. Plantee una RECURSIÓN con la que PSI minimice la suma de los costos de construcción y operación durante los 20 años siguientes.

10 Una compañía enfrenta durante el mes t una demanda de d_t unidades de un producto. Los costos de producción de la empresa durante el mes t consisten en dos partes. Primero, por cada unidad producida durante el mes t, la compañía incurre en un costo de producción variable c_t. Segundo, si el nivel de producción de la empresa durante el mes $t - 1$ es x_{t-1} y el nivel de producción durante el mes t es x_t, entonces durante el mes t se incurre en un costo por suavización (véase en capítulo 3 y la sección 24.2 la explicación de los costos por suavización) de $5|x_t - x_{t-1}|$. Al final de cada mes se genera un costo por almacenamiento h_t por unidad. Formule una RECURSIÓN que permita a la compañía cumplir (a tiempo) con la demanda en los siguientes 12 meses. Suponga que al principio del primer mes hay 20 unidades en inventario, y que la producción del último mes fue de 20 unidades. (*Sugerencia*: el estado durante cada mes debe consistir en dos unidades).

11 Transilvania está formada por tres ciudades cuya población es la siguiente: ciudad 1, 1.2 millones de personas; ciudad 2, 1.4 millones de personas; ciudad 3, 400 000 personas. La Cámara de Representantes de Transilvania está constituida por tres representantes. Dada la representación proporcional, la ciudad 1 debe tener $d_1 = (\frac{12}{3}) = 1.2$ representantes; la ciudad 2 debe tener $d_2 = 1.4$ representantes; y la ciudad 3 debe tener $d_3 = 0.40$ representantes. Todas las ciudades deben recibir un número entero de representantes, de modo que esto es imposible. Por lo tanto, Transilvania decidió asignar x_i representantes a la ciudad i, donde la asignación x_1, x_2, x_3 minimiza la discrepancia entre la cantidad deseada y real de representantes recibida por una ciudad. En resumen, Transilvania debe determinar x_1, x_2 y x_3 para minimizar el más grande de los tres números siguientes $|x_1 - d_1|$, $|x_2 - d_2|$, $|x_3 - d_3|$. Resuelva el problema de Transilvania mediante programación dinámica.

12 Un taller tiene cuatro trabajos que debe efectuar en una sola máquina. El plazo y el tiempo de proceso para cada trabajo se dan en la tabla 19. Determine, mediante programación dinámica, el orden en que se deben efectuar los trabajos de modo que se minimice la demora total de éstos. (La demora de un trabajo es simplemente cuánto tiempo después del plazo de entrega se finaliza el trabajo; por ejemplo, si los trabajos se procesan en el orden dado, entonces el 3 estará dos días tarde, el trabajo 4 estará 4 días tarde y los trabajos 1 y 2 no se atrasarán).

TABLA 19

Trabajo	Tiempo de proceso (días)	Plazo (días a partir de ahora)
1	2	14
2	4	14
3	6	10
4	8	16

18.7 Algoritmo de Wagner-Whitin y el planteamiento heurístico de Silver-Meal†

El ejemplo del inventario de la sección 18.3 es un caso especial de modelo dinámico del tamaño del lote.

Descripción del modelo dinámico del tamaño del lote

1 La demanda d_t durante el periodo $t(t = 1, 2, \ldots, T)$ se conoce al principio del periodo 1.

2 La demanda para el periodo t se debe cumplir a tiempo con el inventario o con la producción del periodo t. El costo $c(x)$ de producir x unidades durante cualquier periodo está dado por $c(0) = 0$ y para $x > 0$, $c(x) = K + cx$, donde K es un costo fijo para iniciar la producción durante un periodo, y c es el costo variable de producción por unidad.

3 Al final del periodo t se observa el nivel de inventario i_t, por lo que se genera un costo de almacenamiento hi_t. Denotemos con i_0 el nivel de inventario antes que ocurra la producción del periodo 1.

4 La meta es determinar un nivel de producción x_t para cada periodo t que minimiza el costo total del cumplimiento a tiempo de la demanda en los periodos $1, 2, \ldots, T$.

†En esta sección se tratan temas que se podrían omitir sin perder la continuidad.

Demostración Si el lema es falso, debe haber una estrategia óptima que (para alguna t) tiene $x_t > 0$ y $i_{t-1} \geq d_t$. Si éste es el caso, entonces al diferir la producción de x_t unidades del periodo t hasta el periodo $t + 1$ se ahorran hx_t en costos de almacenamiento y posiblemente K (si la estrategia óptima produce durante el periodo $t + 1$) en costos preliminares o de preparación. Por lo tanto, no puede ser óptimo el plan de producción que tiene $x_t > 0$ y $i_{t-1} \geq d_t$.

El lema 2 demuestra que ninguna producción ocurrirá hasta el primer periodo t para el cual $i_{t-1} < d_t$, de modo que la producción debe ocurrir durante el periodo t (o la demanda de los periodos t no se cumpliría a tiempo). El lema 1 implica que para alguna $j = 0, 1, \ldots, T - t$, la producción del periodo t será tal que después de la producción del periodo t, las existencias disponibles serán iguales a $d_t + d_{t+1} + \cdots + d_{t+j}$. Entonces, del lema 2 se infiere que ninguna producción puede ocurrir sino hasta el periodo $t + j + 1$. Como el nivel de inventario entrante para el periodo $t + j + 1$ será igual a cero, la producción debe ocurrir durante el periodo $t + j + 1$. Durante el periodo $t + j + 1$, del lema 1 se infiere que la producción del periodo $t + j + 1$ será (para alguna k) igual a $d_{t+j+1} + d_{t+j+2} + \cdots + d_{t+j+k}$ unidades. Luego, el periodo $t + j + k + 1$ empezará con inventario cero, y de nuevo hay producción, y así sucesivamente. *Con la posible excepción del primer periodo, habrá producción sólo durante los periodos en los cuales el inventario inicial es cero, y durante cada periodo en el cual el inventario es cero (y $d_t \neq 0$) debe haber producción.*

Wagner y Within, aplicando esta reflexión, desarrollaron una RECURSIÓN que se puede usar para determinar una estrategia de producción óptima. Supongamos que el nivel de inventario inicial es cero. (Véase el problema 1 al final de esta sección si no es así). Definamos f_t como el costo mínimo que se genera durante los periodos $t, t + 1, \ldots, T$, dado que al principio del periodo t el nivel de inventario es cero. Entonces, $f_1, f_2, \ldots, f_T$ debe satisfacer

$$f_t = \min_{j=0,1,2,\ldots,T-t} (c_{tj} + f_{t+j+1}) \tag{22}$$

donde $f_{T+1} = 0$ y c_{tj} es el costo total que se genera durante los periodos $t, t + 1, \ldots, t + j$ si la producción durante el periodo t es exactamente suficiente para cumplir la demanda de los periodos $t, t + 1, \ldots, t + j$. Por lo tanto,

$$c_{tj} = K + c(d_t + d_{t+1} + \cdots + d_{t+j}) + h[\,jd_{t+j} + (j-1)d_{t+j-1} + \cdots + d_{t+1}]$$

donde K es el costo preliminar o de preparación en que se incurre durante el periodo t, $c(d_t + d_{t+1} + \cdots + d_{t+j})$ es el costo de producción variable que se genera durante el periodo t y $h[\,jd_{t+j} + (j-1)d_{t+j-1} + \cdots + d_{t+1}]$ es el costo de almacenamiento en que se incurre durante los periodos $t, t + 1, \ldots, t + j$. Por ejemplo, una cantidad d_{t+j} de la producción del periodo t se mantendrá en inventario por j periodos (durante los periodos $t, t + 1, \ldots, t + j - 1$), por lo que se incurre en un costo de almacenamiento de hjd_{t+j}.

Para encontrar un plan de producción óptimo mediante el algoritmo de Wagner y Whitin se empieza por aplicar (22) y determinar f_T. Luego con (22) se calcula $f_{T-1}, f_{T-2}, \ldots, f_1$. Una vez que se encontró f_1 se puede obtener con toda facilidad un plan de producción óptimo.

EJEMPLO 15 Modelo dinámico del tamaño del lote (continuación)

Solución Para ilustrar el algoritmo de Wagner-Whitin estableceremos un plan de producción óptimo para el ejemplo 15. A continuación se presentan los cálculos:

$$f_6 = 0$$
$$f_5 = 250 + 2(270) + f_6 = 790^* \qquad \text{(Producir en el periodo 5)}$$

Si iniciamos el periodo 5 con inventario cero, debemos producir lo suficiente durante el periodo 5 para cumplir con la demanda del periodo 5.

$$f_4 = \min \begin{cases} 250 + 2(140) + f_5 = 1320^* \\ \text{(Producir en el periodo 4)} \\ 250 + 2(140 + 270) + 270 + f_6 = 1340 \\ \text{(Producir en los periodos 4, 5)} \end{cases}$$

Si el periodo 4 empieza con inventario cero, debemos producir lo suficiente durante el periodo 4 para cumplir la demanda del mismo periodo.

$$f_3 = \min \begin{cases} 250 + 2(360) + f_4 = 2290 \\ \text{(Producir en el periodo 3)} \\ 250 + 2(360 + 140) + 140 + f_5 = 2180^* \\ \text{(Producir en los periodos 3, 4)} \\ 250 + 2(360 + 140 + 270) + 140 + 2(270) + f_6 = 2470 \\ \text{(Producir en el periodo 3, 4, 5)} \end{cases}$$

Si empezamos el periodo 3 con inventario cero, debemos producir suficiente durante el periodo 3 para cumplir con la demanda para los periodos 3 y 4.

$$f_2 = \min \begin{cases} 250 + 2(280) + f_3 = 2990^* \\ \text{(Producir en el periodo 2)} \\ 250 + 2(280 + 360) + 360 + f_4 = 3210 \\ \text{(Producir en los periodos 2, 3)} \\ 250 + 2(280 + 360 + 140) + 360 + 2(140) + f_5 = 3240 \\ \text{(Producir en los periodos 2, 3, 4)} \\ 250 + 2(280 + 360 + 140 + 270) + 360 + 2(140) + 3(270) + f_6 = 3800 \\ \text{(Producir en los periodos 2, 3, 4, 5)} \end{cases}$$

Si el periodo 2 comienza con inventario cero, tenemos que producir suficiente durante el periodo 2 para cumplir con la demanda del mismo periodo.

$$f_1 = \min \begin{cases} 250 + 2(220) + f_2 = 3680^* \\ \text{(Producir en el periodo 1)} \\ 250 + 2(220 + 280) + 280 + f_3 = 3710 \\ \text{(Producir en los periodos 1, 2)} \\ 250 + 2(220 + 280 + 360) + 280 + 2(360) + f_4 = 4290 \\ \text{(Producir en los periodos 1, 2, 3)} \\ 250 + 2(220 + 280 + 360 + 140) + 280 + 2(360) + 3(140) + f_5 = 4460 \\ \text{(Producir en los periodos 1, 2, 3, 4)} \\ 250 + 2(220 + 280 + 360 + 140 + 270) + 280 \\ \qquad + 2(360) + 3(140) + 4(270) + f_6 = 5290 \\ \text{(Producir en los periodos 1, 2, 3, 4, 5)} \end{cases}$$

Si empezamos el periodo 1 con inventario cero, lo óptimo es producir $d_1 = 220$ unidades durante el periodo 1; luego empezamos el periodo 2 con inventario cero. Puesto que f_2 se alcanza al producir la demanda del periodo 2, debemos producir $d_2 = 280$ unidades durante el periodo 2; luego entramos al periodo 3 con inventario cero. Como f_3 se alcanza al cumplir con las demandas para los periodos 3 y 4, producimos $d_3 + d_4 = 500$ unidades durante el periodo 3; luego llegamos al periodo 5 con cero inventario y producimos $d_5 = 270$ unidades durante el periodo 5. El plan de producción óptimo generará en un costo total de $f_1 = 3680$ dólares.

Por lo que se refiere al ejemplo 15, cualquier plan de producción óptimo debe producir exactamente $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 1270$ unidades, que generan costos de producción variables de $2(1{,}270) = 2540$. Por lo tanto, al calcular el plan de producción óptimo siempre se podrían ignorar los costos de producción variables. Lo cual simplifica notoriamente los cálculos.

Planteamiento heurístico de Silver-Meal (S-M)

Este planteamiento heurístico requiere menos trabajo que el algoritmo de Wagner-Whitin, y se usa para determinar un plan de producción casi óptimo. Se basa en el hecho de que el objetivo es minimizar el costo promedio por periodo (por las razones establecidas, los costos de producción variables se podrían ignorar). Suponga que nos encontramos al inicio del periodo 1, y que pretendemos determinar cuántos periodos de demanda se deben satisfacer con la producción del periodo 1. Durante el periodo 1, si producimos una cantidad suficiente para cumplir con la demanda para los t periodos siguientes, entonces se genera un costo de $TC(t) = K + HC(t)$ (se ignoran los costos de producción variables). Aquí, $HC(t)$ es el costo de almacenamiento que hay durante el siguiente periodo t (que abarca el periodo actual) si la producción durante el periodo actual es suficiente para cumplir con la demanda de los t periodos siguientes.

Sea $AC(t) = \frac{TC(t)}{t}$ el costo promedio por periodo en que se incurre durante los t periodos siguientes. Como $\frac{1}{t}$ es una función decreciente convexa de t, a medida que t se incrementa, $\frac{K}{t}$ disminuye a una razón decreciente. En la mayor parte de los casos, $\frac{HC(t)}{t}$ tiende a ser una función creciente de t (véase problema 4 al final de esta sección). Por lo tanto, se puede encontrar casi siempre un entero t^* tal que para $t < t^*$, $AC(t + 1) \leq AC(t)$ y $AC(t^* + 1) \geq AC(t^*)$. El planteamiento heurístico S-M recomienda que la producción del periodo 1 sea suficiente para cumplir las demandas para los periodos $1, 2, \ldots, t^*$ (si t^* no existe, la producción del periodo 1 debe satisfacer la demanda para los periodos $1, 2, \ldots, T$). Como t^* es un mínimo local (y tal vez uno global) para $AC(t)$, parece razonable que producir $d_1 + d_2 + \cdots + d_{t^*}$ unidades durante el periodo 1 estará cerca de minimizar el costo promedio por promedio generado en los periodos $1, 2, \ldots, t^*$. Luego aplicamos el planteamiento heurístico S-M en tanto que consideramos el periodo $t^* + 1$ como el periodo inicial. Observamos que durante el periodo $t^* + 1$ se debe producir la demanda para los $t_1{}^*$ periodos siguientes. Así continuamos de este modo hasta haber producido la demanda del periodo T.

Para ilustrar lo anterior, enseguida se aplica el planteamiento S-M al ejemplo 15. Tenemos

$$TC(1) = 250 \qquad AC(1) = \frac{250}{1} = 250$$

$$TC(2) = 250 + 280 = 530 \qquad AC(2) = \frac{530}{2} = 265$$

Como $AC(2) \geq AC(1)$, $t^* = 1$, y el planteamiento heurístico S-M establece que producimos $d_1 = 220$ unidades durante el periodo 1. Luego,

$$TC(1) = 250 \qquad AC(1) = \frac{250}{1} = 250$$

$$TC(2) = 250 + 360 = 610 \qquad AC(2) = \frac{610}{2} = 305$$

Como $AC(2) \geq AC(1)$, el planteamiento heurístico recomienda producir $d_2 = 280$ unidades durante el periodo 2. Entonces,

$$TC(1) = 250 \qquad AC(1) = \frac{250}{1} = 250$$

$$TC(2) = 250 + 140 = 390 \qquad AC(2) = \frac{390}{2} = 195$$

$$TC(3) = 250 + 2(270) + 140 = 930 \qquad AC(3) = \frac{930}{3} = 310$$

Como $AC(3) \geq AC(2)$, la producción del periodo 3 debe alcanzar para la demanda de los dos periodos siguientes (periodos 3 y 4). Durante el periodo 3 debemos producir $d_3 + d_4 = 500$ unidades. Esto nos lleva al periodo 5. Este periodo es el final, de modo que se deben producir $d_5 = 270$ unidades durante el periodo 5.

Por lo que se refiere ala ejemplo 15 (y a muchos otros problemas dinámicos de tamaño de lote), con el planteamiento heurístico se obtiene un plan de producción óptimo. En pruebas extensas, este planteamiento da por lo regular un costo del plan de producción menor que 1% por arriba de la estrategia óptima obtenida con el algoritmo de Wagner-Whitin (véase Peterson y Silver (1998)).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Refiérase al ejemplo 15; suponga que tenemos un inventario de 200 unidades. ¿Cuál sería el plan de producción óptimo? ¿Cuál si el inventario inicial fuera de 400 unidades?

2 Utilice los métodos de Wagner-Whitin y Silver-Meal para determinar los planes de producción para el siguiente problema de tamaño de lote: $K = \$50$, $h = \$0.40$, $d_1 = 10$, $d_2 = 60$, $d_3 = 20$, $d_4 = 140$, $d_5 = 90$.

3 Mediante los métodos de Wagner-Whitin y Silver-Meal encuentre los planes de producción para el siguiente problema dinámico de tamaño de lote: $K = \$30$, $h = \$1$, $d_1 = 40$, $d_2 = 60$, $d_3 = 10$, $d_4 = 70$, $d_5 = 20$.

Grupo B

4 Explique por qué $HC(t)/t$ tiende a ser una función creciente de t.

18.8 Resolución de problemas de programación dinámica mediante Excel[†]

En los primeros capítulos se estudió que cualquier problema de PL se puede resolver con LINDO o LINGO, y que cualquier PNL se puede resolver con LINGO. No se puede utilizar, infortunadamente, ningún paquete amigable con el usuario para resolver problemas de programación dinámica. LINGO se usa para resolver problemas de PD, pero LINGO para estudiantes sólo puede manejar un problema muy pequeño. Por fortuna está Excel, el cual se utiliza a menudo para resolver problemas de programación dinámica. En los tres ejemplos siguientes se resuelve un problema de la mochila (ejemplo 6), un problema de asignación de recursos (ejemplo 5) y un problema de inventario (ejemplo 4).

Solución de problemas de la mochila con hoja de cálculo

Refiérase al problema de la mochila del ejemplo 6. La cuestión es cómo llenar una mochila de 10 libras (con tres tipos de objetos), y obtener el beneficio máximo posible. Recuerde que $g(w)$ = beneficio máximo que se puede conseguir con una mochila de w libras. Recuerde que

$$g(w) = \max_j \{b_j + g(w - w_j)\} \tag{8}$$

donde b_j = beneficio que aporta el objeto o producto tipo j y w_j = peso de un producto tipo j.

Dpknap.xls

En cada renglón de la hoja de cálculo (véase figura 11 o el archivo Dpknap.xls) calculamos $g(w)$ para varios valores de w. Empezamos por introducir $g(0) = g(1) = g(2) = 0$

[†]En esta sección se tratan temas que se pueden omitir sin perder la continuidad.

A	A	B	C	D	E	F	G
1	TAMAÑO DE	ITEM1	ITEM2	ITEM3	g(SIZE)		FIGURA 11
2	LA MOCHILA						PROBLEMA DE
3	0				0		LA MOCHILA
4	1				0		
5	2				0		
6	3				7		
7	4	11	7	-10000	11		
8	5	11	7	12	12		
9	6	11	14	12	14		
10	7	18	18	12	18		
11	8	22	19	19	22		
12	9	23	21	23	23		
13	10	25	25	24	25		
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							

FIGURA 11
Problema de la mochila

y $g(3) = 7$; [$g(3) = 7$ se infiere porque un objeto de 3 libras es el único que cabe en una mochila de 3 libras. Las columnas con encabezado ITEM1, ITEM2 e ITEM3 corresponden a los términos $j = 1, 2, 3$, respectivamente en (8). Por lo tanto, en la columna ITEM1 debemos escribir una fórmula para calcular $b_1 + g(w - w_1)$; en la columna ITEM2 se escribe una fórmula para calcular $b_2 + g(w - w_2)$; en la columna ITEM3 entra una fórmula para calcular $b_3 + g(w - w_3)$. La única excepción a esto se presenta cuando un producto de w_j lb no cabe en una mochila de w libras. En este caso se introduce un número muy negativo (tal como 10 000) para asegurar que no se considerará un objeto de w_j libras.

Deseamos calcular, más específicamente, $g(4)$ en el renglón 7. Para hacerlo, introducimos las fórmulas siguientes

B7: 11 + E3 [Esto es $b_1 + g(4 - w_1)$]

C7: 7 + E4 [Esto es $b_2 + g(4 - w_2)$]

D7: −10 000 (Esto es porque un objeto de 5 libras no cabe en una mochila de 4 libras)

En E7 calculamos $g(4)$ con la fórmula =MAX(B7:D7). En el renglón 8 calculamos $g(5)$ luego de introducir las fórmulas siguientes

B8: 11 + E4

C8: 7 + E5

D8: 12 + E3

Si deseamos calcular $g(5)$ introducimos =MAX(B8:D8) en E8. ¡Ahora viene la parte divertida! Copie simplemente las fórmulas desde el intervalo B8:E8 hasta B8:E13. Se calculará entonces $g(10)$ en E13. Observamos que $g(10) = 25$. Puesto que tanto los objetos 1 como el 2 llegan a $g(10)$, podríamos empezar a llenar la mochila con un objeto del tipo 1 o del tipo 2. Elegimos para empezar un objeto del tipo 1. Esto deja $10 - 4 = 6$ libras por llenar. Según el renglón 9, observamos que un objeto del tipo 2 alcanza a $g(6) = 14$. Esto deja $6 - 3 = 3$ libras por llenar. Usamos también un objeto del tipo 2 para alcanzar $g(3) = 7$. Así quedan 0 libras. Concluimos, por lo tanto, que podemos lograr 25 unidades de beneficio llenando una mochila de 10 libras con 2 objetos del tipo 2 y uno del tipo 1.

A propósito, si hubiéramos estado interesados en llenar una mochila de 100 libras, habríamos copiado las fórmulas desde B8:E8 hasta B8:E103.

Solución de un problema general de asignación de recursos con hoja de cálculo

Es más difícil resolver un problema de asignación de recursos que no sea de la mochila mediante una hoja de cálculo. Para ejemplificarlo, considere el ejemplo 5 en el cual hay 6 000 dólares para asignar a tres inversiones. Definamos $f_t(d)$ = VPN máximo obtenido de las inversiones $t, \ldots, 3$ dado que d (en miles) dólares están disponibles para las inversiones $t, \ldots, 3$. Luego podríamos escribir

$$f_t(d) = \max_{0 \leq x \leq d} \{r_t(x) + f_{t+1}(d - x)\} \tag{10}$$

donde $f_4(d) = 0 (d = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $r_t(x)$ = VPN obtenido si x dólares (en miles) se invierten en la inversión t, y la maximización en (10) sólo asume valores enteros para d. El análisis posterior se simplifica si definimos $J_t(d, x) = r_t(x) + f_{t+1}(d - x)$ y reescribimos (10) como

$$f_t(d) = \max_{0 \leq x \leq d} \{J_t(d, x)\} \tag{10'}$$

La construcción de la hoja de cálculo (figura 12 archivo Dpresour.xls) inicia con la introducción de $r_t(x)$ en A1:H4. Por ejemplo, $r_2(3) = 16$ se introduce en E3. En los renglones 18 a 20 preparamos los cálculos $J_t(d, x)$. Para estos cálculos se requiere el comando =**HLOOKUP** de Excel para buscar los valores de $r_t(x)$ (en los renglones 2 a 4) y $f_{t+1}(d - x)$ (en los renglones 11 a 14). Por ejemplo, para calcular $J_3(3, 1)$ escribimos la fórmula siguiente en I18:

=HLOOKUP(I$17,$B$1:$H$4,$A18+1)

+ HLOOKUP(I$16-I$17,$B$10:$H$14,$A18+1)

La parte =HLOOKUP(I$17,$B$1:$H$4,$A18+1) de la fórmula en la celda I18 encuentra la columna en B1:H4 cuya primera entrada corresponde a I17. Luego escogemos el valor en el renglón A18 + 1 de esa columna. Esto da $r_3(1) = 9$. Obsérvese que H quiere decir búsqueda horizontal. La parte HLOOKUP(I$16-I$17,b10:h14,$A18+1) encuentra la columna en B10:H14 cuyo primer valor corresponde a I16 a I17. Entonces escogemos el valor en el renglón A18 + 1 de esa columna. Esto da $f_4(3 - 1) = 0$.

FIGURA 12
Asignación de recursos

A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	RECOMPENSA	0	1	2	3	4	5	6					
2	PERIODO3	0	9	13	17	21	25	29					
3	PERIODO2	0	10	13	16	19	22	25					
4	PERIODO1	0	9	16	23	30	37	44					
5													
6													
7	FIGURA 12												
8	ASIGNACIÓN	DE RECURSOS											
9													
10	VALOR	0	1	2	3	4	5	6					
11	PERIODO4	0	0	0	0	0	0	0					
12	PERIODO3	0	9	13	17	21	25	29					
13	PERIODO2	0	10	19	23	27	31	35					
14	PERIODO1	0	10	19	26	35	42	49					
15													
16	d	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
17	x	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1
18	1	0	0	9	0	9	13	0	9	13	17	0	9
19	2	0	9	10	13	19	13	17	23	22	16	21	27
20	3	0	10	9	19	19	16	23	28	26	23	27	32

FIGURA 12
(Continuación)

A	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
16	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
17	2	3	4	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
18	13	17	21	0	9	13	17	21	25	0	9	13	17
19	26	25	19	25	31	30	29	28	22	29	35	34	33
20	35	33	30	31	36	39	42	40	37	35	40	43	46

A	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16	6	6	6	0	1	2	3	4	5	6	
17	4	5	6	f3(0)	f3(1)	f3(2)	f3(3)	f3(4)	f3(5)	f3(6)	t
18	21	25	29	0	9	13	17	21	25	29	3
19	32	31	25	0	10	19	23	27	31	35	2
20	49	47	44	0	10	19	28	36	42	49	1

Ahora copiamos cualquiera de las fórmulas $J_t(d, x)$ (tal como la de I18) en el intervalo B18:AC20.

Las $f_t(d)$ se calculan en AD18:AJ20. Empezamos por introducir manualmente en AD18:AJ18 las fórmulas usadas para calcular $f_3(0), f_3(1), \ldots, f_3(6)$. Estas fórmulas son las siguientes:

AD18:	0	(Calcula $f_3(0)$)
AE18:	=MAX(C18:D18)	(Calcula $f_3(1)$)
AF18:	=MAX(E18:G18)	(Calcula $f_3(2)$)
AG18:	=MAX(H18:K18)	(Calcula $f_3(3)$)
AH18:	=MAX(L18:P18)	(Calcula $f_3(4)$)
AI18:	=MAX(Q18:V18)	(Calcula $f_3(5)$)
AJ18:	=MAX(W18:AC18)	(Calcula $f_3(6)$)

Enseguida copiamos estas fórmulas desde el intervalo AD18:AJ18 hasta AD18:AJ20.

Para que la hoja de cálculo funcione, debemos ser capaces de calcular $J_t(d, x)$ buscando el valor apropiado de $f_t(d)$ en los renglones 11 a 14. Por lo tanto, en B11:H11, introducimos un cero en cada celda [porque $f_4(d) = 0$ para toda d]. En B12 escribimos =AD18 [ésta es la celda en la cual se calcula $f_3(0)$]. Ahora copiamos esta fórmula al intervalo B12:H14.

Observe que los renglones 11 a 14 de la hoja de cálculo se definen en términos de los renglones 18 a 20 y que los renglones 18 a 20, en términos de los renglones 11 a 14. Esto origina **circularidad** o **referencias circulares** en la hoja de cálculo. Para resolver las referencias circulares en esta hoja de cálculo (o en cualquiera) seleccione simplemente Herramientas, Opciones, Calcular y marque el cuadro de Iteración. Esta operación hace que Excel resuelva todas las referencias circulares hasta que la circularidad esté resuelta.

Para determinar de qué manera se deben asignar los 6000 dólares en las tres inversiones, observe que $f_1(6) = 49$. Como $f_1(6) = J_1(6, 4)$, asignamos 4000 dólares a la inversión 1. Luego debemos encontrar $f_2(6 - 4) = 19 = J_2(2, 1)$. Asignamos 1000 dólares a la inversión 2. Por último, determinamos que $f_3(2 - 1) = J_3(1, 1)$ y asignamos 1000 dólares a la inversión 3.

Solución a un problema de inventario mediante hoja de cálculo

A continuación se ilustra cómo establecer una estrategia óptima de producción para el ejemplo 4. Un aspecto importante de este problema de producción es que el inventario final de cada mes debe estar entre 0 y 4 unidades. Es posible asegurar que esto realmente ocurre mediante la estimación manual de las acciones admisibles en cada estado. Diseñaremos la hoja de cálculo para tener la certeza de que el inventario final de cada mes debe estar entre 0 y 4 inclusive.

Dpinv.xls

El primer paso para elaborar la hoja de cálculo (figura 13, archivo Dpinv.xls) es escribir el costo de producción por cada nivel de producción posible (0, 1, 2, 3, 4, 5) en B1:G2. Luego definimos $f_t(i)$ como el costo mínimo generado por el cumplimiento de las demandas de los meses $t, t + 1, \ldots, 4$ cuando i unidades están disponibles al empezar el mes t. Si d_t es la demanda del mes t, entonces para $t = 1, 2, 3, 4$ podríamos escribir

$$f_t(i) = \min_{x|0 \leq i+x-d_t \leq 4} \{.5(i + x - d_t) + c(x) + f_{t+1}(i + x - d_t)\} \tag{23}$$

donde $c(x)$ = costo de la producción de x unidades durante un mes, y $f_5(i) = 0$ para (i = 0, 1, 2, 3, 4).

Si definimos $J_t(i, x) = .5(i + x - d_t) + c(x) + f_{t+1}(i + x - d_t)$ podríamos escribir

$$f_t(i) = \min_{x|0 \leq i+x-d_t \leq 4} \{J_t(i, x)\}$$

FIGURA 13
Ejemplo del inventario

A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	COSTO DE	0	1	2	3	4	5						
2	PROD	0	4	5	6	7	8						
3													
4	VALOR	-5	0	1	2	3	4	5					
5	M5	10000	0	0	0	0	0	10000					
6	M4	10000	7	6	5	4	0	10000					
7	M3	10000	12	10	7	6.5	6	10000					
8	M2	10000	16	15	14	12	10.5	10000					
9													
10		ESTADO	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
11		ACCIÓN	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4
12	DEMANDA												
13	4		10000	10004	10005	10006	7	8.5	10000	10004	10005	6	7.5
14	2		10000	10004	12	12.5	13	13.5	10000	11	11.5	12	12.5
15	3		10000	10004	10005	18	17.5	16	10000	10004	17	16.5	15
16	1		10000	20	20.5	21	20.5	20.5	16	19.5	20	19.5	19.5
17													

A	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
11	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
12													
13	9	10000	10004	5	6.5	8	9.5	10000	4	5.5	7	8.5	10
14	10	7	10.5	11	11.5	9	10010.5	6.5	10	10.5	8	10009.5	10011
15	16	10000	16	15.5	14	15	16	12	14.5	13	14	16	10010.5
16	10010.5	15.5	19	18.5	18.5	10009.5	10011	15	17.5	17.5	10008.5	10010	10011.5
17													

FIGURA 13
(Continuación)

A	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10	4	4	4	4	4	4						
11	0	1	2	3	4	5	F(0)	F(1)	F(2)	F(3)	F(4)	
12												
13	0	4.5	6	7.5	9	10010.5	7	6	5	4	0	1
14	6	9.5	7	10008.5	10010	10011.5	12	10	7	6.5	6	2
15	10.5	12	13	14	10008.5	10011	16	15	14	12	10.5	3
16	13.5	16.5	10007.5	10009	10010.5	10012	20	18	15.5	15	13.5	4
17												

Después calculamos $J_t(i, x)$ en A13:AF16. Por ejemplo, para calcular $J_4(0, 2)$ escribimos la fórmula siguiente en E13:

=HLOOKUP(E$11,$B$1:$G$2,2)
+.5*+1MAX(E$10+E$11−$A13,0)
+HLOOKUP(E$10+E$11−$A13,$B$4:$H$8,1+$AL13)

El primer término en esta suma da $c(x)$ (es así porque E$11 es el nivel de producción). El segundo término genera el costo de almacenamiento del mes (es así porque E$10+E$11−$A13 da el inventario final del mes). Con el termino final se obtiene $f_{t+1}(i + x - d_t)$. Esto se debe a que E$10+E$11-$A13 es el inventario inicial del mes $t + 1$. La referencia a 1+$AL13 en el término final asegura que buscamos el valor de $f_{t+1}(i + x - d_t)$ en el renglón correcto [los valores de $f_{t+1}(\ )$ se tabulan en C5:G8]. Al copiar la fórmula en E13 al intervalo C13:AF16 se calcula la totalidad de $J_t(i, x)$.

En AG13:AK16 calculamos $f_t(d)$. Para comenzar escribimos las fórmulas siguientes en las celdas AG13:AK13

AG13: =MIN(C13:H13)	[Calcula $f_4(0)$]
AH13: =MIN(I13:N13)	[Calcula $f_4(1)$]
AI13: =MIN(O13:T13)	[Calcula $f_4(2)$]
AJ13: =MIN(U13:Z13)	[Calcula $f_4(3)$]
AK13: =MIN(AA13:AF13)	[Calcula $f_4(4)$]

Para calcular todas las $f_t(i)$ copiamos del intervalo AG13:AK13 al intervalo AG13: AK16. Con el fin de tener éxito necesitamos contar con los valores correctos de $f_t(i)$ en B5:H8. Escribimos 10 000 (o cualquier número positivo grande) en las columnas B y H de los renglones 5 a 8. Así tenemos la certeza de que es muy costoso terminar un mes con un inventario que es negativo o que es mayor que 4. Esto asegura que el inventario final de cada mes está entre 0 y 4 inclusive. Introducimos un 0 en cada celda del intervalo C5:G5. Esto es así porque $f_5(i) = 0$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$. En la celda C6 introducimos +AG13; esto ingresa el valor de $f_1(0)$. Al copiar esta fórmula al intervalo C6:G8 hemos originado una tabla de $f_t(d)$, la cual se puede usar (en los renglones 13–16) para buscar $f_t(d)$.

Al igual que la hoja de cálculo usada para resolver el ejemplo 5, esta hoja muestra referencias circulares. La razón es que los renglones 6 a 8 se refieren a los renglones 13 a 16 y los renglones 13 a 16 se refieren a los renglones 6 a 8. Cuando se presiona varias veces se resuelven las referencias circulares. También puede resolverlas seleccionando Herramientas, Opciones, Calcular y marcando luego Iteraciones.

En el caso de cualquier nivel de inventario inicial ya podemos calcular el plan de producción óptimo. Por ejemplo, suponga que el inventario al principio del mes 1 es cero. Entonces $f_1(0) = 20 = J_1(0, 1)$. Por consiguiente, lo óptimo es producir una unidad durante el mes 1. Ahora buscamos $f_2(0 + 1 - 1) = 16 = J_2(0, 5)$, de modo que producimos cinco unidades durante el mes 2. Después determinamos $f_3(0 + 5 - 3) = 7 = J_3(2, 0)$, por lo cual producimos cero unidades durante el mes tres. Al resolver $f_4(2 + 0 - 2) = J_4(0, 4)$, producimos cuatro unidades durante el mes 4.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Resuelva el problema 2 de la sección 18.3 mediante una hoja de cálculo.

2 Resuelva el problema 4 de la sección 18.4 mediante una hoja de cálculo.

3 Resuelva el problema 5 de la sección 18.4 mediante una hoja de cálculo.

RESUMEN

Mediante la programación dinámica es posible resolver un problema relativamente complejo descomponiendo el problema original en una serie de problemas más simples. Primero se resuelve un problema de una etapa, luego uno de dos etapas y, por último, un problema de T etapas (T = número total de etapas en el problema original).

En la mayor parte de aplicaciones, se toma una decisión en cada etapa (t = etapa actual), se obtiene una recompensa (o se genera un costo) en cada etapa y así se continúa hasta el estado de la etapa $t + 1$.

Trabajo hacia atrás

Al formular recursiones para programación dinámica trabajando hacia atrás, es útil recordar que en la mayor parte de los casos:

1 La **etapa** es el mecanismo por medio del cual se construye el problema.

2 El estado proporciona la información necesaria para tomar la decisión correcta en la etapa actual.

3 Debemos determinar, en la mayor parte de los casos, qué tanto afecta la decisión en la etapa t, el estado en la etapa t y el valor de t a la recompensa ganada (o al costo generado) durante la etapa actual.

4 Debemos, asimismo, determinar qué tanto depende el estado de la etapa $t + 1$ de la decisión en la etapa t, del estado de la etapa t y del valor de t.

5 Si definimos (en el caso de un problema de minimización) $f_t(i)$ como el costo mínimo en que se incurre durante las etapas $t, t + 1, \ldots, T$, dado que el estado de la etapa t es i, entonces (en muchos casos) escribiríamos $f_t(i) = \min$ {costo durante la etapa t) + f_{t+1} (nuevo estado en la etapa $t + 1$)}, donde el mínimo está por encima de todas las decisiones admisibles en el estado i durante la etapa t.

6 Empezamos por establecer todas las $f_T(\cdot)$, luego todos los $f_{T-1}(\cdot)$ y, por último, f_1 (el estado inicial).

7 Después tomamos la decisión óptima de la etapa 1. Esto origina el estado de la etapa 2, en el cual tomamos la decisión óptima de la etapa 2. Continuamos de este modo hasta encontrar la decisión óptima de la etapa T.

Algoritmo Wagner-Whitin y planteamiento heurístico de Silver-Meal para el modelo del tamaño del lote

Un modelo de inventario de revisión periódica en el cual la demanda del periodo se conoce al principio del problema es el **modelo dinámico del tamaño del lote**. Se puede establecer una estrategia de pedidos o de producción con minimización de costos por medio de una RECURSIÓN hacia atrás, una RECURSIÓN hacia delante, el algoritmo de Wagner-Whitin o el planteamiento heurístico de Silver-Meal.

En el algoritmo de Wagner-Whitin se aplica el hecho de que hay producción durante un periodo si y sólo si el inventario al iniciar el periodo es cero. La decisión durante tal periodo es el número de periodos consecutivos de demanda que la producción debe cumplir.

Durante un periodo en el cual el inventario inicial es cero, el planteamiento heurístico de Silver-Meal calcula el costo promedio por periodo (preparación y almacenamiento) que se genera al cumplir la demanda durante los k periodos siguientes. Si k^* minimiza este costo promedio, entonces los k^* periodos siguientes de demanda se deben cumplir con la producción del periodo actual.

Consideraciones de cálculo

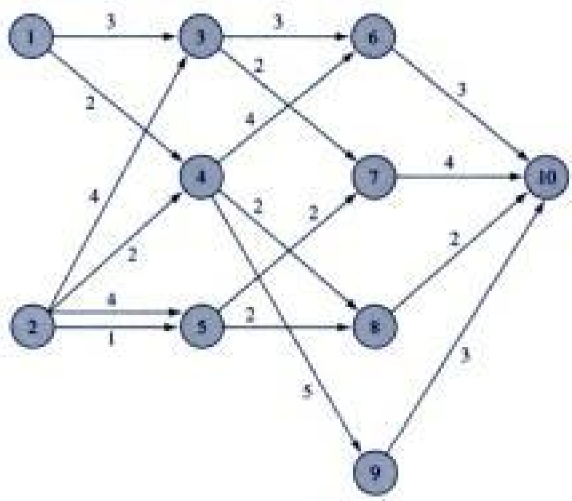
La programación dinámica es mucho más eficaz que la enumeración explícita del costo total asociado con cada conjunto posible de decisiones que se podrían tomar durante las T etapas. Infortunadamente, muchas aplicaciones prácticas de la programación dinámica requieren espacios de estado muy amplios, y, en esta situación, se necesita una gran cantidad de cálculos para establecer las decisiones óptimas.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Encuentre el camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 10, y el más corto desde el nodo 2 hasta el nodo 10 en la red de la figura 14.

FIGURA 14



2 Una compañía debe cumplir a tiempo con las demandas siguientes: mes 1, 1 unidad; mes 2, 1 unidad; mes 3, 2 unidades; mes 4, 2 unidades. Cuesta 4 dólares hacer un pedido y se fija un costo por almacenamiento de 2 dólares por unidad contra el inventario final de cada mes. Se dispone de una unidad al principio del mes 1. Los pedidos se entregan de manera instantánea.

a Aplique una RECURSIÓN hacia atrás para establecer una estrategia de pedidos óptima.

b Aplique el método de Wagner-Whitin a fin de determinar una estrategia de pedidos óptima.

c Encuentre una estrategia de pedidos mediante el planteamiento heurístico de Silver-Meal.

3 Refiérase al problema 2. Ahora suponga que las demandas no se tienen que cumplir a tiempo. Suponga, además, que toda la demanda perdida se acumula y que se fija un costo por déficit por unidad de 1 dólar contra el número de déficits habidos cada mes. Todas las demandas se deben cumplir al final del mes 4. Utilice la programación dinámica para determinar una estrategia de pedidos que minimice el costo total.

4 Se ha informado a Indianapolis Airlines que podría programar seis vuelos por día que partan desde Indianápolis. El destino de cada vuelo podría ser Nueva York, Los Ángeles o Miami. En la tabla 20 se presenta la contribución a la utilidad de la compañía por parte de los vuelos diarios desde Indianápolis a cada destino posible. Establezca la cantidad óptima de vuelos que deben partir de Indianápolis a cada destino. ¿Qué tanto se modificaría la respuesta si la aerolínea estuviera limitada a sólo cuatro vuelos diarios?

TABLA 20

	Utilidad por vuelo (dólares)					
	Cantidad de aviones					
Destino	1	2	3	4	5	6
Nueva York	80	150	210	250	270	280
Los Ángeles	100	195	275	325	300	250
Miami	90	180	265	310	350	320

5 Trabajo como cajero en una tienda. La cuenta de un cliente es de 1.09 dólares, y él me da 2 dólares. Quiero darle cambio de tal modo que le entregue la menor cantidad de monedas. Mediante la programación dinámica determine de qué manera dar el cambio al cliente. ¿La respuesta sugiere un resultado general respecto a dar cambio? Resuelva el problema si hubiera una moneda de 20 centavos (además de otras monedas de Estados Unidos).

6 Una compañía requiere tener una máquina que trabaje durante los seis años siguientes. En la actualidad tiene una máquina nueva. La compañía podría conservar la máquina o venderla al empezar cada año y comprar una nueva. Una máquina no se puede conservar por más de tres años. Una máquina nueva cuesta 5000 dólares. Los ingresos obtenidos con la máquina, el costo de mantenimiento y el valor de salvamento que se puede obtener al venderla al final del año, dependen de la edad de la máquina (véase tabla 21). Utilice la programación dinámica para maximizar la utilidad neta ganada durante los seis años siguientes.

7 Una compañía requiere la siguiente cantidad de trabajadores durante cada uno de los cinco años siguientes: año 1, 15; año 2, 30; año 3, 10; año 4, 30; año 5, 20. En la actualidad hay 20 empleados en la empresa. Cada trabajador gana 30 000 dólares al año. Al empezar cada año, se puede contratar o despedir a los trabajadores. Cuesta 10 000 dólares contratar a un trabajador y 20 000 dólares despedirlo. Un trabajador recién contratado puede servir para cumplir con la cantidad necesaria de trabajadores del año actual. Durante cada año, renuncia 10% de todos los trabajadores (los trabajadores que renuncian no generan gastos de despido).

a Formule una RECURSIÓN con programación dinámica que se pueda aplicar para minimizar el costo total que se genera al cumplir con las cantidades necesarias de trabajadores en los cinco años siguientes.

b ¿Cómo se podría modificar la RECURSIÓN si los trabajadores contratados no son utilizados para cumplir con la cantidad necesaria de trabajadores sino hasta el año siguiente al que fueron contratados?

8 Al principio de cada año, Barnes Carr Oil fija el precio del petróleo en el mundo. Si se fija un precio p, entonces $D(p)$ barriles de petróleo los clientes del mundo demandarán. Supongamos que durante cualquier año, cada compañía petrolera vende el mismo número de barriles de petroleo. A Barnes Carr Oil le cuesta c dólares extraer y refinar cada barril de petróleo. La compañía no puede fijar un precio demasiado alto, porque si un precio p es fijado y hay en la actualidad N compañías petroleras, entonces $g(p, N)$ compañías petroleras entrarán al negocio del petróleo [$g(p, N)$ podría ser negativo]. Al fijar un precio demasiado alto se diluirán las ganancias futuras debido a la entrada de nuevas compañías. Barnes Carr quiere maximizar la ganancia descontada que la compañía obtendrá en los próximos 20 años. Plantee una RECURSIÓN que ayude a la empresa a alcanzar su objetivo. Hay inicialmente 10 compañías petroleras.

9 Para que una computadora funcione de manera apropiada, tres subsistemas deben trabajar adecuadamente. Con el objeto de aumentar la confiabilidad de la computadora, se podrían instalar unidades de repuesto en cada sistema. Cuesta 100 dólares instalar una unidad de repuesto en el sistema 1, 300 dólares en el sistema 2 y 200 dólares en el sistema 3. La probabilidad de que cada sistema trabaje como una función del número de repuestos instalados (un máximo de dos repuestos se pueden instalar en cada sistema), se da en la tabla 22. Utilice la programación dinámica para maximizar la probabilidad de que la computadora trabaje en forma adecuada, dado que hay 600 dólares disponibles para piezas de repuesto.

Grupo B

10 Durante cualquier año puedo gastar cualquier cantidad que no exceda mi riqueza actual. Si gasto c dólares durante un año, obtengo c^a unidades de felicidad. Al principio del año siguiente la riqueza al final del año anterior aumenta un factor k.

a Plantee una RECURSIÓN que se use para maximizar la utilidad total obtenida durante los T años siguientes. Suponga que tengo originalmente w_0 dólares.

b Sea $f_t(w)$ la ganancia máxima obtenida durante los años $t, t+1, \ldots, T$, dado que tengo w dólares al iniciar el año t, y sea $c_t(w)$ la cantidad que debo gastar durante el año t para llegar a $f_t(w)$. Demuestre que, al trabajar hacia atrás, para las constantes escogidas en forma adecuada, a_t y b_t,

$$f_t(w) = b_t w^a \quad \text{y} \quad c_t(w) = a_t w$$

Interprete estos resultados.

11 El granjero Smith tiene x_t bushels de trigo en su bodega al empezar el año. Tiene la oportunidad de vender el trigo a un precio s_t dólares por bushel, y puede comprar trigo a p_t dólares por bushel. En la bodega de Smith se pueden almacenar cuando mucho C unidades al final de cada mes.

a Formule una RECURSIÓN que se use para maximizar la ganancia total obtenida durante los T meses siguientes.

b Sea $f_t(x_t)$ la ganancia máxima que se puede obtener durante los meses $t, t+1, \ldots, T$, dado que x_t bushels de

TABLA 21

	Edad de la máquina al principio del año		
	Año 0	Año 1	Año 2
Ingresos (dólares)	4500	3000	1500
Costos de operación (dólares)	500	700	1100
Valor de salvamento al final del año	3000	1800	500

TABLA 22

Número de repuestos	Probabilidad de que funcione un sistema		
	Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3
0	.85	.60	.70
1	.90	.85	.90
2	.95	.95	.98

19

Programación dinámica probabilística

Recuerde de nuestro estudio de programación dinámica determinista que muchas recursiones eran de la siguiente forma:

$$f_t\,(\text{estado actual}) = \min_{\substack{\text{todas las}\\ \text{decisiones}\\ \text{factibles}}} (\text{o max})\{\text{costos durante la etapa actual} + f_{t+1}\,(\text{nuevo estado})\}$$

Para los ejemplos del capítulo 18, una especificación del estado actual y la decisión actual fue suficiente para decirnos *con certeza* el nuevo estado y los costos durante la etapa actual. En muchos problemas prácticos, es posible que estos factores no se conozcan con certeza, aun si se conocen el estado actual y la decisión. Por ejemplo, en el modelo de inventario de la sección 18.3, se supone que se conoce la demanda de cada periodo al comienzo del problema. En la mayoría de las situaciones, sería más real suponer que la demanda del periodo t es una variable aleatoria cuyo valor no se conoce hasta después que se toma la decisión de producción del periodo t. Aun si se conoce el estado del periodo actual (nivel de inventario inicial) y la decisión (producción durante el periodo actual), el estado del siguiente periodo y el costo del periodo actual serán variables aleatorias cuyos valores no se conocen hasta que se conoce la demanda del periodo t. El análisis del capítulo 18 simplemente no se aplica a este problema.

En este capítulo se explica cómo usar la programación dinámica para resolver problemas en los que el costo del periodo actual o el estado del siguiente periodo son aleatorios. A estos problemas se les conoce como *problemas de programación dinámica probabilística* (o PDP). En un PDP, por lo general el objetivo de quien toma la decisión es minimizar el costo esperado (o descontado esperado) en que se incurre o maximizar la recompensa esperada (o descontada esperada) obtenida en un determinado horizonte de tiempo. El capítulo 19 concluye con un breve estudio de *procesos de decisión de Markov*. Un proceso de decisión de Markov es sólo un problema de programación dinámica probabilística en que quien toma la decisión enfrenta un horizonte infinito.

19.1 Cuando los costos de la etapa actual son inciertos, pero es seguro el estado del siguiente periodo

Para los problemas de esta sección, se conoce con certeza el estado del siguiente periodo, pero no se conoce con certeza la recompensa obtenida durante la etapa actual (dados el estado actual y la decisión).

EJEMPLO 1 Distribución de leche

Por un precio de \$1/galón, la cadena Safeco Supermarket compró 6 galones de leche de una lechería local. Cada galón de leche se vende en las tres tiendas de la cadena en \$2/galón. La lechería debe comprar de nuevo en 50¢/galón la leche que se queda al final del día. Infortunadamente para Safeco, la demanda para cada una de las tres tiendas de la cadena es incierta. Los datos pasados indican que la demanda diaria en cada tienda es como se ilustra en la tabla 1. Safeco quiere asignar los 6 galones de leche a las tres tiendas para maxi-

$$
\begin{array}{lll}
r_3(0) = \$0 & r_2(0) = \$0 & r_1(0) = \$0 \\
r_3(1) = \$2.00 & r_2(1) = \$2.00 & r_1(1) = \$2.00 \\
r_3(2) = \$3.40 & r_2(2) = \$3.25 & r_1(2) = \$3.10 \\
r_3(3) = \$4.35 & r_2(3) = \$4.35 & r_1(3) = \$4.20
\end{array}
$$

Ahora se utiliza la ecuación (1) para determinar una asignación óptima de leche a las tiendas. Sea $g_t(x)$ una asignación de leche a la tienda t que se obtiene por medio de $f_t(x)$. Entonces

$$
\begin{array}{ll}
f_3(0) = r_3(0) = 0 & g_3(0) = 0 \\
f_3(1) = r_3(1) = 2.00 & g_3(1) = 1 \\
f_3(2) = r_3(2) = 3.40 & g_3(2) = 2 \\
f_3(3) = r_3(3) = 4.35 & g_3(3) = 3
\end{array}
$$

Es necesario calcular $f_3(4)$, $f_3(5)$ y $f_3(6)$, debido a que una asignación óptima nunca tendrá más de 3 galones para asignar a una sola tienda (la demanda en cualquier tienda nunca es más de tres galones).

Usando la ecuación (1) para trabajar hacia atrás, se obtiene

$$f_2(0) = r_2(0) + f_3(0 - 0) = 0 \qquad g_2(0) = 0$$

$$f_2(1) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_3(1 - 0) = 2.00^* \\ r_2(1) + f_3(1 - 1) = 2.00^* \end{cases} \qquad g_2(1) = 0 \text{ o } 1$$

$$f_2(2) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_3(2 - 0) = 0 + 3.40 = 3.40 \\ r_2(1) + f_3(2 - 1) = 2.00 + 2.00 = 4.00^* \\ r_2(2) + f_3(2 - 2) = 3.25 + 0 = 3.25 \end{cases} \qquad g_2(2) = 1$$

$$f_2(3) = \max \begin{cases} r_2(0) + f_3(3 - 0) = 0 + 4.35 = 4.35 \\ r_2(1) + f_3(3 - 1) = 2.00 + 3.40 = 5.40^* \\ r_2(2) + f_3(3 - 2) = 3.25 + 2.00 = 5.25 \\ r_2(3) + f_3(3 - 3) = 4.35 + 0 = 4.35 \end{cases} \qquad g_2(3) = 1$$

Observe que en el cálculo de $f_2(4)$, $f_2(5)$ y $f_2(6)$, es innecesario considerar alguna asignación de más de tres galones a la tienda 2, o alguna que deje más de tres galones a la tienda 3.

$$f_2(4) = \max \begin{cases} r_2(1) + f_3(4 - 1) = 2.00 + 4.35 = 6.35 \\ r_2(2) + f_3(4 - 2) = 3.25 + 3.40 = 6.65^* \\ r_2(3) + f_3(4 - 3) = 4.35 + 2.00 = 6.35 \end{cases} \qquad g_2(4) = 2$$

$$f_2(5) = \max \begin{cases} r_2(2) + f_3(5 - 2) = 3.25 + 4.35 = 7.60 \\ r_2(3) + f_3(5 - 3) = 4.35 + 3.40 = 7.75^* \end{cases} \qquad g_2(5) = 3$$

$$f_2(6) = r_2(3) + f_3(6 - 3) = 4.35 + 4.35 = 8.70^* \qquad g_2(6) = 3$$

Por último,

$$f_1(6) = \max \begin{cases} r_1(0) + f_2(6 - 0) = 0 + 8.70 \\ r_1(1) + f_2(6 - 1) = 2.00 + 7.75 = 9.75^* \\ r_1(2) + f_2(6 - 2) = 3.10 + 6.65 = 9.75^* \\ r_1(3) + f_2(6 - 3) = 4.20 + 5.40 = 9.60 \end{cases} \qquad g_1(6) = 1 \text{ o } 2$$

Así, se pueden asignar 1 o 2 galones a la tienda 1. Suponga que se elige de manera arbitraria asignar un galón a la tienda 1. Entonces tenemos $6 - 1 = 5$ galones para las tiendas 2 y 3. Puesto que $f_2(5)$ se obtiene mediante $g_2(5) = 3$, se asignan tres galones a la tienda 2.

Entonces $5 - 3 = 2$ galones están disponibles para la tienda 3. Puesto que $g_3(2) = 2$, se asignan dos galones a la tienda 3. Observe que aunque esta política obtiene el ingreso máximo esperado, $f_1(6) = \$9.75$, el ingreso total recibido actualmente en un día determinado podría ser más o menos que \$9.75. Por ejemplo, si la demanda en cada tienda fuera 1 galón, el ingreso total sería $3(2.00) + 3(0.50) = \$7.50$, en tanto que si la demanda en cada tienda fueran 3 galones, toda la leche se vendería a \$2/galón y el ingreso total sería $6(2.00) = \$12.00$.

PROBLEMAS

Grupo A

1 En el ejemplo 1, encuentre otra asignación de la leche que maximiza el ingreso diario esperado.

2 Suponga que \$4 millones están disponibles para invertir en tres proyectos. La distribución de probabilidades del valor presente neto obtenido de cada proyecto depende de cuánto se invierta en cada proyecto. Sea $\mathbf{I}_t$ la variable aleatoria que denota el valor presente neto que obtiene el proyecto t. La distribución de $\mathbf{I}_t$ depende de la cantidad de dinero invertido en el proyecto t, como se ilustra en la tabla 2 (una inversión cero en un proyecto siempre gana un VPN cero). Por medio de la programación dinámica determine una asignación de inversión que maximiza el VPN esperado obtenido de las tres inversiones.

TABLA 2
Probabilidad de inversión para el problema 2

	Inversión (millones)	Probabilidad		
Proyecto 1	\$1	$P(\mathbf{I}_1 = 2) = .6$	$P(\mathbf{I}_1 = 4) = .3$	$P(\mathbf{I}_1 = 5) = .1$
	\$2	$P(\mathbf{I}_1 = 4) = .5$	$P(\mathbf{I}_1 = 6) = .3$	$P(\mathbf{I}_1 = 8) = .2$
	\$3	$P(\mathbf{I}_1 = 6) = .4$	$P(\mathbf{I}_1 = 7) = .5$	$P(\mathbf{I}_1 = 10) = .1$
	\$4	$P(\mathbf{I}_1 = 7) = .2$	$P(\mathbf{I}_1 = 9) = .4$	$P(\mathbf{I}_1 = 10) = .4$
Proyecto 2	\$1	$P(\mathbf{I}_2 = 1) = .5$	$P(\mathbf{I}_2 = 2) = .4$	$P(\mathbf{I}_2 = 4) = .1$
	\$2	$P(\mathbf{I}_2 = 3) = .4$	$P(\mathbf{I}_2 = 5) = .4$	$P(\mathbf{I}_2 = 6) = .2$
	\$3	$P(\mathbf{I}_2 = 4) = .3$	$P(\mathbf{I}_2 = 6) = .3$	$P(\mathbf{I}_2 = 8) = .4$
	\$4	$P(\mathbf{I}_2 = 3) = .4$	$P(\mathbf{I}_2 = 8) = .3$	$P(\mathbf{I}_2 = 9) = .3$
Proyecto 3	\$1	$P(\mathbf{I}_3 = 0) = .2$	$P(\mathbf{I}_3 = 4) = .6$	$P(\mathbf{I}_3 = 5) = .2$
	\$2	$P(\mathbf{I}_3 = 4) = .4$	$P(\mathbf{I}_3 = 6) = .4$	$P(\mathbf{I}_3 = 7) = .2$
	\$3	$P(\mathbf{I}_3 = 5) = .3$	$P(\mathbf{I}_3 = 7) = .4$	$P(\mathbf{I}_3 = 8) = .3$
	\$4	$P(\mathbf{I}_3 = 6) = .1$	$P(\mathbf{I}_3 = 8) = .5$	$P(\mathbf{I}_3 = 9) = .4$

19.2 Modelo de inventario probabilístico

En esta sección, modificamos el modelo de inventario de la sección 18.3 para considerar la demanda incierta. Con esto se ilustran las dificultades encontradas al resolver una PDP para la cual el estado durante el siguiente periodo es incierto (dados el estado actual y la decisión).

EJEMPLO 2 Política de producción de tres periodos

Considere el siguiente problema de inventario de tres periodos. Al comienzo de cada periodo, una empresa debe determinar cuántas unidades debe producir durante el periodo actual. Durante un periodo en el que se producen x unidades, se incurre en un costo de producción $c(x)$, donde $c(0) = 0$, y para $x > 0$, $c(x) = 3 + 2x$. La producción durante cada periodo está limitada a lo sumo a 4 unidades. Después que ocurre la producción, se observa la demanda aleatoria del periodo. La demanda de cada periodo tiene las mismas probabilidades de que sean 1 o 2 unidades. Después de satisfacer la demanda del periodo actual de la producción e inventario actuales, se evalúa el inventario de fin de periodo de la empresa, y se estima un costo de retención de 1 dólar por unidad. Como resultado de la capacidad limitada, el inventario al final de cada periodo no puede exceder 3 unidades. Se requiere que toda la demanda se satisfaga a tiempo. Cualquier inventario disponible al final del periodo 3 se puede vender en 2 dólares por unidad. Al comienzo del periodo 1, la empresa tiene 1 unidad de inventario. Utilice la programación dinámica para determinar la política de producción que minimiza el costo neto esperado en que se incurre durante los tres periodos.

Solución Defina $f_t(i)$ como el costo neto mínimo esperado en que se incurre durante los periodos $t, t+1, \ldots, 3$ cuando el inventario al comienzo del periodo t es i unidades. Entonces

$$\begin{aligned} f_3(i) = \min_x\{&c(x) + (\tfrac{1}{2})(i + x - 1) + (\tfrac{1}{2})(i + x - 2) \\ &- (\tfrac{1}{2})2(i + x - 1) - (\tfrac{1}{2})2(i + x - 2)\} \end{aligned} \tag{2}$$

donde x debe ser un miembro de $\{0, 1, 2, 3,4\}$ y x debe satisfacer $(2 - i) \leq x \leq (4 - i)$.

De la ecuación (2) se deduce que, debido a que si se producen x unidades durante el periodo 3, el costo neto durante el periodo 3 es (costo de producción esperado) + (costo de retención esperado) − (costo de salvamento esperado). Si se producen x unidades, el costo de producción esperado es $c(x)$ y hay una probabilidad .5 de que el costo de retención del periodo 3 sea $i + x - 1$, y una probabilidad .5 de que sea $i + x - 2$. Por consiguiente, el costo de retención del periodo 3 será $(\frac{1}{2})(i + x - 1) + (\frac{1}{2})(i + x - 2) = i + x - \frac{3}{2}$. Un razonamiento similar muestra que el valor de salvamento esperado (un costo negativo) al final del periodo 3 será $(\frac{1}{2})2(i + x - 1) + (\frac{1}{2})2(i + x - 2) = 2i + 2x - 3$. Para asegurar que se satisface la demanda del periodo 3, se debe tener $i + x \geq 2$, o bien, $x \geq 2 - i$. De manera similar, para asegurar que el inventario al final de tres periodos no excede 3 unidades, se debe tener que $i + x - 1 \leq 3$ o bien $x \leq 4 - i$.

Para $t = 1, 2$, se puede derivar la relación recursiva para $f_t(i)$ al observar que para cualquier nivel de producción x del mes t, los costos esperados en que se incurre durante los periodos $t, t + 1, \ldots, 3$ son la suma de los costos esperados en que se incurre durante los periodos $t + 1, t + 2, \ldots, 3$. Como antes, si se producen x unidades durante el mes t, el costo esperado durante el mes t será $c(x) + (\frac{1}{2})(i + x - 1) + (\frac{1}{2})(i + x - 2)$. (Observe que durante los periodos 1 y 2, no se recibe valor de salvamento.) Si durante el mes t se producen x unidades, el costo esperado durante los periodos $t + 1, t + 2, \ldots, 3$ se calcula como sigue. La mitad del tiempo, la demanda durante el periodo t será 1 unidad, y el inventario al comienzo del periodo $t + 1$ será $i + x - 1$. En esta situación, los costos esperados en que se incurre durante los periodos $t + 1, t + 2, \ldots, 3$ (suponiendo que actuamos de manera óptima durante estos periodos) es $f_{t+1}(i + x - 1)$. De manera similar, hay una probabilidad .5 de que el inventario al comienzo del periodo $t + 1$ sea $i + x - 2$. En este caso, el costo esperado en que se incurre durante los periodos $t + 1, t + 2, \ldots, 3$ será $f_{t+1}(i + x - 2)$. En resumen, el costo esperado durante los periodos $t + 1, t + 2, \ldots, 3$ será $(\frac{1}{2})f_{t+1}(i + x - 1) + (\frac{1}{2})f_{t+1}(i + x - 2)$. Con esto en mente, se podría escribir para $t = 1, 2$,

$$\begin{aligned} f_t(i) = \min_x[&c(x) + (\tfrac{1}{2})(i + x - 1) + (\tfrac{1}{2})(i + x - 2) \\ &+ (\tfrac{1}{2})f_{t+1}(i + x - 1) + (\tfrac{1}{2})f_{t+1}(i + x - 2)] \end{aligned} \tag{3}$$

donde x es un miembro de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ y x debe satisfacer $(2 - i) \leq x \leq (4 - i)$.

Generalizando el razonamiento que dio lugar a (3), se obtiene la siguiente observación importante en relación con la formulación de PDP. Suponga que los estados posibles durante el periodo $t + 1$ son $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y la probabilidad de que el estado del periodo $t + 1$ sea s_i es p_i. Entonces el costo mínimo esperado en que se incurre durante los periodos $t + 1, t + 2, \ldots$, fin del problema es

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i f_{t+1}(s_i)$$

donde $f_{t+1}(s_i)$ es el costo esperado mínimo en que se incurre desde el periodo $t + 1$ hasta el fin del problema, dado que el estado durante el periodo $t + 1$ es s_i.

Se define $x_t(i)$ como un nivel de producción del periodo t que obtiene el mínimo en (3) para $f_t(i)$. Ahora trabajamos hacia atrás hasta que se determina $f_1(1)$. Los cálculos pertinentes se resumen en las tablas 3, 4 y 5. Puesto que el inventario final de cada periodo debe ser no negativo y no puede exceder 3 unidades, el estado durante cada periodo debe ser 0, 1, 2 o 3.

Como en la sección 18.3, se empieza por producir $x_1(1) = 3$ unidades durante el periodo 1. Sin embargo, no se puede determinar el nivel de producción del periodo 2 hasta que se observa la demanda del periodo 1. También, no es posible determinar el nivel de producción del periodo 3 hasta que se observa la demanda del periodo 2. Para ilustrar la idea, se determina el programa óptimo de producción si tanto la demanda del periodo 1 y como la del periodo 2 son dos unidades. Puesto que $x_1(1) = 3$, durante el periodo 1 se producirán 3

TABLA 3
Cálculos para $f_3(i)$

i	x	$c(x)$	Costo de retención esperado $(i + x - \frac{3}{2})$	Valor de salvamento esperado $(2i + 2x - 3)$	Costo total esperado	$f_3(i)$ $x_3(i)$
3	0	0	$\frac{3}{2}$	3	$-\frac{3}{2}$*	$f_3(3) = -\frac{3}{2}$
3	1	5	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{5}{2}$	$x_3(3) = 0$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$*	$f_3(2) = -\frac{1}{2}$
2	1	5	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	$x_3(2) = 0$
2	2	7	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{9}{2}$	
1	1	5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{9}{2}$*	$f_3(1) = \frac{9}{2}$
1	2	7	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{11}{2}$	$x_3(1) = 1$
1	3	9	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{13}{2}$	
0	2	7	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{13}{2}$*	$f_3(0) = \frac{13}{2}$
0	3	9	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{15}{2}$	$x_3(0) = 2$
0	4	11	$\frac{5}{2}$	5	$\frac{17}{2}$	

TABLA 4
Cálculos para $f_2(i)$

i	x	$c(x)$	Costo de retención esperada $(i + x - \frac{3}{2})$	Costo futuro esperado $(\frac{1}{2})f_3(i + x - 1)$ $+(\frac{1}{2})f_3(i + x - 2)$	Costo total esperado periodos 2,3	$f_2(i)$ $x_2(i)$
3	0	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{2}$*	$f_2(3) = \frac{7}{2}$
3	1	5	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{13}{2}$	$x_2(3) = 0$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	6*	$f_2(2) = 6$
2	1	5	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{17}{2}$	$x_2(2) = 0$
2	2	7	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{17}{2}$	
1	1	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	11	$f_2(1) = \frac{21}{2}$
1	2	7	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{21}{2}$*	$x_2(1) = 2$ o 3
1	3	9	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{21}{2}$*	
0	2	7	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	13	$f_2(0) = \frac{25}{2}$
0	3	9	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{25}{2}$*	$x_2(0) = 3$ o 4
0	4	11	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{25}{2}$*	

2 Dickie Hustler tiene 2 dólares y va a lanzar una moneda cargada (probabilidad .4 de obtener cara) tres veces. Antes de cada lanzamiento, puede apostar cualquier cantidad de dinero (hasta lo que tenga en el presente). Si el resultado del lanzamiento es una cara, Dickie gana el número de dólares que apuesta; si el resultado es una cruz, pierde el número de dólares que apuesta. Utilice la programación dinámica para determinar una estrategia que maximice la probabilidad de Dickie de tener por lo menos 5 dólares después de lanzar por tercera vez la moneda.

Grupo B

3 Suponga que el ejército lleva 14 puntos de desventaja en el juego de fútbol entre el ejército y la marina. El ángel de la guarda del ejército le ha asegurado al entrenador del ejército que tendrán la bola dos veces más durante el juego y anotarán un *touchdown* (6 puntos) cada vez que su equipo tenga el balón. También, se le aseguró al entrenador del ejército que la marina no anotará más puntos. Suponga que a un triunfo se le asigna un valor de 1, un empate vale .3 y una derrota vale 0. El problema del entrenador del ejército es determinar si ordena conseguir 1 o dos puntos después de cada anotación de seis puntos. Una conversión de 1 punto siempre tiene éxito, y una conversión de dos puntos es exitosa sólo 40% de las veces. El ejército quiere maximizar la recompensa esperada obtenida del resultado del juego. Utilice la programación dinámica para determinar una estrategia óptima. Luego demuestre el resultado siguiente: *sin importar qué valor se asigne a un empate, nunca es óptimo usar la siguiente estrategia: ir por una conversión de un punto después de la primera anotación e ir por una conversión de dos puntos después de la segunda anotación.* ¡Observe que esta estrategia (subóptima) es la que sigue la mayoría de los entrenadores!

19.4 Más ejemplos de formulaciones de programación dinámica probabilística

Muchos problemas de programación dinámica probabilística se resuelven por medio de recursiones de la forma siguiente (para problemas de maximización):

$$f_t(i) = \max_a \left\{(\text{recompensa esperada durante la etapa } t|i, a) + \sum_j p(j|i, a, t) f_{t+1}(j)\right\} \quad \textbf{(9)}$$

En (9), $f_t(i)$ es la recompensa máxima esperada que se puede obtener durante las etapas $t, t+1, \ldots$ fin del problema, dado que el estado al comienzo de la etapa t es i. La maximización en (9) se toma sobre todas las acciones a que son factibles cuando el estado al comienzo de la etapa t es i. En (9), $p(j|i, a, t)$ es la probabilidad de que el estado del siguiente periodo sea j, dado que el estado actual (etapa t) es i y se elige la acción a. Por consiguiente, la suma en (9) representa la recompensa esperada desde la etapa $t+1$ hasta el fin del problema. Al elegir a para maximizar el lado derecho de la ecuación (9), se está eligiendo a para maximizar la recompensa esperada obtenida desde la etapa t al final del problema, y esto es lo que se quiere hacer. Los seis ejemplos siguientes son formulaciones de programación dinámica probabilística.

EJEMPLO 5 Perforación de Sunco Oil

Sunco Oil tiene que asignar D dólares para perforar en los sitios $1, 2, \ldots, T$. Si x dólares se asignan al sitio t, la probabilidad de que se encuentre petróleo en el sitio t es $q_t(x)$. Sunco estima que si el sitio t tiene petróleo, su valor es r_t dólares. Formule una recursión que se pueda usar para permitir a Sunco maximizar el valor esperado del petróleo encontrado en los sitios $1, 2, \ldots, T$.

Solución Éste es un problema característico de asignación de recursos (véase el ejemplo 1). Por lo tanto, la etapa debe representar el número de sitios, la decisión para el sitio t es cuántos dólares asignar al sitio t, y el estado es el número de dólares disponibles para asignar a los sitios $t, t+1, \ldots, T$. Así, se define a $f_t(d)$ como el valor máximo esperado de petróleo que se puede encontrar en los sitios $t, t+1, \ldots, T$ si d dólares están disponibles para asignar a los sitios $t, t+1, \ldots, T$.

Se hace la suposición razonable de que $q_T(x)$ es una función no decreciente de x. Si éste es el caso, entonces en la etapa T, todo el dinero se debe asignar al sitio T. Con esto se obtiene

$$f_T(d) = r_T q_T(d) + (1 - q_T(d))0 = r_T q_T(d)$$

Para $t < T$,

$$f_t(d) = \max_x \{r_t q_t(x) + f_{t+1}(d - x)\}$$

donde x debe satisfacer $0 \leq x \leq d$. La última recursión se deduce debido a que $r_t q_t(x)$ es el valor esperado de la recompensa para la etapa t, y puesto que Sunco tendrá $d - x$ dólares disponibles para $t + 1, t + 2, \ldots, T$, $f_{t+1}(d - x)$ es el valor esperado del petróleo que se puede encontrar al taladrar de manera óptima en los sitios $t + 1, t + 2, \ldots, T$. Para resolver este problema, se trabajaría hacia atrás hasta determinar el valor de $f_1(D)$.

EJEMPLO 6 Pesca de robalo

Cada año, el dueño de un lago debe determinar cuánto robalo capturar y vender. Durante el año t, se recibirá un precio p_t por cada robalo capturado. Si el lago contiene b robalos al comienzo del año t, el costo de capturar x robalos es $c_t(x|b)$. Entre el tiempo en que se capturan los robalos del año t y el comienzo del año $t + 1$, los robalos en el lago se multiplican por un factor aleatorio $\mathbf{D}$, donde $P(\mathbf{D} = d) = q(d)$.

Formule una recursión de programación dinámica que se pueda usar para determinar una estrategia de captura de robalos que maximice la ganancia neta del dueño durante los siguientes diez años. En el presente, el lago contiene 10 000 robalos.

Solución Como en el ejemplo 8 del capítulo 18, la etapa es el año, el estado es el número de robalos en el lago al comienzo del año y la decisión es cuántos robalos pescar durante cada año. Se define a $f_t(b)$ como la ganancia neta máxima esperada que se puede obtener durante los años $t, t + 1, \ldots, 10$ si el lago contiene b robalos al comienzo del año t. Entonces

$$f_{10}(b) = \max_x \{xp_{10} - c_{10}(x|b)\}$$

donde $0 \leq x \leq b$, y para $t < 10$

$$f_t(b) = \max_x \left\{xp_t - c_t(x|b) + \sum_d q(d) f_{t+1}(d(b - x))\right\}$$

En esta recursión, x debe satisfacer $0 \leq x \leq b$. A fin de justificar la recursión para $t < 10$, observe primero que las ganancias durante el año t son (con certeza) $xp_t - c_t(x|b)$. Entonces con probabilidad $q(d)$, el estado del año $t + 1$ será $d(b - x)$. Se deduce entonces que si se capturan x robalos durante el año t, la ganancia neta máxima esperada que se puede obtener durante los años $t + 1, t + 2, \ldots, 10$ será

$$\sum_d q(d) f_{t+1}(d(b - x))$$

Por consiguiente, la recursión elige el número de robalos durante el año t para maximizar la suma de las ganancias del año t y ganancias futuras. Para usar esta recursión, se trabaja hacia atrás hasta calcular $f_1(10\,000)$. Luego, después de observar el número de robalos en el lago al comienzo del año t, se utiliza la recursión para determinar el número de robalos que se debe capturar durante el año t.

EJEMPLO 7 Esperando en la fila

Cuando Sally Mutton llega al banco, le sobran 30 minutos de su tiempo para el almuerzo. Si Sally hace fila y la atienden antes que termine la hora del almuerzo, obtiene una recompensa r. Sin embargo, a Sally no le gusta esperar en las filas, así que para mostrar su disgusto por esperar en la fila, incurre en un costo c por cada minuto que espera. Durante un minuto en el que n personas están delante de Sally, hay una probabilidad $p(x|n)$ de que x personas completen sus transacciones. Suponga que cuando Sally llega, hay 20 personas delante de ella en la fila. Utilice la programación dinámica para determinar la estrategia para que Sally maximice su ingreso neto esperado (recompensa – costos de espera).

Solución Cuando Sally llega al banco, ella debe decidir si se forma o se da por vencida y se va. En un instante posterior, ella también podría decidir salir si es improbable que la atiendan al final de su hora de almuerzo. Si resta un minuto, la decisión de Sally sería simple: debe permanecer formada si y sólo si su recompensa esperada excede el costo de esperar durante 1 minuto (c). Entonces se puede trabajar hacia atrás hasta un problema con 2 minutos restantes, y así sucesivamente. Se define a $f_t(n)$ como la recompensa máxima esperada que puede recibir Sally desde el tiempo t hasta el fin de su pausa para el almuerzo si en el instante t, n personas están adelante de ella. Sea $t = 0$ el presente y $t = 30$ el fin del problema. Puesto que $t = 29$ es el comienzo del último minuto del problema, se escribe

$$f_{29}(n) = \max \begin{cases} 0 & \text{(Sale)} \\ rp(n|n) - c & \text{(Se queda)} \end{cases}$$

Esto se deduce debido a que si Sally elige salir en el minuto 29, no obtiene ninguna recompensa y ya no incurre en costos. Por otro lado, si se queda en el minuto 29, incurrirá en un costo de espera de c (un ingreso de $-c$) y con probabilidad $p(n|n)$ será atendida y recibirá una recompensa r. Así, si Sally se queda, su recompensa neta esperada es $rp(n|n) - c$.

Para $t < 29$, se escribe

$$f_t(n) = \max \begin{cases} 0 & \text{(Sale)} \\ rp(n|n) - c + \sum_{k<n} p(k|n) f_{t+1}(n-k) & \text{(Se queda)} \end{cases}$$

La última recursión se deduce debido a que si Sally se queda, obtendrá una recompensa esperada (como en el caso $t = 29$ de $rp(n|n) - c$ durante el minuto actual, y con probabilidad $p(k|n)$, habrá $n - k$ personas adelante de ella; en este caso, su recompensa neta esperada desde el tiempo $t + 1$ al tiempo 30 será $f_{t+1}(n - k)$. Si Sally se queda, su recompensa global esperada recibida desde el tiempo $t + 1, t + 2, \ldots, 30$ será

$$\sum_{k<n} p(k|n) f_{t+1}(n-k)$$

Por supuesto, si n personas completan sus transacciones durante el minuto actual, el problema termina y el ingreso futuro de Sally será cero.

Para determinar la política de espera óptima para Sally, se trabaja hacia atrás hasta que se calcula $f_0(20)$. Si $f_0(20)$ se obtiene por "permanecer", Sally se queda y ve cuántas personas hay delante de ella en el tiempo 1. Ella permanece formada hasta que surge una situación para la cual la acción óptima es "salir" o comienza a ser atendida. En cualquier caso, el problema termina.

En los problemas en los que quien toma la decisión puede terminar el problema eligiendo una acción particular se conocen como **problemas de regla de detención**; éstos suelen tener una estructura que simplifica la determinación de políticas óptimas. Véase Ross (1983) para más información en problemas de regla de detención.

EJEMPLO 8 Política de administración de efectivo

La tienda de departamentos E. J. Korvair está tratando de determinar una política óptima de administración de efectivo. Durante cada día, la demanda de efectivo se podría describir mediante una variable aleatoria $\mathbf{D}$, donde $p(\mathbf{D} = d) = p(d)$. Al comienzo de cada día, la tienda envía a un empleado al banco a depositar o retirar fondos. Cada transacción bancaria cuesta K dólares. Entonces la demanda de efectivo de E. J., se satisface con el efectivo sobrante del día anterior más el dinero retirado (o menos el dinero depositado). Al final del día, la tienda determina su balance de efectivo en la tienda. Si el balance de efectivo es negativo, se incurre en un costo de escasez de s dólares por déficit en dólares. Si el balance final es positivo, se incurre en un costo de i dólares por dólar retenido (debido a la pérdida de interés que se podría haber obtenido al depositar efectivo en el banco). Al comienzo del día 1, la tienda tiene disponibles 10 000 dólares en efectivo y un saldo de 100 000. Formule un modelo de programación dinámica que se pueda usar para minimizar el costo esperado de satisfacer las necesidades de efectivo de la tienda durante los siguientes 30 días.

Solución Para determinar cuánto dinero se debe retirar o depositar, E. J., necesita conocer su efectivo disponible y su saldo al comienzo del día. Como siempre, sea el tiempo la etapa. Al comienzo de cada etapa (o día), E. J., debe decidir cuánto retirar o depositar en el banco. Sea

Este resultado se deduce porque si Dirk acepta el trabajo durante el mes 60, hay una probabilidad p_{60} de que será atrapado y terminará con cero dólares y una probabilidad $(1 - p_{60})$ de que no será capturado y terminará con $d + d_{60}$ dólares. Por supuesto, si Dirk no acepta el trabajo del mes 60, termina el mes 60 con d dólares.

Ampliando este razonamiento, para $t < 60$,

$$f_t(d) = \max \begin{cases} p_t(0) + (1 - p_t)f_{t+1}(d + d_t) & \text{(Acepta el trabajo del mes 60)} \\ f_{t+1}(d) & \text{(Rechaza el trabajo del mes 60)} \end{cases}$$

Observe que si Dirk acepta el trabajo del mes t, hay una probabilidad p_t de que sea capturado (y termine con cero) y una probabilidad $(1 - p_t)$ de que completará con éxito el trabajo del mes t y obtendrá d_t dólares. En este caso, Dirk comienza el mes $t + 1$ con $d + d_t$ dólares, y su estado final esperado de efectivo será $f_{t+1}(d + d_t)$. Por supuesto, si Dirk rechaza el trabajo del mes t, comienza el mes $t + 1$ con d dólares, y su estado final esperado de efectivo será $f_{t+1}(d)$. Puesto que Dirk quiere maximizar su estado final esperado de efectivo al final del mes 60, se deduce la recursión. Por medio de la recursión, Dirk puede trabajar hacia atrás para calcular $f_1(50\,000)$. Entonces él puede decidir si acepta el trabajo del mes 1. Suponiendo que no ha sido capturado, él puede determinar si acepta el trabajo del mes 2, y así sucesivamente.

Como se describió en la sección 18.8, se pueden usar hojas de cálculo para resolver recursiones de programación dinámica. Véanse los problemas 14 y 15 para algunos ejemplos de cómo se pueden usar hojas de cálculo para resolver problemas de programación dinámica probabilística (PDP).

PROBLEMAS

Grupo A

1 El transbordador espacial está a punto de ascender en otro vuelo. Con probabilidad $p_t(z)$, utilizará z celdas de combustible tipo t durante el vuelo. El transbordador tiene espacio para a lo sumo W celdas de combustible. Si en cualquier instante durante el vuelo, se queman las celdas de combustible tipo t, se incurrirá en un costo c_t. Suponiendo que el objetivo es minimizar el costo esperado debido a la escasez de celdas de combustible, prepare un modelo de programación dinámica que se podría usar para determinar cómo aprovisionar al transbordador espacial con celdas de combustible. Hay T tipos distintos de celdas de combustible.

2 Al comienzo de cada año, una empresa observa su estado de activos (llámelo d) y podría invertir cualquier cantidad x $(0 \le x \le d)$ en una inversión de riesgo. Durante cada año, el dinero invertido se duplica con probabilidad p y se pierde por completo con probabilidad $1 - p$. Independientemente de esta inversión, el estado de activos de la empresa se incrementa por una cantidad y con probabilidad q_y (y podría ser negativa). Si el estado de los activos de la empresa es negativo al comienzo del año, no puede invertir nada de dinero durante ese año. La empresa inicialmente tiene 10 000 dólares en activos y quiere maximizar su estado de activos diez años a partir de ahora. Formule una recursión de programación dinámica que permita a la empresa lograr su objetivo.

3 Considere una máquina que podría estar en cualquiera de los estados 0, 1, 2, ... Al comienzo de cada mes, se observa el estado de la máquina, y se decide si remplaza o conserva la máquina. Si se remplaza una máquina, llega de inmediato una nueva máquina de estado 0. El costo de remplazar una máquina es R dólares. Cada mes que una máquina de estado i está en operación, se incurre en un costo de mantenimiento $c(i)$. Si una máquina está en el estado i al comienzo de un mes, entonces con probabilidad p_{ij}, la máquina comienza el mes siguiente en el estado j. Al comienzo del primer mes, se tiene una máquina de estado i_0. Suponiendo que la tasa de interés es 12% por año, formule una recursión de programación dinámica que se pueda usar para minimizar el costo descontado esperado en que se incurre durante los siguientes T meses. Observe que si se sustituye una máquina al comenzar un mes, se incurre en un costo de mantenimiento de $c(0)$ durante el mes, y con probabilidad p_{0i}, se empieza el mes siguiente con una máquina de estado i.

4 En el intervalo de tiempo entre t y $t - 1$ segundos antes de la partida del vuelo 313 de Braneast Airlines, hay una probabilidad p_t de que la aerolínea reciba una reservación para el vuelo y una probabilidad $1 - p_t$ de que la aerolínea no reciba una reservación. El vuelo puede acomodar hasta 100 pasajeros. A la hora de partir, si la aerolínea ha aceptado r reservaciones, hay una probabilidad $q(y|r)$ de que se presenten al vuelo y pasajeros. Cada pasajero que aborda el vuelo agrega 500 dólares a los ingresos de Braneast, pero cada pasajero que se presenta al vuelo y no puede ser acomodado, recibe 200 dólares de compensación. Formule una recursión de programación dinámica para permitir que la aerolínea maximice su ingreso esperado del vuelo 313. Suponga que no se reciben reservaciones más de 100 000 segundos antes de la hora del vuelo.

5 Al comienzo de cada semana, una máquina está en funcionamiento o está descompuesta. Si la máquina funciona toda la semana, obtiene ingresos de 100 dólares. Si la máquina se descompone durante una semana, no obtiene ingreso para esa semana. Si la máquina está funcionando al comienzo de la semana, se le podría dar mantenimiento para disminuir la probabilidad de una descompostura. Si se lleva a cabo el mantenimiento, una máquina en funcionamiento tiene una probabilidad de .4 de descomponerse durante la semana; si no se realiza el mantenimiento, una máquina en funcionamiento tiene una probabilidad de .7 de descomponerse durante la semana. El costo del mantenimiento es de 20 dólares por semana. Si la máquina se descompone al comienzo de la semana, ésta se debe remplazar o reparar. Tanto la reparación como la sustitución ocurren al instante. Reparar una máquina cuesta 40 dólares, y hay una probabilidad .4 de que la máquina reparada se descomponga durante la semana. Sustituir una máquina cuesta 90 dólares, pero se garantiza que la nueva máquina funciona durante toda la siguiente semana de operación. Utilice la programación dinámica para determinar una política de reparación, sustitución y mantenimiento que maximice la ganancia neta esperada obtenida durante un periodo de cuatro semanas. Suponga que la máquina está funcionando al principio de la primera semana.

6 Poseo una sola parte de la acción de Wivco. Debo vender mi parte al comienzo de uno de los siguientes 30 días. Cada día cambia el precio de la acción. Con probabilidad $q(x)$, el precio de mañana se incrementa en x% sobre el precio de hoy de la acción (x puede ser negativa). Por ejemplo, con probabilidad $q(5)$, el precio de la acción del día siguiente será 5% mayor que el de hoy. Muestre cómo se puede usar la programación dinámica para determinar una estrategia que maximiza el ingreso esperado obtenido de vender la parte de la acción de Wivco. Suponga que al comienzo del primer día, la acción se vende 10 dólares por participación.

Grupo B

7 La National Cat Foundling Home motiva a las personas a adoptar sus gatos, pero (como resultado de la limitación de fondos) permite a cada posible dueño inspeccionar sólo cuatro gatos antes de elegir uno para llevárselo a casa. Sara, una niña de diez años de edad, está ansiosa por adoptar un gato y está de acuerdo en acatar las siguientes reglas: Se elige un gato al azar para que Sara lo vea, y después ella debe elegir el gato o rechazarlo. Si Sara rechaza al primer gato, ella ve a otro gato elegido al azar y debe aceptarlo o rechazarlo. Este procedimiento continúa hasta que Sara elige su gato. Una vez que Sara rechaza a un gato, no puede arrepentirse y elegirlo como su mascota. Determine una estrategia para que Sara maximice su probabilidad de finalizar con el gato que prefiere en realidad.

8 Considere el siguiente modelo de inventario probabilístico:

a Al comienzo de cada periodo, una empresa observa su posición de inventario.

b Luego, la empresa decide cuántas piezas producir durante el periodo actual. Cuesta $c(x)$ dólares producir x unidades durante un periodo.

c Con probabilidad $q(d)$, la demanda del periodo son d unidades. De las unidades disponibles (incluida la producción del periodo actual), la empresa satisface tanta demanda como sea posible. La empresa recibe r dólares por cada unidad vendida. Por cada unidad de demanda que se quede pendiente, se incurre en un costo de penalización p. Se supone que se pierde la demanda no satisfecha. Por ejemplo, si la empresa tiene 20 unidades disponibles y la demanda actual es de 30, se recibiría un ingreso de $20r$ y se incurriría en una penalización de $10p$.

d Si el inventario final es positivo, se incurre en un costo de retención de 1 dólar por unidad.

e El siguiente periodo comienza ahora.

El inventario inicial del periodo es cero y su objetivo es minimizar el costo esperado durante un horizonte de 100 periodos. Formule una recursión de programación dinámica que ayude a la empresa a lograr su objetivo.

9 Martha y Ken Allen quieren vender su casa. Al comenzar cada día, ellos reciben una oferta. Se supone que día con día, los tamaños de las ofertas son variables aleatorias independientes y que la probabilidad de que la oferta de un determinado día sean j dólares es p_j. Una oferta se podría aceptar el día que se hace o en cualquier fecha posterior. Por cada día que pasa sin que se venda la casa, se incurre en un costo de mantenimiento de c dólares. La casa se debe vender en 30 días. Formule una recursión de programación dinámica que puedan usar Martha y Ken para maximizar su ganancia neta esperada (precio de venta – costo de mantenimiento). Suponga que se incurre en el costo de mantenimiento para un día antes de que se reciba la oferta del día actual y que cada oferta es por un número entero de dólares.

10 Una empresa de publicidad puede gastar D dólares para llegar a los clientes de T mercados separados. El mercado t consiste en k_t personas. Si x dólares se gastan en publicidad en el mercado t, la probabilidad de que se llegue a una determinada persona del mercado t es $p_t(x)$. Cada persona del mercado t a la que llega la publicidad comprará c_t unidades del producto. Una persona a la que no llega la publicidad no comprará el producto. Formule una recursión de programación dinámica que se pueda usar para maximizar el número esperado de unidades vendidas en T mercados.

11 Georgia Stein es el nuevo dueño de los Yankees de Nueva York. Cada temporada, Georgia debe decidir cuánto dinero gastar en el proceso de selección de agentes libres. Durante cada temporada, Georgia puede gastar cualquier cantidad de dinero en agentes libres hasta la posición de excelencia del equipo al comienzo de la temporada. Si los Yankees terminan en el i-ésimo lugar durante la temporada, su posición de excelencia se incrementa en $R(i)$ dólares menos la cantidad de dinero gastado en el proceso de selección de agentes libres. Si los Yankees terminaron en i-ésimo lugar la temporada pasada y gastaron d dólares en agentes libres durante la temporada baja, la probabilidad de que los Yankees terminen en el lugar j durante la siguiente temporada es $p_{ij}(d)(j = 1, 2, \ldots, 7)$. La temporada pasada, los Yankees terminaron en primer lugar, y al final de la temporada, tuvieron una posición de excelencia de D dólares. Formule una recursión de programación dinámica que permita a los Yankees maximizar su posición de efectivo esperada al final de T temporadas.

12 Bailey Bliss es el director de campaña para la campaña presidencial de Walter Glenn. Él tiene que asignar D dólares a T elecciones primarias de todo para el vencedor. Si se asignan x_t dólares a la elección primaria t, entonces con probabilidad $p_t(x_t)$, Glenn ganará la elección primara t y obtendrá v_t delegados. Con probabilidad $1 - p_t(x_t)$, Glenn pierde la elección primaria t y no obtiene delegados. Glenn necesita que sean nominados K delegados. Utilice la programación dinámica para ayudar a Bliss a maximizar la probabilidad de

También se incluye un breve análisis del criterio de recompensa promedio por periodo. Los problemas de programación dinámica probabilística de horizonte infinito se llaman **procesos de decisión de Markov** (o MDP, *Markov decision processes*).

Descripción de un MDP

Un MDP se describe mediante cuatro tipos de información:

1 Espacio de estado.
2 Conjunto de decisiones.
3 Probabilidades de transición.
4 Recompensas esperadas.

Espacio de estado

Al comienzo de cada periodo, el MDP está en algún estado i, donde i es un miembro de $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. S se conoce como el **espacio de estado** del MDP.

Conjunto de decisiones

Para cada estado i, hay un conjunto finito de decisiones permisibles, $D(i)$.

Probabilidades de transición

Suponga que un periodo comienza en el estado i, y se elige una decisión $d \in D(i)$. Entonces con probabilidad $p(j|i, d)$, el estado del siguiente periodo será j. El estado del siguiente periodo depende sólo del estado del periodo actual y de la decisión elegida durante el periodo actual (no de los estados previos y decisiones). Ésta es la razón de por qué se utiliza el término proceso de decisión de *Markov*.

Recompensas esperadas

Durante un periodo en el que el estado es i y se elige una decisión $d \in D(i)$, se recibe una recompensa esperada de r_{id}.

EJEMPLO 11 Remplazo de máquina

Al comienzo de cada semana, una máquina está en una de cuatro condiciones (estados): excelente (E), buena (G), regular (A) o mala (B). En cada tipo de condición la máquina obtiene un ingreso semanal que es como sigue: excelente, \$100; buena, \$80; regular, \$50; mala, \$10. Después de observar la condición de una máquina al comienzo de la semana, se tiene la opción de remplazarla instantáneamente con una máquina excelente, que cuesta \$200. Al paso del tiempo se deteriora la calidad de la máquina, como se ilustra en la tabla 8. Para esta situación, determine el espacio de estado, los conjuntos de decisiones, las probabilidades de transición y las recompensas esperadas.

TABLA 8
Estados de las máquinas del siguiente periodo

Estado actual de la máquina	Probabilidad de que la máquina comience la siguiente semana como: Excelente	Buena	Regular	Mala
Excelente	.7	.3	—	—
Buena	—	.7	.3	—
Regular	—	—	.6	.4
Mala	—	—	—	1.0 hasta que sea remplazada

Solución El conjunto de estados posibles es $S = \{E, G, A, B\}$. Sea

$$R = \text{remplazar al comienzo del periodo actual}$$
$$NR = \text{no remplazar durante el periodo actual}$$

Puesto que es absurdo remplazar una máquina excelente, se escribe

$$D(E) = \{NR\} \qquad D(G) = D(A) = D(B) = \{R, NR\}$$

Se tienen las siguientes probabilidades de transición:

$$\begin{array}{llll}
p(E|NR, E) = .7 & p(G|NR, E) = .3 & p(A|NR, E) = 0 & p(B|NR, E) = 0 \\
p(E|NR, G) = 0 & p(G|NR, G) = .7 & p(A|NR, G) = .3 & p(B|NR, G) = 0 \\
p(E|NR, A) = 0 & p(G|NR, A) = 0 & p(A|NR, A) = .6 & p(B|NR, A) = .4 \\
p(E|NR, B) = 0 & p(G|NR, B) = 0 & p(A|NR, B) = 0 & p(B|NR, B) = 1
\end{array}$$

Si se remplaza una máquina con una máquina excelente, las probabilidades de transición serán las mismas que si se hubiera comenzado la semana con una máquina excelente. Así,

$$\begin{aligned}
p(E|G, R) &= p(E|A, R) = p(E|B, R) = .7 \\
p(G|G, R) &= p(G|A, R) = p(G|B, R) = .3 \\
p(A|G, R) &= p(A|A, R) = p(A|B, R) = 0 \\
p(B|G, R) &= p(B|A, R) = p(B|B, R) = 0
\end{aligned}$$

Si no se remplaza la máquina, entonces durante la semana, se reciben los ingresos dados en el problema. Por lo tanto, $r_{E,NR} = \$100$, $r_{G,NR} = \$80$, $r_{A,NR} = \$50$ y $r_{B,NR} = \$10$. Si se remplaza una máquina con una máquina excelente, entonces no importa qué tipo de máquina se tenga al comienzo de cada semana, se reciben \$100 y se paga un costo de \$200. Así, $r_{E,R} = r_{G,R} = r_{A,R} = r_{B,R} = -\$100$.

En un MDP, ¿qué criterio se debe usar para determinar la decisión correcta? Contestar esta pregunta requiere que se analice la idea de una **política óptima** para un MDP.

DEFINICIÓN ■ Una **política** es una regla que especifica cómo se elige la decisión de cada periodo. ■

La decisión del periodo t podría depender de la historia previa del proceso. Así, la decisión del periodo t puede depender del estado durante los periodos $1, 2, \ldots, t$ y las decisiones elegidas durante los periodos $1, 2, \ldots, t - 1$.

DEFINICIÓN ■ Una política δ es una **política estacionaria** si siempre que el estado sea i, la política δ elige (independientemente del periodo) la misma decisión (llámela $\delta(i)$). ■

Sea δ una política arbitraria y Δ el conjunto de las políticas. Entonces

$\mathbf{X}_t$ = variable aleatoria para el estado del MDP al comienzo del periodo t (por ejemplo, $\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \ldots, \mathbf{X}_n$)

X_1 = estado particular del proceso al comienzo del periodo 1 (estado inicial)

d_t = decisión elegida durante el periodo t

$V_\delta(i)$ = recompensa descontada esperada obtenida durante un número infinito de periodos, dado que al comienzo del periodo 1, el estado es i y la política estacionaria es δ

Para esta política, ya se encontró que $V_\delta(E) = 687.81$, $V_\delta(G) = 572.19$, $V_\delta(A) = 487.81$ y $V_\delta(B) = 487.81$. Ahora se calcula $T_\delta(E)$, $T_\delta(G)$, $T_\delta(A)$ y $T_\delta(B)$. Puesto que NR es la única decisión posible en E,

$$T_\delta(E) = V_\delta(E) = 687.81$$

y $T_\delta(E)$ se obtiene por la decisión NR

$$T_\delta(G) = \max \begin{cases} -100 + .9(.7V_\delta(E) + .3V_\delta(G)) = 487.81 & (R) \\ 80 + .9(.7V_\delta(G) + .3V_\delta(A)) = V_\delta(G) = 572.19^* & (NR) \end{cases}$$

Así, $T_\delta(G) = 572.19$ se obtiene por la decisión NR

$$T_\delta(A) = \max \begin{cases} -100 + .9(.7V_\delta(E) + .3V_\delta(G)) = 487.81 & (R) \\ 50 + .9(.6V_\delta(A) + .4V_\delta(B)) = 489.03^* & (NR) \end{cases}$$

Por lo tanto, $T_\delta(A) = 489.03$ se obtiene por la decisión NR.

$$T_\delta(B) = \max \begin{cases} -100 + .9(.7V_\delta(E) + .3V_\delta(G)) = V_\delta(B) = 487.81^* & (R) \\ 10 + .9V_\delta(B) = 449.03 & (NR) \end{cases}$$

Entonces, $T_\delta(B) = V_\delta(B) = 487.81$. Se encontró que $T_\delta(E) = V_\delta(E)$, $T_\delta(G) = V_\delta(G)$, $T_\delta(B) = V_\delta(B)$ y $T_\delta(A) > V_\delta(A)$. Así, la política δ no es óptima, y la política δ' dada por $\delta'(E) = \delta'(G) = \delta'(A) = NR$, $\delta'(B) = R$, es una mejora sobre δ. Ahora volvemos al paso 1 y resolvemos las ecuaciones de determinación de valores para δ'. De la ecuación (15), las ecuaciones de determinación de valores para δ' son

$$\begin{aligned} V_{\delta'}(E) &= 100 + .9(.7V_{\delta'}(E) + .3V_{\delta'}(G)) \\ V_{\delta'}(G) &= 80 + .9(.7V_{\delta'}(G) + .3V_{\delta'}(A)) \\ V_{\delta'}(A) &= 50 + .9(.6V_{\delta'}(A) + .4V_{\delta'}(B)) \\ V_{\delta'}(B) &= -100 + .9(.7V_{\delta'}(E) + .3V_{\delta'}(G)) \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se obtiene $V_{\delta'}(E) = 690.23$, $V_{\delta'}(G) = 575.50$, $V_{\delta'}(A) = 492.35$ y $V_{\delta'}(B) = 490.23$. Observe que en cada estado i, $V_{\delta'}(i) > V_\delta(i)$. Ahora se aplica el procedimiento de iteración de políticas para δ'. Se calcula

$$T_{\delta'}(E) = V_{\delta'}(E) = 690.23$$

$$T_{\delta'}(G) = \max \begin{cases} -100 + .9(.7V_{\delta'}(E) + .3V_{\delta'}(G)) = 490.23 & (R) \\ 80 + .9(.7V_{\delta'}(G) + .3V_{\delta'}(A)) = V_{\delta'}(G) = 575.50^* & (NR) \end{cases}$$

Así, $T_{\delta'}(G) = V_{\delta'}(G) = 575.50$ se obtiene por NR.

$$T_{\delta'}(A) = \max \begin{cases} -100 + .9(.7V_{\delta'}(E) + .3V_{\delta'}(G)) = 490.23 & (R) \\ 50 + .9(.6V_{\delta'}(A) + .4V_{\delta'}(B)) = V_{\delta'}(A) = 492.35^* & (NR) \end{cases}$$

Por lo tanto, $T_{\delta'}(A) = V_{\delta'}(A) = 492.35$ se obtiene por NR.

$$T_{\delta'}(B) = \max \begin{cases} -100 + .9(.7V_{\delta'}(E) + .3V_{\delta'}(G)) = V_\delta(B) = 490.23^* & (R) \\ 10 + .9V_{\delta'}(B) = 451.21 & (NR) \end{cases}$$

Por consiguiente, $T_{\delta'}(B) = V_{\delta'}(B) = 490.23$ se obtiene por R.

Para cada estado i, $T_{\delta'}(i) = V_{\delta'}(i)$. Así, δ' es una política estacionaria óptima. Para maximizar las recompensas esperadas (ganancias), se debe remplazar una máquina mala, pero no una máquina excelente, buena o regular. Si empezamos el periodo 1 con una máquina excelente, se podría obtener un recompensa esperada descontada de \$690.23.

TABLA 9

Ventas del mes actual	Ventas del mes actual	
	Buenas	Malas
Buenas	.95	.05
Malas	.40	.60

TABLA 10

Ventas del mes actual	Ventas del mes actual	
	Buenas	Malas
Buenas	.80	.20
Malas	.20	.80

a Utilice el método de iteración de políticas para determinar una política estacionaria óptima.

b Utilice la programación lineal para determinar una política estacionaria óptima.

c Efectúe dos iteraciones de la iteración de valores.

d Encuentre una política óptima que maximiza la ganancia promedio por mes.

3 Suponga que está utilizando el método de iteración de políticas para determinar una política óptima para un MDP. ¿Cómo podría usar LINDO para resolver las ecuaciones de determinación de valores?

Grupo B

4 Durante cualquier día, yo podría tener 0 o 1 porción de una acción. El precio de la acción está regido por la cadena de Markov mostrada en la tabla 11. Al comienzo de un día en el que poseo una parte de la acción, yo podría venderla al precio de hoy o conservarla. Al comienzo del día en el que no tengo una parte de la acción, yo podría comprar una parte de la acción al precio de hoy o no comprar una porción. Mi objetivo es maximizar mi ganancia descontada esperada en un horizonte infinito (utilice $\beta = .95$).

TABLA 11

Precio de hoy	Precio de mañana			
	\$0	\$1	\$2	\$3
\$0	.5	.3	.1	.1
\$1	.1	.5	.2	.2
\$2	.2	.1	.5	.2
\$3	.1	.1	.3	.5

a Utilice un método de iteración de políticas para determinar una política estacionaria óptima.

b Use la programación lineal para determinar una política estacionaria óptima.

c Efectúe dos iteraciones de la iteración de valores.

d Encuentre una política que maximice la utilidad diaria promedio.

5 Ethan Sherwood tiene dos procesos de impresión sobre los cuales imprime dos tipos de trabajos. Al principio de cada día, existe una probabilidad de 0.5 de que llegue un trabajo tipo 1, una probabilidad de 0.1 de que llegue un trabajo tipo 2, y una probabilidad de 0.4 de que no llegue un trabajo. Ethan recibe 400 dólares por terminar un trabajo tipo 1 y 200 dólares por terminar un trabajo tipo 2. (Los pagos por cada trabajo se reciben por adelantado). Cada trabajo (1 o 2) requiere en promedio 3 días para ser terminado. Para modelar esto debe suponerse que cada día un trabajo que está en prensa tiene una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de que su impresión se termine al final del día. Si ambas prensas están ocupadas al inicio del día, cualquier trabajo que llegue se considera perdido por el sistema. La decisión final es (si acaso) cuándo Ethan debe aceptar el trabajo tipo 2 menos rentable. El objetivo de Ethan es maximizar la utilidad descontada esperada (usar $\beta = .90$).

a Aplique el método de iteración de políticas para determinar una política estacionaria óptima.

b Usar programación lineal para determinar una política estacionaria óptima.

c Desarrolle dos iteraciones de la iteración de valores.

d Encuentre una política que maximice la utilidad diaria promedio.

RESUMEN

Clave para formular problemas de programación dinámica probabilística (PDP)

Suponga que los estados posibles durante el periodo $t + 1$ son $s_1, s_2, \ldots s_n$ y la probabilidad de que el estado del periodo $t + 1$ sea s_i es p_i. Entonces el costo mínimo esperado en que se incurre durante los periodos $t + 1, t + 2, \ldots,$ fin del problema es

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i f_{t+1}(s_i)$$

donde $f_{t+1}(s_i)$ es el costo mínimo esperado en que se incurre del periodo $t + 1$ al final del problema, dado que el estado durante el periodo $t + 1$ es s_i.

Programación lineal

En un problema de maximización, $V(i)$ para cada estado se podría determinar resolviendo el siguiente PL:

$$\min z = V_1 + V_2 + \cdots + V_N$$

$$\text{s.a}\quad V_i - \beta \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d)V_j \geq r_{id} \qquad \text{(Para cada estado } i \text{ y cada } d \in D(i))$$

Todas las variable son nrs

Si la restricción para el estado i y la decisión d no tiene holgura, entonces la decisión d es óptima en el estado i.

Iteración de valores o aproximaciones sucesivas

Sea $V_t(i)$ la recompensa descontada esperada máxima que se puede obtener durante t periodos si el estado al comienzo del periodo actual es i. Entonces

$$V_t(i) = \max_{d \in D(i)} \left\{ r_{id} + \beta \sum_{j=1}^{j=N} p(j|i, d)V_{t-1}(j) \right\} \qquad (t \geq 1)$$

$$V_0(i) = 0$$

A medida que aumenta t, $V_t(i)$ tiende a $V(i)$. Para t suficientemente grande, la decisión que es óptima en el estado i para un problema de t periodos también es óptima en el estado i para un problema de horizontes infinitos.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 Una compañía tiene cinco representantes de ventas disponibles para asignar a tres distritos de ventas. Las ventas en cada distrito durante el año actual dependen del número de representantes de ventas asignados al distrito y de si la economía nacional tiene un buen o mal año (véase la tabla 12). En la columna Ventas para cada distrito, el primer número representa las ventas si la economía nacional tuvo un mal año, y el segundo número representa las ventas si la economía tuvo un buen año. Hay una probabilidad .3 de que la economía nacional tenga un buen año y una probabilidad de .7 de que la economía nacional tenga un mal año. Utilice la programación dinámica para determinar una asignación de representantes de ventas a los distritos que maximice las ventas esperadas de la compañía.

TABLA 12

No. de representantes de ventas asignados al distrito	Ventas (millones)		
	Distrito 1	Distrito 2	Distrito 3
0	\$1, \$4	\$2, \$5	\$3, \$4
1	\$2, \$6	\$4, \$6	\$5, \$5
2	\$3, \$7	\$5, \$6	\$6, \$7
3	\$4, \$8	\$6, \$6	\$7, \$7

2 Al comienzo de cada periodo, una compañía debe determinar cuántas unidades producir. Se incurre en un costo de preparación de 5 dólares durante cada periodo en el que tiene lugar la producción. La producción de cada unidad también incurre en un costo variable de 2 dólares. Toda la demanda se debe satisfacer a tiempo, y hay un costo de retención por unidad en el inventario final de cada periodo. Durante cada periodo, hay las mismas probabilidades de que la demanda sea igual a 0 o 1 unidad. Suponga que el inventario final de cada periodo no puede ser mayor de 2 unidades.

a Utilice la programación dinámica para minimizar los costos esperados en que se incurre durante tres periodos. Suponga que el inventario inicial es 0 unidades.

b Ahora suponga que cada unidad demandada se puede vender en 4 dólares. Si la demanda no se satisface a tiempo, se pierde la venta. Utilice la programación dinámica para maximizar la ganancia esperada obtenida durante tres periodos. Suponga que el inventario inicial es 0 unidades.

c En los incisos (a) y (b), ¿es una política óptima (s, S)?

3 En el restaurante Hot Dog Queen, ocurre la siguiente secuencia de sucesos durante cada minuto:

a Con probabilidad p, un cliente llega y espera en la fila.

b Hot Dog Queen determina la tasa s a la que se atiende a los clientes. Si hay algunos clientes en el restaurante, entonces con probabilidad s, uno de los clientes completa el servicio y sale del restaurante. Cuesta $c(s)$ dólares por periodo atender a los clientes a una tasa s. Cada cliente gasta R dólares y a Hot Dog Queen le cuesta $R - 1$ dólares preparar la comida del cliente.

c Por cada cliente en la fila al final del minuto, se estima un costo de h dólares (debido a la molestia del cliente).

d Comienza el siguiente minuto.

Formule una recursión que se pueda usar para maximizar los ingresos esperados menos los costos (entre otros los costos de incomodidad del cliente) en que se incurre durante los siguientes T minutos. Suponga que al inicio no hay clientes presentes.

4 Al comienzo del año 2004, Estados Unidos tiene B barriles de petróleo. Si durante un año se consumen x barriles de petróleo, entonces los consumidores obtienen un beneficio (medido en dólares) de $u(x)$. Estados Unidos podría gastar dinero en la exploración de petróleo. Si d dólares se gastan durante un año en exploración, entonces hay una probabilidad $p(d)$ de localizar un campo petrolero (que contiene 500 000 barriles de petróleo). Formule una recursión que se pueda usar para maximizar los beneficios descontados esperados menos los gastos de exploración obtenidos desde el comienzo de 2004 hasta fin del año 2539.

5 Soy un concursante del popular programa de TV "Tired of Fortune." Durante la ronda de bonificación, tendré que contestar hasta cuatro preguntas. Por cada pregunta contestada de manera correcta, gano una cierta cantidad de dinero. Sin embargo, una respuesta incorrecta significa que pierdo todo el dinero que gané antes, y el juego termina. Si elijo pasar, o no contestar una pregunta, el juego termina, pero podría conservar lo que ya he ganado. La cantidad de dinero que gano por cada pregunta correcta y la probabilidad de que conteste cada pregunta de manera correcta, se muestran en la tabla 13.

a Mi objetivo es maximizar la cantidad esperada de dinero ganado. Utilice la programación dinámica para lograr este objetivo.

b Suponga que se me permite pasar, o no contestar una pregunta, y todavía continuar con la siguiente pregunta. Ahora determine cómo maximizar la cantidad de dinero ganado.

6 Una máquina en condición excelente obtiene una ganancia de 100 dólares por semana, una máquina en buena condición obtiene 70 dólares por semana y una máquina en mala condición obtiene 20 dólares por semana. Al comienzo de cualquier semana, se podría enviar una máquina a reparación a un costo de 90 dólares. Una máquina enviada a reparación vuelve en condición excelente al comienzo de la siguiente semana. Si no se repara una máquina, la condición de la máquina evoluciona según la cadena de Markov mostrada en la tabla 14. La compañía quiere maximizar su ganancia descontada esperada en un horizonte infinito ($\beta = .9$).

TABLA 13

Pregunta	Probabilidad de contestar la pregunta	Dinero ganado
1	.6	\$10 000
2	.5	\$20 000
3	.4	\$30 000
4	.3	\$40 000

TABLA 14

	Siguiente semana		
Esta semana	Excelente	Buena	Mala
Excelente	.7	.2	.1
Buena	0	.7	.3
Mala	0	.1	.9

a Utilice la iteración de políticas para determinar una política estacionaria óptima.

b Utilice la programación lineal para determinar una política estacionaria óptima.

c Efectúe dos iteraciones de la iteración de valores.

7 Un país ahora tiene 10 unidades de capital. Cada año, podría consumir cierta cantidad de capital disponible e invertir el resto. El capital invertido tiene una probabilidad de 50% de duplicarse y una probabilidad de 50% de perder la mitad de su valor. Por ejemplo, si el país invierte 6 unidades de capital, hay 50% de probabilidades de que las 6 unidades se conviertan en 12 unidades de capital y 50% de probabilidades de que el capital invertido se convierta en 3 unidades. ¿Qué estrategia se debe usar para maximizar el consumo esperado total en un periodo de cuatro años?

8 Los Mavericks de Dallas llevan dos puntos de desventaja y tienen el balón con 10 segundos restantes. Ellos deben decidir si van por dos o tres puntos. Suponga que una vez que los Mavericks llevan a cabo la jugada, el tiempo se acaba. La probabilidad de que el disparo de dos puntos sea exitoso es DOS y la probabilidad de que tenga éxito el disparo de tres puntos es TRES. Si se empata el juego, se jugará un tiempo extra. Suponga que hay una probabilidad .5 de que los Mavericks ganen en el tiempo extra. (*Nota*: este problema suele utilizarse en entrevistas de trabajo de Microsoft).

a Dé una regla basada en los valores de DOS y TRES que le diga a Dallas qué hacer.

b Los valores comunes para un equipo de la NBA son DOS = .45 y TRES = .35. Con base en esta información, ¿qué estrategia deben seguir la mayoría de los equipos de la NBA?

9 En cualquier instante, el tamaño de un árbol es 0, 1, 2 o 3. Se debe decidir cuándo cosechar el árbol. Cada año, el costo de mantener un árbol es 1 dólar. El precio de las ventas para un árbol de cada tamaño es como sigue:

Tamaño del árbol	Precio de las ventas
0	\$20
1	\$30
2	\$45
3	\$49

La matriz de probabilidad de transición para el tamaño del árbol es como sigue:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} .8 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & .9 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & .7 & .3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por ejemplo, 80% de los árboles de tamaño 0 comienza el siguiente año como árboles de tamaño 0, y 20% de los árboles de tamaño 0 comienza el siguiente año como árboles de ta-

TABLA 1
Ejemplos de sistemas de colas

Situación	Proceso de llegada	Proceso de salida
Banco	Los clientes llegan al banco	Los cajeros atienden a los clientes
Pizzería	Se reciben los pedidos de pizzas	La pizzería envía al mensajero a entregar pizzas
Banco de sangre de un hospital	Llegada de sangre	Los pacientes utilizan la sangre
Astillero	Los barcos que estan navegando sufren descomposturas y se envían al astillero para su reparación	Los barcos son reparados y regresan al mar

lidad muy alta de una descompostura en el futuro cercano. Los modelos en los cuales las llegadas se toman de una pequeña población reciben el nombre de **modelos de origen finito**. Otra situación en la cual el proceso de llegadas depende de la cantidad de clientes presentes ocurre cuando la razón a la cual llegan los clientes a cierta instalación disminuye cuando ésta se llena. Por ejemplo, si usted ve que el estacionamiento del banco está lleno, se retira y va otro día. Si un cliente llega, pero no entra al sistema, se dice que el cliente **ha renunciado**. El fenómeno de la renuncia fue descrito por Yogi Berra cuando dijo: "Ya nadie va a ese restaurante; siempre está lleno."

Si el número de clientes presente no afecta al proceso de llegada, entonces se le describe a éste mediante la especificación de la distribución de probabilidad que rige el tiempo entre llegadas sucesivas.

Proceso de salida o de servicio

Para describir el proceso de salida (con frecuencia se le llama proceso de servicio) de un sistema de líneas de espera, se especifica una distribución de probabilidad –**distribución del tiempo de servicio**– la cual rige el tiempo de servicio a un cliente. Se supone que, en la mayoría de los casos, la distribución del tiempo de servicio es independiente de la cantidad de clientes presentes. De aquí se infiere que el servidor, o canal, no trabaja más rápido cuando hay más clientes presentes.

En este capítulo se tratan dos tipos de servidores: **servidores en paralelo** y **servidores en serie**. Los servidores están en paralelo si todos ofrecen el mismo tipo de servicio y un cliente sólo requiere pasar por un servidor para completar el servicio. Por ejemplo, los cajeros de un banco están en paralelo; cualquier cliente sólo necesita ser atendido por un cajero, y cualquier cajero puede proporcionar el servicio deseado. Los servidores están en serie cuando un cliente debe pasar por varios servidores antes de terminar el servicio. Una línea de ensamble es un ejemplo de un sistema de espera en serie.

Disciplina de las líneas de espera

Para describir por completo un sistema de líneas de espera, se debe describir también la disciplina de las líneas de espera y el modo en el cual los clientes forman las líneas de espera.

La **disciplina de las líneas de espera** explica el método usado para determinar el orden con el cual se atiende a los clientes. La disciplina más común es la **disciplina FCFS** (*first come, first served,* es decir, al primero que llega se le atiende primero), en la cual se atiende a los clientes según el orden en que llegan. En la **disciplina LCFS** (*last come, first served*, el último en llegar es el primero en salir), las llegadas más recientes son los primeros en entrar al servicio. Si se considera la salida de un elevador como un servicio, entonces un elevador lleno ilustra una disciplina LCFS. El orden en el cual los clientes llegan no afecta, algunas veces, el orden en el cual son atendidos. Éste sería el caso cuando el siguiente cliente en pasar al servidor es elegido en forma aleatoria de entre los clientes que están esperando atención. A esta situación se le denomina **disciplina SIRO** (*service in random order*, servicio en orden aleatorio). Cuando a una persona que llama a una aerolínea se le hace esperar, la suerte determina con frecuencia quién será la siguiente persona en ser atendida por un operador.

Se consideran, por último, las **disciplinas de prioridad en las colas**. Una disciplina de prioridad clasifica cada llegada en una categoría. Cada categoría recibe luego un nivel de prioridad, y dentro de cada nivel de prioridad, los clientes entran al servicio de acuerdo a FCFS. Las disciplinas de prioridad se usan a menudo en salas de urgencia con el objeto de determinar el orden en el cual los pacientes reciben atención, así como en las instalaciones de copiado y para compartir computadoras, donde la prioridad se da a trabajos con tiempos de proceso más cortos.

Método usado para que las llegadas se sumen a las colas

Otro factor de gran efecto en el comportamiento de los sistemas de las líneas de espera es el método que los clientes utilizan para determinar a qué cola sumarse. Por ejemplo, en algunos bancos, los clientes deben formar una sola cola, pero en otros bancos los clientes eligen la cola en la que desean formarse. Cuando hay varias colas, los clientes se forman en la más corta. En muchas situaciones, por ejemplo en el supermercado, es difícil definir cuál es la cola más corta. Si hay varias colas, es importante saber si se permite a los clientes cambiarse de cola o adelantarse en la cola. En la mayor parte de sistemas de líneas de espera con varias colas está permitido adelantarse en la cola, pero no se recomienda hacerlo en una caseta de cobro.

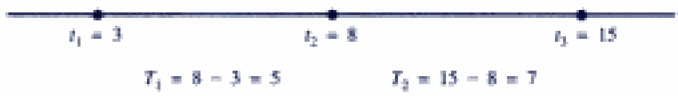
20.2 Modelado de procesos de llegada y servicio

Modelado de procesos de llegadas

Como ya se mencionó, suponemos que la mayor parte de las llegadas ocurre en un instante dado. Definamos t_i como el tiempo en el cual llega el i-ésimo cliente. Observe la figura 1 para ejemplificar lo anterior. Para $i \geq 1$, definimos $T_i = t_{i+1} - t_i$ como el i-ésimo tiempo entre llegadas. Por lo tanto, en la figura, $T_1 = 8 - 3 = 5$ y $T_2 = 15 - 8 = 7$. Al modelar el proceso de llegadas, suponemos que las T_i son variables continuas, aleatorias e independientes descritas por la variable aleatoria **A**. La suposición de independencia significa, por ejemplo, que el valor de T_2 no afecta al valor de T_3, T_4 o cualquier otra T_i superior. La suposición de que cada T_i es continua es, por lo regular, una buena aproximación de la realidad. Después de todo, un tiempo entre llegadas no necesita ser exactamente de uno o dos minutos; podría ser con toda facilidad 1.55892 minutos. La suposición de que cada tiempo entre llegadas está regido por la misma variable aleatoria, implica que la distribución de llegadas es independiente del momento del día o del día de la semana. Esta es la suposición de los tiempos estacionarios entre llegadas. Debido a fenómenos como las horas pico, esta última suposición es a menudo irreal, pero podríamos aproximarnos con frecuencia a la realidad descomponiendo la duración del día en segmentos. Por ejemplo, si estuviéramos modelando el flujo del tránsito, podríamos descomponer el día en tres partes: un segmento de horas pico por la mañana, un segmento a mediodía y otro por la noche. Durante cada uno de estos segmentos los tiempos entre llegadas podrían ser estacionarios.

Suponemos que **A** tiene una función de densidad $a(t)$. Según la sección 12.5, para Δt pequeñas, $P(t \leq \mathbf{A} \leq t + \Delta t)$ es de alrededor $\Delta t a(t)$. Naturalmente un tiempo entre llegadas negativo es imposible. Todo esto nos permite escribir:

FIGURA 1
Definición de tiempos entre llegadas



$$P(\mathbf{A} \le c) = \int_0^c a(t)dt \quad \text{y} \quad P(\mathbf{A} > c) = \int_c^\infty a(t)dt \tag{1}$$

Definimos $\frac{1}{\lambda}$ como el tiempo medio o promedio entre llegadas. Sin perder la generalidad, suponemos que el tiempo se mide en unidades de horas. Entonces, las unidades de $\frac{1}{\lambda}$ son horas por llegada. Según la sección 12.5, podríamos estimar $\frac{1}{\lambda}$ a partir de $a(t)$ mediante la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty ta(t)dt \tag{2}$$

Definimos λ como la **tasa de llegadas**, la cual tiene unidades de llegadas por hora.

En la mayor parte de las aplicaciones de líneas de espera, un aspecto importante es cómo escoger $\mathbf{A}$ de tal manera que refleje la realidad y siga siendo manejable desde el punto de vista del cálculo. La elección más común para $\mathbf{A}$ es la **distribución exponencial**. Una distribución exponencial con parámetro λ tiene una densidad $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. En la figura 2 se ilustra la función de densidad para una distribución exponencial. Se observa que $a(t)$ disminuye con rapidez para t pequeñas. Esto quiere decir que son improbables los tiempos entre llegadas muy grandes. Se puede demostrar, mediante la ecuación (2) y la integración por partes, que el tiempo medio o promedio entre llegadas (llámelo $E(\mathbf{A})$) está dado por

$$E(\mathbf{A}) = \frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

Debido al hecho de que var $\mathbf{A} = E(\mathbf{A}^2) - E(\mathbf{A})^2$, es posible demostrar que

$$\text{var } \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{4}$$

Propiedad de carencia de memoria de la distribución exponencial

La razón de que la distribución exponencial se use a menudo para modelar los tiempos entre llegadas se encuentra en el lema siguiente.

LEMA 1

Si $\mathbf{A}$ tiene una distribución exponencial, entonces para todos los valores no negativos de t y h,

$$P(\mathbf{A} > t + h | \mathbf{A} \ge t) = P(\mathbf{A} > h) \tag{5}$$

Demostración Observe primero que por la ecuación (1) se tiene

$$P(\mathbf{A} > h) = \int_h^\infty \lambda e^{-\lambda t} = [-e^{-\lambda t}]_h^\infty = e^{-\lambda h} \tag{6}$$

Entonces,

$$P(\mathbf{A} > t + h | \mathbf{A} \ge t) = \frac{P(\mathbf{A} > t + h \cap \mathbf{A} \ge t)}{P(\mathbf{A} \ge t)}$$

Según (6)

$$P(\mathbf{A} > t + h \cap \mathbf{A} \ge t) = e^{-\lambda(t+h)} \quad \text{y} \quad P(\mathbf{A} \ge t) = e^{-\lambda t}$$

Por lo tanto,

$$P(\mathbf{A} > t + h | \mathbf{A} \ge t) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(\mathbf{A} > h)$$

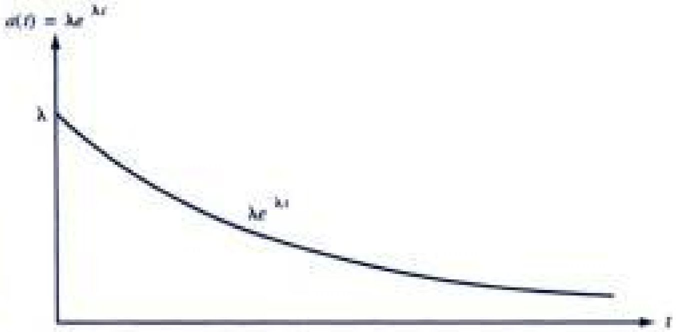


FIGURA 2
Función de densidad de la distribución exponencial

Puede demostrarse que ninguna otra función de densidad puede cumplir con (5) (ver Feller, 1957). Por razones que son naturales, una densidad que satisface (5) tiene la **propiedad de carencia de memoria**. Suponga que nos advierten que no ha habido llegada alguna en las últimas t horas (equivale a que nos digan que $\mathbf{A} \geq t$) y que nos preguntan cuál es la probabilidad de que no haya llegadas durante las siguientes h horas (es decir, $\mathbf{A} > t + h$). Entonces se infiere de (5) que esta probabilidad *no depende del valor de t*, y para todos los valores de t, esta probabilidad es igual a $P(\mathbf{A} > h)$. En resumen, si sabemos que han transcurrido por lo menos t unidades de tiempo desde que ocurrió la última llegada, entonces la distribución del tiempo restante hasta la siguiente llegada (h) no depende de t. Por ejemplo, si $h = 4$, entonces (5) genera, para $t = 5$, $t = 3$, $t = 2$ y $t = 0$,

$$P(\mathbf{A} > 9|\mathbf{A} \geq 5) = P(\mathbf{A} > 7|\mathbf{A} \geq 3) = P(\mathbf{A} > 6|\mathbf{A} \geq 2)$$
$$= P(\mathbf{A} > 4|\mathbf{A} \geq 0) = e^{-4\lambda}$$

La propiedad de carencia de memoria de la distribución exponencial es importante porque implica que si queremos conocer la distribución de probabilidad del tiempo hasta la llegada siguiente, entonces *no importa cuánto tiempo ha transcurrido desde la última llegada*. En términos concretos, suponga que los tiempos entre llegadas están distribuidos en forma exponencial con $\lambda = 6$. Entonces, se infiere de la propiedad de carencia de memoria que no importa cuánto tiempo transcurrió desde la última llegada, la distribución de probabilidad que rige el tiempo hasta la llegada siguiente tiene la función de densidad de $6e^{-6t}$. Esto significa que para poder predecir patrones de llegadas futuras no necesitamos rastrear cuánto ha pasado desde la última llegada. Esta observación puede simplificar notoriamente el análisis del sistema de líneas de espera.

Para saber qué tiempo pasó desde la última llegada sí afecta la distribución del tiempo hasta la llegada siguiente en la mayor parte de las situaciones, suponga que $\mathbf{A}$ es discreta con $P(\mathbf{A} = 5) = P(\mathbf{A} = 100) = \frac{1}{2}$. Si nos avisan que no ha habido llegadas durante las últimas seis unidades de tiempo, *sabemos con certeza* que hay $100 - 6 = 94$ unidades de tiempo hasta la siguiente llegada. En cambio, si sabemos que no ha habido llegadas durante la última unidad de tiempo, entonces hay alguna probabilidad de que el tiempo hasta la siguiente llegada sea $5 - 1 = 4$ unidades de tiempo y alguna probabilidad que será de $100 - 1 = 99$ unidades de tiempo. Por lo tanto, en esta situación, la distribución de tiempo siguiente entre llegadas no se puede predecir con facilidad cuando se sabe qué tiempo transcurrió desde la última llegada.

Relación entre la distribución Poisson y la distribución exponencial

Si los tiempos entre llegadas son exponenciales, la distribución de probabilidad de la cantidad de llegadas que suceden en cualquier intervalo de duración t está dada por el importante teorema siguiente:

TEOREMA 1

Los tiempos entre llegadas son exponenciales, con el parámetro λ, si y sólo si la cantidad de llegadas en un intervalo de duración t sigue una distribución Poisson con parámetro λt.

	A	B	C	D	E
3					
4	Poisson	Lambda			
5	P(X=40)	40	0.541918		
6					
7	P(X<=40)	40	0.062947		
8					
9	Exponencial				
10		Lambda			
11	P(X<=10)	0.1	0.632121		
12	Densidad para X = 10	0.1	0.036788		
13					
14					
15					
16					

FIGURA 3

- =POISSON(x,MEDIA,FALSO) =POISSON(x,MEAN,FALSE) en el programa en inglés] obtiene la probabilidad de que una variable aleatoria de Poisson con media = Media sea igual a x.

Por ejemplo, si un promedio de 40 clientes llega en una hora y las llegadas siguen una distribución Poisson, entonces la función =POISSON(40,40,VERDADERO) [(=POISSON(x,MEAN,TRUE) en el programa en inglés] da la probabilidad .542 de que 40 o menos clientes lleguen durante una hora. La función =POISSON(40,40,FALSE) da la probabilidad.063 de que *exactamente* 40 clientes llegan durante una hora.

La sintaxis de la función de Excel EXPONDIST es como se indica

- =DISTR.EXP(x,LAMBDA,VERDADERO) [=EXPONDIST(x,LAMBDA,TRUE) en el programa en inglés] da la probabilidad de que una variable aleatoria exponencial con parámetro λ asuma un valor menor que o igual a x.
- =DISTR.EXP(x,LAMBDA,FALSE) [=EXPONDIST(x,LAMBDA,FALSE) en el programa en inglés] da el valor de la función de densidad para una variable aleatoria exponencial con parámetro λ.

Por ejemplo, suponga que el tiempo promedio entre las llegadas siguen una distribución exponencial con media 10. Entonces $\lambda = 0.1$ y =DISTR.EXP(10,0.1,VERDADERO) = EXPONDIST(10,0.1,TRUE) da la probabilidad .632 de que el tiempo entre llegadas es 10 min o menos.

Poissexp.xls

La función =DISTR.EXP(10,0.1,FALSO) =EXPONDIST(10,0.1,FALSE) da el valor .037 de la función de densidad para $x = 10$ y $\lambda = 0.1$. Véase el archivo Poissexp.xls y la figura 3.

Por medio del ejemplo 1 se ilustra la relación entre las distribuciones exponencial y de Poisson.

EJEMPLO 1 Pedidos de cerveza

La cantidad de vasos de cerveza ordenada por hora en la cantina de Dick sigue una distribución Poisson, con un promedio de 30 cervezas pedidas por hora.

1 Estime la probabilidad de que se pidan exactamente 60 cervezas entre las 10 y 12 de la noche.

2 Encuentre la media y la desviación estándar de la cantidad de cervezas pedidas entre las 9 PM y la 1 AM.

3 Determine la probabilidad de que el tiempo entre dos pedidos consecutivos está entre 1 y 3 minutos.

Solución **1** La cantidad de cervezas pedida entre 10 y 12 de la noche, se apega a una distribución de Poisson con parámetro 2(30) = 60. Según la ecuación (7), la probabilidad de que se pidan 60 cervezas entre las 10 y las 12 de la noche es

$$\frac{e^{-60}60^{60}}{60!}$$

Otra manera de hallar la respuesta es con la función de Excel =POISSON(60,60,FALSO). Así se obtiene .051.

2 Resulta que $\lambda = 30$ cervezas por hora; $t = 4$ horas. Por lo tanto, la media de cervezas ordenada entre las 9 PM y la 1 AM es $4(30) = 120$ cervezas. La desviación estándar de la cantidad de cervezas ordenadas entre 10 PM y 1 AM es $(120)^{1/2} = 10.95$.

3 Sea **X** el tiempo (en minutos) entre los pedidos sucesivos de cerveza. El número promedio de pedidos por minuto es exponencial con parámetro o razón $\frac{30}{60} = 0.5$ cerveza por minuto. Por lo tanto, la función de densidad de la probabilidad del tiempo que transcurre entre pedidos de cervezas $0.5e^{-0.5t}$. Entonces

$$P(1 \le \mathbf{X} \le 3) = \int_1^3 (0.5e^{-0.5t})dt = e^{-0.5} - e^{-1.5} = .38$$

También se puede usar Excel para determinar la respuesta con la fórmula EXPONDIST(3,0.5TRUE−EXPONDIST(1,0.5TRUE)

=DISTR.EXP(3,0.5, VERDADERO)−DISTR.EXP(1,0.5, VERDADERO)

Con esto se obtiene una probabilidad de .383.

Distribución de Erlang

Si los tiempos entre llegadas no parecen ser exponenciales, entonces se modelan, con frecuencia, con la distribución Erlang. Una distribución Erlang es una variable aleatoria continua (llámela **T**) cuya función de densidad $f(t)$ se especifica mediante dos parámetros: un parámetro de proporcionalidad R y un parámetro de forma k (k debe ser un entero positivo). Dados los valores de R y k, la densidad Erlang tiene la función de densidad de probabilidad siguiente:

$$f(t) = \frac{R(Rt)^{k-1}e^{-Rt}}{(k-1)!} \qquad (t \ge 0) \tag{8}$$

Si se aplica la integración por partes, es posible demostrar que si **T** es una distribución Erlang con parámetro de proporcionalidad R y parámetro de forma k, entonces

$$E(\mathbf{T}) = \frac{k}{R} \qquad \text{y} \qquad \text{var } \mathbf{T} = \frac{k}{R^2} \tag{9}$$

Con el objeto de ver la manera en que al modificar el parámetro de forma cambia la forma de la distribución Erlang, considere, para un valor dado de λ, una familia de distribuciones Erlang con parámetro de proporcionalidad $k\lambda$ y parámetro de forma k. Según (9), cada una de estas Erlangs tiene una media de $\frac{1}{\lambda}$. A medida que k varía, la distribución Erlang adopta varias formas. Por ejemplo, en la figura 4 se puede ver que para un valor dado de λ, las funciones de densidad de las distribuciones Erlang tienen parámetros de forma 1, 2, 4, 6 y 20. Para $k = 1$, la densidad Erlang es similar a una distribución exponencial; de hecho, si se fija $k = 1$ en (8), se encuentra que para $k = 1$, la distribución Erlang es una distribución exponencial con parámetro R. A medida que k aumenta, la distribución Erlang se comporta cada vez más y más como una distribución normal. Para valores extremadamente grandes de k, la distribución Erlang se aproxima a una variable aleatoria con varianza cero (es decir, un tiempo constante entre llegadas). Por lo tanto, al variar k nos podríamos aproximar tanto a la distribución sesgada como a la simétrica.

Se puede demostrar que una distribución Erlang con parámetro de forma k y parámetro de proporcionalidad $k\lambda$ tiene la misma distribución que la variable aleatoria $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots + \mathbf{A}_k$, donde cada $\mathbf{A}_i$ es una variable aleatoria exponencial con parámetro $k\lambda$, y las $\mathbf{A}_i$ son variables aleatorias independientes.

Si modelamos los tiempos entre llegadas como una distribución Erlang con parámetro de forma k, lo que realmente decimos es que el proceso entre llegadas equivale a que un cliente pase por k fases (cada una de las cuales posee la propiedad de carencia de memo-

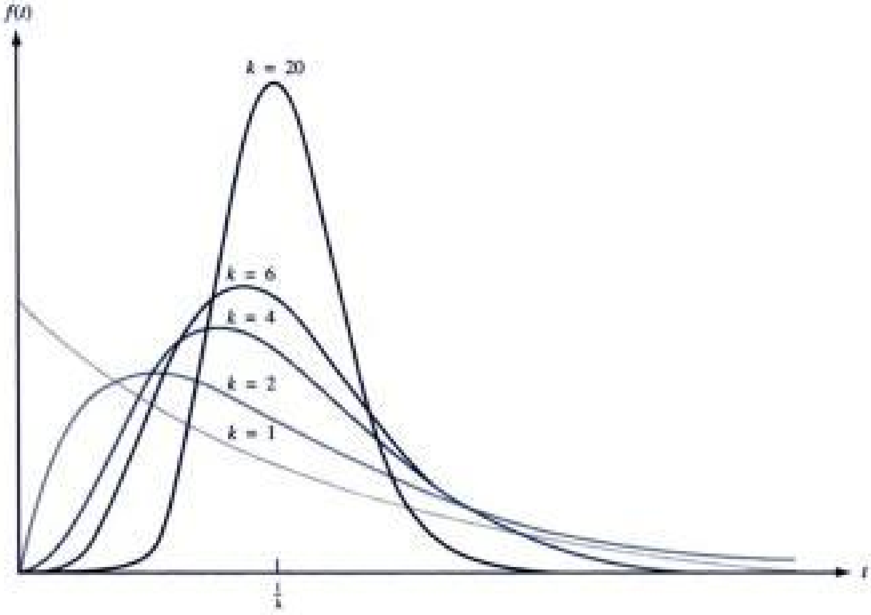


FIGURA 4
Funciones de densidad para las distribuciones Erlang

ria) antes de llegar. Por esta razón, el parámetro de forma se conoce con frecuencia como el *número de fases* de la distribución Erlang.

Modelado del proceso de servicio

Dirija su atención al modelado del proceso de servicio. Suponga que los tiempos de servicio de clientes distintos son variables aleatorias independientes, y que cada tiempo de servicio para cada uno de los clientes está regido por una variable aleatoria **S** cuya función de densidad es $s(t)$. Sea $\frac{1}{\mu}$ el tiempo de servicio medio de un cliente. Naturalmente,

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty ts(t)dt$$

Las unidades de la variable $\frac{1}{\mu}$ son horas por cliente, de modo que las unidades de μ son clientes por hora. Por esta razón, a μ se le llama tasa de servicio. Por ejemplo, $\mu = 5$ significa que si siempre hubiera clientes presentes, el servidor podría atender a un promedio de cinco clientes por hora, y el tiempo promedio de servicio a cada cliente sería $\frac{1}{5}$ hora. Al igual que en los tiempos entre llegadas, esperamos que sea posible modelar con precisión los tiempos de servicio como variables aleatorias exponenciales. Si es posible modelar el tiempo de servicio de un cliente como una variable aleatoria exponencial, entonces usted podrá determinar la distribución del tiempo de servicio restante de un cliente sin tener que rastrear cuánto tiempo estuvo en servicio el cliente. Observe también que si los tiempos de servicio siguen una densidad exponencial $s(t) = \mu e^{-\mu t}$, entonces el tiempo de servicio medio de un cliente será $\frac{1}{\mu}$.

Con el objeto de ejemplificar el modo como la suposición de los tiempos de servicio exponenciales simplifica los cálculos, considere un sistema de tres servidores en el cual cada tiempo de servicio del cliente está regido por una distribución exponencial $s(t) = \mu e^{-\mu t}$. Suponga que los tres servidores están ocupados, y que un cliente está esperando (véase figura 5). ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente que está esperando sea el último de los cuatro clientes para completar el servicio? Según la figura 5, es evidente que ocurrirá lo siguiente: Uno de los clientes 1 a 3 (digamos, el cliente 3) será el primero en completar el servicio. Luego el cliente 4 entrará al servicio. Por la propiedad de carencia de memoria, el tiempo de servicio del cliente 4 tiene la misma distribución que los tiempos de servicio restantes de los clientes 1 y 2. Por lo tanto, por simetría, los clientes 4, 1 y 2 tendrán la misma oportunidad de ser el último cliente en completar el servicio. Esto quiere decir que el cliente 4 tiene $\frac{1}{3}$ de probabilidad de ser el último en completar el ser-

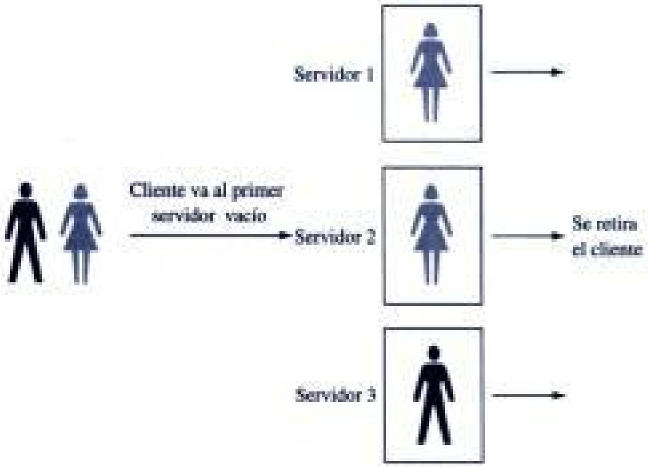


FIGURA 7
Sistema de una sola línea de espera con servidores paralelos

La primera característica especifica la naturaleza del proceso de llegada. Se utilizan las abreviaturas estándar siguientes:

M = Los tiempos entre llegadas son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) cuya distribución es exponencial.
D = Los tiempos entre llegadas son iid y deterministas.
E_k = Los tiempos entre llegadas son Erlangs iid con parámetro de forma k.
GI = Los tiempos entre llegadas son iid y están regidos por alguna distribución general.

La segunda característica especifica la naturaleza de los tiempos de servicio:

M = Los tiempos de servicio son iid y están distribuidos exponencialmente.
D = Los tiempos de servicio son iid y deterministas.
E_k = Los tiempos de servicio son Erlangs iid con parámetro de forma k.
G = Los tiempos de servicio son iid y están regidos por alguna distribución general.

La tercera característica es la cantidad de servidores en paralelo. La cuarta característica es la disciplina de las líneas de espera:

FCFS = El primero en llegar, primero en ser atendido
LCFS = El último en entrar, primero en salir
SIRO = Servicio en orden aleatorio
GD = Disciplina general de líneas de espera

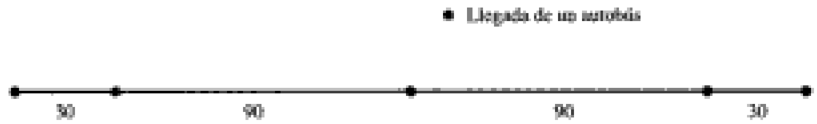
La quinta característica especifica el número máximo admisible de clientes en el sistema (incluidos los clientes que están esperando y los que están en servicio). La sexta característica da el tamaño de la población de donde se extraen los clientes. A menos que la cantidad de clientes potenciales sea del mismo orden de magnitud que el número de servidores, la población se considera infinita. En muchos modelos importantes 4/5/6 es $GD/\infty/\infty$. Si así sucede, entonces 4/5/6 se omite, a menudo.

Como ejemplo de esta notación, $M/E_2/8/\text{FCFS}/10/\infty$ podría representar una clínica con ocho médicos, tiempos entre llegadas exponenciales, tiempos de servicio de Erlang de dos fases, una disciplina de líneas de espera FCFS y una capacidad total de 10 pacientes.

Paradoja del tiempo de espera

Esta sección finaliza con un breve análisis de una paradoja interesante conocida como paradoja del tiempo de espera.

FIGURA 8
Paradoja del tiempo de espera



Suponga que el tiempo entre la llegada de autobuses al centro de estudiantes está distribuida en forma exponencial, con una media de 60 minutos. Si arribamos al centro de estudiantes en un instante elegido al azar, ¿cuál es el tiempo promedio que tendremos que esperar el autobús?

De la propiedad de carencia de memoria de la distribución exponencial, se infiere que no importa cuánto tiempo pasó desde que el último autobús llegó, esperaríamos un promedio de 60 minutos hasta que el siguiente autobús llegue. Esta respuesta es, en realidad, correcta, pero parece contradecirse con el razonamiento siguiente. En promedio, alguien que arriba en un tiempo aleatorio debe hacerlo a la mitad de un intervalo representativo entre llegadas de autobuses sucesivos. Si llegamos en el punto medio de un intervalo representativo, y el tiempo promedio entre autobuses es 60 minutos, entonces tendremos que esperar, en promedio $(\frac{1}{2})60 = 30$ minutos, a que llegue el autobús siguiente. ¿Por qué este razonamiento es incorrecto? Simplemente porque el intervalo representativo entre autobuses es más de 60 minutos. La razón de esta anomalía es que lo más probable es arribar a un intervalo más amplio que a uno más corto. Simplifiquemos la situación suponiendo que la mitad de todos los autobuses van separados 30 minutos, y que la mitad de todos los autobuses van 90 minutos separados. Uno podría pensar que como el tiempo promedio entre autobuses es 60 minutos, la espera promedio para que llegue un autobús sería $(\frac{1}{2})60 = 30$ minutos, pero esto es incorrecto. Examine una secuencia representativa de los tiempos entre llegadas del autobús (véase figura 8). La mitad de los tiempos entre llegadas son de 30 minutos, y la mitad son de 90 minutos. Evidentemente, hay $\frac{90}{30+90} = \frac{3}{4}$ de probabilidad de que un autobús llegará durante un tiempo entre llegadas de 90 minutos, y una probabilidad de $\frac{30}{30+90} = \frac{1}{4}$ de que llegue uno en un tiempo entre llegadas de 30 minutos. Por lo tanto, la dimensión promedio del tiempo entre llegadas en el cual un cliente llega es $(\frac{3}{4})(90) + (\frac{1}{4})(30) = 75$ minutos. Como llegamos, en promedio, a la mitad de un tiempo entre llegadas, la espera promedio es $(\frac{3}{4})(\frac{1}{2})90 + (\frac{1}{4})(\frac{1}{2})30 = 37.5$ minutos, la cual es mayor de 30 minutos.

Regresemos al caso donde los tiempos entre llegadas son exponenciales con media de 60 minutos, entonces el tamaño promedio de un tiempo entre llegadas representativo es de 120 minutos. Por lo tanto, el tiempo promedio que tendremos que esperar un autobús es $(\frac{1}{2})(120) = 60$ minutos. Observe que si los autobuses llegan *siempre* cada 60 minutos, entonces el tiempo promedio que una persona tendría que esperar un autobús sería $(\frac{1}{2})(60) = 30$ minutos. En general, se puede demostrar que si $\mathbf{A}$ es la variable aleatoria para el tiempo entre autobuses, entonces el tiempo promedio hasta el autobús siguiente (según se ve por una llegada que es igualmente probable que ocurra en cualquier momento) se obtiene con

$$\frac{1}{2}\left(E(\mathbf{A}) + \frac{\text{var } \mathbf{A}}{E(\mathbf{A})}\right)$$

Por lo que se refiere al ejemplo de los autobuses, $\lambda = \frac{1}{60}$, de modo que las ecuaciones (3) y (4) muestran que $E(\mathbf{A}) = 60$ minutos y var $\mathbf{A} = 3\,600$ minutos. Al sustituir en la fórmula se tiene,

$$\text{Tiempo de espera previsto} = \tfrac{1}{2}\left(60 + \tfrac{3\,600}{60}\right) = 60 \text{ min}$$

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que llego a un sistema de líneas de espera $M/M/7$/FCFS/8/∞ cuando todos los servidores están ocupados. ¿Cuál es la probabilidad de que complete el servicio antes de por lo menos uno de los siete clientes que están en servicio?

comportamiento transitorio del sistema se trata en la sección 20.16. Por ahora, al analizar el comportamiento de un sistema de líneas de espera, supondremos que el estado estable ya se alcanzó. De esta manera podemos trabajar con π_j y no con $P_{ij}(t)$.

Se trata enseguida una cierta clase de procesos estocásticos de tiempo continuo, denominados procesos de nacimiento-muerte, los cuales comprenden muchos sistemas interesantes de sistemas de líneas de espera. Por lo que se refiere a un proceso de nacimiento-muerte, es fácil determinar las probabilidades de estado estable (si acaso existen).

Un **proceso de nacimiento-muerte** es un proceso estocástico de tiempo continuo para el cual el estado del sistema, en cualquier momento, es un entero no negativo (véase una definición de proceso estocástico de tiempo continuo en la sección 17.1). Si un proceso de nacimiento-muerte está en el estado j en el tiempo t, entonces el movimiento del proceso se rige por las leyes siguientes.

Leyes de movimiento para los procesos de nacimiento-muerte

Ley 1 Un nacimiento ocurre entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$ con probabilidad $\lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$.[†] El estado del sistema incrementa en 1, hasta $j + 1$, con un nacimiento. La variable λ_j se denomina **tasa de nacimientos** en el estado j. En la mayor parte de los sistemas de líneas de espera un nacimiento es simplemente una llegada.

Ley 2 Una muerte ocurre entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$ con probabilidad $\mu_j \Delta t + o(\Delta t)$. El estado del sistema disminuye en 1, hasta $j - 1$, con una muerte. La variable μ_j se denomina **tasa de mortalidad** en el estado j. En la mayor parte de los sistemas de líneas de espera una muerte es la finalización de un servicio. Obsérvese que debe cumplirse $\mu_0 = 0$ o podría presentarse un estado negativo.

Ley 3 Los nacimientos y las muertes son independientes entre sí.

Las leyes 1 a 3 se pueden aplicar para demostrar que la probabilidad de que más de un evento suceda (nacimiento o muerte) entre t y $t + \Delta t$ es $o(\Delta t)$. Nótese que cualquier proceso de nacimiento-muerte está completamente especificado al conocerse las tasas de nacimiento λ_j y las tasas de mortalidad μ_j. Como no puede haber un estado negativo, cualquier proceso de nacimiento-muerte debe tener $\mu_0 = 0$.

Relación de la distribución exponencial con los procesos de nacimiento-muerte

La mayor parte de los sistemas de líneas de espera con tiempos entre llegadas exponenciales y tiempos de servicio exponenciales se podrían modelar como si fueran procesos de nacimiento-muerte. Para ejemplificar por qué es así, considere un sistema de colas $M/M/1/\text{FCFS}/\infty/\infty$, en el cual los tiempos entre llegadas son exponenciales con parámetro λ y los tiempos de servicio están distribuidos en forma exponencial y su parámetro es μ. Si el estado (cantidad de personas presentes) en el tiempo t es j, entonces de la propiedad de carencia de memoria de la distribución exponencial se infiere que la probabilidad de un nacimiento durante el tiempo $[t, t + \Delta t]$ no depende de cuánto tiempo ha permanecido el sistema en el estado j. Esto quiere decir que la probabilidad de que se presente un nacimiento durante $[t, t + \Delta t]$ no depende cuánto tiempo el sistema ha permanecido en el estado j y, por lo tanto, se podría determinar como si una llegada se hubiera producido justamente en el tiempo t. Entonces, la probabilidad de que un nacimiento ocurra durante $[t, t + \Delta t]$ es

$$\int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

Según la expansión de las series de Taylor dada en la sección 11.1,

$$e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

[†]Refiérase a la sección 20.2; ahí se establece que $o(\Delta t)$ significa que $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

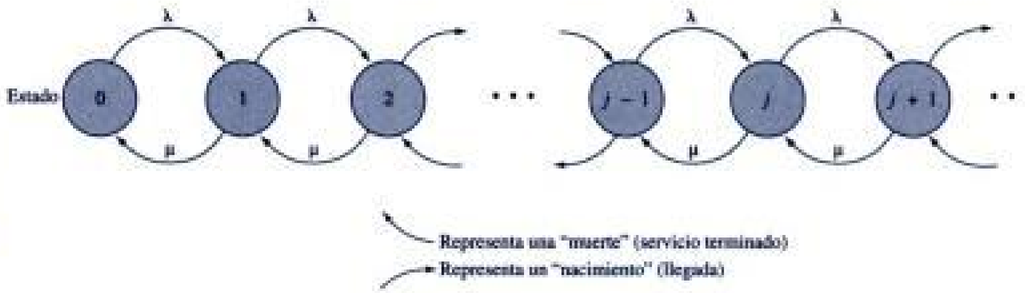


FIGURA 9
Diagrama de tasas para un sistema de colas $M/M/1/FCFS/\infty/\infty$

Esto quiere decir que la probabilidad de que se presente un nacimiento durante $[t, t + \Delta t]$ es $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. A partir de todo lo anterior podríamos concluir que la tasa de nacimiento en el estado j es simplemente la tasa de llegadas λ.

Con el fin de determinar la tasa de nacimientos en el tiempo t, obsérvese que si el estado es cero en el tiempo t, entonces nadie está en servicio, de modo que no puede haber finalización de ningún servicio entre el tiempo t y $t + \Delta t$. Por lo tanto, $\mu_0 = 0$. Si el estado en el tiempo t es $j \geq 1$, entonces sabemos que (puesto que hay sólo un servidor) exactamente un cliente estará en servicio. Por lo tanto, según la propiedad de carencia de memoria de la distribución exponencial, la probabilidad de que un cliente finalice el servicio entre t y $t + \Delta t$ es

$$\int_0^{\Delta t} \mu e^{-\mu t} dt = 1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

Por lo tanto, para $j \geq 1$, $\mu_j = \mu$. En resumen, si suponemos que las finalizaciones del servicio y las llegadas se presentan en forma independiente, entonces, el sistema de colas $M/M/1/FCFS/\infty/\infty$ es un proceso de nacimiento-muerte. Las tasas de nacimiento y de mortalidad para el sistema de colas $M/M/1/FCFS/\infty/\infty$ se podría representar mediante un diagrama de tasas como el de la figura 9.

Los sistemas de colas más complicados con tiempos entre llegadas exponenciales y tiempos de servicio exponenciales se podrían modelar como procesos de nacimiento-muerte si se añaden tasas de servicio para servidores ocupados y se suman tasas de llegada para corrientes de llegadas distintas. Por ejemplo, considere un sistema de colas $M/M/3/FCFS/\infty/\infty$ en el cual los tiempos entre llegadas son exponenciales con $\lambda = 4$ y los tiempos de servicio son exponenciales con $\mu = 5$. Para modelar este sistema como un proceso de nacimiento-muerte, podríamos usar los parámetros siguientes (véase figura 10):

$$\lambda_j = 4 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 5, \quad \mu_2 = 5 + 5 = 10, \quad \mu_j = 5 + 5 + 5 = 15 \qquad (j = 3, 4, 5, \ldots)$$

Si los tiempos entre llegadas o los tiempos de servicio no son exponenciales, entonces no es apropiado el modelo del proceso nacimiento-muerte.† Suponga, por ejemplo, que los tiempos de servicio no son exponenciales y que estamos considerando un sistema de colas $M/G/1/FCFS/\infty/\infty$. Como los tiempos de servicio para un sistema $M/G/1/FCFS/\infty/\infty$ podrían ser no exponenciales, la probabilidad de que ocurra una muerte (final del servicio) entre t y $t + \Delta t$ depende del tiempo desde que se completó el último servicio. Esto viola la ley 2, de modo que no podemos modelar un sistema $M/G/1/FCFS/\infty/\infty$ como un proceso de nacimiento-muerte.

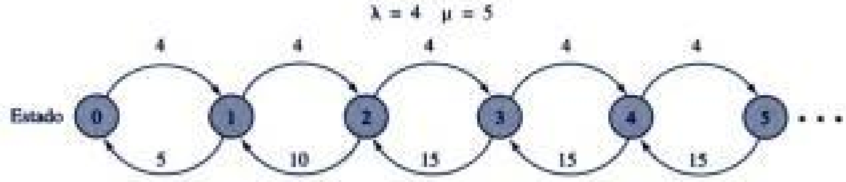


FIGURA 10
Diagrama de tasas para el sistema de colas $M/M/3/FCFS/\infty/\infty$

†Es posible desarrollar un modelo modificado de nacimiento-muerte si el tiempo de servicio y los tiempos entre llegadas son distribuciones Erlang.

Derivación de las probabilidades de estado estable para procesos de nacimiento-muerte

Ahora mostramos cómo las π_j se podrían determinar para un proceso arbitrario de nacimiento-muerte. La clave es relacionar (para Δt pequeñas) $P_{ij}(t + \Delta t)$ con $P_{ij}(t)$. La manera de hacerlo es observar que hay cuatro modos para el estado, en el tiempo $t + \Delta t$, sea j. Para $j \geq 1$, los cuatro modos se señalan en la tabla 3. Por lo que se refiere a $j \geq 1$, la probabilidad de que el estado del sistema sea $j - 1$ en el tiempo t y j en el tiempo $t + t$ es (véase figura 11)

$$P_{i,j-1}(t)(\lambda_{j-1}\Delta t + o(\Delta t))$$

Con argumentos similares se obtiene (II) y (III). Se infiere (IV) porque si el sistema está en un estado distinto a j, $j - 1$ o $j + 1$ en el tiempo t, entonces para concluir en el estado j en el tiempo $t + \Delta t$, más de un evento (nacimiento o muerte) debe ocurrir entre t y $t + \Delta t$. Por lo que toca a la ley 3, su probabilidad es $o(\Delta t)$. Por lo tanto,

$$P_{ij}(t + \Delta t) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) + (\mathrm{IV})$$

Después de reagrupar los términos de esta ecuación se tiene

$$\begin{aligned} P_{ij}(t + \Delta t) = P_{ij}(t) & \\ &+ \Delta t(\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - P_{ij}(t)\mu_j - P_{ij}(t)\lambda_j) \\ &+ \underline{o(\Delta t)(P_{i,j-1}(t) + P_{i,j+1}(t) + 1 - 2P_{ij}(t))} \end{aligned} \tag{10}$$

Puesto que el término subrayado se podría expresar como $o(\Delta t)$, se vuelve a escribir (10) como

$$P_{ij}(t + \Delta t) - P_{ij}(t) = \Delta t(\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - P_{ij}(t)\mu_j - P_{ij}(t)\lambda_j) + o(\Delta t)$$

Luego de dividir ambos miembros de esta ecuación entre Δt y de hacer que Δt se aproxime a cero se observa que para toda i y $j \geq 1$,

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{i,j+1}(t) - P_{ij}(t)\mu_j - P_{ij}(t)\lambda_j \tag{10'}$$

Ya que para $j = 0$, $P_{i,j-1}(t) = 0$ y $\mu_j = 0$, se tiene, para $j = 0$,

$$P'_{i,0}(t) = \mu_1 P_{i,1}(t) - \lambda_0 P_{i,0}(t)$$

Esto es un sistema infinito de ecuaciones diferenciales. (Una ecuación diferencial es simplemente una ecuación en la que aparece una derivada.) Desde el punto de vista teórico, estas ecuaciones se podrían resolver para $P_{ij}(t)$. Pero la realidad es que este sistema de ecuaciones es extremadamente difícil de resolver. No todo está perdido. Se puede usar (10′) para obtener las probabilidades de estado estable π_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$). Al igual que con las cadenas de Markov, la probabilidad de estado estable π_j se define como

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

Entonces, para t grande y cualquier estado inicial i, $P_{ij}(t)$ no cambia mucho y se podría considerar como una constante. Por lo tanto, en el estado estable (t grande), $P'_{ij}(t) = 0$.

TABLA 3
Cálculos de que la probabilidad que el estado en el tiempo $t + \Delta t$ sea j

Estado en el tiempo t	Estado en el tiempo $t + \Delta t$	Probabilidad de esta secuencia de eventos
$j - 1$	j	$P_{i,j-1}(t)\,(\lambda_{j-1}\Delta t + o(\Delta t)) = (\mathrm{I})$
$j + 1$	j	$P_{i,j+1}(t)\,(\mu_{j+1}\Delta t + o(\Delta t)) = (\mathrm{II})$
j	j	$P_{i,j}(t)\,(1 - \mu_j\,\Delta t - \lambda_j\Delta t - 2o(\Delta t)) = (\mathrm{III})$
Cualquier otro estado	j	$o(\Delta t) = (\mathrm{IV})$

TABLA 4

Relación entre el número de transiciones que entran y salen de un estado en el tiempo t

Estado inicial	Estado en el tiempo t	Número de transiciones que salen del estado 6 en el tiempo t
Caso 1: estado 6	Estado 6	3
Caso 2: estado 6	Cualquier estado excepto 6	4
Caso 3: cualquier estado excepto el estado 6	Estado 6	2
Caso 4: cualquier estado excepto el estado 6	Cualquier estado excepto 6	3

Para $j = 0$, sabemos que $\mu_0 = \pi_{-1} = 0$, de modo que también tenemos

$$\pi_1\mu_1 = \pi_0\lambda_0 \tag{14'}$$

Las ecuaciones (14) y (14′) se denominan **ecuaciones de balance de flujo** o **ecuaciones de conservación del flujo** para un proceso de nacimiento–muerte. Observe que (14) expresa el hecho de que, en el estado estable, la tasa a la cual se presentan las transiciones en cualquier estado i debe ser igual a la tasa a la cual ocurren las transiciones fuera del estado i. Si (14) no se cumple para todos los estados, entonces la probabilidad se "acumularía" en algún estado, y no existiría el estado estable.

Al escribir las ecuaciones para (14) y (14′) obtenemos las ecuaciones de balance de flujo siguientes para un proceso de nacimiento-muerte:

$$\begin{array}{ll}
(j = 0) & \pi_0\lambda_0 = \pi_1\mu_1 \\
(j = 1) & (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 \\
(j = 2) & (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 = \lambda_1\pi_1 + \mu_3\pi_3 \\
\vdots & \\
(j\text{-ésima ecuación}) & (\lambda_j + \mu_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}
\end{array} \tag{15}$$

Solución de las ecuaciones de balance de flujo en un proceso nacimiento-muerte

Para resolver (15), empezamos por expresar todas las π_j en términos de π_0. A partir de la ecuación ($j = 0$) obtenemos

$$\pi_1 = \frac{\pi_0\lambda_0}{\mu_1}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación ($j = 1$) tenemos

$$\lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)\pi_0\lambda_0}{\mu_1}$$

$$\mu_2\pi_2 = \frac{\pi_0(\lambda_0\lambda_1)}{\mu_1}$$

Por lo tanto,

$$\pi_2 = \frac{\pi_0(\lambda_0\lambda_1)}{\mu_1\mu_2}$$

Podríamos usar ahora la ecuación ($j = 3$) para encontrar π_3 en términos de π_0, y así sucesivamente. Si definimos

$$c_j = \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_j}$$

entonces es posible demostrar que

$$\pi_j = \pi_0 c_j \tag{16}$$

(Véase problema 1 al final de esta sección). Puesto que en cualquier tiempo dado debemos estar en algún estado, las probabilidades de estado estable deben sumarse a 1.

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} \pi_j = 1 \tag{17}$$

Al sustituir (16) en (17) se llega a

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{j=\infty} c_j\right) = 1 \tag{18}$$

Si $\sum_{j=1}^{j=\infty} c_j$ es finita, podemos aplicar (18) para determinar π_0:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{j=\infty} c_j} \tag{19}$$

Luego se usa (16) para encontrar $\pi_1, \pi_2, \ldots$. Es posible demostrar que si $\sum_{j=1}^{j=\infty} c_j$ es infinita, entonces, no existe distribución de estado estable. La razón más común para que no exista el estado estable es que la tasa de llegadas es por lo menos igual a la tasa máxima a la cual los clientes pueden ser atendidos.

Uso de una hoja de cálculo para estimar las probabilidades de estado estable

Mediante el ejemplo siguiente se ilustra el modo en que una hoja de cálculo se usa para determinar las probabilidades de estado estable en un proceso de nacimiento-muerte.

EJEMPLO 2 Indiana Bell

Los representantes del servicio a clientes de Indiana Bell reciben un promedio de 1 700 llamadas por hora. El tiempo entre éstas sigue una distribución exponencial. Un representante del servicio a clientes puede atender un promedio de 30 llamadas por hora. El tiempo necesario para atender una llamada también sigue una distribución exponencial. Indiana Bell puede tener esperando hasta 25 personas. Si 25 personas están en espera, se pierde una llamada para el sistema. Indiana Bell tiene 75 representantes del servicio.

1 ¿En qué fracción del tiempo están todos los operadores ocupados?

2 ¿Qué fracción de todas las llamadas pierde el sistema?

Bell.xls **Solución** En la figura 12 (archivo Bell.xls) se presenta una hoja de cálculo para determinar las probabilidades de estado estable para este proceso de nacimiento-muerte. Hagamos el estado i en cualquier tiempo igual al número de personas cuyas llamadas están siendo atendidas o que están en espera. Tenemos que para $i = 0, 1, 2, \ldots, 99$, $\lambda_i = 1\,700$. Del hecho de que se pierden las llamadas recibidas cuando $75 + 25 = 100$ llamadas están en el sistema se infiere que $\lambda_{100} = 0$. Entonces, no puede ocurrir ningún estado $i > 100$ (¿por qué?). Tenemos $u_0 = 0$ y para $i = 1, 2, \ldots, 75$, $\mu_i = 30i$. Para $i > 75$, $\mu_i = 30(75) = 2\,250$.

Para contestar las partes (1) y (2), necesitamos calcular las probabilidades de estado estable π_i = fracción del tiempo en que el estado es i. Escribimos los posibles estados del sistema (0−100) en las celdas A4:A104. Para hacerlo, escribimos 0 en la celda A4 y 1 en A5. Luego seleccionamos el intervalo A4:A5 y arrastramos el cursor hasta A6:A104. Se escribe la tasa de llegadas de 1 700 en B4, y lleve el curso hacia abajo a B5:B104 pa-

A	A	B	C	D	E	F
61	57	1700	1710	2.1E+23	0.0526351	
62	58	1700	1740	2.1E+23	0.0514251	
63	59	1700	1770	2.0E+23	0.0493913	
64	60	1700	1800	1.9E+23	0.0466473	
65	61	1700	1830	1.8E+23	0.0433336	
66	62	1700	1860	1.6E+23	0.039606	
67	63	1700	1890	1.5E+23	0.0356244	
68	64	1700	1920	1.3E+23	0.0315425	
69	65	1700	1950	1.1E+23	0.0274985	
70	66	1700	1980	9.6E+22	0.0236099	
71	67	1700	2010	8.1E+22	0.0199685	
72	68	1700	2040	6.8E+22	0.0166405	
73	69	1700	2070	5.6E+22	0.0136661	
74	70	1700	2100	4.5E+22	0.011063	
75	71	1700	2130	3.6E+22	0.0088296	
76	72	1700	2160	2.8E+22	0.0069492	
77	73	1700	2190	2.2E+22	0.0053944	
78	74	1700	2220	1.7E+22	0.0041306	
79	75	1700	2250	1.3E+22	0.0031211	
80	76	1700	2250	9.6E+21	0.0023581	
81	77	1700	2250	7.3E+21	0.0017817	
82	78	1700	2250	5.5E+21	0.0013462	
83	79	1700	2250	4.1E+21	0.0010171	
84	80	1700	2250	3.1E+21	0.0007685	
85	81	1700	2250	2.4E+21	0.0005806	
86	82	1700	2250	1.8E+21	0.0004387	
87	83	1700	2250	1.4E+21	0.0003315	
88	84	1700	2250	1.0E+21	0.0002504	
89	85	1700	2250	7.7E+20	0.0001892	
90	86	1700	2250	5.8E+20	0.000143	
91	87	1700	2250	4.4E+20	0.000108	
92	88	1700	2250	3.3E+20	0.0000816	
93	89	1700	2250	2.5E+20	0.0000617	
94	90	1700	2250	1.9E+20	0.0000466	
95	91	1700	2250	1.4E+20	0.0000352	
96	92	1700	2250	1.1E+20	0.0000266	
97	93	1700	2250	8.2E+19	0.0000201	
98	94	1700	2250	6.2E+19	0.0000152	
99	95	1700	2250	4.7E+19	0.0000115	
100	96	1700	2250	3.5E+19	0.0000087	
101	97	1700	2250	2.7E+19	0.0000065	
102	98	1700	2250	2.0E+19	0.0000049	
103	99	1700	2250	1.5E+19	0.0000037	
104	100	0	2250	1.2E+19	0.0000028	

FIGURA 12
(Continuación)

ra generar las tasas de llegadas para todos los estados. Para producir las tasas de servicio, escriba 0 en C4. Luego escriba 30 en C5 y 60 en la celda C6. Seleccione después el intervalo C5:C6, y arrastre el cursor hacia abajo hasta C79. De este modo se generan las tasas de servicio para los estados 0 a 75. Escriba 2 250 en C80, y arrastre ese resultado hacia abajo hasta C81:C104. Esta operación genera la tasa de servicio (2 250) para los estados 76 a 100. En el intervalo de la celda D4:D104 calculamos las c_j que se requieren para estimar las probabilidades de estado estable. Entonces, para empezar, escribimos 1 en D4. Como $c_1 = \lambda_0/\mu_1$, introducimos =B4/C5 en la celda D5. Luego, como $c_2 = c_1\lambda_1/\mu_2$, escribimos =D5*B5/C6 en D6. Al copiar desde D6 hasta D7:D104 generamos ahora las c_j que faltaban. En E4 calculamos π_0 mediante =SUM(D$4:D$104). En E5 determinamos π_1 al escribir =D5*E$4. Cuando copiamos desde el intervalo E5 hasta el intervalo E5:E104, generamos las probabilidades de estado estable que faltaban. Ahora ya podemos contestar a las preguntas (1) y (2).

Deducción de las probabilidades de estado estable

Es posible utilizar las ecuaciones (15) a (19) para encontrar π_j, la probabilidad de estado estable de que estén presentes j clientes. Cuando se sustituye (20) en (16) se obtiene

$$\pi_1 = \frac{\lambda\pi_0}{\mu}, \qquad \pi_2 = \frac{\lambda^2\pi_0}{\mu^2}, \qquad \ldots, \qquad \pi_j = \frac{\lambda^j\pi_0}{\mu^j} \tag{21}$$

Definamos $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Por razones que muy pronto serán evidentes, ρ es la **intensidad de tráfico** del sistema de líneas de espera. Al sustituir (21) en (17) tenemos

$$\pi_0(1 + \rho + \rho^2 + \cdots) = 1 \tag{22}$$

Ahora supongamos que $0 \leq \rho < 1$. Entonces evaluamos la suma $S = 1 + \rho + \rho^2 + \cdots$ como sigue: multiplicamos S por ρ, lo cual da $\rho S = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots$. Entonces $S - \rho S = 1$, y

$$S = \frac{1}{1 - \rho} \tag{23}$$

Si sustituimos (23) en (22) tenemos

$$\pi_0 = 1 - \rho \qquad (0 \leq \rho < 1) \tag{24}$$

Luego de sustituir (24) en (21) encontramos

$$\pi_j = \rho^j(1 - \rho) \qquad (0 \leq \rho < 1) \tag{25}$$

Ahora bien, si $\rho \geq 1$ la suma infinita en (22) se "amplifica" (intente $\rho = 1$, por ejemplo, y obtendrá $1 + 1 + 1 + \cdots$). Por consiguiente, si $\rho \geq 1$ no existe ninguna distribución de estado estable. Puesto que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, vemos que si $\lambda \geq \mu$ (es decir, la tasa de llegadas es por lo menos igual a la tasa de servicio), entonces no existe distribución de estado estable.

Si $\rho > 1$, es fácil ver por qué no existe distribución de estado estable. Suponga que $\lambda = 6$ clientes por hora y $\mu = 4$ clientes por hora. Incluso si el servidor estuviera trabajando todo el tiempo, sólo puede atender un promedio de cuatro personas por hora. Por lo tanto, la cantidad promedio de clientes en el sistema aumentaría por lo menos $6 - 4 = 2$ clientes por hora. Esto quiere decir que después de mucho tiempo, la cantidad de clientes presentes se "amplificaría", y ninguna distribución de estado estable podría haber. Si $\rho = 1$, la inexistencia de un estado estable no es tan obvia, pero este análisis sí indica que no existe estado estable.

Deducción de *L*

En lo que resta de esta sección supondremos que $\rho < 1$, lo cual asegura que sí existe una distribución de probabilidades de estado estable, como la de (25). Utilizamos ahora la distribución de probabilidades de estado estable de (25) para determinar varias cantidades que interesan. Por ejemplo, si suponemos que el estado estable ya se alcanzó, la cantidad de clientes promedio presente en el sistema de colas (llámelo L) se obtiene con

$$L = \sum_{j=0}^{j=\infty} j\pi_j = \sum_{j=0}^{j=\infty} j\rho^j(1 - \rho)$$

$$= (1 - \rho)\sum_{j=0}^{j=\infty} j\rho^j$$

Si definimos

$$S' = \sum_{j=0}^{j=\infty} j\rho^j = \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots$$

observamos que $\rho S' = \rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots$. Si hacemos una sustracción, obtenemos

$$S' - \rho S' = \rho + \rho^2 + \cdots = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Por lo tanto,

$$S' = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

y,

$$L = (1 - \rho)\frac{\rho}{(1 - \rho)^2} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{26}$$

Deducción de L_q

En algunas circunstancias, interesa conocer la cantidad esperada de personas en la cola. A esta cantidad la denotaremos con L_q. Observe que si están presentes 0 o 1 cliente en el sistema, entonces nadie está en la cola, pero si j personas están presentes ($j \geq 1$), habrá $j - 1$ en la línea de espera. Por lo tanto, si estamos en el estado estable,

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{j=1}^{j=\infty} (j - 1)\pi_j = \sum_{j=1}^{j=\infty} j\pi_j - \sum_{j=1}^{j=\infty} \pi_j \\ &= L - (1 - \pi_0) = L - \rho \end{aligned}$$

donde la última ecuación se infiere de (24). Como $L = \frac{\rho}{1-\rho}$, entonces

$$L_q = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \tag{27}$$

Deducción de L_s

También es importante L_s, la cantidad esperada de clientes en servicio. Para un sistema de colas $M/M/1/GD/\infty/\infty$,

$$L_s = 0\pi_0 + 1(\pi_1 + \pi_2 + \cdots) = 1 - \pi_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

Como cada cliente que está presente en la cola o en servicio, se deduce que para cualquier sistema de colas (no justamente un sistema $M/M/1/GD/\infty/\infty$), $L = L_s + L_q$. Por lo tanto, luego de aplicar las fórmulas para L y L_s, podríamos haber determinado L_q a partir de

$$L_q = L - L_s = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Fórmula de líneas de espera $L = \lambda W$

El interés se centra a menudo en el tiempo que un cliente representativo pasa en un sistema de líneas de espera. Definimos W como el tiempo previsto que un cliente pasa en el sistema de líneas de espera, que comprende el tiempo en la cola y el tiempo en servicio; y W_q como el tiempo previsto que un cliente pasa formado en la cola. Tanto W como W_q se calculan suponiendo que ya se alcanzó el estado estable. Mediante el uso de un resultado eficaz que se conoce como **fórmula de líneas de espera de Little**, W y W_q se podrían calcular con facilidad a partir de L y L_q. Primero definimos (para cualquier sistema de líneas de espera o cualquier subconjunto de un sistema de líneas de espera) las cantidades siguientes:

λ = número promedio de llegadas al sistema por unidad de tiempo

L = número promedio de clientes presentes en el sistema de colas

L_q = número promedio de clientes formados en la cola

L_s = número promedio de clientes en servicio

W = tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema

W_q = tiempo promedio que un cliente pasa en la cola

W_s = tiempo promedio que un cliente pasa en servicio

Todos los promedios son de estado estable en estas definiciones. En la mayor parte de los sistemas de líneas de espera, la fórmula de líneas de espera de Little se podría resumir como en el teorema 3.

TEOREMA 3

Para *cualquier* sistema de colas en el cual existe una distribución de estado estable, se cumplen las relaciones siguientes:

$$L = \lambda W \tag{28}$$

$$L_q = \lambda W_q \tag{29}$$

$$L_s = \lambda W_s \tag{30}$$

Antes de usar estos resultados importantes, presentamos una justificación intuitiva de (28). Primero observe que ambos miembros de (28) tienen las mismas unidades (suponemos que la unidad de tiempo es la hora). A esto se llega luego de ver que L se expresa en términos de cantidad de clientes, λ se expresa en clientes por hora y W está en horas. Por lo tanto, λW tiene las mismas unidades (clientes) que L. Si desea revisar una demostración rigurosa del teorema de Little, refiérase a Ross (1970). Nos damos por satisfechos con el análisis heurístico siguiente.

Considere un sistema de líneas de espera en el cual los clientes son atendidos de acuerdo a como van llegando. Una llegada arbitraria entra al sistema (suponga que ya se alcanzó el estado estable). Este cliente permanece en el sistema hasta que completa su servicio, y hasta su partida habrá (en promedio) L clientes presentes en el sistema. Pero cuando este cliente se va, ¿quién se quedará en el sistema? Sólo aquellos clientes que llegan durante el tiempo que el cliente inicial pasa en el sistema. Puesto que el cliente inicial pasa un promedio de W horas en el sistema, un promedio de λW clientes llegará durante la estancia del cliente en el sistema. Por lo tanto, $L = \lambda W$. La demostración "real" de $L = \lambda W$ es virtualmente independiente de la cantidad de servidores, de la distribución del tiempo entre llegadas, de la disciplina del servicio y de la distribución del tiempo de servicio. Por lo tanto, siempre que exista un estado estable podremos aplicar las ecuaciones (28) a (30) a cualquier sistema de líneas de espera.

Con el fin de ilustrar el uso de (28) y (29) determinemos W y W_q para un sistema de colas $M/M/1/GD/\infty/\infty$. De acuerdo con (26),

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Entonces, con (28) se tiene

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{31}$$

EJEMPLO 5 Centro de herramienta

Los mecánicos que trabajan en una planta troqueladora deben solicitar su herramienta en un centro de herramienta.[†] Un promedio de 10 mecánicos por hora llega pidiendo su equipo. Por el momento, un empleado atiende este centro; su salario es de 6 dólares por hora y tarda un promedio de 5 minutos en cumplir con cada pedido de herramienta solicitada. Como cada mecánico produce 10 dólares en valor de bienes por hora, cada hora que un mecánico tarda en el centro de herramienta cuesta a la compañía 10 dólares. La compañía está pensando si valdría la pena o no contratar (a 4 dólares la hora) un ayudante para el empleado. Si se contrata al ayudante, el empleado tardará un promedio de sólo 4 minutos en reunir el equipo que le solicita cada mecánico. Suponga que los tiempos de servicio y de llegadas son exponenciales. ¿Se debe contratar al ayudante?

Solución Los problemas en los que un analista debe elegir entre varios sistemas de colas reciben el nombre de **problemas de optimización de colas**. En el problema presente, el objetivo de la compañía es minimizar la suma del costo de servicio por hora y el costo esperado por hora debido a los tiempos muertos de los mecánicos. En los problemas de optimización de colas, el componente del costo debido a los clientes que esperan en la cola se denomina costo por demora. Por lo tanto, la compañía desea minimizar

$$\frac{\text{Costo esperado}}{\text{hora}} = \frac{\text{costo de servicio}}{\text{hora}} + \frac{\text{costo esperado de demora}}{\text{hora}}$$

El cálculo del costo de servicio por hora es, por lo regular, simple. La manera más fácil de calcular el costo por la demora por hora es observar que

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Hora}} = \left(\frac{\text{costo esperado por demora}}{\text{cliente}}\right)\left(\frac{\text{clientes esperados}}{\text{hora}}\right)$$

En el problema presente,

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Cliente}} = \left(\frac{\$10}{\text{hora-mecánico}}\right)\left(\begin{array}{l}\text{horas promedio que el}\\ \text{mecánico pasa en el sistema}\end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Cliente}} = 10W \quad \text{y} \quad \frac{\text{costo esperado por demora}}{\text{hora}} = 10W\lambda$$

Ya podemos comparar el costo esperado por hora si no se contrata al ayudante con el costo esperado por hora si se contrata al ayudante. Si no se contrata al ayudante, $\lambda = 10$ mecánicos por hora y $\mu = 12$ mecánicos por hora. De acuerdo con (31), $W = \frac{1}{12-10} = \frac{1}{2}$ hora. Como el empleado gana 6 dólares por hora, tenemos que

$$\frac{\text{Costo de servicio}}{\text{Hora}} = \$6 \quad \text{y} \quad \frac{\text{costo esperado por demora}}{\text{hora}} = 10(\tfrac{1}{2})10 = \$50$$

[†]Este ejemplo se basa en Brigham (1955).

Por lo tanto, sin el ayudante, el costo esperado por hora es 6 + 50 = 56 dólares. Con el ayudante, $\mu = 15$ clientes por hora. Entonces $W = \frac{1}{15-10} = \frac{1}{5}$ de hora y

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Hora}} = 10(\tfrac{1}{5})(10) = \$20$$

Como el costo de servicio por hora es ahora 6 + 4 = 10 dólares por hora, el costo esperado por hora con el ayudante es 20 + 10 = 30 dólares. Por lo tanto, se debe contratar al ayudante porque con él se ahorran 50 − 20 = 30 dólares por hora en costos por demora, que es más que el salario de 4 dólares por hora.

La fórmula para la cola $L = \lambda W$ es muy general y se puede aplicar en muchas situaciones que no parecen ser problemas de líneas de espera. Piense en cualquier situación donde una cantidad (tal como solicitudes de préstamos hipotecarios, papas en McDonald's, ingresos por ventas de computadoras) fluye por un sistema. Si hacemos

L = cantidad promedio de clientes presentes en el sistema de colas

λ = tasa de llegadas al sistema

W = tiempo promedio que una unidad de la cantidad pasa en el sistema

entonces, $L = \lambda W$, o bien, $W = L/\lambda$.

Siguen algunos ejemplos de $L = \lambda W$ en situaciones que no son líneas de espera.

EJEMPLO 6 Papas en McDonald's

Una sucursal de McDonald's usa un promedio de 10 000 libras de papas por semana. La cantidad promedio de libras de papas disponibles es 5 000. ¿En cuánto tiempo estarán, en promedio, las papas en el restaurante antes de que las utilicen?

Solución Sabemos que L = 5 000 libras y λ = 10 000 libras/semana. Por lo tanto, W = 5 000 libras/(10 000 libras/semana) = .5 semana.

EJEMPLO 7 Cuentas por cobrar

Una tienda que comercializa computadoras vende un valor de 300 000 dólares de computadoras por año. Las cuentas por cobrar son, en promedio, 45 000 dólares. ¿Cuánto tiempo toma desde el momento en que un cliente es facturado hasta que la tienda recibe el pago?

Solución Tenemos que L = 45 000 dólares y λ = 300 000 dólares/año. Por lo tanto, W = 45 000 dólares/(300 000 dólares/año) = .15 año.

Hoja de cálculo para el sistema de colas $M/M/1/GD/\infty/\infty$

MM1.xls

En la figura 13 (archivo MM1.xls) se muestra una plantilla que es posible usar para determinar cantidades importantes del sistema de líneas de espera $M/M/1/GD/\infty/\infty$. Escriba simplemente λ en la celda A4 y μ en la celda B4. L, L_q, L_s, W, W_q y W_s se calculan en los renglones 6 y 8. La columna B da las probabilidades de estado estable (calculadas a partir de (24) y (25)). Estamos suponiendo que λ y μ son tales que es muy pequeña la probabilidad de que más de 1 000 clientes estén presentes. En la figura 13 se han introducido los valores de λ y μ para el ejemplo 3.

A	A	B	C
41	31	0.0000012	
42	32	0.0000008	
43	33	0.0000005	
44	34	0.0000003	
45	35	0.0000002	
46	36	0.0000002	
47	37	0.0000001	
48	38	6.8E-08	
49	39	4.5E-08	
50	40	3.0E-08	
51	41	2.0E-08	
52	42	1.3E-08	
53	43	8.9E-09	
54	44	6.0E-09	
55	45	4.0E-09	
56	46	2.6E-09	
57	47	1.8E-09	
58	48	1.2E-09	
59	49	7.8E-10	
60	50	5.2E-10	
61	51	3.5E-10	
62	52	2.3E-10	
63	53	1.5E-10	
64	54	1.0E-10	
65	55	6.9E-11	
66	56	4.6E-11	
67	57	3.1E-11	
68	58	2.0E-11	
69	59	1.4E-11	
70	60	9.1E-12	
71	61	6.0E-12	
72	62	4.0E-12	
73	63	2.7E-12	
74	64	1.8E-12	
75	65	1.2E-12	
76	66	8.0E-13	
77	67	5.3E-13	
78	68	3.5E-13	
79	69	2.4E-13	
80	70	1.6E-13	

FIGURA 13
(Continuación)

PROBLEMAS

Grupo A

1[†] Todos los pasajeros y su equipaje tienen que ser revisados para investigar si no llevan armas. Suponga que 10 pasajeros por minuto, en promedio, llegan al aeropuerto de Gotham City (los tiempos entre llegadas son exponenciales). Para investigar si los pasajeros llevan armas, el aeropuerto debe contar con un punto de revisión que consta de un detector de metales y un aparato de rayos X. Se requieren dos empleados siempre que el punto de revisión está en operación. Un punto de revisión puede verificar un promedio de 12 pasajeros por minuto (el tiempo para revisar a los pasajeros es exponencial). Si se supone que el aeropuerto tiene sólo un punto de revisión, conteste las preguntas siguientes:

a ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero tenga que esperar antes de ser revisado en busca de armas?

b ¿Cuántos pasajeros, en promedio, hacen fila para pasar al punto de revisión?

[†]Basado en Gilliam (1979).

20.6 Sistema de colas $M/M/s/GD/\infty/\infty$

Consideremos ahora el sistema $M/M/s/GD/\infty/\infty$. Suponemos que los tiempos entre llegadas son exponenciales (con tasa λ), los tiempos de servicio son exponenciales (con tasa μ) y que hay sólo una cola de clientes que esperan ser atendidos en uno de los servidores en paralelo. Si están presentes $j \leq s$ clientes, entonces los j clientes están en servicio; si $j > s$ clientes están presentes, entonces los s servidores están ocupados, y $j - s$ clientes están haciendo cola. Cualquier cliente que llegue y encuentre un servidor desocupado entra al servicio de inmediato, pero un cliente que llegue y no encuentre un servidor desocupado se une a la cola de clientes que esperan servicio. Los bancos y las oficinas de correos en los cuales todos los clientes hacen una sola cola en espera del servicio se pueden modelar como sistemas de líneas de espera $M/M/s/GD/\infty/\infty$.

Para describir el sistema $M/M/s/GD/\infty/\infty$ como un modelo de nacimiento-muerte, obsérvese que (como en el modelo $M/M/1/GD/\infty/\infty$ $\lambda_j = \lambda$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$). Si j servidores están ocupados, entonces los servicios terminan a una tasa de

$$\underbrace{\mu + \mu + \cdots}_{j\mu} = j\mu$$

Siempre que j clientes estén presentes, min (j, s) servidores estarán ocupados. Por lo tanto, $\mu_j = \min(j, s)\mu$. En resumen, encontramos que el sistema $M/M/s/GD/\infty/\infty$ se puede modelar como un proceso de nacimiento-muerte (véase figura 16) con parámetros

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \lambda && (j = 0, 1, \ldots) \\ \mu_j &= j\mu && (j = 0, 1, \ldots, s) \\ \mu_j &= s\mu && (j = s + 1, s + 2, \ldots) \end{aligned} \tag{38}$$

definimos $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$. For $\rho < 1$, al sustituir (38) en (16) a (19) se obtienen las siguientes probabilidades de estado estable:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{i=(s-1)} \frac{(s\rho)^i}{i!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}} \tag{39}$$

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{j!} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s) \tag{39.1}$$

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{s! s^{j-s}} \qquad (j = s, s + 1, s + 2, \ldots) \tag{39.2}$$

Si $\rho \geq 1$, no existe estado estable. En otras palabras, si la tasa de llegadas es por lo menos de la misma magnitud que la tasa de servicio máxima posible ($\lambda \geq s\mu$), el sistema se "amplifica".

De acuerdo con (39.2), se puede demostrar que la probabilidad de estado estable de que todos los servidores estén ocupados está dada por

$$P(j \geq s) = \frac{(s\rho)^s \pi_0}{s!(1-\rho)} \tag{40}$$

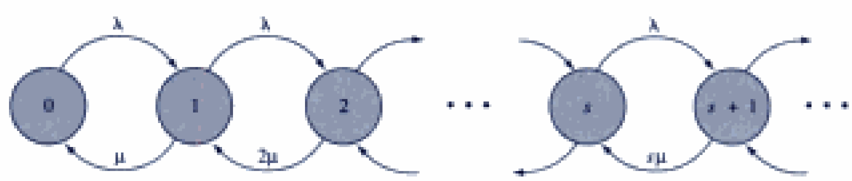


FIGURA 16
Diagrama de tasas para el sistema de colas $M/M/s/GD/\infty/\infty$

TABLA 6

$P(j \geq s)$ para el sistema de colas $M/M/s/GD/\infty/\infty$

ρ	$s = 2$	$s = 3$	$s = 4$	$s = 5$	$s = 6$	$s = 7$
.10	.02	.00	.00	.00	.00	.00
.20	.07	.02	.00	.00	.00	.00
.30	.14	.07	.04	.02	.01	.00
.40	.23	.14	.09	.06	.04	.03
.50	.33	.24	.17	.13	.10	.08
.55	.39	.29	.23	.18	.14	.11
.60	.45	.35	.29	.24	.20	.17
.65	.51	.42	.35	.30	.26	.21
.70	.57	.51	.43	.38	.34	.30
.75	.64	.57	.51	.46	.42	.39
.80	.71	.65	.60	.55	.52	.49
.85	.78	.73	.69	.65	.62	.60
.90	.85	.83	.79	.76	.74	.72
.95	.92	.91	.89	.88	.87	.85

En la tabla 6 se calcula $P(j \geq s)$ para diversas situaciones. También se puede demostrar que

$$L_q = \frac{P(j \geq s)\rho}{1 - \rho} \tag{41}$$

Entonces, con (28) se obtiene

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda} \tag{42}$$

Para determinar L (y luego W), se aplica el hecho de que $L = L_q + L_s$. Puesto que $W_s = \frac{1}{\mu}$, la ecuación (30) muestra que $L_s = \frac{\lambda}{\mu}$. Entonces,

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \tag{43}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda} \\ &= \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \\ &= W_q + \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu} \end{aligned} \tag{44}$$

Cuando necesitamos determinar L, L_q, W o W_q, empezamos por buscar $P(j \geq s)$ en la tabla 6. Luego usamos (41) a (44) para estimar la cantidad que deseamos. Si nos interesa la distribución de probabilidad de estado estable, encontramos $P(j \geq s)$ en la tabla 6 y, luego, aplicamos (40) para determinar π_0. Después, mediante (39.1) y (39.2) se obtiene la distribución completa de estado estable. Los dos ejemplos siguientes ilustran la aplicación de las fórmulas anteriores.

Puesto que cada cajero recibe $\frac{9}{60} = 15$ centavos por minuto,

$$\frac{\text{Costo esperado del servicio}}{\text{Minuto}} = 0.15s$$

Al igual que en el ejemplo 4,

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Minuto}} = \left(\frac{\text{clientes esperados}}{\text{minuto}}\right)\left(\frac{\text{costo esperado por demora}}{\text{cliente}}\right)$$

Pero

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Cliente}} = 0.05W_q$$

Como llega un promedio de dos clientes por minuto,

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Minuto}} = 2(0.05W_q) = 0.10W_q$$

Para $s = 5$, $\rho = \frac{2}{.5(5)} = .80$ y $P(j \geq 5) = .55$. De (42),

$$W_q = \frac{.55}{5(.5) - 2} = 1.1 \text{ minutos}$$

por lo tanto, para $s = 5$,

$$\frac{\text{Costo esperado por demora}}{\text{Minuto}} = 0.10(1.1) = 11¢$$

y para $s = 5$,

$$\frac{\text{Costo total esperado}}{\text{Minuto}} = 0.15(5) + 0.11 = 86¢$$

Como $s = 6$ tiene un costo de servicio por minuto de $6(0.15) = 90$ centavos, 6 cajeros no pueden tener un costo total inferior a 5 cajeros. Por lo tanto, lo óptimo es tener 5 cajeros en servicio. En otras palabras, si se pone otro cajero el banco puede ahorrar cuando mucho 11 centavos por minuto en costos por demora. Como otro cajero cuesta 15 centavos por minuto, no puede ser óptimo contratar más de 5 cajeros.

Además del tiempo previsto del cliente en el sistema, la distribución del tiempo de espera del cliente es importante. Por ejemplo, si todos los clientes que tienen que esperar más de 5 minutos en una caja del supermercado, deciden cambiarse a otra tienda, la probabilidad de que un cliente dado se cambie a otra tienda es igual a $P(\mathbf{W} > 5)$. Para determinar esta probabilidad, necesitamos conocer la distribución del tiempo de espera de un cliente. Para un sistema de colas $M/M/s/FCFS/\infty/\infty$, se puede demostrar que

$$P(\mathbf{W} > t) = e^{-\mu t}\left\{1 + P(j \geq s)\,\frac{1 - \exp[-\mu t(s - 1 - s\rho)]}{s - 1 - s\rho}\right\}^{\dagger} \tag{45}$$

$$P(\mathbf{W}_q > t) = P(j \geq s)\exp[-s\mu(1 - \rho)t] \tag{46}$$

Para ilustrar el uso de las ecuaciones (45) y (46), refiérase al ejemplo 7. Suponga que (para $s = 5$) el gerente del banco quiere saber la probabilidad de que un cliente tenga que esperar en la fila más de 10 minutos. Para $s = 5$, $\rho = .80$, $P(j \geq 5) = .55$ y $\mu = 0.5$ cliente por minuto, la ecuación (46) proporciona

$$P(\mathbf{W}_q > 10) = .55\exp[-5(0.5)(1 - .80)(10)] = .55\,e^{-5} = .004$$

†Si $s - 1 = s\rho$, entonces $P(\mathbf{W} > t) = e^{-\mu t}(1 + P(j \geq s)\mu t)$.

	J	K
2		
3		
4	Servidores	0.86082251
5	5	0.86082251
6	6	0.92847608
7	7	1.05900734
8	8	1.2029522

FIGURA 18

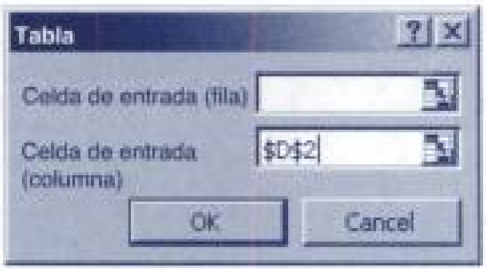


FIGURA 19

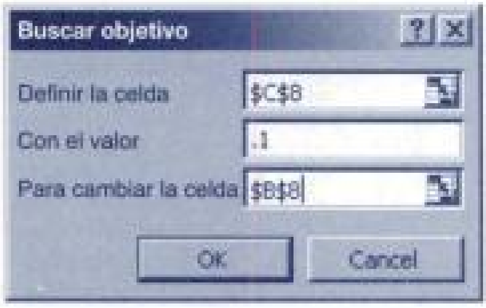


FIGURA 20

	A	B	C
7	P(Wq>t)	t?	P(W>t)
8	0.019390014	6.70521931	0.10000006

FIGURA 21

Aplicación de LINGO para los cálculos de *M/M/s/GD/∞/∞*

La función **@PEB**( ) de LINGO obtiene la probabilidad de que todos los servidores estén ocupados ($P(j \geq s)$) para un sistema $M/M/s/GD/\infty/\infty$. La función **@PEB** tiene dos argumentos: el primero es el valor de λ/μ, y el segundo es el número de servidores. Por lo tanto, en el ejemplo 9, **@PEB**(80/50,2) = .711111 da $P(j \geq 2)$.

Es posible usar la función **@PEB** para resolver problemas de optimización de líneas de espera con LINGO. Por ejemplo, para determinar el número que minimiza el costo de los servidores en el ejemplo 10 introduciríamos el problema siguiente en LINGO:

```
MODEL:
1) MIN=.10*@PEB(4,S)/(.5*S-2) + .15*S;
2) S>5;
END
```

En el renglón 1 .10*@PEB(4,S)/(.5*S−2) es el costo esperado por minuto debido a la espera de los clientes, en tanto que .15*S es el costo de servicio por minuto. Se infiere el renglón 2, porque necesitamos por lo menos cinco servidores para que exista un estado estable. LINGO da por resultado $S = 5$ con un valor de la función objetivo de .860823 (éste es el costo esperado por minuto).

requiere un promedio de 2 minutos atender a un cliente. Suponga que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales, y que todos los clientes hacen una sola fila, esperando al primer agente disponible.

a Si queremos que el tiempo promedio que un cliente pasa en la cola y en el servicio sea de 30 minutos o menos, ¿cuántos empleados deben estar disponibles?

b Si queremos que 95% de todos los clientes esperen 45 minutos o menos, ¿cuántos empleados debe haber disponibles?

Grupo B

12 Un promedio de 100 clientes llega por hora al banco de Gotham City. Un cajero tarda un promedio de 2 minutos en atender a un cliente. Los tiempos de servicio y entre llegadas son exponenciales. En la actualidad, cuatro cajeros trabajan en el banco. El gerente del banco desea comparar los dos sitemas siguientes respecto al número promedio de clientes presentes en el banco y la probabilidad de que un cliente pase más de 8 minutos en el banco:

Sistema 1 Cada cajero tiene su propia cola, y no se permite cambiarse de cola.

Sistema 2 Todos los clientes se forman en una sola cola y esperan al primer cajero disponible.

Si usted fuera el gerente del banco, ¿qué sistema preferiría?

13 Un taller de instalación de mofles tiene tres mecánicos. Cada mecánico tarda un promedio de 45 minutos en instalar un nuevo mofle. Suponga que llega un promedio de un cliente por hora. ¿Cuál es el número esperado de mecánicos que están ocupados en cualquier momento dado? Dé respuesta a la pregunta sin suponer que los tiempos de servicio y los tiempos entre llegadas son exponenciales.

14 Considere los dos sistemas siguientes de líneas de espera:

Sistema 1 Un sistema $M/M/1$ con tasa de llegadas λ y tasa de servicio 3μ.

Sistema 2 Un sistema $M/M/3$ con tasa de llegadas λ y en el que cada servidor trabaja a una tasa μ.

Sin hacer cálculos extensos, ¿cuál sistema tendrá la W y L más pequeñas? (*Sugerencia*: exprese los parámetros de nacimiento-muerte de cada sistema. Luego determine cuál es más efectivo).

15 (Requiere usar una hoja de cálculo de LINGO.) La planta Carco ubicada en Bedford fabrica limpiadores para parabrisas para automóviles Ford. En un día específico, cada máquina de la planta es capaz de producir 1 000 limpiadores. La planta trabaja 250 días al año, y Ford necesita 3 millones de limpiadores al año. Cuesta 50 000 dólares por año operar una máquina. Por cada día que un limpiador es retrasado se genera un costo de 100 dólares (debido a un periodo de paralización en la producción de otras plantas). ¿Cuántas máquinas debe tener la planta de Ford? Suponga que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales.

20.7 Modelos $M/G/\infty/GD/\infty/\infty$ y $GI/G/\infty/GD/\infty/\infty$

Hay muchos ejemplos de sistemas en los cuales un cliente nunca tiene que esperar para que comience el servicio. En dichos sistemas, se podría pensar que la permanencia completa del cliente en el sistema es el tiempo de servicio. Como un cliente nunca tiene que esperar el servicio, hay, en esencia, un servidor disponible para cada llegada, y podríamos pensar que éste es un sistema **con servidores infinitos** (o atiéndase usted mismo). Dos ejemplos de un sistema con servidores infinitos se presentan en la tabla 7.

Un sistema con servidores infinitos, en el cual los tiempos entre llegadas y de servicio pueden apegarse a una distribución arbitraria de probabilidad, se podrían expresar como sistemas de colas $GI/G/\infty/GD/\infty/\infty$, aplicando la notación de Kendall-Lee. Dicho sistema opera como sigue:

1 Los tiempos entre llegadas son iid con distribución común **A**. Definimos $E(\mathbf{A}) = \frac{1}{\lambda}$. Por lo tanto, λ es la tasa de llegadas.

2 Cuando un cliente llega, entra inmediatamente al servicio. El tiempo de cada cliente en el sistema está regido por una distribución **S** que tiene $E(\mathbf{S}) = \frac{1}{\mu}$.

TABLA 7
Ejemplos de sistemas de líneas de espera con servidores infinitos

Situación	Llegadas	Tiempo de servicio (tiempo en el sistema)	Estado del sistema
Industria	La compañía entra a la industria	Tiempo hasta que la firma deja a la industria	Número de compañías en la industria
Programas universitarios	Los estudiantes entran a un programa	Tiempo en que el estudiante permanece en el programa	Número de estudiantes en el programa

Sea L el número esperado de clientes en el sistema en el estado estable, y W el tiempo previsto que un cliente pasa en el sistema. Por definición, $W = \frac{1}{\mu}$. Entonces, de la ecuación (30) se infiere que

$$L = \frac{\lambda}{\mu} \tag{47}$$

La ecuación (47) no requiere ninguna suposición de exponencialidad. Si los tiempos entre llegadas son exponenciales, se puede demostrar que (incluso para una distribución de tiempo de servicio arbitraria) la probabilidad de estado estable de que j clientes estén presentes (llámela π_j) sigue una distribución Poisson con media $\frac{\lambda}{\mu}$. De donde se infiere que

$$\pi_j = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^j e^{-\lambda/\mu}}{j!}$$

El ejemplo siguiente ilustra la aplicación característica de un sistema $GI/G/\infty/GD/\infty/\infty$.

EJEMPLO 11 Helados en Smalltown

Durante cada año, un promedio de tres heladerías o fuentes de soda abre sus puertas en Smalltown. El promedio de tiempo en que una fuente de sodas permanece en el negocio es 10 años. ¿Cuál es el número promedio de heladerías que se encontraría en Smalltown el primero de enero de 2525? Si el tiempo entre la apertura de las heladerías es exponencial, ¿cuál es la probabilidad de que el primero de enero de 2525 haya 25 heladerías en Smalltown?

Solución Sabemos que $\lambda = 3$ tiendas por año y que $\frac{1}{\mu} = 10$ años por heladería. Si suponemos que el estado estable ya se alcanzó, habrá un promedio de $L = \lambda(\frac{1}{\mu}) = 3(10) = 30$ heladerías en Smalltown. Si los tiempos entre llegadas de las heladerías son exponenciales, entonces,

$$\pi_{25} = \frac{(30)^{25}e^{-30}}{25!} = .05$$

Naturalmente, también podríamos calcular la probabilidad de que haya 25 heladerías con la fórmula de Excel

=POISSON(30,25,0)

Esta fórmula da .045.

PROBLEMAS

Grupo A

1 El club Columbus Record atrae cada semana 100 nuevos miembros. Los miembros permanecen activos durante un promedio de un año (1 año = 52 semanas). En promedio, ¿cuántos miembros tendrá el club de discos?

2 El programa para obtener el grado de doctor de la universidad estatal en el área de negocios, admite un promedio de 25 estudiantes de doctorado cada año. Si un estudiante de doctorado pasa un promedio de cuatro años como residente en la universidad, ¿cuántos estudiantes de doctorado esperaría uno encontrar ahí?

3 Hay en la actualidad 40 empresas en el estado de Indiana, que construyen casas en las que se utiliza la energía solar. Un promedio de 20 empresas de este tipo abre sus puertas cada año en ese estado. La compañía promedio permanece en el negocio durante 10 años. Si la tendencia actual continúa, ¿cuál es la cantidad esperada de compañías de este tipo que se encontrará en Indiana? Si el tiempo entre la entrada de las compañías a la industria se distribuye en forma exponencial, ¿cuál es la probabilidad de que (en el estado estable) haya más de 300 compañías relacionadas con la energía solar en el negocio? (*Sugerencia*: para una λ grande, la distribución Poisson se puede aproximar mediante una distribución normal).

20.8 Sistema de líneas de espera $M/G/1/GD/\infty/\infty$

En esta sección se estudia un sistema de líneas de espera con un solo servidor en el que los tiempos entre llegadas son exponenciales, pero la distribución de los tiempos de servicio (**S**) no requiere ser exponencial. Sea λ la tasa de llegadas (se supone que se mide en llegadas por hora). También definamos $\frac{1}{\mu} = E(\mathbf{S})$ y $\sigma^2 = \text{var } \mathbf{S}$.

De acuerdo con la notación de Kendall, un sistema de líneas de espera de ese tipo se representa como un sistema de colas $M/G/1/GD/\infty/\infty$. Un sistema $M/G/1/GD/\infty/\infty$ *no* es un proceso de nacimiento-muerte porque la probabilidad de que se complete el servicio entre t y $t + \Delta t$ cuando el estado del sistema en el tiempo t es j depende del tiempo que ha transcurrido desde que se completó la última servicio (porque los tiempos de servicio ya no tienen la propiedad de carencia de memoria). Por lo tanto, no podemos expresar la probabilidad de que se complete un servicio entre t y $t + \Delta t$ en la forma $\mu\Delta t$, por lo que un modelo de nacimiento-muerte no es apropiado.

La determinación de las probabilidades de estado estable para un sistema de líneas de espera $M/G/1/GD/\infty/\infty$ es una cuestión difícil. Como ya no son válidas las ecuaciones de estado estable para el proceso de nacimiento-muerte, se debe emplear un método distinto. Se usa la teoría de las cadenas de Markov para determinar π_i', la probabilidad de que después que el sistema ha operado por largo tiempo, i clientes estarán presentes en el instante inmediatamente después que se complete un servicio (véase problema 5 al final de esta sección). Se puede demostrar que $\pi_i' = \pi_i$, donde π_i es la fracción de tiempo después que el sistema ha operado por mucho tiempo en que i clientes están presentes (véase Kleinrock (1975)).

Por fortuna, si utilizamos los resultados de Pollaczek y Khinchin, podemos determinar L_q, L, L_s, W_q, W y W_s . Pollaczek y Khinchin demostraron que para un sistema de colas $M/G/1/GD/\infty/\infty$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)} \tag{48}$$

donde $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Como $W_s = \frac{1}{\mu}$, de (30) se infiere que $L_s = \lambda(\frac{1}{\mu}) = \rho$. Como $L = L_s + L_q$, obtenemos

$$L = L_q + \rho \tag{49}$$

De (29) y (28) se infiere que

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{50}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{51}$$

Se puede demostrar, asimismo, que π_0, la fracción del tiempo que el servidor está desocupado, es $1 - \rho$. (Véase problema 2 al final de esta sección.) Este resultado es similar al del sistema $M/M/1/GD/\infty/\infty$.

Con el fin de ilustrar el uso de (48) a (51), imagine un sistema $M/M/1/GD/\infty/\infty$ con $\lambda = 5$ clientes por hora y $\mu = 8$ clientes por hora. De acuerdo con lo que sabemos de $M/M/1/GD/\infty/\infty$,

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5}{8 - 5} = \frac{5}{3} \text{ clientes}$$

$$L_q = L - \rho = \frac{5}{3} - \frac{5}{8} = \frac{25}{24} \text{ clientes}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3} \text{ hora}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{25}{24}}{5} = \frac{5}{24} \text{ hora}$$

Según (3) y (4), sabemos que $E(\mathbf{S}) = \frac{1}{8}$ hora y var $\mathbf{S} = \frac{1}{64}$ hora^2. Entonces, con (48) se obtiene

$$L_q = \frac{\frac{(5)^2}{64} + \left(\frac{5}{8}\right)^2}{2\left(1 - \frac{5}{8}\right)} = \frac{25}{24} \text{ clientes}$$

$$L = L_q + \rho = \frac{25}{24} + \frac{5}{8} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3} \text{ clientes}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{25}{24}}{5} = \frac{5}{24} \text{ hora}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3} \text{ hora}$$

Para demostrar cómo la varianza del tiempo de servicio puede afectar de manera importante la efectividad de un sistema de colas, considere un sistema de colas $M/D/1/GD/\infty/\infty$ cuyas λ y μ son idénticas a las del sistema $M/M/1/GD/\infty/\infty$ que apenas tratamos. Por lo que toca a este modelo $M/D/1/GD/\infty/\infty$, $E(\mathbf{S}) = \frac{1}{8}$ hora y var $\mathbf{S} = 0$. Entonces,

$$L_q = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)^2}{2\left(1 - \frac{5}{8}\right)} = \frac{25}{48} \text{ clientes}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{25}{48}}{5} = \frac{5}{48} \text{ hora}$$

En este sistema $M/D/1/GD/\infty/\infty$, un cliente representativo pasará sólo la mitad del tiempo en la cola como en un sistema de colas $M/M/1/GD/\infty/\infty$ con tasas de llegada y de servicio idénticas. Como lo señala este ejemplo, aún cuando los tiempos medios de servicio no disminuyan, al disminuir la variabilidad de los tiempos de servicio, se reduce de manera sustancial la dimensión de la cola y el tiempo de espera del cliente.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un promedio de 20 automóviles por hora llega a la ventanilla de "servicio en su auto" de un restaurante de bocadillos. Si el tiempo de servicio para cada automóvil es de 2 minutos, ¿cuántos automóviles (en promedio) estarán formados en la cola? Suponga tiempos entre llegadas exponenciales.

2 Aplique el hecho de que $L_s = \frac{\lambda}{\mu}$ para demostrar que, para un sistema de colas $M/G/1/GD/\infty/\infty$, la probabilidad de que el servidor está ocupado es $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

3 Un promedio de 40 automóviles por hora llega a un taller de pintura de un solo servidor GM para ser pintado. El 95% de los automóviles requiere un minuto para que lo pinte; el 5% se pinta dos veces y el trabajo requiere 2.5 minutos. Suponga que los tiempos entre llegadas son exponenciales.

a ¿Cuánto tiempo espera, en promedio, un automóvil antes de que lo pinten?

b Si los automóviles nunca tuvieran que ser repintados, ¿qué tanto se modificaría la respuesta del inciso (a)?

Grupo B

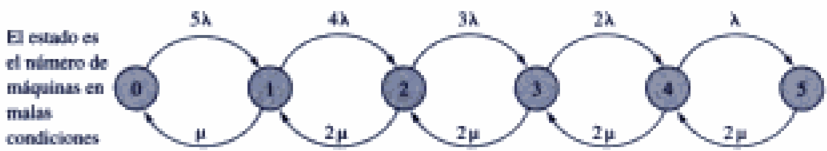
4 Considere un sistema de colas $M/G/1/GD/\infty/\infty$ en el cual se presenta un promedio de 10 llegadas cada hora. Suponga que cada tiempo de servicio al cliente sigue la distribución Erlang, con parámetro de proporcionalidad de un cliente por minuto y parámetro de forma de cuatro.

a Encuentre el número previsto de clientes que esperan en la cola.

TABLA 8
Estados posibles en el problema de reparación de máquinas cuando $K = 5$ y $R = 2$

Estado	Número de máquinas buenas	Cola de reparación	Número de reparadores ocupados
0	$G\,G\,G\,G\,G$		0
1	$G\,G\,G\,G$		1
2	$G\,G\,G$		2
3	$G\,G$	B	2
4	G	$B\,B$	2
5		$B\,B\,B$	2

FIGURA 22
Diagrama de tasas para un sistema de líneas de espera $M/M/R/GD/K/K$ cuando $R = 2$, $K = 5$



quina descompuesta). Para determinar los parámetros de nacimiento-muerte para el modelo de reparación de máquinas (véase figura 22), observe que un nacimiento corresponde a una descompostura de una máquina, y una muerte corresponde a una máquina que apenas fue reparada. Para deducir la tasa de nacimientos en el estado j, debemos determinar la tasa a la cual las máquinas se descomponen cuando el estado del sistema es j. Cuando el sistema es j, hay $K - j$ máquinas en buenas condiciones. Como cada máquina se descompone a una tasa λ, la tasa total a la cual se presentan las descomposturas cuando el estado es j es

$$\lambda_j = \underbrace{\lambda + \lambda + \cdots + \lambda}_{(K-j)\lambda\text{'s}} = (K - j)\lambda$$

Para determinar la tasa de muertes para el modelo de reparación de máquinas, procedemos como lo hicimos en el análisis del modelo $M/M/s/GD/\infty/\infty$. Cuando el estado es j, min (j, R) reparadores estarán ocupados. Puesto que cada reparador ocupado termina la compostura a una tasa μ, la tasa de muertes μ_j está dada por

$$\mu_j = j\mu \qquad (j = 0, 1, \ldots, R)$$
$$\mu_j = R\mu \qquad (j = R + 1, R + 2, \ldots, K)$$

Si definimos $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, al aplicar (16) a (18) se obtiene la distribución de probabilidades de estado estable siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_j &= \binom{K}{j}\rho^j\pi_0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, R) \\ &= \frac{\binom{K}{j}\rho^j j!\,\pi_0}{R!R^{j-R}} \qquad (j = R + 1, R + 2, \ldots, K) \end{aligned} \tag{52}$$

En (52)

$$\binom{K}{j} = \frac{K!}{j!(K - j)!}$$

donde $0! = 1$, y para $n \geq 1$, $n! = n(n-1)\cdots(2)(1)$. Para aplicar (52), empezamos por determinar π_0 a partir del hecho de que $\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_k = 1$. Al utilizar las probabilidades de estado estable en (52) ya es posible estimar las cantidades siguientes que interesan:

L = Cantidad esperada de máquinas descompuestas.

L_q = Cantidad esperada de máquinas que esperan servicio.

W = Tiempo promedio que una máquina pasa descompuesta (tiempo de paralización).

W_q = Tiempo promedio que una máquina pasa esperando servicio.

No hay, infortunadamente, fórmulas sencillas para L, L_q, W y W_q. Lo mejor que podemos hacer es expresar estas cantidades en términos de las π_j:

$$L = \sum_{j=0}^{j=K} j\pi_j \tag{53}$$

$$L_q = \sum_{j=R}^{j=K} (j - R)\pi_j \tag{54}$$

Enseguida utilizamos (28) y (29) para encontrar W y W_q. Como la tasa de llegadas depende del estado, la cantidad promedio de llegadas por unidad de tiempo se determina mediante $\bar{\lambda}$, donde

$$\bar{\lambda} = \sum_{j=0}^{j=K} \pi_j\lambda_j = \sum_{j=0}^{j=K} \lambda(K-j)\pi_j = \lambda(K - L) \tag{55}$$

Si aplicamos (28) a las máquinas que están en reparación y a aquéllas que están esperando reparación, tenemos

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} \tag{56}$$

Al aplicar (29) a las máquinas que esperan reparación, obtenemos

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \tag{57}$$

Con el siguiente ejemplo se ilustra el uso de las fórmulas.

EJEMPLO 12 Patrullas

El Departamento de Policía de Gotham City tiene cinco patrullas. Una patrulla se descompone, y requiere servicio una vez cada 30 días. El departamento tiene dos mecánicos, cada uno de los cuales requiere tres días para reparar una patrulla. Los tiempos de descompostura y los tiempos de reparación son exponenciales.

1 Determine el número promedio de patrullas en buenas condiciones.

2 Encuentre el tiempo promedio de paralización para una patrulla que necesita reparación.

3 Estime la fracción de tiempo en que un mecánico en particular está desocupado.

Solución Es un problema de reparación de máquinas con $K = 5$, $R = 2$, $\lambda = \frac{1}{30}$ patrulla por día y $\mu = \frac{1}{3}$ de patrullas por día. Entonces,

$$\rho = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{10}$$

Según (52)

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \binom{5}{1}\left(\frac{1}{10}\right)\pi_0 = .5\pi_0 \\
\pi_2 &= \binom{5}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\pi_0 = .1\pi_0 \\
\pi_3 &= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3\frac{3!}{2!2}\pi_0 = .015\pi_0 \\
\pi_4 &= \binom{5}{4}\left(\frac{1}{10}\right)^4\frac{4!}{2!(2)^2}\pi_0 = .0015\pi_0 \\
\pi_5 &= \binom{5}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^5\frac{5!}{2!(2)^3}\pi_0 = .000075\pi_0
\end{aligned} \tag{58}$$

Entonces $\pi_0(1 + .5 + .1 + .015 + .0015 + .000075) = 1$, o $\pi_0 = .619$. Ahora con (58) se tiene $\pi_1 = .310$, $\pi_2 = .062$, $\pi_3 = .009$, $\pi_4 = .001$ y $\pi_5 = 0$.

1 El número esperado de patrullas en buenas condiciones es $K - L$, que se obtiene mediante

$$K - \sum_{j=0}^{j=5} j\pi_j = 5 - [0(.619) + 1(.310) + 2(.062) + 3(.009) + 4(.001) + 5(0)]$$
$$= 5 - .465 = 4.535 \text{ patrullas en buenas condiciones}$$

2 Determinamos $W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$. De acuerdo con (55),

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda} &= \sum_{j=0}^{j=5} \lambda(5 - j)\pi_j = \frac{1}{30}(5\pi_0 + 4\pi_1 + 3\pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4 + 0\pi_5) \\
&= \frac{1}{30}[5(.619) + 4(.310) + 3(.062) + 2(.009) + 1(.001) + 0(0)] \\
&= 0.151 \text{ patrullas por dia}
\end{aligned}$$

o bien,

$$\bar{\lambda} = \lambda(K - L) = \frac{4.535}{30} = 0.151 \text{ patrullas por día}$$

Como $L = 0.465$ patrulla, entonces $W = \frac{0.465}{.0151} = 3.08$ días.

3 La fracción de tiempo en que un mecánico esta desocupado es $\pi_0 + 0.5\pi_1 = .619 + .5(.310) = .774$.

Si hubiera tres personas encargadas de la reparación, la fracción del tiempo en que un trabajador estaría desocupado sería $\pi_0 + (\frac{2}{3})\pi_1 + (\frac{1}{3})\pi_2$, y para un personal de R personas, la probabilidad de que un trabajador en particular esté desocupado es

$$\pi_0 + \frac{(R-1)\pi_1}{R} + \frac{(R-2)\pi_2}{R} + \cdots + \frac{\pi_{R-1}}{R}$$

Hoja de cálculo para el problema de reparación de máquinas

Machrep.xls

En la figura 23 (archivo Machrep.xls) se presenta una plantilla para hoja de cálculo para el modelo de reparación de máquinas. Se escribe λ en la celda B2; μ en C2 y la cantidad de mecánicos en D2. En la celda F2 se escribe el número de máquinas. En el renglón 4 se calculan L, L_q, L_s, W, W_q y W_s. L_s es igual al número esperado de máquinas (en estado

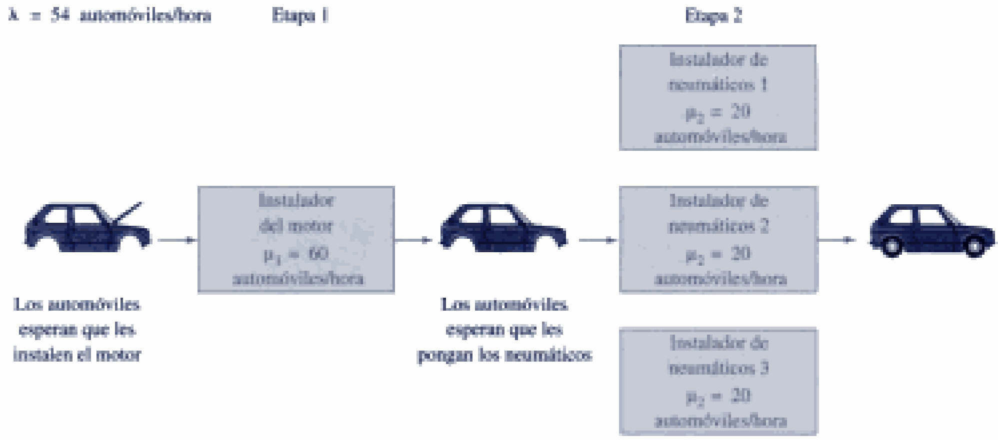


FIGURA 25
Sistema de líneas de espera en serie para automóviles

Por lo que se refiere a la etapa 2 (neumáticos), $\rho = \frac{54}{3(20)} = .90$. En la tabla 6 se encuentra que $P(j \geq 3) = .83$. Ahora (41) genera

$$L_q \text{ (para los neumáticos)} = \frac{.83(.90)}{1 - .90} = 7.47 \text{ automóviles}$$

Entonces,

$$W_q \text{ (para los neumáticos)} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{7.47}{54} = 0.138 \text{ hora}$$

Por lo tanto, el tiempo total previsto que un automóvil pasa en espera de la instalación del motor y los neumáticos es $0.15 + 0.138 = 0.288$ h.

Redes abiertas de líneas de espera

El tema que se trata enseguida es una generalización las de líneas de espera en serie. Al igual que en la figura 24, suponga que la estación j consiste en s_j servidores exponenciales, y cada uno opera a una tasa μ_j. Se supone que los clientes llegan a la estación j desde afuera del sistema de colas a una tasa r_j. También se supone que estos tiempos entre llegadas se apegan a una distribución exponencial. Una vez que se completa el servicio en la estación i, un cliente se forma en la cola de la estación j con probabilidad p_{ij} y termina el servicio con probabilidad

$$1 - \sum_{j=1}^{j=k} p_{ij}$$

Ahora definamos λ_j, la tasa a la cual los clientes llegan a la estación j (se incluyen las llegadas a la estación j desde afuera del sistema y desde otras estaciones). $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ se pueden determinar al resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1}^{i=k} p_{ij}\lambda_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Esto se infiere porque una fracción p_{ij} de las llegadas λ_i a la estación i llegarán luego a la estación j. Suponga que $s_j\mu_j > \lambda_j$ se cumple para todas las estaciones. Entonces se puede demostrar que la distribución de probabilidad del número de clientes presentes en la estación j y el número esperado de clientes presentes en la estación j se puede determinar si se trata a la estación j como un sistema $M/M/s_j/GD/\infty/\infty$ con tasa de llegadas λ_j y tasa de servicio μ_j. Si para alguna j, $s_j\mu_j \leq \lambda_j$, entonces no existe distribución de estado estable de los clientes. Vale la pena hacer notar que la cantidad de clientes presentes en cada estación es una variable aleatoria independiente. Es decir, ¡conocer la cantidad de personas en todas las estaciones que no son la estación j no nos dice nada respecto a la distribución del número de personas en la estación j! Este resultado no se cumple en el caso de que no sean exponenciales los tiempos entre llegadas o los tiempos de servicio.

Para determinar L, el número esperado de clientes en el sistema de colas, sume simplemente el número esperado de clientes presentes en cada estación. El tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema, W, se encuentra aplicando la fórmula $L = \lambda W$ a todo el sistema. Aquí, $\lambda = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$ porque esto representa la cantidad promedio de clientes por unidad de tiempo que llega al sistema. Mediante el ejemplo siguiente se ilustra el análisis de redes abiertas de líneas de espera.

EJEMPLO 14 Ejemplo de redes abiertas de líneas de espera

Considere dos servidores. Un promedio de ocho clientes por hora llega desde fuera al servidor 1 y un promedio de 17 clientes por hora llega desde fuera al servidor 2. Los tiempos entre llegadas son exponenciales. El servidor 1 es capaz de atender a una tasa exponencial de 20 clientes por hora, y el servidor 2 atiende a una tasa exponencial de 30 clientes por hora. Después de completar el servicio en el servidor 1, la mitad de los clientes sale del sistema, y la mitad se dirige al servidor 2. Después de finalizar el servicio en el servidor 2, $\frac{3}{4}$ de los clientes completan sus trámites y $\frac{1}{4}$ regresa al servidor 1.

1 ¿Qué fracción del tiempo el servidor 1 está desocupado?

2 Determine el número esperado de clientes en cada servidor.

3 Encuentre el tiempo promedio que pasa un cliente en el sistema.

4 ¿Qué tanto cambiarían las respuestas de (1) a (3) si el servidor 2 pudiera atender sólo un promedio de 20 clientes por hora?

Solución Ésta es una red abierta de líneas de espera con $r_1 = 8$ clientes/hora y $r_2 = 17$ clientes/hora. Asimismo, $p_{12} = .5$, $p_{21} = .25$ y $p_{11} = p_{22} = 0$. Podemos determinar λ_1 y λ_2 al resolver $\lambda_1 = 8 + .25\lambda_2$ y $\lambda_2 = 17 + .5\lambda_1$. Así se llega a $\lambda_1 = 14$ clientes/hora y $\lambda_2 = 24$ clientes/hora.

1 Se podría tratar al servidor 1 como un sistema $M/M/1/GD/\infty/\infty$ con $\lambda = 14$ clientes/hora y $\mu = 20$ clientes/hora. Entonces, $\pi_0 = 1 - \rho = 1 - .7 = .3$. Por lo tanto, el servidor 1 está desocupado 30% del tiempo.

2 De acuerdo con (26), encontramos que $L = \frac{14}{20-14} = \frac{7}{3}$ en el servidor 1 y $L = \frac{24}{30-24} = 4$ en el servidor 2. Por lo tanto, un promedio de $4 + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}$ clientes estará presente en el sistema.

3 $W = \frac{L}{\lambda}$, donde $\lambda = 8 + 17 = 25$ clientes/hora. De aquí que

$$W = \frac{\left(\frac{19}{3}\right)}{25} = \frac{19}{75} \text{ hora}$$

4 En este caso, $s_2\mu_2 = 20 < \lambda_2$, de modo que no existe estado estable.

Modelos de redes de redes de comunicación de datos

Las redes de líneas de espera se usan por lo regular para modelar redes de comunicación de datos. Los modelos de líneas de espera permiten determinar el retraso característico que sufren los datos transmitidos, y también diseñar la red. El análisis se basa en Tannenbaum (1981). Véase el archivo Compnetwork.xls.

Compnetwork.xls

Hidden page

Hidden page

Hoja de cálculo para el MODELO BCC

Bcc.xls

En la figura 33 (archivo Bcc.xls) se proporciona una plantilla de hoja de cálculo para el sistema de líneas de espera $M/G/s/GD/s/\infty$. Escribimos λ en la celda B2; μ en la celda C2, y el número de servidores en la celda D2. En B4 calculamos el número esperado (en el estado estable) de servidores ocupados. El cálculo del valor de π_s tabulado en la figura 32 se presenta en la celda C4. La columna E da las probabilidades de estado estable para este modelo. Se supone que $s \leq 1\,000$. En la figura 33 se presentan los datos de λ, μ y s del ejemplo 15.

Cálculos de BCC con LINGO

La función de LINGO **@PEL**$(\lambda/\mu,s)$ proporciona π_s. Por lo que toca al ejemplo 15, la función **@PEL** (20/3,13) proporciona .010627, como en la figura 32. La función **@PEL** se puede usar para resolver un problema (tal como el problema 6) donde buscamos el número de servidores que minimizan el costo esperado por unidad de tiempo cuando el costo es la suma del costo de servicio y el costo debido al negocio perdido.

	A	B	C	D	E	F	G
1	BCC MODEL	LAMBDA?	MU?	s?			
2		20	3	14			
3		L OR LS	PI(s)				
4		6.63320534	0.0050192				
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12	STATE	LAMBDA(J)	MU(J)	CJ	PROB	#IN QUEUE	COLA*COLE
13	0	20	0	1	0.00127738	0	0
14	1	20	3	6.66666667	0.00851587	0	0.008515872
15	2	20	6	22.2222222	0.02838624	0	0.056772479
16	3	20	9	49.382716	0.06308053	0	0.189241596
17	4	20	12	82.3045267	0.10513422	0	0.420536879
18	5	20	15	109.739369	0.14017896	0	0.700894799
19	6	20	18	121.932632	0.1557544	0	0.934526398
20	7	20	21	116.126316	0.14833752	0	1.038362665
21	8	20	24	96.7719303	0.1236146	0	0.988916824
22	9	20	27	71.6829114	0.09156637	0	0.824097353
23	10	20	30	47.7886076	0.06104425	0	0.610442484
24	11	20	33	28.9627925	0.03699651	0	0.406961656
25	12	20	36	16.0904403	0.02055362	0	0.246643428
26	13	20	39	8.25150783	0.01054032	0	0.137024127
27	14	0	42	3.92928944	0.0050192	0	0.070268783
28	15	0	42	0	0	1	0
29	16	0	42	0	0	2	0
30	17	0	42	0	0	3	0
31	18	0	42	0	0	4	0
32	19	0	42	0	0	5	0

FIGURA 33

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que una estación de bomberos recibe cada hora un promedio de 24 solicitudes de bombas contra incendio. Cada solicitud ocasiona que una bomba contra incendio esté ocupada por un promedio de 20 minutos. ¿Cuántas bombas debe tener el departamento de bomberos para tener cuando mucho 1% de probabilidad de que sea incapaz de responder a una solicitud?

2 Una compañía de ventas por teléfono tiene que determinar cuántos operadores se necesitan para contestar los teléfonos durante el turno de 9 AM a 5 PM. La compañía estima que se recibe un promedio de 480 llamadas durante este periodo, y que la llamada promedio dura seis minutos. Si la compañía desea que cuando mucho una de cada 100 personas obtenga señal de ocupado, ¿cuántos operadores debe contratar para el turno mencionado? ¿Qué suposición necesita para la respuesta?

3 Refiérase al ejemplo 15. Suponga que el hospital cuenta con 10 ambulancias. Entonces, ¿cuántas ambulancias, en promedio, estarían en camino a solicitud de una llamada o regresarían del lugar al que acudieron?

4 Se dice que un sistema telefónico recibe 1 Erlang de uso por hora si las personas que hacen llamadas mantienen las líneas ocupadas durante un promedio de 3 600 segundos por hora. Suponga que un sistema telefónico recibe 2 Erlang de uso por hora. Si usted desea que sólo 1% de todas las llamadas sea bloqueado, ¿cuántas líneas telefónicas necesita?[†]

5 (Requiere una hoja de cálculo o LINGO.) En el tiempo de uso máximo, un promedio de 200 personas por hora intenta entrar a Jade Vax. El tiempo promedio que alguien pasa en Vax es 20 minutos. Si los servicios de computación de la universidad de Indiana quieren asegurar que durante el uso máximo sólo 1% de todos los usuarios obtenga un mensaje de "Todos los puestos están ocupados", ¿cuántos puertos debe tener Jade Vax?

6 (Requiere una hoja de cálculo o LINGO.) US Airlines recibe un promedio de 500 llamadas por hora de clientes que desean hacer una reservación (el tiempo entre llamadas sigue una distribución exponencial). Se requiere un promedio de tres minutos para atender una llamada. Cada cliente que compra un boleto contribuye con 100 dólares a las utilidades de US Airlines. Cuesta 15 dólares por hora el personal que atiende una línea telefónica. Cualquier cliente que recibe una señal de ocupado comprará un boleto en otra aerolínea. ¿Cuántas líneas telefónicas debe tener US Airlines?

Grupo B

7 Llegan en promedio 26 socios al año a la biblioteca I.U. a pedir prestado el libro *I Ching* (suponga que los tiempos entre llegadas son exponenciales). Los socios que llegan y se encuentran con que el libro está prestado se van y nunca vuelven. Un socio que se lleva un ejemplar del *I Ching* lo retiene durante un promedio de cuatro semanas.

a Si la biblioteca tiene sólo un ejemplar, ¿cuál es el número esperado de socios que llegará a solicitar el *I Ching* cada año y se encontrará con que no está el libro?

b Suponga que cada persona que llega a pedir el libro *I Ching* y no lo consigue representa un costo para la biblioteca de un dólar de buen nombre. Un ejemplar del *I Ching* dura dos años y cuesta 11 dólares. Un ladrón ha robado el único ejemplar de la bilbioteca. Con el fin de minimizar la suma los costos de compra y de buen nombre en los próximos dos años, ¿cuántos ejemplares del *I Ching* se deben comprar?

8[‡] La bodega de una compañía puede almacenar hasta cuatro unidades de un bien. Se recibe cada mes un promedio de 10 pedidos del producto. Los tiempos entre la recepción de los pedidos sucesivos tienen una distribución exponencial. Luego de usar un producto para cumplir con un pedido, se pide inmediatamente un reemplazo, y tarda un promedio de un mes en llegar el reemplazo. Si no hay productos cuando se recibe un pedido, éste se pierde. ¿Qué fracción de todos los pedidos se perderá debido a los déficits? (*Sugerencia*: considere el espacio de almacenamiento para cada producto como un servidor, y piense lo que significa para un servidor estar ocupado. Luego dé una idea de una definición apropiada de tiempo de "servicio").

[†]Basado en Green (1987).

[‡]Basado en Karush (1957).

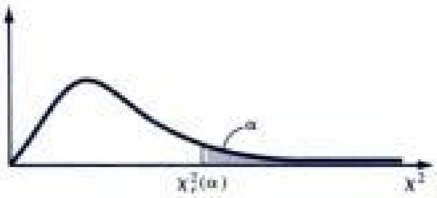
20.12 Cómo saber si los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales[§]

¿De qué modo podemos determinar si los datos reales son consistentes con la suposición de tiempos entre llegadas y tiempos de servicio exponenciales? Suponga que, por ejemplo, se han observado los tiempos entre llegadas $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Se puede demostrar que una estimación razonable de la tasa de llegadas λ está dada por

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{i=n} t_i}$$

[§]En esta sección se tratan temas que se podrían omitir sin perder la continuidad.

TABLA 9
Distribución de percentil de chi cuadrado



g.l. ν	.990	.950	.900	.500	α .100	.050	.025	.010	.005
1	.0002	.004	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.02	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.11	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.30	.71	1.06	3.36	7.78†	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.55	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.87	1.64	2.20	5.35	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.24	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.65	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.09	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.56	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.05	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.57	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	4.11	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.66	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	5.23	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.81	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	6.41	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	7.01	9.39	10.86	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	7.63	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	8.26	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.90	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	9.54	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	10.20	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	10.86	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	11.52	14.61	16.47	24.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	12.20	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	12.88	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	13.56	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	14.26	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	14.95	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	22.16	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	29.71	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	37.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	45.44	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	53.54	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	61.75	69.13	73.29	89.33	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	70.06	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Fuente: Richard A. Johnson y Dean W. Wichern, *Applied Multivariate Statistical Analysis*. ©1982, p. 583. Reimpreso con autorización de Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey.

†*Nota:* por ejemplo, $P(\chi_4^2 > 7.78) = .10$.

exponencial (llámela **A**) cuya densidad es $f(t) = 2.72e^{-2.72t}$. Escogemos cinco categorías para asegurar que la probabilidad de que una observación proveniente de **A** se encuentra en cada uno de las cinco categorías es .20. Esto da $e_i = 25(.20) = 5$ para cada categoría. Para establecer los límites de las categorías es necesario determinar la función acumulativa, $F(t)$, para **A**:

$$F(t) = P(\mathbf{A} \leq t) = \int_0^t 2.72e^{-2.72s}\,ds = 1 - e^{-2.72t}$$

Luego escogemos las categorías como se indica enseguida:

Categoría 1 $0 \leq t < m_1$ minutos

Categoría 2 $m_1 \leq t < m_2$ minutos

Categoría 3 $m_2 \leq t < m_3$ minutos

Categoría 4 $m_3 \leq t < m_4$ minutos

Categoría 5 $m_4 \leq t$ minutos

donde $F(m_1) = .20$, $F(m_2) = .40$, $F(m_3) = .60$ y $F(m_4) = .80$.

Como $F(t) = 1 - e^{-2.72t}$, entonces, para cualquier número p, el valor de t que satisface $F(t) = p$ se podría determinar como sigue:

$$1 - e^{-2.72t} = p$$
$$1 - p = e^{-2.72t}$$

Al obtener los logaritmos (base e) de ambos miembros se obtiene

$$t = \frac{\ln(1-p)}{-2.72}$$

$$m_1 = \frac{\ln .80}{-2.72} = 0.08$$

$$m_2 = \frac{\ln .60}{-2.72} = 0.19$$

$$m_3 = \frac{\ln .40}{-2.72} = 0.34$$

$$m_4 = \frac{\ln .20}{-2.72} = 0.59$$

Por lo tanto, las categorías son las siguientes:

Categoría 1 $0 \leq t < 0.08$ minuto

Categoría 2 $0.08 \leq t < 0.19$ minuto

Categoría 3 $0.19 \leq t < 0.34$ minuto

Categoría 4 $0.34 \leq t < 0.59$ minuto

Categoría 5 $0.59 \leq t$

Después de clasificar los datos en estas categorías, observamos que $o_1 = 6$, $o_2 = 5$, $o_3 = 4$, $o_4 = 5$ y $o_5 = 5$. Mediante la construcción de las categorías, $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = .20(25) = 5$. Enseguida calculamos χ^2(obs):

$$\chi^2(\text{obs}) = \frac{(6-5)^2}{5} + \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(4-5)^2}{5} + \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(5-5)^2}{5}$$
$$= .20 + 0 + .20 + 0 + 0 = .40$$

Elegimos arbitrariamente $\alpha = .05$. Como pretendemos ajustar una distribución exponencial a tiempos entre llegadas, $r = 1$. Entonces $\chi^2_3(.05) = 7.81$, y vemos que para $\alpha = .05$,

Hay un número infinito de soluciones para este sistema. Elegimos en forma arbitraria $\lambda_1 = 1$, lo cual genera la solución $\lambda_2 = .75$ y $\lambda_3 = .25$. En las celdas G8:I8 calculamos $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$. En G10:G20 calculamos $C_1(k) = \rho_1^k, k = 0, 1, \ldots, 10$, y en G10:I10 escribimos $C_i(0) = 1, i = 1, 2, 3$. Al copiar desde H11 a H11:I20 la fórmula

=G11+H$8*H10

se desarrolla la recursión $C_i(k) = C_{i-1}(k) + \rho_i C_i(k-1)$. Entonces podemos ya determinar G(10) = 7 231 883 a partir del valor de $C_3(10)$ en la celda H20. Véase la figura 34.

Ahora ya podemos generar todos los estados del sistema posibles en forma efectiva iniciando con $n_1 = 0$ y listarlos según el orden creciente del valor de n_2. Luego incrementamos el valor de n_1 a 1 y listamos todos los estados según los valores crecientes de n_2, etc. Una vez que tenemos $n_1 = 10$ habremos listado todos los estados. (Véase figura 35.) Para generar en forma eficaz todos los estados posibles, copiamos de C25 la fórmula (todas las funciones en este problema están como en el paquete Excel en inglés)

=IF(D25=0,B25+1,B25)

Esta fórmula incrementa n_1 en una unidad si $n_3 = 0$ (lo cual es lo mismo que tener $n_2 = 10 - n_1$). En otras circunstancias, la fórmula mantiene n_1 constante.

Luego copiamos de D25 la fórmula

=IF(B25-B24=1,0,C24+1)

Esta fórmula hace $n_2 = 0$ si ya incrementamos el valor de n_1; si no es así, la fórmula incrementa el valor de n_2 una unidad.

Por último, según E25, copiamos la fórmula

=10-B24-C24

Esto asegura que $n_3 = 10 - n_1 - n_2$.

En E24:E89 usamos (60) para calcular la probabilidad de estado estable para cada estado copiando la fórmula siguiente desde E24 a E25:E89

=($G$8^B24)*($H$8^C24)*($I$8^D24)/$I$20

Parte (a) Damos luego respuesta al inciso (a) determinando la distribución de probabilidades del número de partes en cada máquina. Utilizamos la función SUMIF (SUMAR.SI en el paquete en español) y una tabla de datos para lograr este objetivo. Para empezar calculamos la probabilidad de 0 partes en la máquina 1 en H24 con la fórmula

=SUMIF($B$24:$B$89,I23,E24:E89)

Esta fórmula suma los números de la columna D (la cual contiene las probabilidades del estado) para los renglones en los cuales la columna B (que es parte en la máquina 1) tiene una entrada 0. Véase figura 36.

	F	G	H	I
7	Mui	0.25	0.48	0.08
8	phoi	4	1.5625	3.125
9		1	2	3
10	0	1	1	1
11	1	4	5.5625	8.6875
12	2	16	24.6914063	51.83984
13	3	64	102.580322	264.5798
14	4	256	416.281754	1243.094
15	5	1024	1674.44024	5559.108
16	6	4096	6712.31287	24084.53
17	7	16384	26871.9889	102136.1
18	8	65536	107523.483	426698.9
19	9	262144	430149.442	1763583
20	10	1048576	1720684.5	7231883

FIGURA 34

Al seleccionar el intervalo de la tabla G24:H35 y la celda I23 de las entradas de la columna nos permite hacer un bucle completo y calcular las probabilidades de estado estable para cada número de partes en la máquina 1. De modo similar obtenemos las distribuciones de probabilidad de estado estable para las máquinas 2 y 3. Véase la figura 37.

Parte (b) El número medio de partes presente en la máquina 1 se podría calcular como $\sum_{i=0}^{i=10} i^*$ (probabilidad de que i partes estén en la máquina 1). En la celda K31 calculamos el número medio de partes en la máquina 1 con la fórmula

=SUMPRODUCT(G25:G35,H25:H35)

De manera similar calculamos el número medio de partes en las máquinas 2 y 3 en las celdas K32 y K33. Véase figura 38. Obsérvese que la máquina 1 es evidentemente el cuello de botella.

Parte (c) Para calcular la probabilidad de que cada máquina esté ocupada, sólo efectuamos la diferencia entre 1 y la probabilidad de cada máquina tiene 0 partes. Estos cálculos se realizan en L31:L33. Así llegamos a saber que la máquina 1 está ocupada 97% del tiempo, la máquina 2, 38% del tiempo y la máquina 3, 76% del tiempo.

	G	H	I
21			
22			Parts
23		Prob	0
24	Machine 1 parts	0.02455086	
25	0	0.02455086	
26	1	0.03140975	
27	2	0.04016518	
28	3	0.05131082	
29	4	0.06542029	
30	5	0.08307862	
31	6	0.10465268	
32	7	0.12963429	
33	8	0.15486976	
34	9	0.16991426	
35	10	0.1449935	

FIGURA 36

	G	H
37	Machine 2 Parts	0.61896518
38	0	0.61896518
39	1	0.23698584
40	2	0.09017388
41	3	0.03402481
42	4	0.01269126
43	5	0.00465769
44	6	0.00166949
45	7	0.00057718
46	8	0.00018798
47	9	5.4691E-05
48	10	1.1994E-05

	G	H
50	Machine 3 Parts	0.23793036
51	0	0.23793036
52	1	0.18587372
53	2	0.14519511
54	3	0.1133962
55	4	0.08851582
56	5	0.06900306
57	6	0.0536088
58	7	0.0412822
59	8	0.03105236
60	9	0.02186094
61	10	0.01228143

FIGURA 37

- El número promedio de llegadas por unidad de tiempo (λ) en la celda B3.
- La tasa promedio a la cual se atiende a los clientes (μ) en la celda B4.
- El número de servidores (s) en la celda B5.
- El coeficiente cuadrado de la variación –(varianza de tiempos entre llegadas)/(tiempo entre llegadas promedio)^2– de los tiempos entre llegadas en la celda B6.
- El coeficiente cuadrado de la variación –(varianza de tiempos de servicio)/tiempo promedio de servicio)^2– de los tiempos de servicio en la celda B7.

El coeficiente cuadrado de la variación para los tiempos entre llegadas o de servicio se puede estimar con facilidad mediante las funciones de Excel =AVERAGE y =VARP. (PROMEDIO y VARP, en el paquete de Excel en español) Recuerde que la variable aleatoria exponencial tiene la propiedad de que varianza = media^2. Por lo tanto, el coeficiente cuadrático de la variación para tiempos entre llegadas exponenciales o tiempos de servicio será igual a 1, y la diferencia respecto a la unidad del coeficiente cuadrático de la variación para tiempos de entre llegadas o tiempos de servicio indica el grado de desviación de la exponencialidad. La aproximación de Allen-Cunneen es exacta si los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales. Las extensas pruebas de Tanner indican que, en una gran diversidad de situaciones, los valores de L, W, L_q y W_q obtenidos mediante la aproximación están a 10% de sus valores verdaderos. Sigue una ilustración de la aproximación de Allen-Cunneen.

EJEMPLO 18 Banco NBD

La sucursal del banco NBD en Bloomington, Indiana tiene seis cajeros. En las horas de afluencia máxima, llega un promedio de 4.8 clientes por minuto al banco. Un cajero requiere un promedio de un minuto atender a un cliente. El coeficiente cuadrático de variación tanto para los tiempos de entre llegadas y tiempos de servicio es .5. Estime el tiempo promedio que un cliente tendrá que esperar antes de ver a un cajero. ¿Cuántos clientes estarán presentes en promedio?

Solución Después de escribir la información pertinente en las celdas B3 a B7 (véase figura 39), encontramos que un cliente espera, en promedio, .216 minutos antes de ver al cajero. En promedio, 5.83 clientes estarán presentes en el banco. Al parecer, la afluencia está bajo control. Este resultado favorable se debe en gran medida al bajo coeficiente cuadrático de variación tanto para el tiempo entre llegadas como para el tiempo de servicio. Por ejemplo, si ambos coeficientes cuadrados de variación fueran 4, entonces W_q sería 1.73 minutos, lo que significa un 800% de aumento.

	A	B	C	D
1		**G/G/m Template**		
2		Allen-Cunneen Approximation		
3	Lambda	**4.8**		
4	Mu	**1**		
5	s	**6**		
6	CV arrive	**0.5**		
7	CV service	**0.5**		
8	u	4.8		
9	ro	0.8		
10	R(s,mu)	0.82322		
11	E_C(s,mu)	0.517772		
12	W_q	0.215738		
13	L_q	1.035544		
14	W	1.215738		
15	L	5.835544		

FIGURA 39

Modelos con preferencias sin prioridades

Al inicio se tratan los modelos con preferencias sin prioridades (*Nonpreemptive Priority Models*). En un modelo sin prioridades, no se puede interrumpir el servicio de un cliente. Después de que cada servicio se completa, el siguiente cliente en entrar al servicio se elige dando prioridad a los tipos de clientes de número más bajo (sin tomar en cuenta FCFS). Por ejemplo, si $n = 3$ y están presentes tres clientes tipo 2 y cuatro tipo 3, el siguiente cliente en pasar al servicio sería el cliente tipo 2 que, entre los de su tipo, fue el primero en llegar.

Según la notación de Kendall-Lee, un modelo con preferencias sin prioridades se representa poniendo en la cuarta característica NPRP. Para indicar los diversos tipos de clientes, se escribe un subíndice i en las primeras dos características. Por lo tanto, $M_i/G_i/\cdots$ representaría una situación en la cual los tiempos entre llegadas para el cliente tipo i-ésimo son exponenciales y los tiempos de servicio para el cliente tipo i-ésimo tienen una distribución general. En lo que sigue, sean

W_{qk} = Tiempo de espera en estado estable que pasa un cliente tipo k en la cola.
W_k = Tiempo esperado en estado estable en el sistema que pasa un cliente tipo k en la cola.
L_{qk} = Número esperado en estado estable de clientes tipo k que esperan en la cola.
L_k = Número esperado en estado estable de clientes tipo k en el sistema.

Modelo $M_i/G_i/1/\text{NPRP}/\infty/\infty$

El primer resultado se relaciona con el sistema de un solo servidor, $M_i/G_i/1/\text{NPRP}/\infty/\infty$ sin prioridades. Definamos $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$, $a_0 = 0$ y $a_k = \sum_{i=1}^{i=k}\rho_i$. Suponemos[†] que

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$$

Entonces,

$$\begin{aligned} W_{qk} &= \frac{\sum_{k=1}^{k=n}\lambda_k E(\mathbf{S}_k^2)/2}{(1-a_{k-1})(1-a_k)} \\ L_{qk} &= \lambda_k W_{qk} \\ W_k &= W_{qk} + \frac{1}{\mu_k} \\ L_k &= \lambda_k W_k \end{aligned} \tag{62}$$

En el ejemplo siguiente se ilustra el uso de la ecuación (62).

EJEMPLO 19 Preferencia en el servicio de copiado

Un centro de copiado da preferencia a los trabajos pequeños y no a los grandes. Los tiempos entre llegadas para cada tipo de trabajo son exponenciales, y llega cada hora un promedio de 12 trabajos pequeños y seis trabajos grandes. Sea trabajo tipo 1 = trabajo pequeño y trabajo tipo 2 = trabajo grande. Luego nos indican que

$$E(\mathbf{S}_1) = 2 \text{ minutos} \qquad E(\mathbf{S}_1^2) = 6 \text{ minutos}^2 = \frac{1}{600}\text{ hora}^2$$

$$E(\mathbf{S}_2) = 4 \text{ minutos} \qquad E(\mathbf{S}_2^2) = 18 \text{ minutos}^2 = \frac{1}{200}\text{ hora}^2$$

Determine el tiempo promedio que cada tipo de trabajo pasa en el centro de copiado.

[†]Si esta condición no se cumple, entonces para uno o más tipos de clientes, no existe tiempo de espera en estado estable.

Solución Sabemos que $\lambda_1 = 12$ trabajos por hora, $\lambda_2 = 6$ trabajos por hora, $\mu_1 = 30$ trabajos por hora y $\mu_2 = 15$ trabajos por hora. Luego $\rho_1 = \frac{12}{30} = .4$ y $\rho_2 = \frac{6}{15} = .4$. Como $\rho_1 + \rho_2 < 1$, existe un estado estable. Ahora, $a_0 = 0$, $a_1 = .4$ y $a_2 = .4 + .4 = .8$. Entonces, la ecuación (62) genera,

$$W_{q1} = \frac{\dfrac{12\left(\dfrac{1}{600}\right)}{2} + \dfrac{6\left(\dfrac{1}{200}\right)}{2}}{(1-0)(1-.4)} = \frac{\dfrac{30}{1\,200}}{.6} = 0.042 \text{ hora}$$

$$W_{q2} = \frac{\dfrac{12\left(\dfrac{1}{600}\right)}{2} + \dfrac{6\left(\dfrac{1}{200}\right)}{2}}{(1-.4)(1-.8)} = \frac{\dfrac{30}{1\,200}}{.12} = 0.208 \text{ hora}$$

Asimismo,

$$W_1 = W_{q1} + \frac{1}{\mu_1} = 0.042 + 0.033 = 0.075 \text{ hora}$$

$$W_2 = W_{q2} + \frac{1}{\mu_2} = 0.208 + 0.067 = 0.275 \text{ hora}$$

Por lo tanto, como se esperaba, los trabajos grandes pasan más tiempo en el centro de copiado que los trabajos pequeños.

Modelo $M_i/G_i/1/\text{NPRP}/\infty/\infty$ con costos de espera que dependen del cliente

Considere un sistema con preferencias, sin prioridades y con un solo servidor, en el cual se genera un costo c_k por cada unidad de tiempo que un cliente tipo k pasa en el sistema. Si deseamos minimizar el costo esperado que se genera por unidad de tiempo (en el estado estable), ¿qué orden de preferencias debe haber en los tipos de clientes? Suponga que n clientes están numerados como se indica

$$c_1\mu_1 \geq c_2\mu_2 \geq \cdots \geq c_n\mu_n \tag{63}$$

Entonces, el costo esperado se minimiza dando la preferencia más alta a los clientes tipo 1, la preferencia siguiente a los clientes tipo 2, y así sucesivamente, y la preferencia menor a los clientes tipo n. Para ver por qué este orden de preferencia es razonable, observe que cuando un cliente tipo k está recibiendo atención, el costo de salida del sistema a una tasa $c_k\mu_k$. Por lo tanto, el costo se puede minimizar dando la preferencia mayor a los tipos de clientes con los valores más grandes de $c_k\mu_k$.

Como un caso especial de este resultado, suponga que deseamos minimizar L, el número esperado de trabajos en el sistema. Sea $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$. Entonces, en cualquier momento, el costo por unidad de tiempo es igual al número de clientes en el sistema. Por lo tanto, el costo esperado por unidad de tiempo es igual a L. Ahora (63) se vuelve

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{1}{\mu_1} \leq \frac{1}{\mu_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{\mu_n}$$

Por lo tanto, podemos concluir que el número esperado de trabajos en el sistema se minimiza si se da la preferencia más alta a los tipos de clientes con el tiempo de servicio medio más pequeño. Esta disciplina de preferencia se conoce como disciplina de tiempo de proceso más corto (*shortest processing time*, SPT).

- La probabilidad de una llegada durante un intervalo Δt es $\lambda(t)^*(\Delta t)$.
- La probabilidad de más de una llegada durante un intervalo Δt es $o(\Delta t)$.
- Las llegadas durante intervalos distintos son independientes.
- La probabilidad de que se complete un servicio durante un intervalo Δt está dada por $(s(t), k)^* \mu t \Delta t$.
- La probabilidad de que más de un servicio se complete durante un intervalo Δt es $o(\Delta t)$.

Cuando las primeras tres suposiciones rigen las llegadas, se dice que las llegadas siguen un **proceso Poisson no homogéneo**. La suposición implica que, dadas la tasa de llegadas y la tasa de servicio, el número esperado de llegadas, la finalización del servicio, o ambas situaciones durante el Δt siguiente corresponderá con lo que esperamos. La fuente del error en nuestra aproximación es el hecho de que por lo menos dos eventos pueden ocurrir durante un tiempo Δt. La probabilidad de que esto suceda es $o(\Delta t)$, de modo que si hacemos Δt lo suficiente pequeño, la aproximación no debe ocasionar grandes errores al calcular las probabilidades momentáneas.

Ahora definamos $P_i(t)$ como la probabilidad de que i clientes estén presentes en el tiempo t. Supondremos (aunque no es necesario), que el sistema inicialmente está vacío, de modo que $P_0(0) = 1$ y para $i > 0$, $P_0(i) = 0$. Entonces, dado que conocemos $P_i(t)$, podemos estimar $P_i(t + \Delta t)$ como sigue

$$
\begin{aligned}
P_0(t + \Delta t) &= (1 - \lambda(t)\Delta t)P_0(t) + \mu(t)\Delta t P_1(t) \\
P_i(t + \Delta t) &= \lambda(t)\Delta t P_{i-1}(t) + (1 - \lambda(t)\Delta t - \min(s(t), i)\mu(t)\Delta t)P_i(t) + \min(s(t), \\
&\qquad i + 1)\mu(t)\Delta t P_{i+1}(t),\ N - 1 \geq i \geq 1 \\
P_N(t + \Delta t) &= \lambda(t)\Delta t P_{N-1}(t) + (1 - \min(s(t), N)\mu(t))\Delta t P_N(t)
\end{aligned}
$$

Como se estableció previamente, estas ecuaciones se basan en la suposición de que si el estado es i en el momento t, entonces durante el siguiente Δt, la probabilidad de una llegada es $\lambda(t)\ \Delta t$, y la probabilidad de que se complete un servicio es min $(s(t), i)\mu(t)\Delta t$. La primera ecuación se infiere después de observar que estar en el estado 0 en el tiempo $t + \Delta t$ sólo puede suceder si estuviéramos en el estado 1 en el tiempo t y se completara un servicio durante el Δt siguiente, o bien, si estuviéramos en el estado 0 en el tiempo t y no ocurriera ninguna llegada durante el siguiente Δt. La segunda ecuación se deduce después de observar que para $N - 1 \geq i \geq 1$, sólo podemos estar en el estado i en el tiempo $t + \Delta t$ si ocurre una de las situaciones siguientes:

- Si estamos en el estado $i - 1$ en el tiempo t y hubiera una llegada durante el Δt siguiente.
- Si estamos en el estado $i - 1$ en el tiempo t y se completa un servicio durante el Δt siguiente.
- Si estamos en el estado i en el tiempo t, y no ocurre ninguna llegada ni se completa un servicio durante el Δt siguiente.

La ecuación final se deduce después de observar que para estar en el estado N en el tiempo $t + \Delta t$, debe ocurrir una de las dos situaciones siguientes:

- Estamos en el estado $N - 1$ en el tiempo t y ocurre una llegada durante el Δt siguiente.
- Estamos en el estado N en el tiempo t, y no se completa ningún servicio durante el siguiente Δt.

Mediante el ejemplo siguiente se ilustra cómo podemos usar las aproximaciones para determinar las probabilidades momentáneas en el caso de un sistema de líneas de espera no estacionario.

EJEMPLO 22 Afluencia de comensales a la hora del almuerzo

Un pequeño restaurante de bocadillos pretende modelar el ajetreo que ocurre a la hora del almuerzo. El restaurante abre a las 11 AM y todos los clientes esperan en una sola cola

Parte (b) Observe que el renglón 371 es el tiempo 11:30 AM. En la celda M5, la fórmula

=SUMPRODUCT(D9:AH9,D371:AH371)

muestra que se espera que sólo un promedio de 1.43 clientes estén presentes a las 11:30.

PROBLEMAS

Grupo A

1† Se usa una sola máquina entre las 8 AM y las 4 PM para tomar electrocardiogramas. Hay tres lugares para esperar, y cualquier paciente que llegue, y no encuentre espacio para él, es una pérdida para el sistema. La tasa de llegadas por hora en el tiempo $t(t = 0$ es 8 AM y $t = 8$ es 4 PM) está dada por

$$\lambda(t) = 9.24 - 1.584 \cos\left(\frac{\pi t}{1.51}\right) + 7.897 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{3.02}\right) - 10.434 \cos\left(\frac{\pi t}{4.53}\right) + 4.293 \cos\left(\frac{\pi t}{6.04}\right)$$

Suponga que los tiempos de servicio son exponenciales y que se ejecuta un promedio de 7 electrocardiogramas por hora. Suponga, asimismo, que las llegadas se apegan a un proceso Poisson no homogéneo. Determine cómo varía durante el día la probabilidad de que el sistema pierda a un paciente que llegue y no encuentre lugar disponible.

†Basado en Kao (1996).

2 Las casillas para votar están abiertas en Gotham City desde las 11 AM hasta las 6 PM. La ciudad cuenta con tres máquinas para votar. Se requiere un promedio de 1.5 minutos (distribución exponencial) para que un elector termine de votar. La tasa de llegadas de los electores en todo el día es como se indica en la tabla 12. ¿Cuál es la probabilidad de que toda la votación se complete a las 6:30 PM?

TABLA 12

Tiempo	Tasa de llegadas por hora
11 AM–mediodía	80
Mediodía–1 PM	125
1 PM–2 PM	110
2 PM–3 PM	90
3 PM–4 PM	80
4 PM–5 PM	70
5 PM–6 PM	100

RESUMEN

Distribución exponencial

Una variable aleatoria **X** sigue una distribución exponencial con parámetro λ si la densidad de **X** se obtiene con

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0)$$

Entonces,

$$E(\mathbf{X}) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad \text{var } \mathbf{X} = \frac{1}{\lambda^2}$$

La distribución exponencial tiene la propiedad de carencia de memoria. Esto quiere decir, por ejemplo, que si los tiempos entre llegadas están distribuidos en forma exponencial con tasa o parámetro λ, entonces, sin importar cuánto tiempo pasó desde la última llegada, hay una probabilidad $\lambda\Delta t$ de que ocurrirá una llegada durante las siguientes unidades de tiempo Δt.

Los tiempos entre llegadas son exponenciales con parámetro λ si y sólo si el número de llegadas que ocurran en un intervalo de duración t sigue una distribución Poisson con parámetro λt. La función de masa para una distribución Poisson con parámetro λ se obtiene con

$$P(\mathbf{N} = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Distribución Erlang

Si los tiempos entre llegadas o de servicio no son exponenciales, entonces se puede usar, con frecuencia, una variable aleatoria Erlang para modelarlos. Si **T** es una variable aleatoria Erlang con parámetro de proporcionalidad R y parámetro de forma k, la densidad de **T** se estima con

$$f(t) = \frac{R(Rt)^{k-1}e^{-Rt}}{(k-1)!} \qquad (t \geq 0)$$

y

$$E(\mathbf{T}) = \frac{k}{R} \qquad \text{y} \qquad \text{var } \mathbf{T} = \frac{k}{R^2}$$

Procesos de nacimiento-muerte

Por lo que se refiere a estos procesos, la probabilidad de estado estable (π_j) o fracción del tiempo que el proceso pasa en el estado j se puede determinar a partir de las ecuaciones de balance de flujo siguientes

$$\begin{array}{rr}
(j = 0) & \pi_0\lambda_0 = \pi_1\mu_1 \\
(j = 1) & (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2 \\
(j = 2) & (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 = \lambda_1\pi_1 + \mu_3\pi_3 \\
\vdots & \\
(j\text{-ésima ecuación}) & (\lambda_j + \mu_j)\pi_j = \lambda_{j-1}\pi_{j-1} + \mu_{j+1}\pi_{j+1}
\end{array}$$

La j-ésima ecuación de balance de flujo establece que el número esperado de transiciones por unidad de tiempo fuera del estado j = (número esperado de transiciones por unidad de tiempo en el estado j). La solución de las ecuaciones de balance se determina mediante

$$\pi_j = \pi_0 \frac{\lambda_0\lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

y el hecho de que $\pi_0 + \pi_1 + \cdots = 1$.

Notación para las características de los sistemas de líneas de espera

π_j = probabilidad de estado estable de que j clientes estén en el sistema

L = número esperado de clientes en el sistema

L_q = cantidad esperada de clientes formados en la cola

L_s = cantidad esperada de clientes en servicio

W = tiempo esperado que un cliente pasa en el sistema

W_q = tiempo esperado que un cliente pasa en la fila

W_s = tiempo esperado que un cliente pasa en el servicio

λ = cantidad promedio de clientes por unidad de tiempo

μ = cantidad promedio de servicios terminados por unidad de tiempo (tasa de servicio)

$\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$ = intensidad de tránsito o factor de utilización

Modelo $M/M/1/GD/\infty/\infty$

Si $\rho \geq 1$, no existe estado estable. Para $\rho < 1$,

$$\pi_j = \rho^j(1-\rho) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L_s = \rho$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu}$$

(Las últimas tres fórmulas se obtienen de las fórmulas de L, L_q y L_s por medio de la relación $L = \lambda W$.)

Modelo $M/M/1/GD/c/\infty$

Si $\lambda \neq \mu$,

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{c+1}}$$

$$\pi_j = \rho^j \pi_0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, c)$$

$$\pi_j = 0 \qquad (j = c+1, c+2, \ldots)$$

$$L = \frac{\rho[1 - (c+1)\rho^c + c\rho^{c+1}]}{(1-\rho^{c+1})(1-\rho)}$$

Si $\lambda = \mu$,

$$\pi_j = \frac{1}{c+1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, c)$$

$$L = \frac{c}{2}$$

Para todos los valores de λ y μ,

$$L_s = 1 - \pi_0$$

$$L_q = L - L_s$$

$$W = \frac{L}{\lambda(1-\pi_c)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1-\pi_c)}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu}$$

Modelo $M/M/s/GD/\infty/\infty$

Si $\rho \geq 1$, no existe estado estable. Para $\rho < 1$,

$$\pi_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=0}^{i=s-1} \frac{(s\rho)^i}{i!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}}$$

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{j!} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

$$\pi_j = \frac{(s\rho)^j \pi_0}{s!s^{j-s}} \qquad (j = s, s+1, s+2, \ldots)$$

$$P(j \geq s) = \frac{(s\rho)^s \pi_0}{s!(1-\rho)} \qquad \text{(calculado en tabla 6)}$$

$$L_q = \frac{P(j \geq s)\rho}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda}$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

Modelo $M/G/\infty/GD/\infty/\infty$

$$L = L_s = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = W_s = \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = L_q = 0$$

Modelo $M/G/1/GD/\infty/\infty$

$$\sigma^2 = \text{varianza de la distribución del tiempo de servicio}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$L = L_q + \rho$$

$$L_s = \lambda\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$W_s = \frac{1}{\mu}$$

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

Modelo de reparación de máquinas (*M/M/R/GD/K/K*)

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

L = número esperado de máquinas descompuestas

L_q = cantidad esperada de máquinas que esperan servicio

W = tiempo promedio que una máquina pasa descompuesta

W_q = tiempo promedio que una máquina pasa en espera de servicio

π_j = probabilidad de estado estable de que j máquinas estén descompuestas

λ = tasa a la cual se descomponen las máquinas

μ = tasa a la cual se reparan las máquinas

Asimismo,

$$\pi_j = \binom{K}{j}\rho^j\pi_0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, R)$$

$$= \frac{\binom{K}{j}\rho^j j!\pi_0}{R!R^{j-R}} \qquad (j = R+1, R+2, \ldots, K)$$

$$L = \sum_{j=0}^{j=K} j\pi_j$$

$$L_q = \sum_{j=R}^{j=K} (j-R)\pi_j$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{j=0}^{j=K} \pi_j\lambda_j = \sum_{j=0}^{j=K} \lambda(K-j)\pi_j = \lambda(K-L)$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

Líneas de espera exponenciales en serie

Si existe un estado estable y si (1) los tiempos entre llegadas para un sistema de líneas de espera en serie son exponenciales con tasa λ; (2) los tiempos de servicio para cada servidor en la etapa i son exponenciales, y (3) cada etapa tiene una sala de espera de capacidad infinita, entonces los tiempos entre llegada de los clientes a cada etapa del sistema de la línea de espera son exponenciales con tasa λ.

Modelo $M/G/s/GD/s/\infty$

El sistema pierde una fracción π_s de todos los clientes, y π_s depende sólo de la tasa de llegadas λ y de la media $\frac{1}{\mu}$ del tiempo de servicio. Con la figura 21 se puede determinar π_s.

Qué hacer si los tiempos entre llegadas o los de servicio no son exponenciales

Se puede aplicar una prueba chi cuadrada para determinar si los datos reales indican que los tiempos entre llegadas o de servicio son exponenciales. Si el tiempo entre llegadas, o el tiempo de servicio, o ambos no son exponenciales, entonces se podría llegar a una aproximación de L, L_q, W y W_q mediante la fórmula de Allen-Cunneen.

No hay fórmula o tabla que se pueda usar para calcular las características de operación del sistema en muchos sistemas de líneas de espera. En estos casos hay que recurrir a la simulación (véanse capítulos 21 y 22).

Redes cerradas de líneas de espera

Los sistemas de manufactura de computadoras en los cuales hay un número constante de trabajos presentes se modelan, algunas veces, como **redes cerradas de líneas de espera**.

Sea P_{ij} la probabilidad de que un trabajo irá al servidor j después de completar su servicio en la estación i. Sea P la matriz cuya entrada $(i - j)$ es P_{ij}. Suponemos que los tiempos de servicio en el servidor j están distribuidos en forma exponencial con parámetro μ_j. El sistema tiene s servidores, y están presentes, en todo momento, exactamente N trabajos. Sea n_i el número de trabajos presentes en el servidor i. Entonces, el estado del sistema, en cualquier momento dado, se puede definir mediante un vector n-dimensional $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_s)$. El conjunto de estados posibles se obtiene mediante $S_N = \{\mathbf{n}$ tal que todas $n_i \geq 0$ y $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = N\}$.

Sea λ_j igual a la tasa de llegadas al servidor j. Como no hay llegadas externas, podríamos hacer que todas las $r_j = 0$ y obtener los valores de las λ_j mediante la ecuación utilizada en la situación de redes abiertas. Es decir,

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i P_{ij} \qquad j = 1, 2, \ldots, s$$

Como los trabajos nunca dejan el sistema, para cada i, $\sum_{j=1}^{j=s} P_{ij} = 1$. Este hecho da lugar a que la ecuación anterior no tenga solución única. Resulta que, por fortuna, podemos usar cualquier solución para ayudarnos a obtener las probabilidades de estado estable. Si definimos

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

entonces, determinamos, para cualquier estado n, sus probabilidad de estado estable $\Pi_N(\mathbf{n})$ a partir de la ecuación siguiente:

$$\Pi_N(\mathbf{n}) = \frac{\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \cdots \rho_n^{n_s}}{G(N)}$$

Aquí, $G(N) = \sum_{\mathbf{n} \in S_N} \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \cdots \rho_s^{n_s}$.

El algoritmo de Buzen proporciona una manera eficaz de estimar $G(N)$ (en una hoja de cálculo). Una vez que tenemos la distribución de probabilidades de estado estable, podemos determinar con facilidad otras medidas de efectividad, tal como la longitud de la cola esperada en cada servidor y el tiempo previsto que un trabajo tarda en cada visita a un servidor, fracción de tiempo que un servidor está ocupado y la producción de cada servidor (trabajos por segundo procesados por cada servidor).

Con el objeto de obtener $G(N)$, calculamos en forma recursiva las cantidades $C_i(k)$ para $i = 1, 2, \ldots, s$ y $k = 0, 1, \ldots, N$. La recursión inicia con $C_1(k) = \rho_1^k$, $k = 0, 1, \ldots, N$ y $C_i(0) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Para otros valores de k e i, generamos los valores de $C_i(k)$ en forma recursiva por medio de la relación siguiente:

$$C_i(k) = C_{i-1}(k) + \rho_i C_i(k-1)$$

Luego se puede demostrar que $G(N) = C_s(N)$.

Una aproximación para el sistema de líneas de espera *G/G/m*

Los tiempos entre llegadas se ajustan, la mayoría de las veces, a una variable aleatoria exponencial. Los tiempos de servicio, en cambio, no se apegan, con frecuencia, a una distribución exponencial. Cuando los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio se ajustan cada uno a una variable aleatoria no exponencial, el sistema de líneas de espera se denomina sistema *G/G/m*. En el caso de estas situaciones, no funcionan las plantillas analizadas en las secciones anteriores de este capítulo. La aproximación de Allen-Cunneen proporciona, por fortuna en muchas ocasiones, una buena aproximación de L, W, L_q y W_q para sistemas *G/G/m*. El archivo ggm.xls pone en práctica una hoja de cálculo con la aproximación de Allen-Cunneen. El usuario sólo tiene que escribir la información siguiente:

ggm.xls

- El número promedio de llegadas por unidad de tiempo (λ) en la celda B3.
- La tasa promedio a la cual se atiende a los clientes (μ) en la celda B4.
- El número de servidores (s) en la celda B5.
- El coeficiente cuadrático de la variación –(varianza de tiempos entre llegadas)/tiempo promedio entre llegadas)^2– de los tiempos entre llegadas en la celda B6.
- El coeficiente cuadrático de la variación –(varianza de tiempos de servicio)/(tiempo promedio de servicio)^2– de los tiempos de servicio en la celda B7.

La aproximación de Allen-Cunneen es exacta si los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales. Las extensas pruebas de Tanner indican que, en una gran diversidad de situaciones, los valores de L, W, L_q y W_q obtenidos mediante la aproximación están a 10% de sus valores verdaderos.

Comportamiento transitorio de los sistemas de líneas de espera

Definimos $P_i(t)$ como la probabilidad de que i clientes estén presentes en el tiempo t. Luego suponemos (aunque no es necesario), que el sistema está al principio vacío, de modo que $P_0(0) = 1$ y para $i > 0$, $P_0(i) = 0$. Entonces, dado que conocemos $P_i(t)$, podemos estimar $P_i(t + \Delta t)$ como sigue

$$P_0(t + \Delta t) = (1 - \lambda(t)\Delta t)P_0(t) + \mu(t)\Delta t P_1(t)$$

$$P_i(t + \Delta t) = \lambda(t)\Delta t P_{i-1}(t) + (1 - \lambda(t)\Delta t - \min(s(t), i)\mu(t)\Delta t)P_i(t) + \min(s(t), i + 1)\mu(t)\Delta t P_{i+1}(t),\ N - 1 \geq i \geq 1$$

$$P_N(t + \Delta t) = \lambda(t)\Delta t P_{N-1}(t) + (1 - \min(s(t), N)\mu(t))\Delta t P_N(t)$$

Estas ecuaciones se basan en el supuesto de que, si el estado es i en el tiempo t, entonces durante el Δt siguiente, la probabilidad de una llegada es $\lambda(t)\,\Delta t$, y la probabilidad de que termine un servicio es $(s(t), i)\mu(t)\Delta t$.

21 Simulación

La simulación es una técnica de las ciencias administrativas muy poderosa, y se utiliza mucho para el análisis y estudio de sistemas complejos. En capítulos anteriores, se estudió la formulación de modelos cuya solución se obtenía de manera analítica. En casi todos estos modelos, el objetivo era determinar soluciones óptimas. Sin embargo, debido a la complejidad, relaciones estocásticas, etcétera, no todos los problemas del mundo real se pueden representar de manera adecuada en las formas de modelos de los capítulos anteriores. Los intentos por usar modelos analíticos para estos sistemas por lo general requieren tantas suposiciones simplificadoras, que es probable que las soluciones sean inadecuadas para ponerlas en práctica. En esos casos, es común que la única forma alternativa de modelado y análisis disponible para quien toma la decisión sea la simulación.

La *simulación* se podría definir como una técnica que imita la operación de un sistema del mundo real a medida que evoluciona con el tiempo. Esto normalmente se hace desarrollando un modelo de simulación. Un *modelo de simulación*, por lo general, toma la forma de un conjunto de suposiciones acerca de la operación del sistema, expresado como relaciones matemáticas o lógicas entre los objetos de interés en el sistema. A diferencia de las soluciones matemáticas exactas disponibles con la mayor parte de los modelos analíticos, el proceso de simulación tiene que ver con ejecutar el modelo a través del tiempo, por lo común en una computadora, para generar muestras representativas de las medidas de desempeño. A este respecto, la simulación se podría ver como un experimento de muestreo en el sistema real, donde los resultados son los puntos muestrales. Por ejemplo, para obtener la mejor estimación de la media de la medida de desempeño, se promedian los resultados muestrales. Resulta evidente que mientras más puntos muestrales se generen, mejor será la estimación. Sin embargo, otros factores, como las condiciones iniciales de la simulación, la longitud del periodo que está siendo simulado, la exactitud del modelo en sí, inciden en qué tan buena será la estimación final. Más adelante en el capítulo se analizan estos temas.

Al igual que con la mayoría de otras técnicas, la simulación tiene sus ventajas y desventajas. La principal ventaja de la simulación es que la teoría es relativamente directa. En general, los métodos de simulación son más fáciles de aplicar que los métodos analíticos. Si bien los modelos analíticos podrían requerir que se hicieran muchas suposiciones simplificadoras, los modelos de simulación tienen pocas restricciones de este tipo, así que dan una flexibilidad mucho mayor al representar el sistema real. Una vez construido el modelo, se puede usar una y otra vez para analizar diferentes políticas, parámetros o diseños. Por ejemplo, si una empresa comercial tiene un modelo de simulación de su sistema de inventario, se pueden probar varias políticas de inventario en el modelo en vez de aprovechar la oportunidad de experimentar en el sistema real. Sin embargo, se debe remarcar que la simulación no es una técnica de optimización. La mayoría de las veces se utiliza para analizar preguntas del tipo "qué pasa si". Es posible la optimización con la simulación, pero por lo general es un proceso lento. La simulación también puede ser costosa. No obstante, con el desarrollo de lenguajes de simulación de aplicación específica, disminución del costo computacional y avances en las metodologías de simulación, el problema del costo es cada vez menos importante.

En este capítulo, se centra la atención en modelos de simulación y la técnica de simulación. Presentamos varios ejemplos de modelos de simulación y exploramos conceptos como números aleatorios, mecanismos de flujo en el tiempo, muestreo de Monte Carlo, lenguajes de simulación y cuestiones estadísticas en la simulación.

21.1 Terminología básica

Para comenzar el análisis se presenta parte de la terminología básica que se utiliza en la simulación. En la mayoría de los estudios de simulación, el interés se centra en la simulación de algún sistema. Así, a fin de modelar un sistema, se debe entender el concepto de sistema. Entre las distintas formas de definir un sistema, la definición más apropiada para problemas de simulación es la que propusieron Schmidt y Taylor (1970).

DEFINICIÓN ■ Un **sistema** es una colección de entidades que actúan e interactúan hacia la realización de algún fin lógico. ■

Sin embargo, en la práctica esta definición por lo general tiende a ser más flexible. La descripción exacta del sistema normalmente depende de los objetivos del estudio de la simulación. Por ejemplo, lo que podría ser un sistema para un estudio particular podría ser sólo un subconjunto del sistema global para otro.

Los sistemas generalmente tienden a ser dinámicos —su status cambia con el tiempo. Para describir este status, se utiliza el concepto del estado de un sistema.

DEFINICIÓN ■ El **estado** de un sistema es el conjunto de variables necesario para describir el status del sistema en algún momento determinado. ■

Como ejemplo de un sistema, considere un banco. En este caso, el sistema consiste en el personal que atiende y los clientes que esperan en la cola o están siendo atendidos. Cuando llegan o salen los clientes, cambia el status del sistema. Para describir estos cambios de status, se requiere un conjunto de variables conocidas como **variables de estado**. Por ejemplo, el número de servidores ocupados, el número de clientes en el banco, el tiempo de llegada del siguiente cliente y el tiempo de salida de los clientes en servicio, juntos describen cada cambio posible en el status del banco. Así, estas variables se podrían utilizar como las variables de estado para este sistema. En un sistema, un objeto de interés se llama **entidad**, y las propiedades de una entidad se llaman **atributos**. Por ejemplo, se podría describir a los clientes del banco como entidades, y las características de los clientes (como la ocupación de un cliente) se podrían definir como los atributos.

Los sistemas se podrían clasificar como discretos o continuos.

DEFINICIÓN ■ Un **sistema discreto** es uno en el que las variables de estado cambian sólo en puntos discretos o contables del tiempo. ■

Un banco es un ejemplo de un sistema discreto, puesto que las variables de estado cambian sólo cuando llega un cliente o cuando se termina de atender a un cliente y sale. Estos cambios tienen lugar en puntos discretos del tiempo.

DEFINICIÓN ■ Un **sistema continuo** es uno en el que las variables de estado cambian de forma continua con el tiempo.

Un proceso químico es un ejemplo de un sistema continuo. Aquí, el status del sistema está cambiando en forma continua con el tiempo. Estos sistemas por lo general se modelan por medio de ecuaciones diferenciales. En este capítulo no se analiza ningún sistema continuo.

Hay dos tipos de modelos de simulación: estático y dinámico.

DEFINICIÓN ■ Un **modelo de simulación estático** es una representación de un sistema en un punto particular en el tiempo. ■

Por lo general se hace referencia a una simulación estática como **simulación de Monte Carlo.**

DEFINICIÓN ■ Una **simulación dinámica** es una representación de un sistema a medida que evoluciona con el tiempo. ■

Dentro de esas dos clasificaciones, una simulación puede ser determinista o estocástica. Un **modelo de simulación determinista** es uno que no contiene variables aleatorias; un **modelo de simulación estocástico** contiene una o más variables aleatorias. Los modelos de simulación discretos y continuos son similares a los sistemas discretos y continuos. En este capítulo, se centra la atención en modelos estocásticos discretos. Estos modelos se llaman modelos de simulación de *eventos discretos*. La simulación de eventos discretos tiene que ver con el modelado de un sistema estocástico a medida que evoluciona con el tiempo mediante una representación en la que las variables de estado cambian sólo en puntos discretos del tiempo.

21.2 Ejemplo de una simulación de eventos discretos

Antes de proceder con los detalles del modelado de la simulación, será útil trabajar en un ejemplo de simulación simple para ilustrar algunos de los conceptos básicos de la simulación de eventos discretos. El modelo elegido como ejemplo inicial es un sistema de colas de un solo servidor. Los clientes llegan a este sistema a partir de alguna población y entran al servicio de inmediato si el servidor está desocupado o se unen a la línea de espera (cola) si el servidor está ocupado. Ejemplos de esta clase de sistemas son una peluquería con un solo peluquero, una pequeña dulcería con un solo cajero y un solo expendedor de boletos en una terminal aérea.

El mismo modelo se estudió en el capítulo 20 junto con la teoría de colas. En ese capítulo, se usó un modelo analítico para determinar las distintas características de operación del sistema. Sin embargo, se tuvo que hacer varias suposiciones restrictivas para usar la teoría de colas. En particular, cuando se estudió un sistema $M/M/1$, se supuso que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio tenían una distribución exponencial. En muchas situaciones, es posible que estas suposiciones no sean apropiadas. Por ejemplo, las llegadas a un mostrador de una aerolínea por lo general tienden a ocurrir en grupos, debido a factores como las llegadas de autobuses de transbordo y vuelos de conexión. Para este sistema, se debe usar una distribución de tiempos de llegada, lo que implica que ya no es factible el modelo analítico a partir de la teoría de colas. Con la simulación, se podría usar cualquier distribución de tiempos entre llegadas y tiempos de servicio, dando así mucha más flexibilidad al proceso de solución.

Para simular un sistema de colas, primero hay que describirlo. Para este sistema de un solo servidor, se supone que las llegadas se extraen de una población demandante infinita. Hay una capacidad ilimitada de la sala de espera, y los clientes serán atendidos en el orden que llegan; es decir, primero en llegar, primero en ser atendido (FCFS, *first come, first served*). Se supone además que las llegadas ocurren una a la vez en un modo aleatorio, con la distribución de tiempos entre llegadas como se especifica en la tabla 1. Finalmente se atienden a todos, con la distribución de tiempos de servicio mostrada en la tabla 2. Se supone también que los tiempos de servicio son aleatorios. Después del servicio, los clientes vuelven a la población demandante. Este sistema de líneas de espera se puede representar como se ilustra en la figura 1.

FIGURA 3
Diagrama de flujo para una salida

También, ahora se programa la siguiente llegada al sistema generando al azar un tiempo entre llegadas a partir de la distribución de tiempo entre llegadas y estableciendo el tiempo de arribo como

$$\text{Tiempo de llegada} = \text{tiempo de reloj en el momento} + \text{tiempo entre llegadas generado} \qquad (2)$$

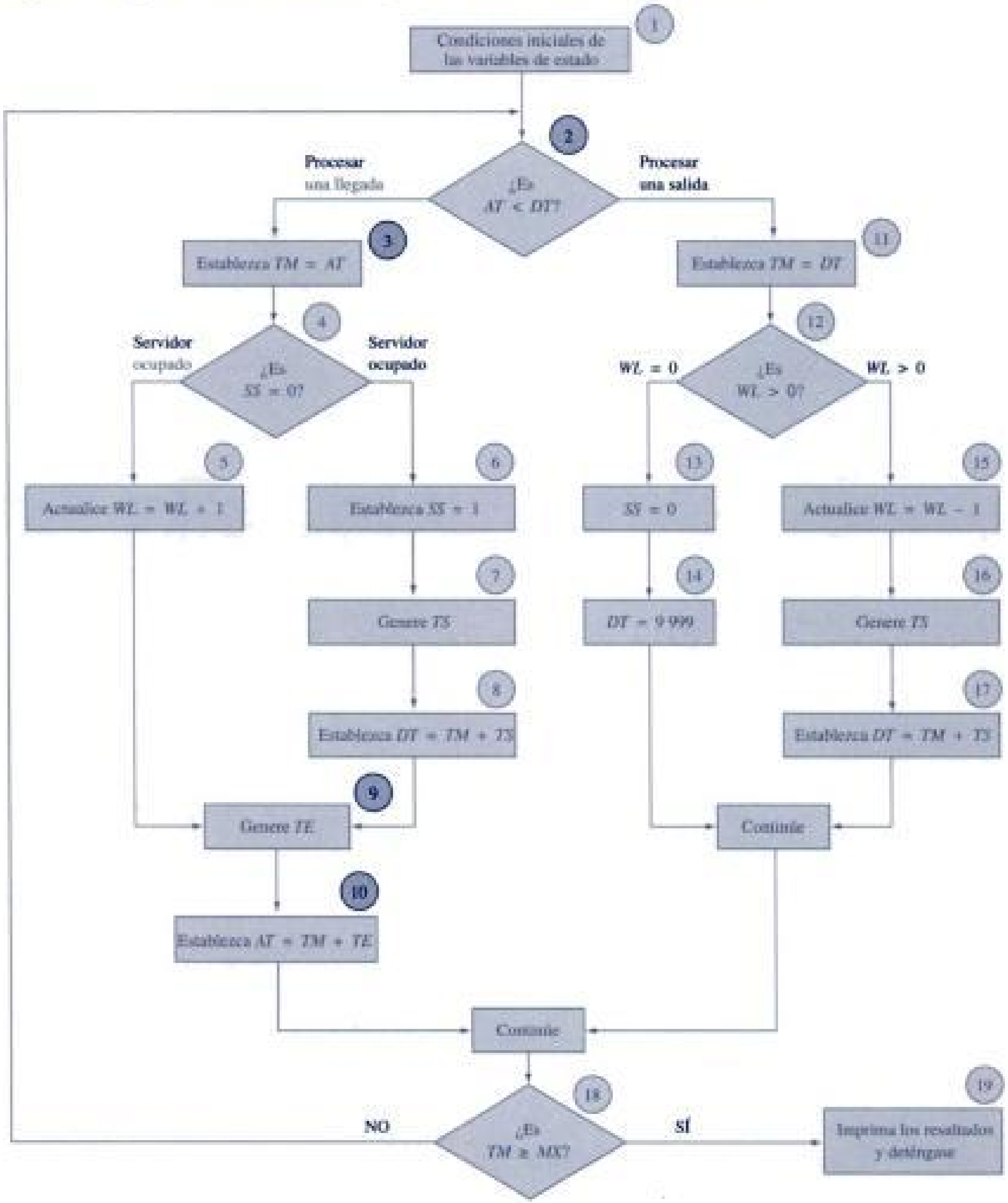
Si, por ejemplo, se generó un tiempo de servicio de dos minutos, entonces el tiempo de partida para el primer cliente se establecerá en el tiempo de reloj 2. De manera similar, si se generó un tiempo entre llegadas de un minuto, la siguiente llegada se programará para el tiempo de reloj 1.

Ambos eventos y sus tiempos programados se mantienen en la lista de eventos. Una vez completadas las acciones necesarias para la primera llegada, se explora la lista de eventos para determinar el siguiente evento programado y su hora. Si el siguiente evento se determina como una llegada, se mueve el tiempo de reloj al tiempo programado de llegada y se pasa por la secuencia anterior de acciones para una llegada. Si el siguiente evento es una salida, se mueve el tiempo de reloj al tiempo de salida y se procesa una salida. Para una salida, se comprueba si la longitud de la línea de espera es mayor que cero. Si es así, se quita al primer cliente de la cola y se comienza a atender al cliente estableciendo un tiempo de partida por medio de la ecuación (1). Si nadie está esperando, se fija el status del sistema a desocupado. Estas acciones de partida se resumen en la figura 3.

Este método de simulación se llama **mecanismo de tiempo de avance del siguiente evento**, debido a la forma como se actualiza el reloj. Se adelanta el reloj de simulación al tiempo de evento inminente más importante; es decir, el primer evento en la lista de eventos. Puesto que las variables de estado cambian sólo en los tiempos de evento, se pasan por alto los periodos de inactividad entre eventos saltando de un evento a otro. A medida que se pasa de un evento al siguiente, se llevan a cabo las acciones apropiadas para cada evento, incluso cualquier programación de eventos futuros. Se continúa de esta manera hasta que se satisface alguna condición de paro especificada previamente. Sin embargo, el procedimiento requiere que en algún punto de la simulación, se tenga una llegada y una salida programada para el futuro. Así, una llegada futura siempre se programa al procesar una nueva llegada al sistema. Por otro lado, un tiempo de partida sólo se puede programar cuando un cliente entra al servicio. Así, si el sistema está desocupado, no es posible programar salidas. En estos casos, la práctica usual es programar una salida ficticia estableciendo un tiempo de partida igual a un número muy grande, por ejemplo, 9 999 (o más grande si es probable que el tiempo de reloj sea mayor que 9 999). De esta manera, los dos eventos consistirán en una llegada real y una salida ficticia.

El salto al siguiente evento en el mecanismo podría ser uno largo o uno pequeño; es decir, los saltos en este método son de tamaño variable. Este enfoque se confronta con el **método de tiempo de avance de incremento fijo**. Con este método, se adelanta el reloj de simulación en incrementos de Δt unidades de tiempo, donde Δt es alguna unidad de tiempo apropiada, por lo común una unidad de tiempo. Después de cada actualización del reloj, se comprueba si algún evento está programado para que tenga lugar en el tiempo de reloj actual. Si está programado un evento, se llevan a cabo las acciones apropiadas para

FIGURA 4
Diagrama de flujo del modelo de simulación para el sistema de colas con un solo servidor



$= TM + TE$ (bloque 10). Puesto que $TE = 2$, se fija $AT = 2$. Es decir, la segunda llegada tendrá lugar al tiempo de reloj 2. Al final del suceso 1, la representación de computadora de la simulación será como se muestra en la tabla 4.

En esta etapa de la simulación, se procede a bloquear 18 para determinar si el tiempo de reloj, TM, ha excedido el tiempo de simulación especificado, MX. En caso afirmativo, imprima los resultados (bloque 19) y detenga la ejecución. A esto se le conoce como proceso de terminación. Este proceso se ejecuta al final de cada evento. Sin embargo, para este ejemplo, se supone que MX es un número grande. En consecuencia, de aquí en adelante, no se hablará del proceso de terminación.

TABLA 3
Tiempos entre llegadas y servicio generados

Número de cliente	Tiempo entre llegadas (*TE*)	Tiempo de servicio (*TS*)
1	—	3
2	2	3
3	2	2
4	3	1
5	4	1
6	2	2
7	1	1
8	3	2
9	3	—

TABLA 4
Representación de computadora de la simulación

Fin del evento	Tipo de evento	Número de cliente	Variables del sistema			Lista de eventos	
			TM	SS	WL	AT	DT
0	Condiciones iniciales	—	0	0	0	0	9 999
1	Llegada	1	0	1	0	2	3
2	Llegada	2	2	1	1	4	3
3	Salida	1	3	1	0	4	6
4	Llegada	3	4	1	1	7	6
5	Salida	2	6	1	0	7	8
6	Llegada	4	7	1	1	11	8
7	Salida	3	8	1	0	11	9
8	Salida	4	9	0	0	11	9 999
9	Llegada	5	11	1	0	13	12
10	Salida	5	12	0	0	13	9 999
11	Llegada	6	13	1	0	14	15
12	Llegada	7	14	1	1	17	15
13	Salida	6	15	1	0	17	16
14	Salida	7	16	0	0	17	9 999
15	Llegada	8	17	1	0	20	19

En este punto, se retorna al bloque 2 para determinar el siguiente evento. Puesto que $AT = 2$ y $DT = 3$, el siguiente evento, evento 2, será una llegada en el tiempo 2. Una vez determinado el siguiente evento, se adelanta la simulación al tiempo de este arribo actualizando *TM* a 2.

La llegada en el tiempo 2 encuentra ocupado al servidor, así que se coloca a este cliente en la línea de espera al actualizar *WL* de 0 a 1 (bloque 5). Puesto que el evento actual es una llegada, en este momento se programa la siguiente llegada al sistema. Dado que $TE = 2$ para la llegada 3, la siguiente llegada tiene lugar en el tiempo de reloj 4. Esto completa las acciones necesarias para el evento 2. De nuevo se retorna al bloque 2 para determinar el siguiente evento. A partir de la representación de computadora para el sistema en la tabla 4, se ve que en este punto (fin del evento 2), $DT = 3$ es menor que $AT = 4$. Esto implica que el siguiente evento, evento 3, será una salida en el tiempo de reloj 3. Se adelanta el reloj al tiempo de esta salida; es decir, se actualiza *TM* a 3 (bloque 11).

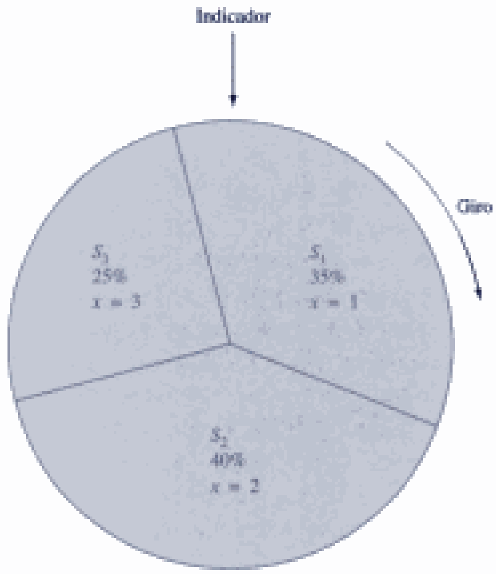


FIGURA 6
Segmentación de la ruleta

ría, a la larga, generar un tiempo de servicio de un minuto 35% de las veces, un tiempo de servicio de dos minutos 40% de las veces y un tiempo de servicio de tres minutos 25% de las veces. Además, para obtener las frecuencias correctas, el procedimiento de muestreo debe ser independiente de los tiempos de servicio antes y después de él.

Para lograr estas dos propiedades usando una ruleta, se divide la ruleta en tres segmentos, cada uno proporcional en área a la probabilidad en la distribución (véase la figura 6). Por ejemplo, al primer segmento (digamos, S_1) se le asigna 35% del área de la ruleta. Esta área corresponde a la probabilidad de .35 y el tiempo de servicio de un minuto. El segundo segmento, S_2 cubre 40% del área y corresponde a la probabilidad de .40 y el tiempo de servicio de dos minutos. Por último, el tercer segmento, S_3, se asigna al 25% de área restante, que corresponde a la probabilidad .25 y el tiempo de servicio de tres minutos. Si ahora se hace girar la ruleta y el indicador cae en el segmento S_1, significa que se generó un tiempo de servicio de un minuto. en el segmento S_2, dos minutos, y en el segmento S_3, tres minutos. Si la ruleta no está cargada, como se supone, entonces a la larga, (1) se generan los tiempos de servicio con aproximadamente la misma frecuencia especificada en la distribución y (2) los resultados de cada giro serán independientes de los resultados que le preceden y le siguen.

Ahora se amplía esta técnica por medio de intervalos de segmentación en lugar de áreas. Se supone que la ruleta tiene 100 números, que van de 00 a 99, inclusive. Si además se supone que la segmentación es tal que cada número tiene la misma probabilidad, .01, de aparecer. Con este método de segmentación, se asignan 35 números (por ejemplo, de 00 a 34) para el tiempo de servicio de un minuto. Puesto que cada número tiene la misma probabilidad, .01 de aparecer, los 35 números son equivalentes a una probabilidad de .35. De manera similar, si se asignan los números del 35 al 74 al tiempo de servicio de dos minutos y los números del 75 al 99 al tiempo de servicio de tres minutos, se logran las probabilidades deseadas. Como antes, se gira la ruleta para generar los tiempos de servicio, pero con este método, los números determinan directamente los tiempos de servicio. En otras palabras, si se genera un número entre 00 y 34, se establece el tiempo de servicio igual a un minuto; entre 35 y 74, a 2 minutos, y entre 75 y 99, a tres minutos.

Este procedimiento de segmentación y usar una ruleta es equivalente a generar números aleatorios enteros entre 00 y 99. Esto se deduce del hecho de que cada número aleatorio en una secuencia (en este caso de 00 a 99) tiene una probabilidad igual (en este caso, .01) de aparecer, y cada número aleatorio es independiente de los números antes y después de él.

TABLA 6
Función de distribución acumulada e intervalos de números aleatorios para tiempos entre llegadas

Tiempo entre llegadas (minutos)	Probabilidad	Probabilidad acumulada	Intervalos de números aleatorios
1	.20	.20	00–19
2	.30	.50	20–49
3	.35	.85	50–84
4	.15	1.00	85–99

En la computadora, esta transformación se logra al generar primero un número aleatorio $U(0, 1)$. A continuación, se multiplica al número por 100. Por último, se almacena el producto usando una variable entera; esta etapa final truncará la porción decimal del número. Con este procedimiento se obtienen los números aleatorios enteros entre 00 y 99. Los números pseudoaleatorios obtenidos con este procedimiento se listan en la tabla 5. (Estos números aleatorios se usarán en varios ejemplos después en este capítulo).

Ahora se formaliza este procedimiento y se utiliza para generar variables aleatorias para una variable aleatoria discreta. El procedimiento consiste en dos pasos: (1) se elabora la distribución de probabilidad acumulada (dpa) para la variable aleatoria, y (2) se usa la dpa para asignar los números aleatorios enteros a los distintos valores de la variable aleatoria. Para ilustrar este procedimiento, se usa la distribución de tiempos entre llegadas del ejemplo de colas de la sección 21.2 (véase la tabla 1). Si se elabora la dpa para esta distribución, se obtienen las probabilidades mostradas en la tabla 6. El primer tiempo entre llegadas de un minuto ocurre con una probabilidad de .20. Así, es necesario asignar 20 números aleatorios a este resultado. Si se asignan los 20 números de 00 a 19, se utiliza el intervalo de números aleatorios decimales de 0 a 0.19999. Observe que el extremo superior de este intervalo se ubica justo antes de la probabilidad acumulada de .20. Para el tiempo entre llegadas de dos minutos, se asignan 30 números aleatorios. Si se asignan los números enteros del 20 al 49, se observa que esto abarca el intervalo de números aleatorios decimales de 0.20 a 0.49999. Como antes, el extremo superior de este intervalo se ubica justo antes de la probabilidad acumulada de .20. Si ahora se asignan los números aleatorios enteros del 50 al 84 al tiempo entre llegadas de tres minutos, se observa que estos números se obtienen del intervalo de números aleatorios decimales de 0.50 (el mismo que la probabilidad acumulada asociada con un tiempo entre llegadas de dos minutos) a 0.84999, que es una fracción más pequeña que .85. Por último, se aplica el mismo análisis al tiempo entre llegadas de cuatro minutos. En otras palabras, la distribución de probabilidad acumulada permite asignar de manera directa los intervalos de números aleatorios enteros. Una vez especificados estos intervalos para una determinada distribución, todo lo que se debe hacer para obtener un valor de una variable aleatoria, es generar un número aleatorio entero compararlo con las asignaciones de números aleatorios. Por ejemplo, si el número aleatorio hubiera sido 35, esto trasladaría a un tiempo entre llegadas de dos minutos. De manera similar, el número aleatorio 67 trasladaría a un tiempo entre llegadas de tres minutos, etcétera. Ahora se demuestran estos conceptos en un ejemplo de una simulación de Monte Carlo.

21.4 Ejemplo de una simulación de Monte Carlo

En esta sección, se usa una simulación de Monte Carlo para simular un problema de vendedor de periódicos (véase capítulo 16).

TABLA 8
Distribución del tipo de demanda

Tipo de demanda	Probabilidad	Distribución acumulada	Intervalos de números aleatorios
Alta	.30	.30	00–29
Normal	.45	.75	30–74
Baja	.25	1.00	75–99

TABLA 9
Distribución por tipo de demanda

	Distribución acumulada			Intervalos de números aleatorios		
Demanda	Alta	Normal	Baja	Alta	Normal	Baja
36	.05	.10	.15	00–04	00–09	00–14
48	.15	.30	.40	05–14	10–29	15–39
60	.40	.60	.75	15–39	30–59	40–74
72	.70	.85	.90	40–69	60–84	75–89
84	.90	.95	.95	70–89	85–94	90–94
96	1.00	1.00	1.00	90–99	95–99	95–99

60(0.25) = \$15.00 en costos de producción y 12(0.15) = \$1.80 en costos de ganancias perdidas (debido al déficit de 12 hogazas). Esto da una ganancia neta de 24.00 − 15.00 − 1.80 = \$7.20 para ese día.

Con este procedimiento, se calcula un margen de ganancia para cada día en la simulación. Para evaluar una política, se ejecuta la simulación para un número fijo de días para la política específica. Al final de la simulación, se promedian los márgenes de ganancia en el conjunto número de días para obtener el margen de ganancia esperado por día para la política. Observe que el procedimiento en esta simulación es diferente de la simulación de colas, en que la simulación actual no evoluciona con el tiempo de la misma manera. Aquí, cada día es una simulación independiente. A este tipo de simulaciones se les conoce como **simulaciones de Monte Carlo.**

Para ilustrar este procedimiento, se presenta en la tabla 10 una simulación manual para los primeros 15 días para una política donde se hornean 60 hogazas por día. De esta tabla, la demanda para el día 1 y el día 2 resulta ser 60 hogazas. (Los números aleatorios usados en este ejemplo se obtuvieron de la tabla 5.) Esta demanda genera un ingreso de \$24.00 para cada uno de estos días. Puesto que hornear 60 hogazas cuesta \$15.00, el margen de ganancia para cada uno de los dos primeros días es \$9.00. El día 3, la demanda es 72, con lo que se obtiene un déficit de 12 hogazas. Como se muestra en la tabla, el margen de ganancia para el día 3 es \$7.20 (24.00 − 15.00 − 1.80). El día 4, se genera una demanda de 48. Puesto que la política es hornear 60 hogazas, se quedarán 12. Las 48 hogazas vendidas producen ingresos de sólo \$19.20. Sin embargo, las 12 hogazas sobrantes proporcionan un ingreso de salvamento adicional de \$1.20, dando una ganancia de \$5.40 (19.20 + 1.20 − 15.00) para el día 4.

Si ahora se completa la simulación manual para el periodo de 15 días, la ganancia total obtenida durante este tiempo llega a \$97.20. Esto da una cifra de ganancia diaria promedio de $\frac{97.20}{15}$ = \$6.48. Sin embargo, esto no se puede aceptar como el margen de ganancia final para esta política. Es probable que los resultados de la simulación en este corto periodo sean altamente dependientes de la secuencia de números aleatorios generados, así que no pueden ser aceptados como estadísticamente válidos. La simulación tendría que llevarse a cabo en un largo periodo antes que el margen de ganancia se pudiera aceptar como verdaderamente representativo. Estos temas estadísticos se analizan después. Mientras

ciones cuya dpa no existe en forma cerrada, es posible usar algún método numérico, como un desarrollo en serie de potencias, dentro del algoritmo para evaluar una dpa. Sin embargo, es probable que esto complique el procedimiento a tal grado que sea más eficaz usar un algoritmo diferente para generar las variables aleatorias. El MTI es relativamente fácil de describir y ejecutar. Consiste en los tres pasos siguientes:

Paso 1 Dada una función de densidad de probabilidad $f(x)$ para una variable aleatoria **X**, obtenga la función de distribución acumulada $F(x)$ como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Paso 2 Genera un número aleatorio r.

Paso 3 Establezca $F(x) = r$ y determine el valor de x. La variable x es entonces una variable aleatoria a partir de la distribución cuya dpa está dada por $f(x)$.

Ahora se describen los mecanismos del algoritmo usando un ejemplo. Para esto, se considera la distribución dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Una función de este tipo se llama **función de rampa**. Su gráfica es como la que se ilustra en la figura 7. El área bajo la curva, $f(x) = \frac{x}{2}$, representa la probabilidad de la ocurrencia de la variable aleatoria **X**. Se supone que en este caso, **X** representa los tiempos de servicio de un cajero. Para obtener las variables aleatorias de esta distribución por medio del método de transformación inversa, primero se calcula la dpa como

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{t}{2}\, dt$$
$$= \frac{x^2}{4}$$

Esta distribución de probabilidad acumulada se representa de manera formal por la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

A continuación, en el paso 2, se genera un número aleatorio r. Por último, en el paso 3, se establece $F(x) = r$ y se determina el valor de x.

$$\frac{x^2}{4} = r$$
$$x = \pm 2\sqrt{r}$$

Puesto que los tiempos de servicio se definen sólo para valores positivos de x, no es factible un tiempo de servicio de $x = -2\sqrt{r}$. Esto nos deja con $x = 2\sqrt{r}$ como la solución para x. Esta ecuación se llama **generador de variables aleatorias** o un **generador de proceso.** Así, para obtener un tiempo de servicio, primero se genera un número aleatorio y luego se transforma por medio de la ecuación anterior. Con cada ejecución de la ecuación se obtiene un tiempo de servicio a partir de la distribución. Por ejemplo, si se obtiene un número aleatorio $r = 0.64$, se generará un tiempo de servicio de $x = 2\sqrt{0.64} = 1.6$.

Utilice el MTI para generar observaciones a partir de esta variable aleatoria.

Solución La dpa de esta distribución está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x - a}{b - a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Para usar el MTI y generar observaciones bajo la distribución uniforme, primero se genera un número aleatorio r y luego se fija $F(x) = r$ para determinar el valor de x. Esto da

$$\frac{x - a}{b - a} = r$$

De esta ecuación se despeja el valor de x, entonces

$$x = a + (b - a)r$$

como el generador de proceso para la distribución uniforme. Por ejemplo, $r = \frac{1}{2}$ da $x = \frac{a+b}{2}$, $r = 1$ produce $x = b$, $r = 0$ produce $x = a$, etcétera.

EJEMPLO 4 Distribución triangular

Considere una variable aleatoria **X** cuya fdp está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - 2) & 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(2 - \frac{x}{3}) & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Utilice el MTI para generar las observaciones a partir de la distribución. Esta distribución, llamada distribución *triangular*, se representa gráficamente en la figura 9. Ésta tiene los puntos extremos [2, 6], y su moda es 3. Se puede ver que 25% del área bajo la curva yace en el intervalo de x de 2 a 3, y el otro 75% se ubica en el intervalo de 3 a 6. En otras palabras, 25% de los valores de la variable aleatoria **X** están entre 2 y 3, y el otro 75% cae entre 3 y 6. En otras palabras, el 25% de los valores de la variable aleatoria **X** cae entre 2 y 3, y el otro 75% cae entre 3 y 6. La distribución triangular tiene aplicaciones importantes en la simulación. Se utiliza a menudo para representar actividades para las que hay pocos o ningún dato. (Para una explicación detallada de esta distribución, véase Banks y Carson (1984) o Law y Kelton (1991).

Solución La dpa de esta distribución triangular está dada por la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \frac{1}{4}(x - 2)^2 & 2 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{12}(x^2 - 12x + 24) & 3 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Para simplificar, se vuelve a definir $F(x) = (\frac{1}{4})(x - 2)^2$, para $2 \leq x \leq 3$, as $F_1(x)$, como $F(x) = (-\frac{1}{12})(x^2 - 12x + 24)$, para $3 \leq x \leq 6$, como $F_2(x)$.

Esta dpa se puede expresar de manera gráfica como se ilustra en la figura 10. Observe que en $x = 3$, $F(3) = 0.25$. Esto significa que la función $F_1(x)$ cubre el primer 25% del intervalo de la dpa y $F(x_2)$ aplica en el 75% restante del intervalo. Puesto que ahora tenemos dos funciones separadas que representan la dpa, el MTI tiene que ser modificado para explicar estas dos funciones, sus intervalos y la distribución de intervalos. Según el alcance del MTI, la distribución de los intervalos es la más importante. Esta distribución se logra por medio del número aleatorio del paso 2. En otras palabras, si $r < 0.25$, se usa la

Paso 4 Evalúe la función $f(x)$ en el punto x^*. Sea ésta $f(x^*)$.

Paso 5 Si

Entonces x^* es una variable aleatoria bajo la distribución cuya fdp es $f(x)$. En caso contrario rechazar a x^* y regresar al paso 2.

$$r_2 \leq \frac{f(x^*)}{M}$$

Observe que el algoritmo continúa retornando al paso 2 hasta que se acepta una variable aleatoria. Esto podría requerir varias iteraciones. Por esta razón, el algoritmo puede ser relativamente ineficaz. Sin embargo, la eficiencia depende mucho de la forma de la distribución. Hay varias formas mediante las que se puede hacer más eficaz el método. Una de éstas es usar una función en el paso 1 en lugar de una constante. Véase Fishman (1978) o Law y Kelton (1991) para los detalles del algoritmo.

Ahora se ilustran los detalles del algoritmo usando una función de rampa. Considere una variable aleatoria **X** cuya fdp está dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En el paso 1 del MAR, por lo general se utiliza la gráfica de la fdp. Puesto que el objetivo es obtener el valor más grande de $f(x)$ en el dominio de la función, la graficación permitirá determinar el valor de M simplemente por inspección. La gráfica de la fdp se muestra en la figura 11. Se observa que el valor más grande de $f(x)$ ocurre en $x = 1$ y es igual a 2. En otras palabras, se establece $M = 2$ en el paso 1. A continuación, se generan dos números aleatorios, r_1 y r_2. En el paso 3, se transforma el primer número aleatorio, r_1, en un valor **X**, x^*, usando la relación $x^* = a + (b - a)r_1$. Este paso es simplemente un procedimiento para generar al azar un valor de la variable aleatoria **X**. Dado que se está usando un número aleatorio r_1 para determinar x^*, cada valor en el intervalo $[a, b]$ tiene una probabilidad igual de aparecer. Observe que si $r_1 = 0$, x^* será igual a a, el punto final izquierdo del dominio. De manera similar, si $r_1 = 1$, x^* será igual a b, el punto final derecho del dominio. Puesto que $a = 0$ y $b = 1$ para esta distribución, se deduce que $x^* = r_1$. Este valor de x^* ahora se convierte en la variable aleatoria potencial para la iteración actual. En los pasos 4 y 5, se tiene que determinar si se acepta o se rechaza x^*. Primero se evalúa la función $f(x)$ en $x = x^*$ para obtener $f(x^*)$ y luego se calcula $\frac{f(x^*)}{M}$. Si $r_2 \leq \frac{f(x^*)}{M}$, se acepta x^*. De lo contrario, se rechaza x^*. Sustituyendo $x^* = r_1$ en $f(x)$ se obtiene $f(x^*) = 2r_1$. Puesto que $M = 2$, el término $\frac{f(x^*)}{M}$ se reduce a r_1. Dado esto, la regla de decisión (en el paso 5) para aceptar x^* se simplifica a una comparación de r_2 y r_1. Si $r_2 \leq r_1$, se acepta x^* como la variable aleatoria. De lo contrario, se vuelve al paso 2 y se repite el proceso hasta que se obtiene una aceptación.

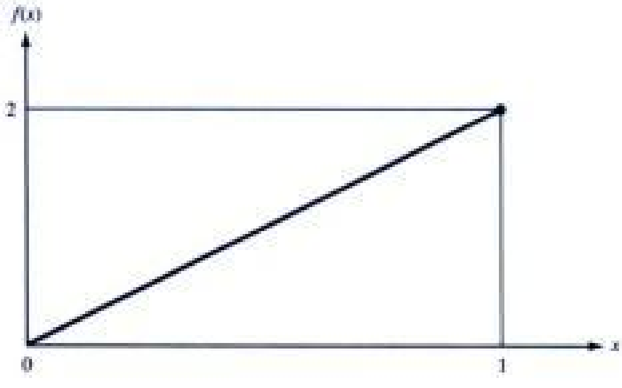


FIGURA 11
Función de densidad de probabilidad tipo rampa

Por ejemplo, si $r_1 = 0.7$ y $r_2 = 0.6$, se elige $x = 0.7$, y si $r_1 = 0.7$ y $r_2 = 0.8$, no se genera ningún valor de la variable aleatoria. Para este problema, exactamente la mitad de las variables generadas en el paso 3 serán rechazadas en el paso 5.

EJEMPLO 5 Método de aceptación-rechazo

Utilice el método de aceptación-rechazo para generar variables aleatorias a partir de una distribución rectangular cuya fdp está dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6} + \frac{x}{12} & 2 \leq x \leq 6 \\ \frac{4}{3} - \frac{x}{6} & 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Solución Por simplicidad, se redefine $f(x) = -\frac{1}{6} + \frac{x}{12}$ como $f_1(x)$ y $f(x) = \frac{4}{3} - \frac{x}{6}$ como $f_2(x)$. Esta distribución se representa gráficamente en la figura 12.

Puesto que esta distribución se define en dos intervalos, se deben modificar los pasos del método de aceptación-rechazo para considerar estos intervalos. No obstante, los primeros tres pasos del algoritmo, son los mismos que antes. Es decir, el paso 1 determina M, el paso 2 genera r_1 y r_2 y el paso 3 transforma r_1 en un valor x^* de $\mathbf{X}$.

A partir de la gráfica en la fdp de la figura 12, es claro que $M = \frac{1}{3}$. Esta distribución tiene los puntos extremos [2, 8], lo que significa que $a = 2$ y $b = 8$. Si ahora se sustituyen estos puntos extremos en el paso 3, los valores x^* se generan mediante la ecuación $x^* = 2 + 6r_1$. Entonces se observa que si r_1 está entre 0 y $\frac{2}{3}$, x^* estará en el intervalo de 2 a 6. Si $r_1 > \frac{2}{3}$, x^* se encuentra en el intervalo [6, 8]. Para explicar esto, se hace la primera modificación en el paso 4. Si x^* se ubica entre 2 y 6, entonces en el paso 4, se usa la función $f_1(x)$ para evaluar $f(x^*)$. De lo contrario, se utiliza $f_2(x)$ para calcular $f(x^*)$. El paso 4 ahora se puede resumir como sigue: si $2 \leq x^* \leq 6$,

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f_1(x^*) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{x^*}{12} \\ &= \frac{r_1}{2} \end{aligned}$$

Si $6 \leq x^* \leq 8$,

$$\begin{aligned} f(x^*) &= f_2(x^*) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{x^*}{6} \\ &= 1 - r_1 \end{aligned}$$

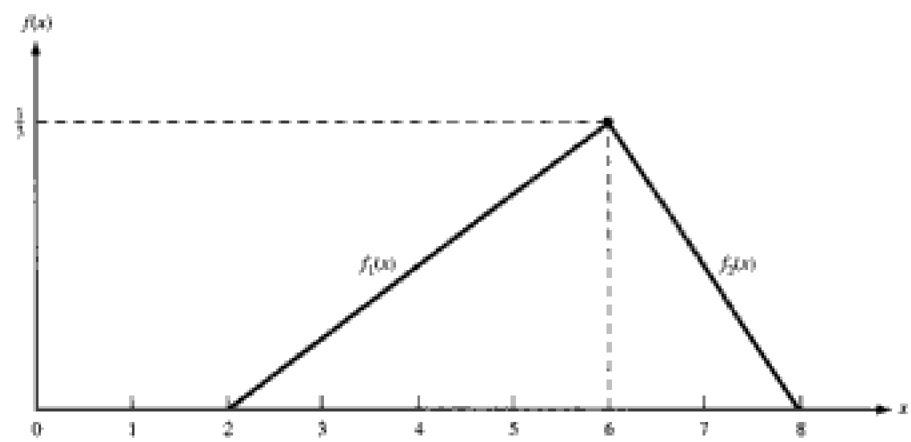


FIGURA 12
La fdp de la distribución triangular para el ejemplo 5

El paso siguiente en el algoritmo es aceptar o rechazar el valor actual de x^*. Se acepta x^* si se satisface la condición $r_2 \leq \frac{f(x^*)}{M}$. Sin embargo, siguiendo el paso 4, se necesita evaluar esta condición en los dos intervalos sustituyendo la función apropiada, $f(x^*)$, en la relación. En otras palabras, el paso 5 para esta distribución ahora será como sigue: para $2 \leq x^* \leq 6$, se acepta x^* si $r_2 \leq \frac{f_1(x^*)}{M}$; es decir, $r_2 \leq \frac{3r_1}{2}$. Para $6 \leq x^* \leq 8$, aceptamos x^* si $r_2 \leq \frac{f_2(x^*)}{M}$ si $r_2 \leq 3(1 - r_1)$. Si se rechaza x^*, se vuelve al paso 2 y se repite el proceso.

Como antes, se rechazan algunos de los valores de x^*. En este caso, la probabilidad de aceptar una variable aleatoria es .5. Es decir, la mitad de las variables aleatorias generadas en el paso serán, a la larga, rechazadas en el paso 5.

Ahora se da una justificación intuitiva de la validez del MAR. En particular, se desea mostrar que el MAR genera observaciones a partir de la variable aleatoria específica $\mathbf{X}$. Para cualquier número x el MAR debe producir $P(x \leq \mathbf{X} \leq x + \Delta) = f(x)\Delta$. Ahora la probabilidad de que el MAR genere una observación entre x y $x + \Delta$ está dada por

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \text{(probabilidad de que las primeras } i-1 \text{ iteraciones no produzcan valor y la } i\text{-ésima iteración produzca un valor entre } x \text{ y } x+\Delta)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{1}{M(b-a)}\right)^{i-1} \frac{f(x)\Delta}{M(b-a)}$$

$$= \frac{f(x)\Delta}{M(b-a)} \left(\frac{1}{1 - (1 - 1/(M(b-a)))}\right) = f(x)\Delta$$

donde se ha utilizado el hecho de que en cualquier iteración del MAR, haya una probabilidad $1/M(b-a)$ de que se genere un valor de la variable aleatoria (véase el problema 6), y que para $c < 1$,

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} c^{i-1} = \frac{1}{1-c}$$

Métodos directos y de convolución para la distribución normal

Debido a la importancia de la distribución normal, se ha puesto considerable atención para generar variables aleatorias normales. Esto ha dado como resultado muchos algoritmos diferentes para la distribución normal. Tanto el método de transformación inversa como el método de aceptación-rechazo, son inapropiados para la distribución normal, porque (1) la dpa no existe en forma cerrada y (2) la distribución no está definida en un intervalo finito. Aunque es posible usar métodos numéricos en el MTI y truncar la distribución para el método de aceptación-rechazo, otros métodos tienden a ser más eficaces. En esta sección, se describen dos de estos métodos; primero, un algoritmo basado en técnicas de convolución, y luego un algoritmo de transformación directa que produce dos variables normales estándar con media 0 y varianza 1.

Algoritmo de convolución

En el algoritmo de convolución, se hace uso directo del teorema del límite central. El teorema del límite central establece que la suma $\mathbf{Y}$ de n variables aleatorias independientes y distribuidas de manera idéntica (por ejemplo, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$, cada una con media μ y variancia finita σ^2) tiene una distribución aproximadamente normal con media $n\mu$ y variancia $n\sigma^2$. Si ahora se aplica esto a $R(0, 1)$ variables aleatorias, $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n$, con media $\mu = 0.5$ y $\sigma^2 = \frac{1}{12}$, se deduce que

$$\mathbf{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i - 0.5n}{(\frac{n}{12})^{1/2}}$$

es aproximadamente normal con media 0 y varianza 1. Se esperaría que esta aproximación funcione mejor a medida que aumenta el valor de n. Sin embargo, en la mayor parte de la información relacionada con la simulación, se recomienda usar un valor de $n = 12$. Usar la ecuación 12 no sólo parece adecuado, sino que, más importante, tiene la ventaja de que simplifica el procedimiento de cálculo. Si ahora se sustituye $n = 12$, en la ecuación anterior, el generador de proceso se simplifica a

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{12} \mathbf{R}_i - 6$$

Esta ecuación evita una raíz cuadrada y una división, que son rutina relativamente tardadas en una computadora.

Si se quiere generar una variable normal $\mathbf{X}$ con media μ y varianza σ^2, primero se genera $\mathbf{Z}$ usando este generador de proceso y luego se transforma por medio de la relación $\mathbf{X} = \mu + \sigma\mathbf{Z}$. Observe que esta convolución es única para la distribución normal y se puede ampliar a otras distribuciones. Por supuesto, otras distribuciones se prestan a los métodos de convolución. Por ejemplo, se pueden generar variables aleatorias a partir de una distribución Erlang con el parámetro de forma k y el parámetro de proporcionalidad $k\lambda$, usando el hecho de que una variable aleatoria de Erlang se puede obtener mediante la suma de k variables aleatorias exponenciales iid, cada una con parámetro $k\lambda$.

Método directo

Box y Muller (1958) elaboraron el método directo para la distribución normal. Aunque no es tan eficaz como algunas de las nuevas técnicas, es fácil aplicarlo y ejecutarlo. El algoritmo genera dos números aleatorios $R(0, 1)$, r_1 y r_2, y luego los transforma en dos variables aleatorias normales, cada una con media 0 y varianza 1, usando las transformaciones directas

$$\mathbf{Z}_1 = (-2 \ln r_1)^{1/2} \operatorname{sen} 2\pi r_2$$
$$\mathbf{Z}_2 = (-2 \ln r_1)^{1/2} \cos 2\pi r_2$$

Al igual que en el método de convolución, es fácil transformar estas variables normales estandarizadas en variables normales $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ a partir de la distribución con media μ y varianza σ^2, usando las ecuaciones

$$\mathbf{X}_1 = \mu + \sigma\mathbf{Z}_1$$
$$\mathbf{X}_2 = \mu + \sigma\mathbf{Z}_2$$

El método directo produce variables aleatorias normales, en tanto que el método de convolución da sólo variables aleatorias normales aproximadas. Por esta razón, el método directo se utiliza con más frecuencia. Para los detalles de éstos y otros algoritmos normales, véase Fishman (1978) o Law y Kelton (1991).

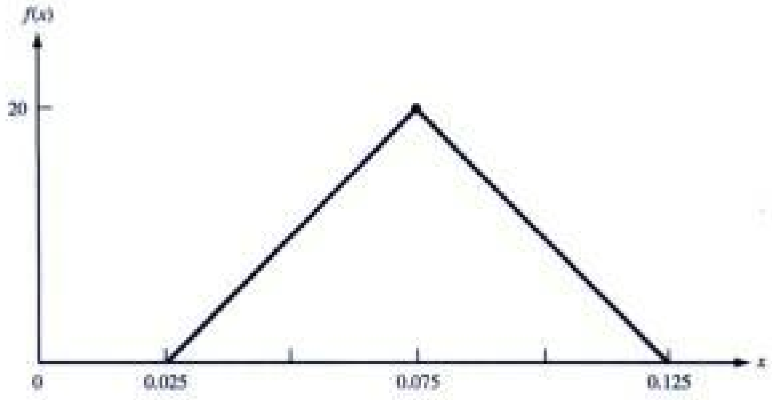


FIGURA 15
La fdp de los tiempos de reparación

el objetivo principal en la simulación es determinar el ingreso neto para un número fijo de terminales.

Para calcular el ingreso neto, primero se calcula el número promedio de terminales en línea, EL_n (o equivalentemente, el número promedio de terminales en tiempo de inactividad, ED_n), para un número fijo de terminales en el sistema, n. De hecho, ED_n es igual a $n - EL_n$. Una vez que se tiene un valor para EL_n, se pueden calcular los costos semanales esperados de tiempo de inactividad, dados por $1000(10 - EL_n)$. Entonces el incremento en los ingresos como resultado de aumentar el número de terminales de 11 a n es $1000(EL_n - EL_{11})$.

Matemáticamente, EL_n se calcula como

$$EL_n = \frac{\int_0^T N(t)dt}{T} = \frac{\sum_{i=1}^{m} A_i}{T}$$

donde

T = longitud de la simulación

$N(t)$ = número de terminales en línea en el tiempo t $\qquad (0 \leq t \leq T)$

A_i = área del rectángulo bajo $N(t)$ entre e_{i-1} y e_i (donde e_i es el tiempo del i-ésimo evento)

m = número de eventos que ocurren en el intervalo $[0, T]$

Este cálculo se ilustra en la figura 16 para $n = 10$. En este ejemplo, se empieza con 10 terminales en línea en el tiempo 0. Entre el tiempo 0 y el tiempo e_1, el tiempo del primer evento, el tiempo total en línea para las terminales está dado por $10e_1$, puesto que cada terminal está en línea durante un periodo de e_1 unidades de tiempo. De manera similar, el tiempo total en línea entre los eventos 1 y 2 es $9(e_2 - e_1)$, dado que la descompostura en el tiempo e_1 nos deja sólo con nueve terminales funcionando entre el tiempo e_1 y e_2. Si ahora se ejecuta esta simulación en T unidades de tiempo y se suman las áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots$, se puede obtener una estimación para EL_{10} dividiendo esta suma entre T. Esta estadística se llama **estadística de tiempo promedio**. Siempre que la simulación se ejecute por un periodo suficientemente largo, la estimación para EL_{10} debe estar bastante cerca de la real.

En esta simulación, sería conveniente preparar el proceso de tal manera que fuera posible reunir las estadísticas para calcular las áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots$. Es decir, a medida que se pasa de un evento a otro, nos gustaría seguir la pista de por lo menos el número de terminales en línea entre los eventos y el tiempo entre eventos. Para hacer esto, primero se define el estado del sistema como el número de terminales en el taller de reparación. A partir de esta definición, se deduce que la única vez que cambia el estado del sistema es cuando hay una avería o la terminación de una reparación. Esto indica que hay dos eventos en esta simulación: descompostura y terminación de reparaciones.

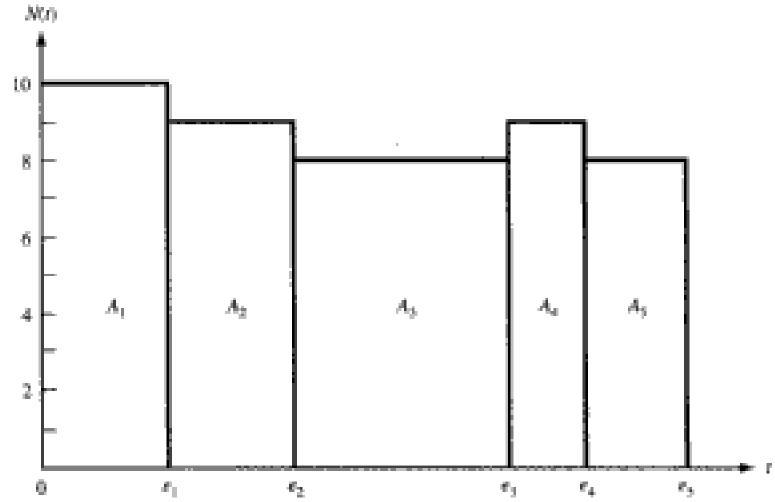


FIGURA 16
Cálculo de EL_{10}

Para preparar la simulación, la primera tarea es determinar los generadores de proceso para los tiempos de descompostura y reparación. Puesto que ambas distribuciones tienen dpa en forma cerrada, se usa el MIT para elaborar los generadores de proceso. Para la distribución exponencial, el generador de proceso es simplemente

$$x = -\log r$$

En el caso de los tiempos de reparación, aplicando el MTI se obtiene

$$x = 0.025 + \sqrt{0.005r} \qquad (0 \leq r \leq 0.5)$$

y

$$x = 0.125 - \sqrt{0.005(1 - r)} \qquad (0.5 \leq r \leq 1.0)$$

como generadores de proceso.

Dentro de este experimento, se ejecutan varias simulaciones distintas, una para cada valor diferente de n. Puesto que n en el presente es igual a 11, se empieza el experimento con este número y se incrementa n hasta que los ingresos netos alcanzan un máximo. Para cada n, se empieza la simulación en el estado donde no hay terminales en el taller de reparación. En este estado, los 10 operadores están en línea y cualquier terminal restante en el grupo de reserva.

La primera acción en la simulación es programar la primera serie de eventos, los tiempos de descompostura para las terminales actualmente en línea. Esto se hace de la manera usual, generando una variable aleatoria exponencial para cada terminal en línea a partir de la distribución de descompostura y estableciendo el tiempo de descompostura, sumando este tiempo generado al tiempo de reloj actual, que es cero. Habiendo programado estos eventos, a continuación se determina el primer evento, la primera descompostura, buscando en la lista actual de eventos. Luego se mueve el reloj de simulación al tiempo de este evento y se procesa esta descompostura.

Para procesar una descompostura, se toman dos series de acciones separadas: (1) Determinar si hay una terminal de reserva. Si es así, ésta se pone en servicio y se programa el tiempo de descompostura para esta terminal. Si no hay ninguna disponible, actualice la posición de pedidos atrasados. (2) Determine si está desocupado el personal de reparación. En caso afirmativo, inicie la reparación en la terminal descompuesta, generando una variable aleatoria a partir de la distribución de tiempos de servicio y programando el tiempo de terminación de la reparación. Si el personal de reparación está ocupado, coloque la terminal descompuesta en la cola de reparación. Una vez completadas estas dos series de acciones, ahora se actualizan los contadores de estadísticas. Estas acciones se resumen en el

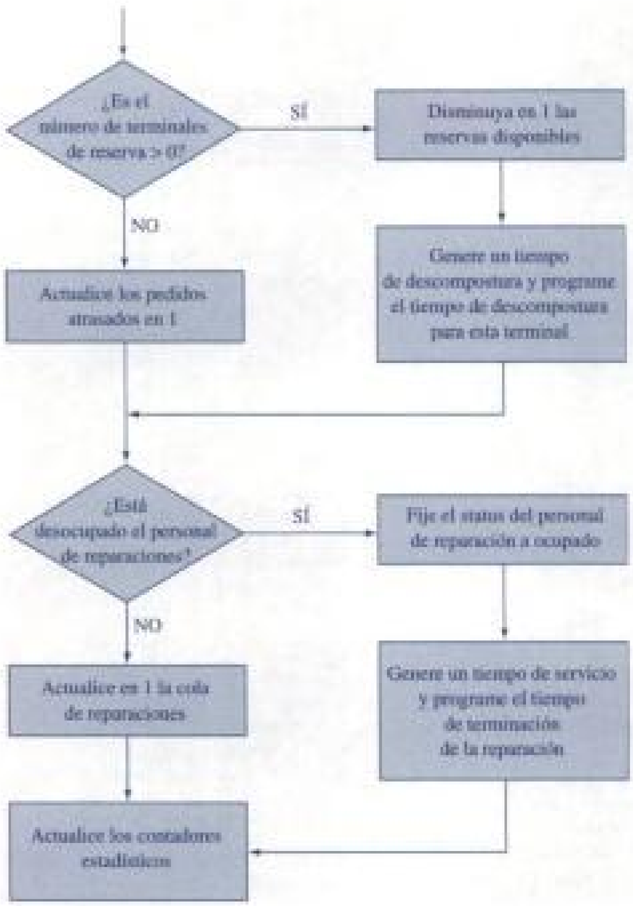


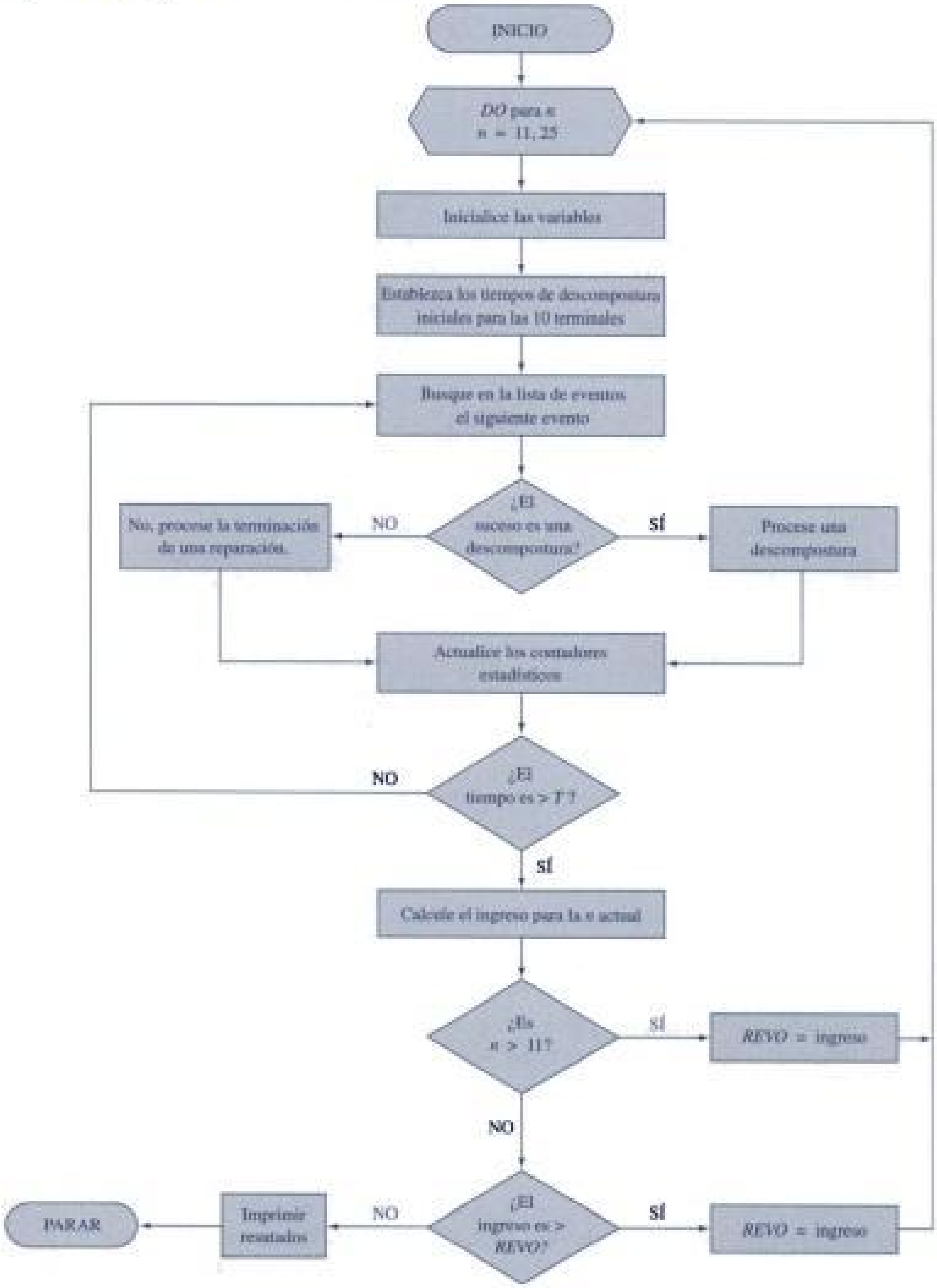
FIGURA 17
Diagrama de flujo para una descompostura

diagrama de flujo del sistema en la figura 17. Se procede con la simulación determinando el siguiente evento y moviendo el reloj al tiempo de este evento, si el siguiente evento es otra descompostura, se repite la serie de acciones anterior. De lo contrario, se procesa la terminación de una reparación.

Para procesar la terminación de una reparación, también se emprenden dos series de acciones. (1) Al terminar una reparación, se tiene una terminal de trabajo adicional, así que se determina si la terminal va directamente a un operador o al grupo de terminales de reserva. Si existe un pedido atrasado, se lleva la terminal al servicio y se programa el tiempo de descompostura para esta terminal en la forma usual. Si ningún operador está esperando una terminal, ésta entra al grupo de reserva. (2) Se comprueba la cola de reparación para ver si hay alguna terminal en espera para ser reparada. Si la cola es mayor que cero, se lleva la primer terminal de la cola a reparación y se programa el tiempo de terminación de esta reparación. De lo contrario, se fija el status del personal de reparación en desocupado. Por último, al completar estas acciones, se actualizan los contadores estadísticos. Esta parte de la simulación se resume en la figura 18.

Se procede con la simulación (para una n determinada) pasando de un evento a otro hasta el tiempo de terminación T. En este momento, se calculan las medidas pertinentes de desempeño a partir de los contadores estadísticos. La medida clave es el ingreso neto del valor actual de n. Si este ingreso es mayor que el ingreso para un sistema con $n - 1$ terminales, se incrementa el valor de n en 1 y se repite la simulación con $n + 1$ terminales en el sistema. De lo contrario, el ingreso neto ha alcanzado un máximo. Si éste es el caso, se detiene el experimento y se aceptan $n - 1$ terminales como el número óptimo de terminales para tener en el sistema. Este experimento de simulación se resume en la figura 19. Pa-

FIGURA 19
Diagrama de flujo para la simulación de terminales



inventario de inicio en un determinado día es el inventario final del día anterior, de modo que se crea una correlación. Esto significa que los métodos clásicos de estadística, en los que se supone independencia, no son aplicables directamente a los análisis de datos de salida en la simulación. Así, se deben modificar los métodos estadísticos para hacer inferencias adecuadas a partir de datos de simulación.

Además del problema de autocorrelación, podría haber un segundo problema, en que la especificación de las condiciones iniciales del sistema en el tiempo 0 podría influir en los datos de salida. Por ejemplo, suponga que en la simulación de colas de la sección 9.2, las distribuciones de llegada y de servicio son tales que el tiempo de espera promedio por cliente excede los 15 minutos. En otras palabras, el sistema está altamente congestionado. Si se comenzara la simulación sin nadie en el sistema, los primeros clientes tendrían tiempos de espera muy pequeños o cero. Estos tiempos de espera iniciales dependen mucho de las condiciones de inicio y, por lo tanto, podrían no ser representativos del comportamiento de estado estable del sistema. Este periodo inicial antes que una simulación alcance el estado estable se llama **periodo transitorio** o **periodo de calentamiento**.

Hay dos formas de superar los problemas asociados con el periodo transitorio. El primer método es usar un conjunto de condiciones iniciales que son representativas del sistema en estado estable. Sin embargo, en muchas simulaciones, podría ser difícil establecer tales condiciones iniciales. Esto es particularmente cierto en las simulaciones de colas. Otro método es dejar que la simulación se ejecute durante un tiempo y desechar la parte inicial de la simulación. Con este método, se está suponiendo que la parte inicial de la simulación calienta el modelo hasta un estado de equilibrio. Puesto que no se reúnen estadísticas durante la etapa de calentamiento, se puede reducir mucho el sesgo de inicialización. Infortunadamente, no hay formas fáciles de evaluar cuánto eliminan o reducen los datos iniciales el sesgo de inicialización a niveles insignificantes. Puesto que cada modelo de simulación es diferente, corresponde al analista determinar cuando termina el periodo transitorio. Aunque éste es un proceso difícil, hay algunas normas generales que se pueden usar. Para estos y otros detalles de este tema, véase Law y Kelton (1991).

Tipos de simulación

Para el propósito de analizar los datos de salida, por lo general las simulaciones se clasifican en una de dos clases: simulaciones de terminación y simulaciones de estado estable. Una **simulación de terminación** es una que se ejecuta durante un tiempo T_E, donde E es evento especificado (o eventos) que detiene la simulación. El evento E puede ser un tiempo especificado, en cuyo caso la simulación se ejecuta durante una cantidad fija de tiempo. O bien, si es una condición especificada, la duración de la simulación será una variable aleatoria. Una **simulación de estado estable** es una que se ejecuta en un largo periodo; es decir, la duración de la simulación se va al "infinito".

Es común que el tipo de modelo determine qué tipo de análisis de resultados es apropiado para una simulación particular. Por ejemplo, en la simulación de un banco, es más probable que se utilice una simulación de terminación, puesto que físicamente el bando cierra todas las tardes, con lo que se tiene un evento de terminación apropiado. Cuando se simula en un sistema de computadora, podría ser más apropiada una simulación de estado estable, puesto que la mayor parte de los grandes sistemas de computadoras no paran, excepto en casos de descomposturas o mantenimiento. Sin embargo, es posible que el sistema o modelo no siempre sea el mejor indicador de cuál simulación sería la más apropiada. Es bastante posible usar el método de simulación de terminación para sistemas más adecuados para simulaciones de estado estable, y viceversa. En esta sección, se da una descripción detallada del análisis estadístico asociado con las simulaciones se terminación. El análisis para las simulaciones de estado estable es mucho más complejo. Para los detalles, véase Banks y Carson (1984) o Law y Kelton (1991).

Suponga que se hacen n duplicaciones independientes por medio de un método de simulación de terminación. Si cada una de las n simulaciones se inicia con las mismas condiciones iniciales y se ejecuta usando una secuencia diferente de números aleatorios, entonces cada simulación se puede tratar como una duplicación independiente. Por simplicidad, se supone que sólo hay una medida de desempeño, representada por la variable X. Así, X_j es el estimador de la medida de desempeño de la j-ésima duplicación. Entonces, dadas las condiciones de las duplicaciones, la secuencia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ serán las variables aleatorias iid. Con estas variables aleatorias iid, se puede usar el análisis estadístico clásico para construir un intervalo de confianza de $100(1 - \alpha)$% para $\theta = E(X)$ como sigue:

$$\bar{X} \pm t_{(\alpha/2, n-1)} \sqrt{\frac{S^2}{n}}$$

donde

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

y $t_{(\alpha, n-1)}$ es el número tal que para una distribución t con $n - 1$ grados de libertad,

$$P(t_{n-1} \geq t_{(\alpha, n-1)}) = \alpha$$

(véase la tabla 13 del capítulo 24). Esta probabilidad también se puede calcular en Excel con la fórmula

=TINV(2*alfa, grados de libertad)

La media global $\bar{X}$ es simplemente el promedio de los valores de X calculados en las n muestras y se puede usar como la mejor estimación de la medida de desempeño. La cantidad S^2 es la varianza muestral.

Para ilustrar el método de simulación de terminación, se usa un ejemplo del caso Cabot, Inc. Para esta ilustración, se supone que hay 11 terminales en el sistema y se llevan a cabo 10 ejecuciones de terminación independientes del modelo de simulación. El evento de terminación E, es un tiempo fijo. Es decir, las 10 simulaciones se ejecutan para la misma duración. Los resultados de estas ejecuciones se muestran en la tabla 15. El promedio global para estas 10 ejecuciones del número esperado de terminales en línea resulta ser

TABLA 15
Ejemplo de número promedio de terminales en línea a partir de 10 duplicaciones

Número de ejecución	x_j
1	9.252
2	9.273
3	9.413
4	9.198
5	9.532
6	9.355
7	9.155
8	9.558
9	9.310
10	9.269

9.331. (Compare este promedio con el resultado de la tabla 14 de 9.362, que se obtuvo usando el método de estado estable.) Si ahora se calcula la varianza muestral, se encuentra $S^2 = 0.018$. Puesto que $t_{(.025,9)} = 2.26$, se obtiene

$$9.331 \pm 2.26 \sqrt{\frac{0.0180}{10}} = 9.331 \pm 0.096$$

como el intervalo de confianza de 95% para este ejemplo.

Se podría haber calculado $t_{(.025,9)}$ en Excel con la fórmula

=TINV(.05,9)

Esta produce 2.26, que es consistente con la tabla del capítulo 24.

La longitud del intervalo de confianza dependerá, por supuesto, qué tan buenos sean los resultados muestrales. Si este intervalo de confianza es inaceptable, se puede reducir su longitud incrementando ya sea el número de duplicaciones de terminación o la duración de cada simulación. Por ejemplo, si se incrementa el número de ejecuciones de 10 a 20, se mejoran los resultados en dos frentes. Primero, el promedio global (9.359) se aproxima al resultado de la simulación de estado estable; segundo, la longitud del intervalo de confianza disminuye de 0.192 a 0.058. Como se vio en este ejemplo, el método de simulación de terminación ofrece un método relativamente fácil para analizar datos de salida. Sin embargo, se debe remarcar que otros métodos para analizar datos de simulación podrían ser más eficaces para un determinado problema. Para un tratamiento detallado de este tema, véase Banks y Carson (1984) o Law y Kelton (1991).

21.8 Lenguajes de simulación

Uno de los aspectos más importantes de un estudio de simulación es la programación en computadora. Escribir el código de computadora para un modelo de simulación complejo es con frecuencia una tarea ardua y difícil. Debido a esto, se han elaborado varios lenguajes de simulación para computadora de aplicación específica, a fin de simplificar la programación. En esta sección, se describen varios de los lenguajes de simulación mejor conocidos y disponibles con más facilidad, entre otros GPSS, GASP IV y SLAM.

En la mayoría de los lenguajes de simulación se utiliza uno de dos métodos de modelado diferentes u orientaciones: programación de eventos o interacción de procesos. Como se ha visto, en el método de programación de eventos, se modela el sistema identificando sus eventos característicos y escribiendo rutinas para describir los cambios de estado que tienen lugar al momento de cada evento. La simulación evoluciona con el tiempo al actualizar el reloj para el siguiente evento programado y hacer los cambios que sean necesarios al sistema y las estadísticas mediante la ejecución de rutinas. En el método de proceso-interacción, se modela el sistema como una serie de actividades que debe emprender una entidad (o cliente) a medida que pasa por el sistema. Por ejemplo, en una simulación de colas, las actividades para una entidad consisten en llegar, esperar en la cola, ser atendido y salir del sistema. Así, usando el método de proceso-interacción, se modelan estas actividades en lugar de eventos. Cuando se programa en un lenguaje de aplicación general como FORTRAN o BASIC, por lo general se usa el método de programación de eventos. GPSS utiliza el método de proceso-interacción. SLAM permite al modelador usar cualquier método o incluso una combinación de los dos, cualquiera que sea el más apropiado para el modelo que se analiza.

De los modelos de aplicación general, FORTRAN es el que más se utiliza en la simulación. De hecho, varios lenguajes de simulación, como GASP IV y SLAM, utilizan una base FORTRAN. Por lo general, los programas de simulación en FORTRAN se escriben como una serie de subrutinas, una para cada función importante del proceso de simulación. Esto es particularmente cierto en los lenguajes de simulación basados en FORTRAN. Por ejemplo, en GASP IV, hay aproximadamente 30 subrutinas y funciones de FORTRAN. Entre éstas se encuentran la rutina de avance de tiempo, rutinas para la generación de variables aleatorias, rutinas para controlar la lista de eventos futuros, rutinas para reunir estadísticas, etcétera. Para usar GASP IV, se debe proveer un programa principal, una rutina de inicialización y las rutinas de eventos. Para el resto del programa se utilizan rutinas GASP. Como resultado de estas rutinas preescritas, GASP IV proporciona una gran flexibilidad de programación. Para más detalles de este lenguaje, véase Pritsker (1974).

GPSS, en contraste a GASP. es un lenguaje de aplicación especial altamente estructurado. IBM elaboró este lenguaje. GPSS no requiere escribir un programa en el sentido usual. El lenguaje está constituido de unas 40 expresiones estándar o bloques. Construir un modelo GPSS consiste entonces en combinar estos conjuntos de bloques en un diagrama de flujo de modo que represente la trayectoria que toma una entidad a medida que pasa por el sistema. Por ejemplo, para un sistema de colas con un solo servidor, las expresiones son de la forma GENERATE (llegar al sistema), QUEUE (unirse a la fila de espera), DEPART (dejar la cola y entrar al servicio), ADVANCE (adelantar el reloj para considerar el tiempo de servicio), RELEASE (liberar la instalación de servicio al finalizar éste) y TERMINATE (salir del sistema). Luego, el programa de simulación se compila a partir de estas expresiones del diagrama de flujo. GPSS se diseñó para la simulación relativamente fácil de sistemas de colas. Sin embargo, debido a su estructura, no es tan flexible como GASP IV, en particular para el tipo de simulaciones donde no existen colas. Para una descripción más detallada de GPSS, véase Schriber (1974).

Pritsker y Pegden (1979) elaboraron el leguaje de programación SLAM. Éste permite elaborar modelos de simulación como modelos de red, modelos de eventos discretos, modelos continuos o cualquier combinación de éstos. La orientación de eventos discretos es una extensión de GASP IV. La representación de red se puede considerar como una representación pictórica de un sistema a través del cual fluyen las entidades. A este respecto, la estructura de SLAM es similar a la de GPSS. Una vez elaborado el modelo de red del sistema, se traslada a un conjunto de expresiones de programa SLAM para la ejecución en computadora.

En el capítulo 22, se mostrará cómo usar el poderoso paquete amigable con el usuario Process Model.

La decisión de qué lenguaje usar es una de las más importantes que debe tomar un modelador o analista al llevar a cabo un estudio de simulación. Los lenguajes de simulación ofrecen varias ventajas. La más importante de éstas, es que los lenguajes de aplicación específica proporcionan un marco natural para el modelado de la simulación y la mayor parte de las características necesarias en la programación de un modelo de simulación. Sin embargo, esto se debe equilibrar con el hecho de que los lenguajes de aplicación general permiten mayor flexibilidad de programación, y que lenguajes como FORTRAN y BASIC son más asequibles y se usan mucho más.

21.9 Proceso de simulación

En este capítulo, hemos considerado varios modelos de simulación y presentado varios conceptos importantes de simulación. Ahora se analiza el proceso para un estudio completo de simulación y se presenta un método sistemático para llevar a cabo una simulación. Un estudio de simulación por lo general consiste en varias etapas distintas. Éstas se presentan en la figura 21. Sin embargo, no todos los estudios de simulación consisten en todas estas etapas o siguen el orden expresado aquí. Por otro lado, podría haber incluso un traslape considerable entre algunas de estas etapas.

La etapa inicial de cualquier estudio científico, entre otros un proyecto de simulación, requiere una *declaración explícita de los objetivos* del estudio. Esto debe incluir las preguntas a las que se debe dar respuesta, la hipótesis por probar y las alternativas a considerar. Sin una comprensión y descripción claras del problema, disminuyen mucho las posibilidades de una terminación y ejecución exitosas. También en este paso, se atienden

del lenguaje. Como se hizo notar antes, los programas de aplicación específica requieren menos programación que los lenguajes de aplicación general pero son menos flexibles y tienden a requerir tiempos más grandes de ejecución en computadora. En cualquier caso, es probable que la parte de programación del estudio sea un proceso tardado, puesto que los programas de simulación tienden a ser largos y complejos. Una vez que se elaboró y depuró el programa, se determina si el programa está funcionando de manera adecuada. En otras palabras, ¿está haciendo el programa lo que se supone tiene que hacer? Este proceso se conoce como el paso de *verificación* y, por lo general, es difícil, puesto que para la mayor parte de las simulaciones, no se tienen resultados con los cuales comparar el resultado que produce la computadora.

Si estuviéramos satisfechos con el programa, ahora se pasa a la etapa de *validación*. Ésta es otra parte crítica de un estudio de simulación. En este paso, se valida el modelo para determinar si en realidad representa el sistema que está siendo analizado y si los resultados del modelo son confiables. Al igual que con la etapa de verificación, éste por lo general es un proceso difícil. Cada modelo presenta un problema distinto. Sin embargo, hay algunas normas generales que uno puede seguir. Para más detalles acerca de esos procedimientos, véase Law y Kelton (1991) o Shannon (1979). Si en esta etapa se estuviera satisfecho con el desempeño del modelo, se puede usar para llevar a cabo experimentos y contestar las preguntas. Es necesario colectar, procesar y analizar los datos generados en los experimentos de simulación. Los resultados se analizan no sólo como la solución del modelo, sino también en términos de la confiabilidad y validez estadísticas. Por último, después de procesar y analizar los resultados, se debe tomar una decisión acerca de si se llevan a cabo más experimentos.

En este capítulo se ha puesto énfasis en los procedimientos de muestreo y la construcción de modelos. Como resultado, muchos temas del proceso de simulación no se cubren o se tratan sólo de manera breve. Sin embargo, éstos son temas importantes en la simulación, y el lector interesado en usarla debe consultar Law y Kelton (1991), Shannon (1979), Banks y Carson (1984) o Ross (1996).

RESUMEN

Introducción a la simulación

La simulación se podría definir como una técnica que imita la operación de un sistema del mundo real a medida que evoluciona en un periodo. Hay dos tipos de modelos de simulación: estático y dinámico. Un **modelo de simulación estático** representa un sistema en un punto particular del tiempo. Un **modelo de simulación dinámico** representa un sistema a medida que evoluciona en el tiempo. Las simulaciones pueden ser deterministas o estocásticas. Una **simulación determinista** no contiene variables aleatorias, en tanto que una simulación estocástica contiene una o más variables aleatorias. Por último, las simulaciones se pueden representar ya sea por modelos discretos o continuos. Una **simulación discreta** es una en la que las variables de estado cambian sólo en puntos discretos del tiempo. En una **simulación continua**, las variables de estado cambian de manera continua en el tiempo. En este capítulo, se trató sólo con modelos estocásticos discretos. Estos modelos se llaman **modelos de simulación de eventos discretos.**

Proceso de simulación

El proceso de simulación consiste en varias etapas distintas. Cada estudio podría ser un poco diferente, pero en general, se utiliza el siguiente esquema:

1 Formule el problema.

2 Reúna los datos y elabore un modelo.

3 Traduzca el modelo a lenguaje de cómputo (hoja de cálculo).

TABLA 17

Número de reservaciones sin asistencia	Probabilidad
0	.10
1	.20
2	.25
3	.30
4	.10
5	.05

TABLA 18

Tiempo entre llegadas (minutos)	Probabilidad
1	.20
2	.25
3	.40
4	.10
5	.05

TABLA 21

Duración de la consulta (minutos)	Probabilidad
24	.10
27	.20
30	.40
33	.15
36	.10
39	.05

TABLA 22

Demanda diaria (unidades)	Probabilidad
12	.05
13	.15
14	.25
15	.35
16	.15
17	.05

4 La biblioteca de la universidad tiene una máquina copiadora para uso de los estudiantes. Los estudiantes llegan a la máquina con la distribución de tiempos entre llegadas mostrada en la tabla 18. El tiempo para sacar una copia tiene una distribución uniforme en el intervalo de [16, 25] segundos. El análisis de datos anteriores muestra que el número de copias que un estudiante puede sacar durante una visita tiene la distribución de la tabla 19. El bibliotecario siente que con el sistema actual, las colas frente a la copiadora son muy largas, y que es excesivo el tiempo que pasa un estudiante en el sistema (tiempo de espera + tiempo de servicio). Elabore un modelo de simulación para estimar la longitud promedio de la línea de espera y el tiempo de espera anticipado en el sistema.

5 A un vendedor en una tienda grande de bicicletas se le paga un bono si vende más de cuatro bicicletas al día. La probabilidad de vender más de cuatro bicicletas en un día es sólo .40. Si el número de bicicletas vendido es mayor que cuatro, la distribución de ventas se muestra en la tabla 20. La tienda tiene cuatro modelos diferentes de bicicletas. La cantidad de bonos pagados varía por tipo. El bono para el modelo A es de 10 dólares; 40% de las bicicletas vendidas son de este tipo. El modelo B representa 35% de las ventas y paga un bono de 15 dólares. El modelo C tiene un bono por 20 dólares y constituye 20 de las ventas. Por último, el modelo D paga un bono de 25 por cada venta, pero representa sólo 5% de las ventas. Elabore un modelo de simulación para calcular el bono que un vendedor puede esperar en un día.

6 Un especialista en enfermedades cardiacas programa 16 pacientes diario, uno cada 30 minutos, empezando a las 9 a.m. Se espera que los pacientes lleguen a su cita a los tiempos programados. Sin embargo, por experiencia se sabe que 10% de los pacientes llega 15 minutos antes, 25% llegan con cinco minutos de anticipación, 50% llegan a la hora exacta, 10% llegan 10 minutos tarde y 5% llegan con 15 minutos de retraso. El tiempo que el especialista tarda en atender un paciente varía dependiendo del tipo de problema. El análisis de datos pasados muestra que la duración de una consulta tiene la distribución de la tabla 21. Construya un modelo de simulación para calcular la duración que en promedio tiene el día del doctor.

Grupo B

7 Suponga que se está considerando la selección del punto de reabastecimiento, R, de una política de inventario. Con esta política, se ordena hasta Q cuando el nivel de inventario cae a R o menos. La distribución de probabilidad de la demanda diaria se da en la tabla 22. El plazo de entrega también es una variable aleatoria y tiene la distribución de la tabla 23. Se supone que la cantidad de "orden hasta" para cada pedido se mantiene fina en 100. Lo que interesa aquí es determinar el valor del punto de reabastecimiento, R, que minimiza el costo de inventario variable. Este costo variable es la suma del costo esperado de mantenimiento de inventario, el costo esperado de formulación de pedido y el costo esperado de agotamiento de existencias. Se acumula el agotamiento de existencias. Es decir, un cliente espera hasta que esté disponible un artículo. El costo de mantenimiento de inventario se estima en 20¢/unidad/día y se carga a las unidades en inventario al final del día. El agotamiento de existencias cuesta $1 por cada unidad faltante. El costo de formulación de pedido es $10 por pedido. Los pedidos llegan al comienzo del día. Elabore un modelo de simulación del sistema de inventario a fin de determinar el mejor valor de R.

8 Un gran distribuidor de automóviles en Bloomington, Indiana, emplea a cinco vendedores. Los vendedores trabajan por comisión; se les paga un porcentaje de las ganancias de los automóviles que vendan. El distribuidor tiene tres tipos de automóviles: de lujo, medianos y subcompactos. Los datos de años anteriores muestran que las ventas de automóviles por semana por vendedor tienen la distribución de la tabla 24. Si el automóvil vendido es subcompacto, el vendedor recibe una comisión de 250 dólares. Para un automóvil mediano, la comisión es de $400 o $500, dependiendo del modelo vendido.

TABLA 19

Número de copias	Probabilidad
6	.20
7	.25
8	.35
9	.15
10	.05

TABLA 20

No. de bicicletas vendidas	Probabilidad
5	.35
6	.45
7	.15
8	.05

TABLA 23

Tiempo de espera (días)	Probabilidad
1	.20
2	.30
3	.35
4	.15

TABLA 24

Número de automóviles vendidos	Probabilidad
0	.10
1	.15
2	.20
3	.25
4	.20
5	.10

TABLA 25

Tipo de automóvil vendido	Probabilidad
Subcompacto	.40
Mediano	.35
De lujo	.25

TABLA 26

Longitud de la fila (q)	Probabilidad de dar marcha atrás
$6 \leq q \leq 8$	.20
$9 \leq q \leq 10$	.40
$11 \leq q \leq 14$	.60
$q > 14$	.80

En los automóviles medianos, se paga una comisión de 400 dólares 40% de las veces y una comisión de 500 dólares el otro 60% de las veces. Para un automóvil de lujo, se paga una comisión de acuerdo con tres tasas separadas: \$1000 con una probabilidad de 35%, \$1500 con una probabilidad de 40% y \$2000 con una probabilidad de 25%. Si la distribución de tipo de automóviles es como se muestra en la tabla 25, ¿cuál es la comisión promedio para un vendedor en una semana?

9 Considere un banco con cuatro cajeros. Los clientes llegan a una tasa exponencial de 60 por hora. Un cliente es atendido de inmediato si está desocupado el cajero. De lo contrario, se une a la línea de espera. Sólo hay una cola para todos los cajeros. Si alguien que llega encuentra la cola muy larga, puede decidir salir de inmediato (dar marcha atrás). Si un cliente se une a la cola, se supone que permanecerá en el sistema hasta que sea atendido. Cada cajero atiende a la misma tasa de servicio. Los tiempos de servicio tienen una distribución uniforme en el intervalo [3, 5]. Elabore un modelo de simulación a fin de hallar las medidas de desempeño para este sistema: (1) el tiempo esperado que un cliente tarda en el sistema, (2) el porcentaje de clientes que dan marcha atrás y (3) el porcentaje de tiempo libre para cada cajero.

10 Los trabajos llegan a un taller, que tiene dos centros de trabajo (A y B) en serie, a una tasa exponencial de cinco por hora. Cada trabajo requiere de procesado en ambos centros de trabajo. Primero en el A y luego en el B. Los trabajos en espera de ser procesados en cada centro pueden esperar en cola; la línea en el centro de trabajo B tiene espacio para sólo cuatro trabajos a la vez. Si este espacio llega a su capacidad, los trabajos no pueden dejar el centro A. En otras palabras, el centro A detiene el proceso hasta que haya espacio enfrente de B. El tiempo de proceso para un trabajo en el centro A tiene una distribución uniforme en el intervalo [6, 10]. El tiempo de procesamiento para el trabajo en el centro B se representa por la siguiente distribución triangular:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-1) & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{4}(5-x) & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Elabore un modelo de simulación de este sistema para determinar las siguientes medidas de desempeño: (1) el número esperado de trabajos en el taller en algún momento dado, (2) el porcentaje de tiempo que el centro A está detenido debido a la falta de espacio en la cola frente al centro B y (3) el tiempo esperado de terminación de un trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

Hay varios libros excelentes sobre simulación. Un libro introductorio es el de Watson (1981); para un enfoque intermedio véase Banks y Carson (1984); y para un tratamiento más avanzado véase Law y Kelton (1991).

Banks, J. y J. Carson. *Discrete-Event System Simulation*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Box, G. y M. Muller. "A Note on the Generation of Random Normal Deviates", *Annals of Mathematical Statistics* 29(1958):610-611.

Fishman, G. *Principles of Discrete Event Simulation*. Nueva York: Wiley, 1978.

Fishman, G. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

Kelton, D., Sadowski, R y Sadowski, S. *Simulation with Arena*. Nueva York: McGraw-Hill, 2001.

Knuth, D.W. *The Art of Computer Programming: II. Seminumerical Algorithms*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1998.

Law, A.M. y W. Kelton. *Simulation Modeling and Analysis*. Nueva York: McGraw-Hill. 1991.

Pritsker, A. *The GASP IV Simulation Language*. Nueva York: Wiley, 1974.

Pritsker, A. y C. Pegden. *Introduction to Simulation and SLAM*. Nueva York: Wiley, 1979.

Ross, S. *Simulation*. San Francisco: Academic Press, 1996.

Schmidt, J. W. y R.E. Taylor. *Simulation and Analysis of Industrial Systems*. Homewood, Ill.: Irwin, 1970.

Schriber, T. *Simulation Using GPSS*. Nueva York: Wiley, 1974. Shannon, R. E. *Systems Simulation: The Art and Science*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1979.

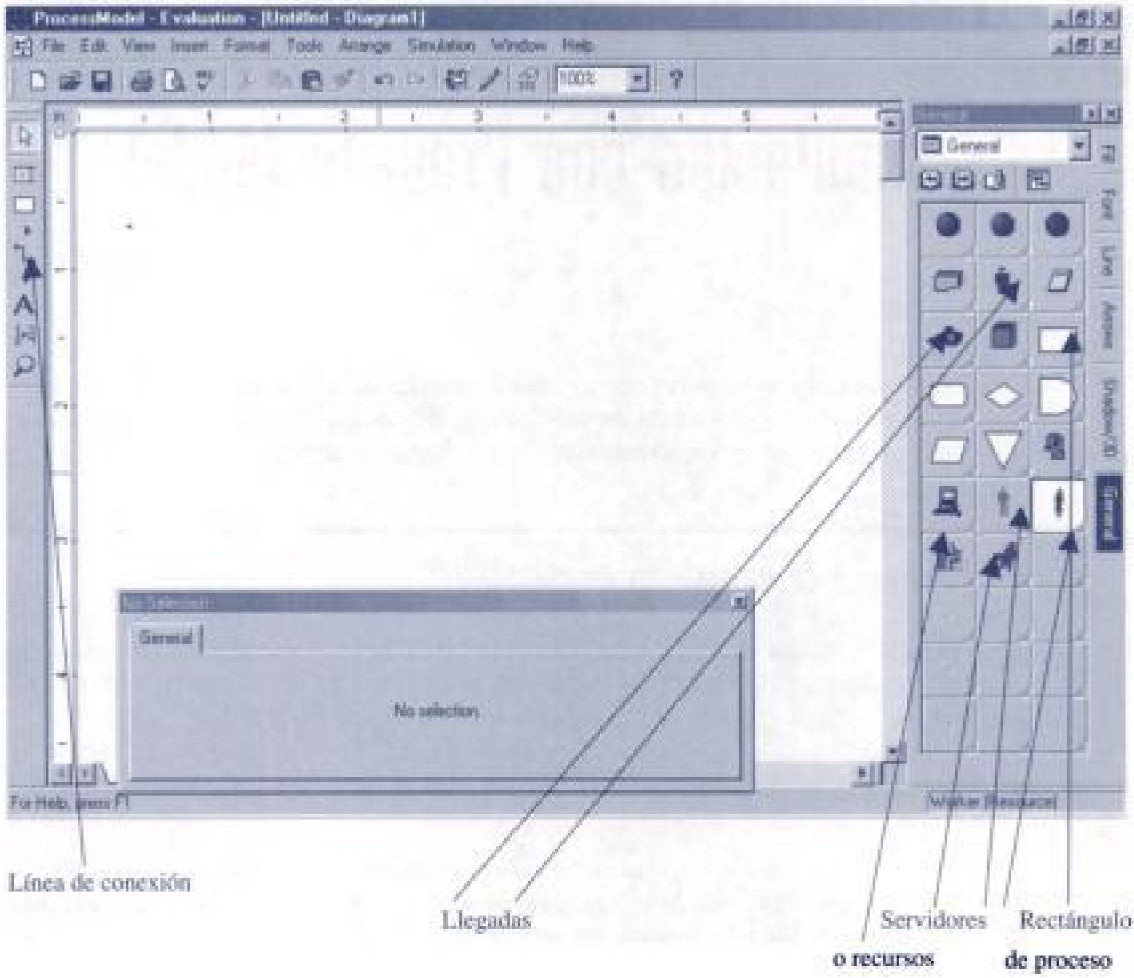
Watson, H. *Computer Simulation in Business*. Nueva York: Wiley, 1981.

Kelly, J. "A New Interpretation of Information Rate", *Bell System Technical Journal* 35(1956):917-926.

Marcus, A. "The Magellan Fund and Market Efficiency", *Journal of Portfolio Management* Fall (1990):85-88.

Morrison, D. y R. Wheat. "Pulling the Goalie Revisited", *Interfaces* 16(no. 6, 1984):28-34.

FIGURA 1



Paso 5 Ahora es necesario decirle a Process Model que los tiempos de servicio son exponenciales con media 4. Para hacer esto, dé clic en el rectángulo de proceso Take Calls y llene el cuadro de diálogo como se muestra en la figura 6.

Paso 6 Ahora se tiene lista la preparación del modelo. Seleccione File Save As y guarde el modelo. (Los modelos tienen un sufijo .igx.)

Paso 7 Para ejecutar la simulación, seleccione Simulation y luego Options y llene el cuadro de diálogo como se ilustra en la figura 7.

Se eligió ejecutar el sistema durante 4 000 horas. Eligiendo una duración de una hora, la primera hora de ejecutar la simulación no se usará en la colección de estadísticas. Para empezar la simulación, elija Simulation Save y Simulation. A medida que avanza la simulación, las llamadas telefónicas que pasan por el diagrama de flujo ilustran el flujo de llamadas por el proceso. Los recursos o servidores mostrarán una luz verde cuando el recurso está siendo utilizado y una luz azul cuando está desocupado. Los contadores arriba y a la izquierda de cada actividad representan el número de llamadas esperando a ser procesadas. La velocidad de la simulación se puede controlar moviendo la barra de control de ve-

FIGURA 2

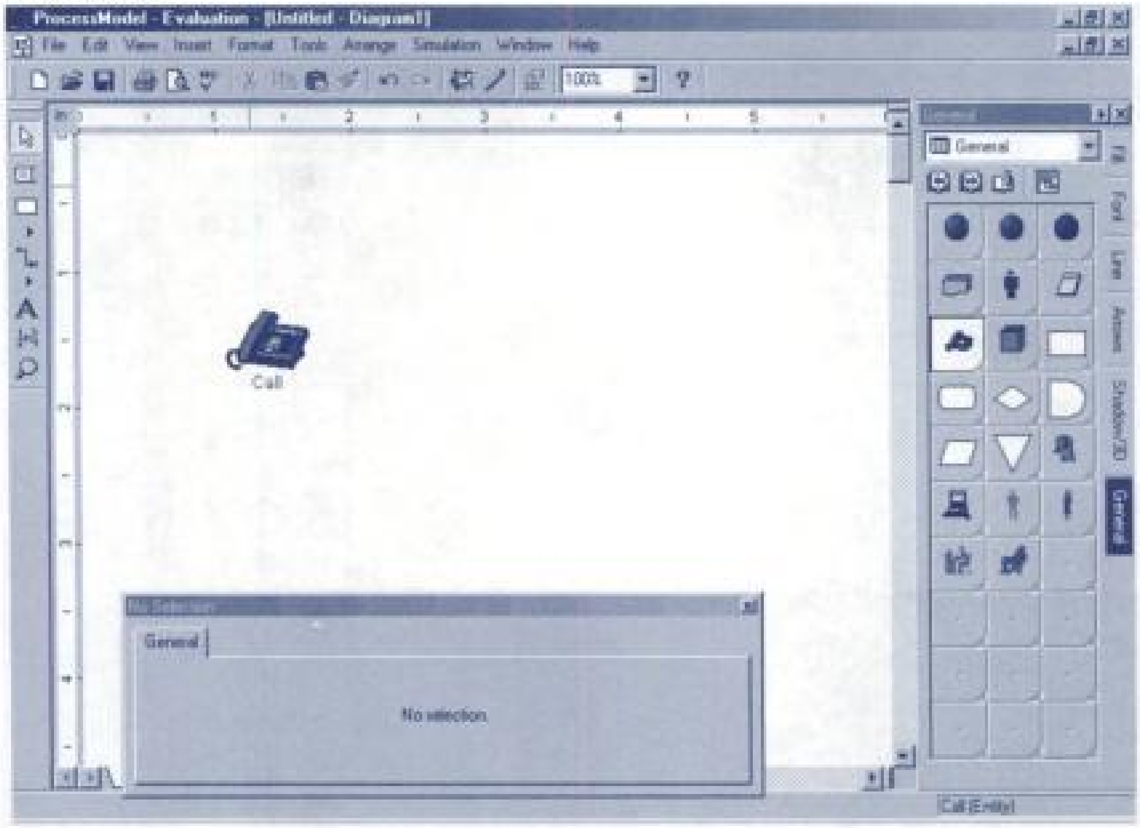
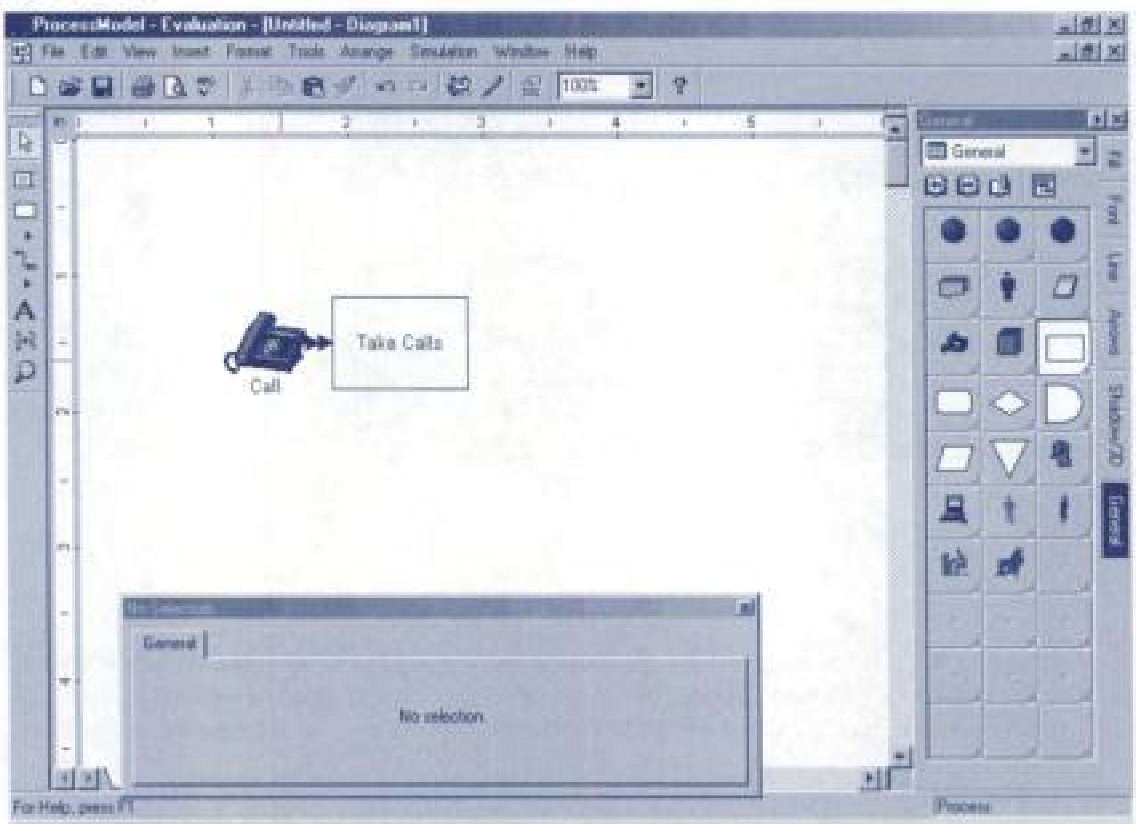


FIGURA 3



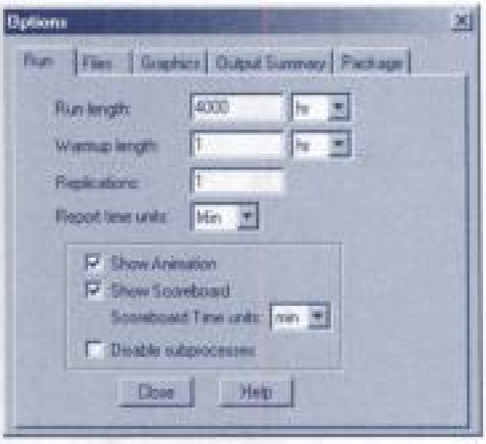


FIGURA 7

- Tiempo de valor añadido (tiempo que una unidad pasa en el servicio)
- Costo por unidad (si los costos se asocian con los recursos, se calcula el costo en que se incurre por cada unidad atendida)

Después de completar la simulación, se le pregunta si quiere ver el resultado. En caso afirmativo, se verá un resultado similar a la figura 8, y se podrá guardar como archivo de texto. En la figura 8 se incluyen comentarios (en **negritas**) para explicar las partes importantes del resultado.

Si este resultado se trata como representativo del estado estable del sistema, se tienen las siguientes estimaciones de parámetro:

- $\Pi_0 = .3363$
- $\Pi_0 + \Pi_1 = .5634$
- $W_s = 4.01$ minutos
- $W_q = 7.71$ minutos
- $W = 11.72$ minutos

Para un sistema $M/M/1$, se pueden calcular de manera exacta los valores de estado estable de estas cantidades. Puesto que $\rho = 10/15 = .667$, se encuentra a partir de la ecuación (24) del capítulo 20 que $\Pi_0 = 1 - .667 = .333$. De la ecuación (25) del capítulo 20, se encuentra que $\Pi_1 = .667(1 - .667) = .222$. Así, $\Pi_0 + \Pi_1 = .555$. Resulta evidente que $W_s = 4$ minutos. De la fórmula (31) del capítulo 20, $W = \frac{1}{15 - 10} = .2$ horas $= 12$ minutos. Entonces, $W_q = 12 - 4 = 8$ minutos. Observe que la simulación concuerda bastante con las estimaciones de estado estable.

22.2 Simulación de un sistema *M*/*M*/2

Modifiquemos el ejemplo anterior cambiando el número de operadores a 2 y asegurando que hasta 2 operadores pueden estar trabajando en las llamadas al mismo tiempo. Véase el archivo MM2.igx. Para cambiar el número de operadores, dé clic en el recurso y llene el cuadro de diálogo como se ilustra en la figura 9.

MM2.igx

Para asegurar que dos operadores pueden trabajar en las llamadas al mismo tiempo dé clic en el rectángulo de proceso Take Calls y modifíquelo como en la figura 10.

Después de guardar este archivo como MM2.igx y ejecutarlo durante 1 000 horas, se obtiene el resultado mostrado en la figura 11. Los comentarios en negritas explican las partes importantes.)

Informe general
Resultado de C:\Archivos de programa\Process Model 4\mm1.mod
Fecha: 13/agosto/2002 Hora: 07:50:42 PM

Escenario	: Ejecución normal
Duplicación	: 1 de 1
Tiempo de calentamiento	: 1 hr
Tiempo de simulación	: 3986.90

ACTIVIDADES

Nombre de la actividad	Horas programadas	Capacidad	Total de entradas	Minutos promedio por entrada	Contenido promedio	Contenido máximo	Contenido actual	% Útil
Tomar la llamada en Q	3985.90	999	39581	7.71	1.27	21	1	0.13
Tomar la llamada	3985.90	1	39581	4.01	0.66	1	1	66.37

En las casi 3 986 horas para las que se reunieron datos, casi exactamente ocurrieron 10 llegadas por hora. El tiempo total que una llamada pasa en la cola (esperando) fue en promedio 7.71 minutos, y el tiempo de servicio total promedió 4.01 minutos

ESTADOS DE ACTIVIDAD POR PORCENTAJE (Capacidad múltiple)

Nombre de la actividad	Horas programadas	Desocupado %	Parcialmente ocupado %	Lleno %
Tomar la llamada en Q	3985.90	56.34	43.66	0.00

La cola para llamadas estuvo vacía 56.34% del tiempo.

ESTADOS DE ACTIVIDAD EN PORCENTAJE (Capacidad única)

Nombre de la actividad	Horas programadas	Operación %	Desocupado %	En espera %	Bloqueado
Tomar la llamada	3985.90	66.37	33.63	0.00	0.00

El operador estuvo ocupado 33.63% del tiempo.

FIGURA 8
(Continúa)

RECURSOS

Nombre del recurso	Unidades	Horas programadas	Número de veces que se utiliza	Minutos promedio por uso	% Útil.
Personal	1	3985.90	39581	4.01	66.37

El personal estuvo ocupado 66.37% del tiempo, y el uso promedio del personal por llamada procesada fue de 4.01 minutos.

ESTADOS DEL RECURSO POR PORCENTAJE

Nombre del recurso	Horas programadas	En uso %	Desocupado %	Descompuesto %
Personal	3985.90	66.37	33.63	0.00

El personal estuvo ocupado 66.37% del tiempo.

RESUMEN DE ENTIDAD (Tiempos en unidades de tiempo de marcador)

Nombre de la entidad	Cantidad procesada	Tiempo de ciclo promedio (minutos)	Tiempo promedio de valor agregado (minutos)	Costo promedio
Llamada	39580	11.72	4.01	1.33

Cada llamada pasó un promedio de 11.72 minutos en el sistema.

FIGURA 8
(Continuación)

FIGURA 9

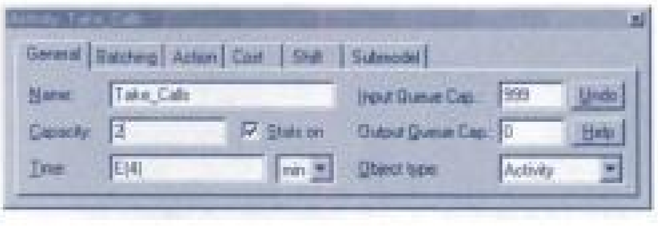


FIGURA 10

ESTADOS DEL RECURSO EN PORCENTAJE

Nombre del recurso	Horas programadas	En uso %	Desocupado %	Inactivo %
Operador.1	4000	33.60	66.40	0.00
Operador.2	4000	33.60	66.40	0.00
Operador	8000	33.60	66.40	0.00

Cada operador estuvo ocupado 33.60% del tiempo. Observe de las probabilidades de estado estable en el modelo M/M/s que la probabilidad de que un servidor esté ocupado es .5*(prob. de que 1 persona esté presente) + Prob(>=2 personas presentes) = .5*(.333) + .167 = .333.

RESUMEN DE ENTIDAD (Tiempos en unidades de tiempo de marcador)

Nombre de la identidad	Cantidad procesada	Tiempo promedio de ciclo (minutos)	Tiempo promedio de valor agregado	Costo promedio
Llamada	39970	4.55	4.03	0.00

El tiempo promedio que una llamada pasa en el sistema es de 4.55 minutos. En la hoja de cálculo M/M/s, se encuentra que W = 4.5 minutos.

VARIABLES

Nombre de la variable	Cambios totales	Minutos promedio por cambio	Valor mínimo	Valor máximo	Valor actual	Valor promedio
Tiempo promedio BVA por entidad	1	0.00	0	0	0	0
Tiempo promedio BVA por llamada	39971	00	0	0	0	0

	A	B	C	D	E	F	G
1	M/M/s/GD	LAMBDA?	MU?	s?	RO		
2		10	15	2	0.33333333		
3		L	LS	LQ	W	WS	WQ
4		0.75	0.66666667	0.08333333	0.075	0.066666667	0.008333333
5	STATE	P(j>=s)					
6	1	0.16666667					
7	P(Wq>t)	t?	P(W>t)				
8	9.57313E-60	6.70521931	3.1296E-44				
9							
10							
11							
12	STATE	LAMBDA(J)	MU(J)	CJ	PROB	#IN QUEUE	COLA*COLE
13	0	10	0	1	0.5	0	0
14	1	10	15	0.66666667	0.33333333	0	0.333333333
15	2	10	30	0.22222222	0.11111111	0	0.222222222

FIGURA 11
(continuación)

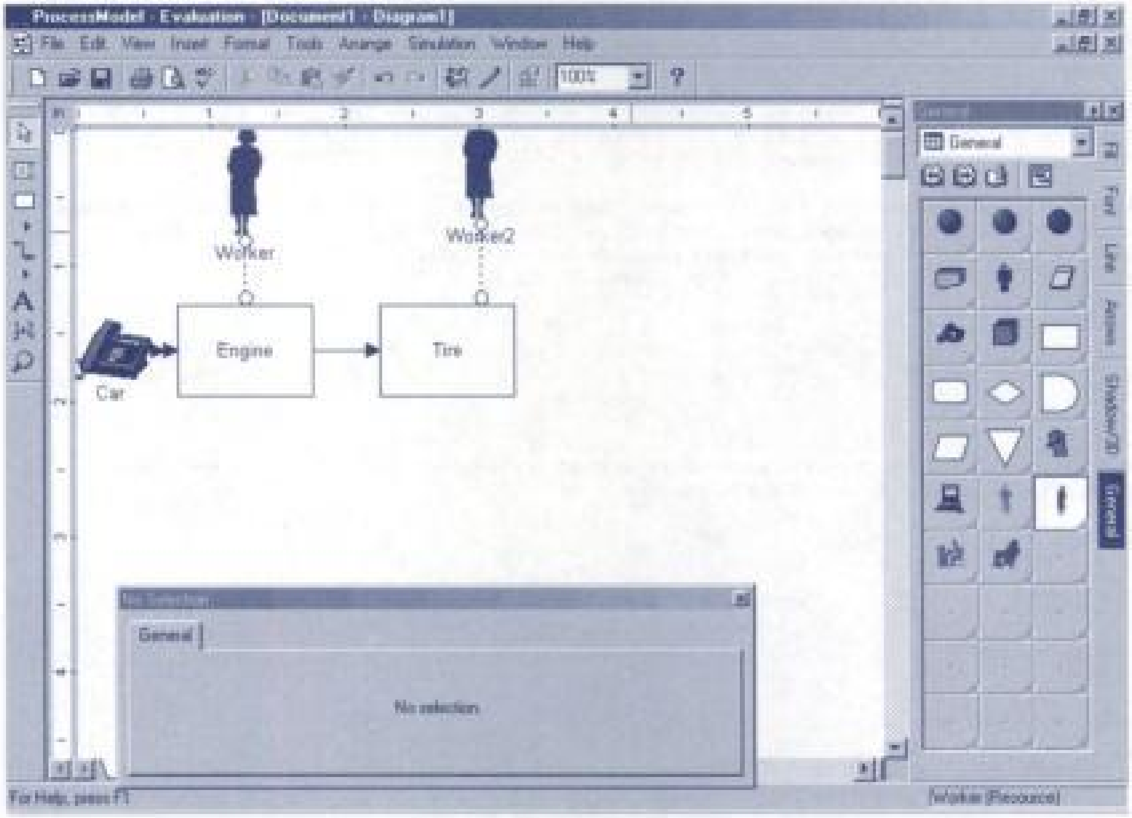
22.3 Simulación de un sistema en serie

En esta sección, se utiliza Process Model para simular un sistema de colas en serie. Se toma el caso de una línea de ensamblado de automóviles (ejemplo 13 de la sección 20.10).

EJEMPLO 1 Ensamblaje de automóviles

Las dos últimas cosas que se hacen a un automóvil antes de que su manufactura sea completa, son instalar el motor y ponerle las llantas. En promedio llegan 54 automóviles que requieren estos dos trabajos. Un trabajador está disponible para instalar el motor y puede

FIGURA 12



atender un promedio de 60 automóviles por hora. Después de instalar el motor, el automóvil pasa a la estación de llantas y espera a que se las coloquen. Tres trabajadores dan servicio en la estación de llantas. Cada uno trabaja en un automóvil a la vez y puede poner las llantas a un automóvil en un promedio de 3 minutos. Suponga que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio son exponenciales. Simule el sistema durante 400 horas.

Solución Vea el archivo Carassembly.igx. La clave para crear una red de colas con Process Model es construir el diagrama con un centro de servicio a la vez. Se empieza creando las llegadas como en la sección 22.1. Luego se crea el centro de producción de motores como en la sección 22.1. Luego se arrastra el rectángulo de proceso sobre el centro de producción de motores y se jala a la derecha para crear el centro de producción de llantas. Por supuesto, se debe cambiar el número de servidores en el centro de producción de llantas a 3 (y también cambie la capacidad de operación de llantas (tire) a 3). Se deben introducir los tiempos de servicio de E(1) para el centro de producción de motores y E(3) para el centro de producción de llantas. Para los tiempos entre llegadas, se debe escribir E(1.11), puesto que hay una llegada en promedio cada $60/54 = 1.1$ minutos. El diagrama de flujo se parece a la figura 12.

Carassembly.igx

Observe que un clic en la flecha que une los rectángulos de Engine y Tire da como resultado el cuadro de diálogo mostrado en la figura 13. Esto indica que 100% de los automóviles con el motor instalado son enviados a la estación Tire. También se ajusta Move Time (tiempo de movimiento) de 1 minuto a 0 minutos. Move Time indica cuántos minutos son necesarios para pasar de la estación Engine a la estación Tire. Suponga, por ejemplo, que 70% de los trabajos completos de instalación de motor son enviados a otras estaciones (como Inspección final) y 30% son enviados a la estación Tire. Esto se modelaría cambiando el porcentaje en la flecha que une Engine e Inspección final a 70%. El porcentaje que va de Engine a Tire se ajustaría de forma automática a 30%. En el siguiente ejemplo se verá cómo funciona esto.

ESTADOS DE LA ACTIVIDAD EN PORCENTAJE (Capacidad única)

Nombre de la actividad	Horas programadas	% de operación	Desocupado %	En espera %	Bloqueado %
Motor	403.88	89.82	10.18	0.00	0.00

La instaladora de motores está ocupada 89.8% del tiempo. (En el estado estable, debe estar ocupada 90% del tiempo según $\pi_0 = p$.

RECURSOS

Nombre del recurso	Unidades	Horas programadas	Número de veces utilizados	Minutos promedio por uso	% Útil.
Trabajador	1	403.88	21741	1.00	89.82
Trabajador2.1	1	403.88	7250	3.02	90.45
Trabajador2.2	1	403.88	7258	3.02	90.46
Trabajador2.3	1	403.88	7238	3.02	90.45
Trabajador2	3	1211.64	21746	3.02	90.45

El tiempo de servicio promedio en la estación *Engine* es 1 minuto. En la estación *Tire*, el tiempo de servicio promedio es 3.02 minutos.

ESTADOS DE LOS RECURSOS EN PORCENTAJE

Nombre del recurso	Horas programadas	En uso %	Desocupado %	Inactivo %
Trabajador	403.88	89.82	10.18	0.00
Trabajador2.1	403.88	90.45	9.55	0.00
Trabajador2.2	403.88	90.46	9.54	0.00
Trabajador2.3	403.88	90.45	9.55	0.00
Trabajador2	1211.64	90.45	9.55	0.00

Al parecer, los trabajadores a cargo de colocar las llantas están ocupados alrededor de 90.5% del tiempo y el instalador de motores está ocupado 89.9% del tiempo.

RESUMEN DE ENTIDAD (Tiempos en unidades de tiempo de marcador)

Nombre de la identidad	Cantidad procesada	Tiempo promedio de ciclo (minutos)	Tiempo promedio de valor agregado (minutos)	Costo promedio
Automóvil	21743	20.36	4.02	0.00

El tiempo promedio en el sistema es de 20.4 minutos. En la explicación del ejemplo 13 del capítulo 20, se encontró que el tiempo total (en estado estable) en el sistema es igual al tiempo de servicio promedio en la instalación del motor + tiempo promedio de instalación de llantas + tiempo promedio en espera del motor + tiempo promedio en espera de las llantas = 1 + 3 + 60(.15) + 60(.138) = 21.4 minutos.

VARIABLES

Nombre de la variable	Cambios totales	Minutos promedio por cambio	Valor mínimo	Valor máximo	Valor actual	Valor promedio
Tiempo promedio BVA por entidad	1	0.00	0	0	0	0
Tiempo promedio BVA por auto	21744	1.11	0	0	0	0

FIGURA 14
(Continuación)

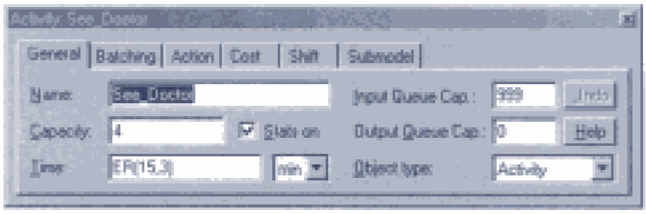


FIGURA 20

Informe general
Resultado de C:\Archivos de programa\Process Model 4\doctors.mod
Fecha: 14/agosto/2002   Hora: 10:29:27 AM

Escenario	:	Ejecución normal
Repetición	:	1 de 1
Tiempo de simulación	:	1000 hr

ACTIVIDADES

Nombre de la actividad	Horas programadas	Capacidad	Total de entradas	Minutos promedio por entrada	Contenido promedio	Contenido máximo	Contenido actual	% Útil
Ver al médico en Q	1000	999	11964	5.37	1.07	23	0	0.11
Ver al médico.	1000	4	11964	15.07	3.00	4	2	75.12

Esto significa que el tiempo promedio de esperar al doctor es 5.37 minutos y el tiempo de servicio promedio es de 15.07 minutos.

ESTADOS DE LA ACTIVIDAD EN PORCENTAJE (Capacidad múltiple)

Nombre de la actividad	Horas programadas	Desocupado %	Parcialmente ocupado %	Completo %
Ver al médico en Q	1000	64.88	35.12	0.00
Ver al médico	1000	3.65	45.95	50.40

35% de los pacientes tendrán que esperar para ver al médico. Los médicos están ocupados 50% del tiempo, y los médicos están desocupados 4% del tiempo. Entre 1 y 3 médicos están ocupados 46% del tiempo.

RECURSOS

Nombre del recurso	Unidades	Horas programadas	Número de veces utilizadas	Minutos promedio por uso	% Útil.
Doctor.1	1	1000	2983	15.11	75.13
Doctor.2	1	1000	3025	14.90	75.12
Doctor.3	1	1000	2976	15.14	75.12
Doctor.4	1	1000	2980	15.12	75.12
Doctor	4	4000	11964	15.07	75.12

El tiempo promedio de servicio varía de un mínimo de 14.9 minutos para el Doctor 1 a un máximo de 15.14 minutos para el Doctor 3.

FIGURA 21

ESTADOS DE LOS RECURSOS EN PORCENTAJE

Nombre del recurso	Horas programadas	En uso %	Ocupado %	Inactivo %
Doctor.1	1000	75.13	24.87	0.00
Doctor.2	1000	75.12	24.88	0.00
Doctor.3	1000	75.12	24.88	0.00
Doctor.4	1000	75.12	24.88	0.00
Doctor	4000	75.12	24.88	0.00

Cada médico está ocupado cerca de 75% del tiempo. Esto es razonable porque (12 pacientes/hora) * (15 minutos/paciente) = 180 minutos/hora de trabajo llega a los médicos, y tienen 240 minutos por hora para trabajar, así que deben estar ocupados 75% del tiempo.

RESUMEN DE ENTIDAD (Tiempos en unidades de tiempo de marcador)

Nombre de la identidad	Cantidad procesada	Tiempo promedio de ciclo (minutos)	Tiempo promedio de valor agregado (minutos)	Costo promedio
Cliente	11962	20.45	15.07	0.00

En promedio, un paciente pasa un total de 20.45 minutos en el sistema (¡Envíenme a esta clínica!)

VARIABLES

Nombre de la variable	Cambios totales	Minutos promedio por cambio	Valor mínimo	Valor máximo	Valor actual	Valor promedio
Entidad de tiempo promedio de BVA	1	0.00	0	0	0	0
Llamada en tiempo promedio de BVA	11963	5.01	0	0	0	0

FIGURA 21
(Continuación)

a En promedio, ¿cuánto tiempo pasa un paciente en la sala de emergencias?

b En promedio, ¿cuánto de este tiempo se pasa esperando al médico?

c ¿Qué porcentaje del tiempo está ocupado cada médico?

4 La cooperativa de crédito de la universidad de Indiana tiene cuatro cajeros laborando. Toma un promedio de tres minutos (con distribución exponencial) atender a un cliente. Suponga que un promedio de 60 clientes por hora llegan a la cooperativa (tiempo entre llegadas exponencial).

a ¿Cuánto tiempo tienen que esperar los clientes para que los atienda un cajero?

b ¿Qué porcentaje del tiempo está ocupado un cajero?

5 Un farmacéutico tiene que llenar un promedio de 15 pedidos por hora (el tiempo entre llegadas está distribuido de forma exponencial). 80% de los pedidos son relativamente simples y toma dos minutos llenarlo. Para 20% de los pedidos el llenado toma 10 minutos.

a ¿Qué porcentaje del tiempo está ocupado el farmacéutico?

b En promedio, ¿cuánto toma surtir una receta?

6 Resuelva el problema cinco si los tiempos de servicio siguen una distribución normal con media de tres minutos y desviación estándar de .5 minuto. Utilice la sintaxis N(3, .5) para generar los tiempos de servicio.

7 En los juegos de los Pacers de Indiana, 10 000 aficionados deben pasar por 10 puntos de inspección en la hora previa a cada juego (los tiempos entre llegadas son exponenciales). Toma tres segundos procesar un boleto. ¿Cuánto tarda un aficionado promedio en pasar por el punto de inspección desde su arribo?

8 Desde el 11 de septiembre de 2001, a cada persona con boleto de los Pacers se le revisa la ropa y la bolsa. Suponga que esto toma exactamente 10 segundos y ocurre justo después que el aficionado pasa por el punto de control. En cada uno hay cuatro personas para hacer la revisión. ¿Cuanto tarda el aficionado promedio desde que llega hasta que pasa por el punto de control?

23

Simulación con el programa de ayuda de Excel @Risk

Muchas simulaciones, en particular aquellas que tienen que ver con aplicaciones financieras, se pueden llevar a cabo fácilmente con el programa de ayuda de Excel @Risk. @Risk facilita generar variables aleatorias. Por ejemplo, para generar una variable aleatoria normal estándar en una celda, sólo escriba la fórmula =RISKNORMAL(0,1). Si quiere ejecutar 10 000 iteraciones de una hoja de cálculo, sólo indique a @Risk que ejecute 10 000 iteraciones. Entonces @Risk proporciona un resumen estadístico o gráfico completo de los resultados. En este capítulo, se verá cómo se puede usar @Risk para llevar a cabo una amplia variedad de simulaciones, que van desde el VPN de un proyecto nuevo hasta la probabilidad de ganar en el juego de los dados.

23.1 Introducción a @Risk: el problema del vendedor de periódicos

@Risk se utiliza para modelar situaciones donde las decisiones se tienen que tomar bajo incertidumbre. A continuación se da un ejemplo fácil. Véase el resumen de puntos importantes de @Risk en el apéndice 1.

EJEMPLO 1 Pedido de calendarios

Una librería debe determinar cuántos calendarios de naturaleza 2005 pedir en agosto de 2004. Cuesta 2.00 dólares pedir cada calendario, cada uno se vende en 4.50 dólares. Después del 1 de enero de 2005, los calendarios sobrantes se devuelven por .75 dólares. La mejor suposición es que la demanda de calendarios está gobernada por las siguientes probabilidades.

Demanda	Probabilidad
100	.3
150	.2
200	.3
250	.15
300	.05

¿Cuántos calendarios se deben pedir?

Solución El resultado final es el archivo Newsdiscrete.xls. Véase la figura 1.

Newsdiscrete.xls

Paso 1 Introduzca los parámetros en C3:C5.

Paso 2 Se puede demostrar que pedir una cantidad igual a una de las posibles demandas para los calendarios siempre maximiza la ganancia esperada. Por ahora, se introduce una cantidad experimental de pedido de 200 calendarios en la celda C1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Order quantity		100				
2	Quantity demanded		100				
3	Sales price		$4.50				
4	Salvage value		$0.75			demand	prob
5	Purchase price		$2.00			100	0.3
6						150	0.2
7	Full price revenue	$450.00				200	0.3
8	Salvage revenue	$0.00				250	0.15
9	Costs	$200.00				300	0.05
10	Profit	$250.00					

FIGURA 1

Paso 3 Indique a @Risk que genere la demanda de acuerdo con las probabilidades anteriores, escriba en C2 la fórmula

=RISKDISCRETE(F5:F9,G5:G9)

Esto genera una demanda de 100 calendarios, 30% del tiempo; 150, 20% del tiempo, etcétera. En esencia, por cada iteración, @Risk genera un número aleatorio entre 0 y 1. Luego, los números aleatorios $< .3$ producen una demanda de 100, los números aleatorios $\geq .3$ y $< .5$ originan una demanda de 150, los números aleatorios $\geq .5$ y $< .8$ ocasionan una demanda de 200, números aleatorios ≥ 0.8 y < 0.95 generan una demanda de 250 y los números aleatorios $\geq .95$ dan lugar a una demanda de 300. Por supuesto, los números aleatorios sucesivos generados por @Risk son independientes entre sí.

Esta demanda se podría haber generado también con la fórmula

=RISKDISCRETE({100,150,200,250,300},{.3,.2,.3,.15,.05})

En cualquier formato, las demandas se listan primero, seguidas de las probabilidades. Para ver el recálculo en la hoja de cálculo cuando presione la tecla F9, seleccione Simulation Settings (el tercer icono de la izquierda) y elija Recalculation en la pestaña de Sampling, y luego elija Monte Carlo. Aproximadamente 30% del tiempo ocurrirá una demanda de 100, alrededor de 20% del tiempo ocurrirá una demanda de 150, etcétera. Si se cambian el recálculo del muestreo (Sampling Recalculation) a True EV, aparecerá la media de la variable aleatoria (172.5). Si cambia Sampling Recalculation a Expected Value, aparecerá el valor de la variable aleatoria más próximo a la media (en este caso 150). Se recomienda dejar siempre el tipo de muestreo (Sampling Type) en Latin Hypercube, debido a que es mucho más preciso que Monte Carlo. Para ilustrar cómo funciona el muestreo con Latin Hypercube, suponga que se pide a @Risk que lleve a cabo el muestreo de una distribución normal con media 100 y desviación estándar 15. Se puede encontrar que los percentiles 5, 10, . . ., 95 de una distribución normal estándar (por medio de la función NORMSINV) son iguales a los valores mostrados en la figura 2.

Suponga que se quieren simular 100 valores de una variable aleatoria normal con media 100 y desviación estándar 15. Luego, @Risk asegura que 5 son menores o iguales a 75.33, 5 están entre 75.33 y 80.78, etcétera. Así, la simulación produce una representación muy precisa de la distribución de la variable aleatoria. En particular, las medias simuladas, las varianzas y otras estadísticas serán mucho más exactas que si se utiliza la simulación de Monte Carlo. Con Monte Carlo, 8 de 100 valores generados podrían ser < 75.33, 3 de 100 valores generados podrían estar entre 75.33 y 80.78, etcétera.

Paso 4 En la celda B7, calcule el ingreso de precio íntegro con la fórmula

=C3*MIN(C1,C2)

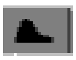
Esto asegura que se venderá a precio íntegro el mínimo de la cantidad pedida y la cantidad demandada.

Paso 5 En B8, calcule el ingreso de salvamento con la fórmula

=C4*IF(C1>C2,(C1-C2),0)

Paso 9 Con el cursor en B10, seleccione B10 como una celda de salida seleccionando el icono de una sola flecha. Observe que aparece la expresión RiskOutput() + antes de la fórmula de ganancia, lo cual indica que la ganancia es una celda de salida. Se pudo haber escrito esta expresión en lugar de usar el icono.

Paso 10 Seleccione el icono Simulations Settings. De la pestaña iteration, seleccione 1000 iteraciones y 5 simulaciones. De la pestaña Sampling, elija Latin Hypercube de la opción Sampling. Esto hará que @Risk recalcule la demanda y la ganancia 1000 veces para cada una de las cinco cantidades de pedido. En general, si se tiene una RISKSIMTABLE en la hoja de cálculo, el número de simulaciones debe ser igual al número de valores en la RISKSIMTABLE. Si no utiliza una función RISKSIMTABLE, deje las simulaciones en 1.



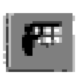
Paso 11 Seleccione el icono Run Simulation mostrado aquí. Después de ejecutar la simulación, se verá el resumen de estadísticas mostrado en la figura 3. La primera simulación es por 100 calendarios pedidos, la segunda es por 150, etcétera.

Para obtener estadísticas detalladas, seleccione Insert Detailed Statistics y obtenga la figura 4. Para pegar las estadísticas en la hoja de cálculo, dé clic con el botón derecho del ratón en Results y luego elija Copy. Dé clic en el icono X y elija Paste para insertar los resultados en la hoja de cálculo original.

Interpretación de las estadísticas obtenidas En las figuras 3 y 4 se muestra que la ganancia promedio para 1000 ensayos cuando se piden 200 calendarios (por ejemplo) es \$350.00. De la figura 4, la desviación estándar para mil ensayos es \$163.54. Al parecer, pedir 200 calendarios maximiza la ganancia esperada, pero se puede argumentar a favor de pedir 150 calendarios. Por 10% menos de ganancia esperada, se reduce el riesgo a la mitad. La decisión depende del grado de aversión al riesgo de los dueños de la tienda.

OBSERVACIONES

1 La función RISKSIMTABLE utiliza el mismo conjunto de números aleatorios para generar la demanda de cada simulación. Así, para cada cantidad de pedido, la ganancia básica se ajusta el mismo conjunto de demandas.
2 Se puede volver a los resultados en cualquier momento seleccionando el icono Results.
3 Se puede volver a la hoja de trabajo desde Resultados seleccionando Window Show Excel Window. También se puede dar clic en el icono X (de Excel).



Cómo determinar un intervalo de confianza para la ganancia esperada

Si se ejecutan 1000 ensayos más del ejemplo 1, @Risk generaría un conjunto distinto de ganancias,[†] y se obtendría una estimación diferente de la ganancia promedio. Así que ninguna simulación da exactamente la ganancia promedio. ¿Qué tan exacta es la estimación de la ganancia promedio obtenida con @Risk?

De la sección 21.9, se puede tener una seguridad de 95% que la ganancia promedio o esperada para 200 calendarios está entre

$$\text{(Ganancia promedio)} \pm t_{(.025,\ 199)} \text{ error estandar promedio}$$

Usando la fórmula en el Excel TINV (.05,199) = 1.97, encontramos que $t_{(.025,\ 199)} = 1.97$. Aqui,

$$\text{Error estándar promedio} = \frac{\text{desviación estándar}}{\sqrt{\text{iteraciones}}} = \frac{163.54}{\sqrt{1000}} = 5.17$$

[†]Cuando se establece la semilla en 0 (en Simulation Settings Sampling), cada vez que se ejecuta una simulación se obtienen resultados distintos. Otros valores posibles para la semilla son enteros entre 1 y 32 767. Siempre que se elija un valor distinto de cero para la semilla, aparecerán los mismos valores para las celdas de entrada y de salida. Por ejemplo, si se elige un valor de semilla de 10, entonces cada vez que se ejecute la simulación se obtendrán exactamente los mismos resultados. A menudo se elige una semilla de 1. Si elige un valor de 1 para la semilla, las estadísticas que obtenga coincidirán con las mostradas aquí.

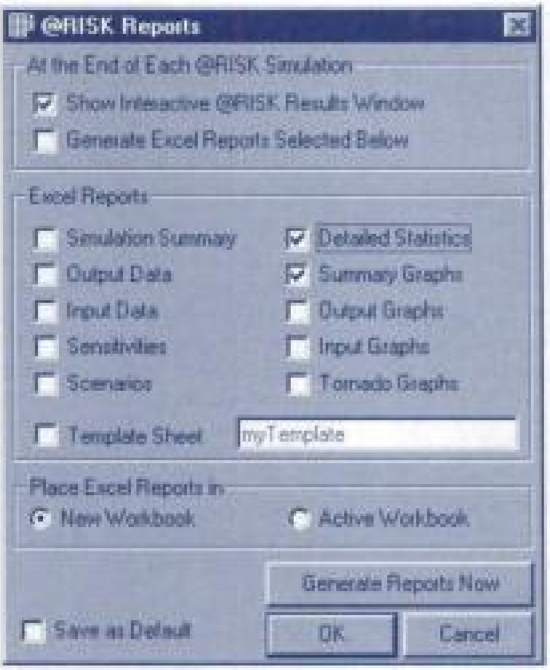


FIGURA 10

Por ejemplo, en la celda F12 se introduce la fórmula

=RISKSTDDEV($B$10,F11)

Luego se copia esta fórmula de F12 a G12:J12. Esta fórmula rastrea la desviación estándar de cada cantidad de pedido. Los resultados son como sigue:

	E	F	G	H	I	J
10						
11		1	2	3	4	5
12	mean	$249.99	$372.75	$455.10	$435.25	$374.93
13	sigma	$0.36	$13.69	$65.80	$107.95	$112.47

Por ejemplo, en la tercera simulación, para la cual se piden 200 calendarios, la ganancia promedio para 1000 iteraciones fue $455.10, con una desviación estándar de $65.80.

PROBLEMAS

Grupo A

1 Explique por qué la ganancia esperada se debe maximizar pidiendo una cantidad igual a alguna demanda posible para los calendarios. (*Sugerencia:* si éste no es el caso, entonces alguna cantidad de pedido, como 190 calendarios, debe maximizar la ganancia esperada. Si pedir 190 calendarios maximiza la ganancia esperada, entonces debe producir una ganancia esperada mayor que un tamaño de pedido de 150. Pero entonces un pedido de 200 calendarios también debe producir una ganancia esperada más grande que 190 calendarios. ¡Esto contradice la supuesta optimalidad de pedir 190 calendarios!

2 En agosto de 2004, un distribuidor de automóviles está intentando determinar cuántos autos 2005 debe pedir. Cada auto pedido en agosto de 2004 cuesta 10 000 dólares. La demanda para los modelos 2005 del distribuidor tiene la distribución de probabilidad mostrada en la tabla 1. Cada automóvil se vende en 15 000 dólares. Si la demanda para los automóviles 2005 excede el número de automóviles pedidos en agosto, el distribuidor debe formular un nuevo pedido a un costo de 12 000 dólares por automóvil. Los automóviles sobrantes se deben rematar (precio rebajado) a 9 000 dólares cada uno. Utilice la simulación para determinar cuántos au-

TABLA 1

Número de automóviles pedidos	Probabilidad
20	.30
25	.15
30	.15
35	.20
40	.20

tomóviles se deben pedir en agosto. Para su cantidad de pedido óptima, encuentre un intervalo de confianza de 95% para la ganancia esperada.

3 Suponga que la librería del ejemplo 1 no recibe dinero por los primeros 50 calendarios sobrantes devueltos, pero recibe $.75 por cada calendario posterior devuelto. ¿Esto cambia la cantidad de pedido óptima?

4 Un plan TSB (Beneficio con Ahorro Tributario) le permite colocar dinero en una cuenta al comienzo del año civil para gastos médicos. Esta cantidad no está sujeta a impuesto federal (por consiguiente, la frase Tax Saver Benefit, TSB) A medida que paga gastos médicos durante el año, el administrador del TSB le reembolsa hasta que se agota el TSB. Sin embargo, el problema radica en que el dinero que quede en el TSB al final de año lo pierde usted. Usted estima que hay las mismas probabilidades de que sus gastos médicos para el siguiente año serán $3000, $4000, $5000, $6000 o $7000. Su tasa tributaria de ingresos federal es 40%. Suponga que su salario anual es de 50 000 dólares.

a ¿Cuánto debe poner en un plan TSB? Considere tanto el ingreso esperado por precio rebajado como la desviación estándar del ingreso por precio rebajado en su respuesta. (*Sugerencia*: su simulación indicará que dos opciones tienen aproximadamente el mismo ingreso esperado por precio rebajado).

b ¿Su salario anual influye en la decisión correcta?

Grupo B

5 Para el problema 2, suponga que la demanda para los automóviles tiene una distribución normal con $\mu = 40$ y $\sigma = 7$. Utilice la simulación para determinar una cantidad de pedido óptima. Para su cantidad de pedido óptima, determine un intervalo de confianza de 95% para la ganancia esperada.

6 Seis meses antes de su convención anual, la American Medical Association (AMA) debe determinar cuántas habitaciones reservar. En este momento, la AMA puede reservar habitaciones a un costo de 50 dólares cada una. La AMA debe pagar el costo de 50 dólares incluso si la habitación no se ocupa. La AMA cree que el número de médicos que asisten a la convención tendrá una distribución normal, con una media de 5 000 y una desviación estándar de 1 000. Si el número de personas que asisten a la convención es mayor que el número de habitaciones reservadas, se deben reservar cuartos extra a un costo de $80 por habitación. Utilice la simulación para determinar el número de habitaciones que se deben reservar para minimizar el costo esperado de la AMA.

7 Un boleto de Indianápolis a Orlando en Deleast Airlines se vende en 150 dólares. El avión puede llevar 100 personas. El costo de volar un avión vacío es de 8000 dólares. La aerolínea incurre en costos variables de 30 dólares (alimentos y combustible) por cada persona en el avión. Si la aerolínea acepta reservaciones demás para el vuelo, cualquier persona que ya no alcance lugar recibe una compensación de 300 dólares. En promedio, 95% de las personas que tienen una reservación se presentan para tomar el avión. Para maximizar la ganancia esperada, ¿cuántas reservaciones para el vuelo debe aceptar Deleast? (*Sugerencia*: la función RISKBINOMIAL de @Risk se puede usar para simular el número de pasajeros que se presentan al vuelo. Si el número de reservaciones tomadas está en la celda A2, entonces la fórmula

=RISKBINOMIAL(A2,.95)

generará el número de clientes que en realidad se presentan al vuelo).

23.2 Modelado de flujos de efectivo de un producto nuevo

En esta sección, se mostrará cómo GM y Eli Lilly modelan los flujos de efectivo de nuevos productos. Se empieza por analizar la importante variable aleatoria triangular.

Variable aleatoria triangular

Los administradores suelen realizar análisis en términos del mejor caso, el peor caso y el resultado más probable. A menudo no comprenden que podría ocurrir cualquier valor entre el mejor y el peor caso. La variable aleatoria triangular puede ayudar.

Suponga que se quiere modelar la participación en el mercado del primer año para un producto nuevo. Se considera que el peor caso es 20%, la participación más probable es 40% y el mejor caso es 70%. Se modelará la participación en el mercado del año 1 con una **variable aleatoria triangular.** Véase la figura 11. Básicamente, @Risk genera la participación en el mercado del año 1 al hacer proporcional la probabilidad de una participación determinada a la altura del triángulo de la figura 11. Así, una participación en el mercado de 40% para el primer año es la más probable; todas las cuotas de mercado simuladas estarán entre 20 y 70%. Una participación en el mercado de 30% ocurre la mitad de las veces com-

FIGURA 12

	C	D	E	F	G	H	I
2							
3							
4	tax rate	0.4					
5	cost growth	0.04					
6	discount rate	0.15					
7	decay rate	0.072255268					
8							
9		Time					
10		0	1	2	3	4	5
11	Cost	1.40E+09					
12	Unit Sales		144227.4769	133806.2819	124138.0731	115168.4433	106846.9166
13	Price		$ 15,000.00	$ 15,000.00	$ 15,000.00	$ 15,000.00	$ 15,000.00
14	Unit cost		$ 10,000.00	$ 10,400.00	$ 10,816.00	$ 11,248.64	$ 11,698.59
15	Revenues		$ 2,163,412,154.19	$2,007,094,228.55	$ 1,862,071,096.57	$ 1,727,526,649.90	$ 1,602,703,748.32
16	Variable Cost		$ 1,442,274,769.46	$1,391,585,331.79	$ 1,342,677,398.70	$ 1,295,488,358.34	$ 1,249,957,799.41
17	Depreciation		$ 280,000,000.00	$ 280,000,000.00	$ 280,000,000.00	$ 280,000,000.00	$ 280,000,000.00
18	Before tax profit		$ 441,137,384.73	$ 335,508,896.76	$ 239,393,697.87	$ 152,038,291.56	$ 72,745,948.91
19	After tax profit		$ 264,682,430.84	$ 201,305,338.05	$ 143,636,218.72	$ 91,222,974.93	$ 43,647,569.34
20	Cash flow	-1400000000	$ 544,682,430.84	$ 481,305,338.05	$ 423,636,218.72	$ 371,222,974.93	$ 323,647,569.34
21							
22	npv cash flows	$77,633,524.27					
23							

Solución El trabajo está en el archivo Gmcashflow.xls. (Véase la figura 12).

Gmcashflow.xls

Recuerde que en los años 1 a 5, flujo de efectivo = ganancia después de impuestos + depreciación.

Paso 1 En la celda B11, introduzca el costo fijo de 1.4e9. En la celda B20, introduzca el flujo de efectivo del año cero con la fórmula

$$=-B11$$

Paso 2 En la celda E12, calcule las ventas unitarias del año 1 con la fórmula

$$=\text{RISKTRIANG}(100\,000{,}150\,000{,}170\,000)$$

La sintaxis de la función RISKTRIANG requiere que se introduzca primero el valor mínimo de la variable aleatoria, seguido por el valor más probable y luego el valor más grande.

Paso 3 En la celda D7, simule la tasa de disminución con la fórmula

$$=\text{RISKTRIANG}(0.05{,}0.08{,}0.1)$$

Paso 4 En las celdas F12:I12, calcule las ventas unitarias para los años 2 a 5 copiando de F12 a G12:I12 la fórmula

=(1-decay_rate)*E12

La celda D7 se nombró decay_rate.

Paso 5 Introduzca en E13:I13 el precio unitario de $15 000.

Paso 6 En la celda E14, introduzca el costo variable del año 1 de $10 000. Entonces en las celdas F14:I14, calcule el costo variable para los años 1 a 5 copiando de F14 a G14:I14 la fórmula

=E14*(1+$D$5)

Paso 7 Copiando de E15 a F15:I15 la fórmula

=E13*E12

se calcula el ingreso por ventas de cada año.

	H	I
29		gmcashflowdecay.xls
30	Name	npv cash flows / Time
31	Description	Output
32	Cell	Sheet1!D22
33	Minimum	-2.19E+08
34	Maximum	2.55E+08
35	Mean	4.31E+07
36	Std Deviation	9.92E+07
37	Variance	9.84E+15
38	Skewness	-0.3451601
39	Kurtosis	2.396719
40	Errors Calculated	0
41	Mode	6.10E+07
42	5% Perc	-1.35E+08
43	10% Perc	-1.03E+08
44	15% Perc	-7.06E+07
45	20% Perc	-4.68E+07
46	25% Perc	-3.02E+07
47	30% Perc	-8040124
48	35% Perc	9848326
49	40% Perc	2.64E+07
50	45% Perc	4.13E+07
51	50% Perc	5.76E+07
52	55% Perc	6.90E+07
53	60% Perc	8.02E+07
54	65% Perc	9.26E+07
55	70% Perc	1.04E+08
56	75% Perc	1.18E+08
57	80% Perc	1.32E+08
58	85% Perc	1.49E+08
59	90% Perc	1.66E+08
60	95% Perc	1.90E+08
61	Filter Minimum	

	L	M	N
34			
35	95% CI		
36	for Mean		
37	NPV		
38	Lower	3.69E+07	43-2(99)/sqrt(1000)
39	Upper	4.94E+07	43+2(99)/sqrt(1000)

FIGURA 13

Paso 8 Copiando de E16 a F16:I16 la fórmula

=E14*E12

se calcula el costo variable para cada año.

Paso 9 En las celdas E17:I17, se calcula la depreciación para cada uno de los años 1 a 5 copiando de E17 a F17:I17 la fórmula

=$D$11/5

Paso 10 Copiando de E18 a F18:I18 la fórmula

=E15-E16-E17

se determina la ganancia antes de impuesto para los años 1 a 5.

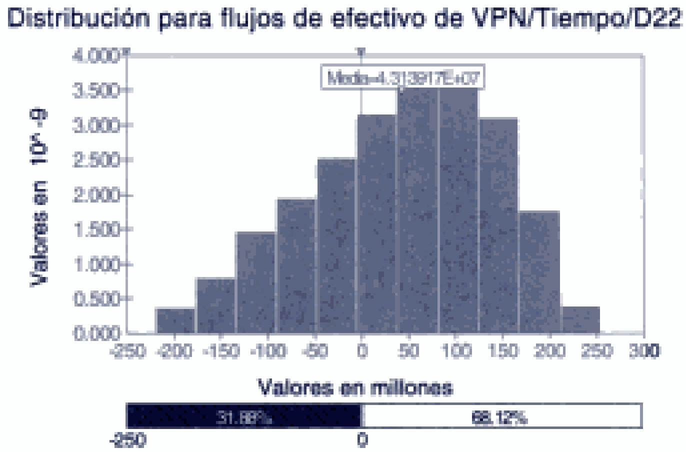


FIGURA 14

Paso 11 Copiando de E19 a F19:I19 la fórmula

=(1-tax_rate)*E18

se determina la ganancia después de impuestos para los años 1 a 5.

Paso 12 Al copiar de E20 a F20:I20 la fórmula

=E19+E17

se agrega la depreciación de cada año a su ganancia después de impuestos para calcular el flujo de efectivo del año.

Paso 13 Suponiendo flujos de efectivo de fin de año, la fórmula

=VPN(0.15,D20:I20)

en la celda D22 calcula el VPN de los flujos de efectivo.

Paso 14 Después de hacer de la celda D22 una celda de resultados y ejecutar 1 000 iteraciones, se obtiene el resultado estadístico mostrado en la figura 13 y la gráfica de la figura 14.

De la figura 13, el VPN promedio de los flujos de efectivo (VPN ajustado respecto al riesgo) es de $43 millones. Se tiene una certeza de 95% que el VPN promedio está entre $37 millones y $49 millones. En la figura 14 se observa que hay una probabilidad de 32% que el proyecto tenga flujos de efectivo con un VPN negativo (reduciendo así el valor de la compañía) y una probabilidad de 68% que los flujos de efectivo tengan un VPN positivo.

Modelo de Lilly

En el negocio de los automóviles, un nuevo modelo casi siempre tiene ventas reducidas cada año. Sin embargo, un nuevo fármaco ve incrementadas las ventas en los primeros años, seguidas por ventas reducidas. Para modelar esta forma del ciclo de vida del producto, se deben incorporar las siguientes fuentes de incertidumbre. (Observe que se supone que se conoce el número total de años durante los que se vende el fármaco).

- Número de años para los que se incrementan las ventas unitarias.
- Incremento en ventas del porcentaje promedio anual para la porción de incremento de ventas del periodo de ventas.
- Disminución en ventas del porcentaje promedio anual para la porción de disminución de ventas del periodo de ventas.

FIGURA 15

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1													
2			**Growth then decay**										
3		length of growth	5										
4		tax rate	0.4										
5		cost growth	0.04										
6		discount rate	0.15										
7		growth rate	0.055313219										
8		decay rate	0.117781276										
9			Time										
10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11		Cost	1.60E+09										
12		Unit Sales		1.12E+05	1.18E+05	1.25E+05	1.32E+05	1.39E+05	1.47E+05	1.29E+05	1.14E+05	1.01E+05	8.88E+04
13		Price		1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04	1.50E+04
14		Unit cost		1.00E+04	1.04E+04	1.08E+04	1.12E+04	1.17E+04	1.22E+04	1.27E+04	1.32E+04	1.37E+04	1.42E+04
15		Revenues		1.68E+09	1.77E+09	1.87E+09	1.98E+09	2.08E+09	2.20E+09	1.94E+09	1.71E+09	1.51E+09	1.33E+09
16		Variable Cost		1.12E+09	1.23E+09	1.35E+09	1.48E+09	1.63E+09	1.78E+09	1.64E+09	1.50E+09	1.38E+09	1.26E+09
17		Depreciation		1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08	1.60E+08
18		Before tax profit		4.00E+08	3.84E+08	3.62E+08	3.34E+08	2.99E+08	2.56E+08	1.44E+08	5.01E+07	-2.77E+07	-9.19E+07
19		After tax profit		2.40E+08	2.30E+08	2.17E+08	2.00E+08	1.79E+08	1.53E+08	8.62E+07	3.01E+07	-1.66E+07	-5.51E+07
20		Cash flow	-1600000000	4.00E+08	3.90E+08	3.77E+08	3.60E+08	3.39E+08	3.13E+08	2.46E+08	1.90E+08	1.43E+08	1.05E+08
21													
22		npv cash flows	($290,597,621.28)										

Lillygrowth.xls

El ejemplo 3 muestra cómo modelar este tipo de ciclo de vida del producto. Véase el archivo Lillygrowth.xls y la figura 15.

EJEMPLO 3 Eli Lilly

Lilly está produciendo un nuevo fármaco que se venderá durante 10 años. Se supone que las ventas del año 1 siguen una variable aleatoria triangular con 100 000 unidades en el peor caso, 150 000 en el caso más probable y 170 000 en el mejor caso. El costo fijo del año cero de desarrollar el fármaco es de 1.6 miles de millones de dólares con depreciación con base en línea recta de 10 años. Las ventas tienen las mismas probabilidades de aumentar los años 3, 4, 5 o 6, donde el incremento de porcentaje promedio durante esos años sigue una variable aleatoria triangular con 5% en el peor caso, 8% en el caso más probable y 10% en el mejor caso. Durante el resto de las ventas de 10 años del fármaco, las ventas unitarias disminuirán a una tasa gobernada por una variable aleatoria triangular con 8% en el mejor caso, 12% en el caso más probable y 18% en el peor caso. Durante cada año, una unidad del fármaco se vende en 15 000 dólares. El costo variable del año 1 de producir una unidad del fármaco es de 10 000 dólares. El costo variable unitario de producir el fármaco se incrementa 4% anual.

a Estime el VPN promedio de los flujos de efectivo del fármaco.

b ¿Cuál es la probabilidad de que el fármaco agregue valor a Lilly?

c ¿Qué fuente de incertidumbre es la guía más importante del VPN del fármaco?

Solución Después de transportar las fórmulas para crear los años 6 a 10 y cambiar la depreciación en el renglón 17 para un periodo de 10 años, se simulan las variables aleatorias en D3 (duración del incremento de ventas), D7 (tasa de porcentaje anual de incremento de ventas) y D8 (tasa de porcentaje anual de disminución de ventas) con las fórmulas siguientes

Celda D3: =RISKDUNIFORM({3,4,5,6})

La variable RISKDUNIFORM es una variable aleatoria discreta que asigna igual probabilidad a cada valor listado

Celda D7: =RISKTRIANG(0.05,0.08,0.1)

Celda D8: =RISKTRIANG(0.08,0.12,0.18)

En la celda E12, se generan las ventas del año 1 con la fórmula

=RISKTRIANG(100 000,150 000,170 000)

Copiando de F12 a G12:N12 la fórmula

=IF(F10≤length_of_growth+1,E12*(1+growth_rate),E12*(1-decay_rate))

se generan las ventas unitarias para los años 2 a 10. Observe que la fórmula incrementa las ventas anuales por la tasa de crecimiento para los años de duración de desarrollo y disminuye las ventas anuales por la tasa de disminución durante los años posteriores. (AD3 se le asigna el nombre length_of_growth, a D7 growth_rate y a D8 decay_rate.)

Se utiliza la Autoconvergencia para determinar el número de iteraciones para ejecutar @Risk. En Simulation Settings, seleccionar Iterations Auto y un cambio de 1% asegura que @Risk mantendrá en ejecución las iteraciones hasta que, durante por lo menos 100 iteraciones, la media, desviación estándar y otras estadísticas seleccionadas cambien en 1% o menos. En este ejemplo, @Risk ejecutó 1 800 iteraciones, produciendo los resultados de la figura 16. Hubo una media estimada de −$29 millones y una probabilidad de 54% de VPN negativo. Con un clic derecho en VPN de la interfaz de Explorer se obtiene el histograma de la figura 17. El histograma muestra una probabilidad de 53% que el fármaco disminuirá el VPN de Lilly.

Para el inciso (c), utilice una **gráfica de tornado** para determinar las directrices importantes del VPN. Para obtener una gráfica tornado, se debe haber seleccionado el cuadro Collect All Outputs del cuadro de diálogo Simulation Settings Sampling. (A menos que quiera una gráfica tornado, probablemente es mejor no seleccionar ese cuadro. Al marcar el cuadro se agrega una columna al resultado por cada función de @Risk en el modelo, y esto puede desordenar el resultado.) Dé clic derecho en VPN en la interfaz de Explorer, y seleccione Tornado Graph. Se puede obtener una correlación o una gráfica tornado de regresión, o ambas, como se ilustra en las figuras 18 y 19.

Cada barra de la gráfica tornado de correlación (figura 18) da la correlación de la variable aleatoria de @Risk con el VPN. Por ejemplo,

- Las ventas del año 1 tienen una correlación de .98 con el VPN.
- La tasa de crecimiento anual tiene una correlación de .14 con el VPN.

En resumen, la incertidumbre respecto a las ventas unitarias del año 1 es muy importante para determinar el VPN, pero otras variables aleatorias podrían ser remplazadas por su media sin cambiar mucho la distribución del VPN.

Para cada variable aleatoria de @Risk, la gráfica tornado de regresión (figura 19) calcula el *coeficiente de regresión estandarizado* para la variable aleatoria de @Risk cuando se intenta predecir VPN a partir de las variables aleatorias de @Risk en la hoja de cálculo. Un coeficiente de regresión estandarizado indica (después de ajustar otras variables en la ecuación) el número de desviaciones estándar por las que cambia VPN cuando la variable aleatoria específica de @Risk cambia por una desviación estándar. Por ejemplo,

- Un cambio de una desviación estándar en las ventas unitarias del año 1 (ceteris paribus) cambiará el VPN por .98 desviaciones estándar.
- Un cambio de una desviación estándar en la tasa de crecimiento anual incrementará el VPN por .15 desviaciones estándar (ceteris paribus).

De nuevo, resulta evidente que la incertidumbre para las ventas del año 1 es en realidad lo que importa aquí; otras variables aleatorias también podrían ser remplazadas por sus medias.

TABLA 2

Año	1	2	3
PBN	3%	5%	4%
INF	4%	7%	3%

TABLA 3

Número de competidores	Probabilidad
0	.50
1	.30
2	.10
3	.10

TABLA 4

	Año 1	Año 2	Año 3
Precio de ventas	$15 000	$16 000	$17 000
Costo variable	$12 000	$13 000	$14 000

TABLA 5

Tiempo de abandono	Valor recibido
Final del año 1	$3 000
Final del año 2	$2 600
Final del año 3	$1 900
Final del año 4	$900

Costo variable para el año 2 = 1.05*(costo variable del año 1)

Costo variable para el año 3 = 1.05*(costo variable del año 2)

Su objetivo es estimar el VPN del nuevo automóvil durante sus primeros tres años. Suponga que los flujos de efectivo se descuentan a 10%; es decir, 1 dólar recibido en este momento equivale a $1.10 recibido un año después.

a Simule 400 iteraciones y estime la media y la desviación estándar del VPN los primeros tres años de las ventas.

b Tengo una confianza de 95% que el VPN esperado de este proyecto está entre _______ y _______.

c Utilice la opción objetivo para determinar un intervalo de confianza de 95% para el VPN real del Racer durante sus primeros tres años de producción.

d Utilice una gráfica tornado para analizar qué factores influyen más en determinar el VPN del Racer.

2 Trucko produce el camión Goatco. La compañía quiere información acerca de las ganancias descontadas obtenidas durante los siguientes tres años. Durante un determinado año, la cantidad total de camiones vendidos en Estados Unidos es 500 000 + 50 000*GNP – 40 000*INF, donde

GNP = % incremento en el PNB durante el año

INF = % incremento en el índice de precios al consumidor durante el año.

Value Line ha hecho las predicciones dadas en la tabla 2 para el incremento en el PNB e INF durante los tres años siguientes.

En el pasado, 95% de las predicciones de Value Line han sido precisas dentro de 6% del incremento del PNB real, y 95% de las predicciones de Line Value para INF han sido precisas dentro de 5% del incremento de inflación real.

Al comienzo de cada año, varios competidores podrían entrar al negocio de los camiones. Al inicio de un año, la probabilidad de que cierto número de competidores entre al negocio de los camiones se da en la tabla 3.

Antes que los competidores se unan a la industria al comienzo del año 1, hay dos competidores. Durante un año que comienza (después que los competidores han entrado al negocio, pero antes que salga alguno) con c competidores, Goatco tendrá una participación en el mercado dada por $.5*(.9)^c$. Al final de cada año, hay una probabilidad de 20% que cada competidor salga de la industria.

El precio de venta del camión y el costo de producción por camión se dan en la tabla 4.

a Simule 500 veces los tres años siguientes de la ganancia de Trucko. Estime la media y la varianza de las ganancias descontadas de los tres años (utilice una tasa de descuento de 10%).

b Haga lo mismo si durante cada año hay una probabilidad de 50% de que cada competidor abandone la industria.

(*Sugerencia*: se puede modelar el número de empresas que salen de la industria en un determinado periodo con la función RISKBINOMIAL. Por ejemplo, si el número de competidores en la industria está en la celda A8, entonces el número de competidores que salen de la industria durante un periodo se puede modelar con la expresión =RISKBINOMIAL(A8,.20). Recuerde que la función RISKBINOMIAL no está definida si su primer argumento es igual a 0).

Grupo B

3 Usted tiene la oportunidad de comprar un proyecto que produce al final de los años 1 a 5 los siguientes flujos de efectivo (aleatorios):

El flujo de efectivo al final del año 1 es normal con media 1 000 y desviación estándar 200.

Para $t > 1$, el flujo de efectivo al final del año t es normal con media = flujo de efectivo real al final del año $(t - 1)$ y desviación estándar = .2*(media del flujo de efectivo del año t).

a Suponiendo que los flujos de efectivo se descuentan a 10%, determine el VPN esperado (en dólares del tiempo 0) de los flujos de efectivo de este proyecto.

b Suponga que se tiene la siguiente opción: al final de los años 1, 2, 3 o 4, se podría desistir de los flujos de efectivo futuros. En cambio por hacer esto, se recibe el *valor de abandono* dado en la tabla 5.

Suponga que la decisión de abandono se toma como sigue: se abandona si y sólo si el VPN esperado de los flujos de efectivo de los años restantes es más pequeño que el valor de abandono. Por ejemplo, suponga que el flujo de efectivo al final del año 1 es $900. En este punto del tiempo, la mejor estimación es que los flujos de efectivo de los años 2 a 5 también serán de $900. Así, se abandonaría el proyecto al final del año 1 si $3000 excedieron el VPN de recibir $900 durante cuatro años sin interrupción. De otro modo, se continuaría. ¿Cuál es el valor esperado de la opción de abandono?

teza. En realidad, estos tiempos normalmente son inciertos. Por supuesto, esto significa que el tiempo necesario para completar el proyecto también es incierto. También indica que para cada actividad, hay una *probabilidad* (no necesariamente igual a 0 o 1) de que la actividad es crítica.

Para ilustrar, suponga que las actividades *A* y *B* pueden comenzar de inmediato. La actividad *C* puede comenzar entonces tan pronto como se completen las actividades *A* y *B*, y el proyecto se termina en cuanto se termina la actividad *C*. Resulta evidente que la actividad *C* está en la trayectoria crítica, ¿pero que hay acerca de *A* y *B*? Digamos que los tiempos de actividad *esperados* de *A* y *B* son 10 y 12. Si se utilizan estos tiempos esperados y se ignora cualquier incertidumbre acerca de los tiempos reales; es decir, si se procede como se hizo en el capítulo 7, entonces la actividad *B* es en definitiva una actividad crítica. Sin embargo, suponga que hay una probabilidad positiva de que *A* pueda tener duración 12 y *B* pueda tener duración 11. En este escenario, *A* es una actividad crítica. Por consiguiente, no se puede decir por adelantado cuál de las actividades, *A* o *B*, será crítica. Sin embargo, mediante la simulación se puede ver cuán *probable* es que cada una de estas actividades sea crítica. También se puede ver el tiempo probable que tome la realización de todo el proyecto. Para ilustrar se utiliza el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4 Proyecto de construcción con tiempos de actividad inciertos

Tom Lingley, un contratista independiente, acordó construir una nueva habitación en una casa existente. Planea empezar a trabajar el lunes temprano, el primero de junio. La pregunta principal es cuándo completará su trabajo, dado que trabaja sólo los fines de semana. El dueño de la casa está particularmente esperanzado de que la habitación esté lista para el sábado 27 de junio, es decir, en 20 días de trabajo o menos. El trabajo procede en etapas, marcadas de la A a la J, como se resume en la tabla 7. Tres de estas actividades, E, F y G, las llevarán a cabo tres subcontratistas independientes. Los tiempos *esperados* de las actividades (en días) se muestran en la tabla. Sin embargo, se trata de las mejores estimaciones. Lingley sabe que los tiempos *reales* de las actividades pueden variar debido a retrasos inesperados, a que se enfermen los trabajadores, etcétera. A Lingley le gustaría utilizar una simulación por computadora para ver (1) cuánto tiempo es probable que tome el proyecto, (2) qué tan probable es que el proyecto concluya en la fecha límite y (3) cuáles actividades tienen probabilidad de ser críticas.

Solución Primero es necesario elegir distribuciones para los tiempos de actividad inciertos. Luego, dados algunos tiempos de actividad generados al azar, se ilustra un método para calcular la duración del proyecto e identificar las actividades en la trayectoria crítica.

Distribución de Pert Como siempre, hay varias distribuciones de probabilidad posibles razonables que se podrían usar para los tiempos de actividad aleatorios. Aquí se ilustra una

TABLA 7
Datos de tiempos de actividad

Descripción	Índice	Predecesores	Duración esperada
Preparar los cimientos	A	Ninguno	4
Colocar el marco	B	A	4
Pedir las ventanas a la medida	C	Ninguno	11
Erigir las paredes exteriores	D	B	3
Hacer la instalación eléctrica	E	D	4
Hacer la plomería	F	D	3
Colocar la red de conductos	G	D	4
Recubrir paredes y techo	H	E, F, G	3
Instalar las ventanas	I	B, C	1
Pintar y limpiar	J	H	2

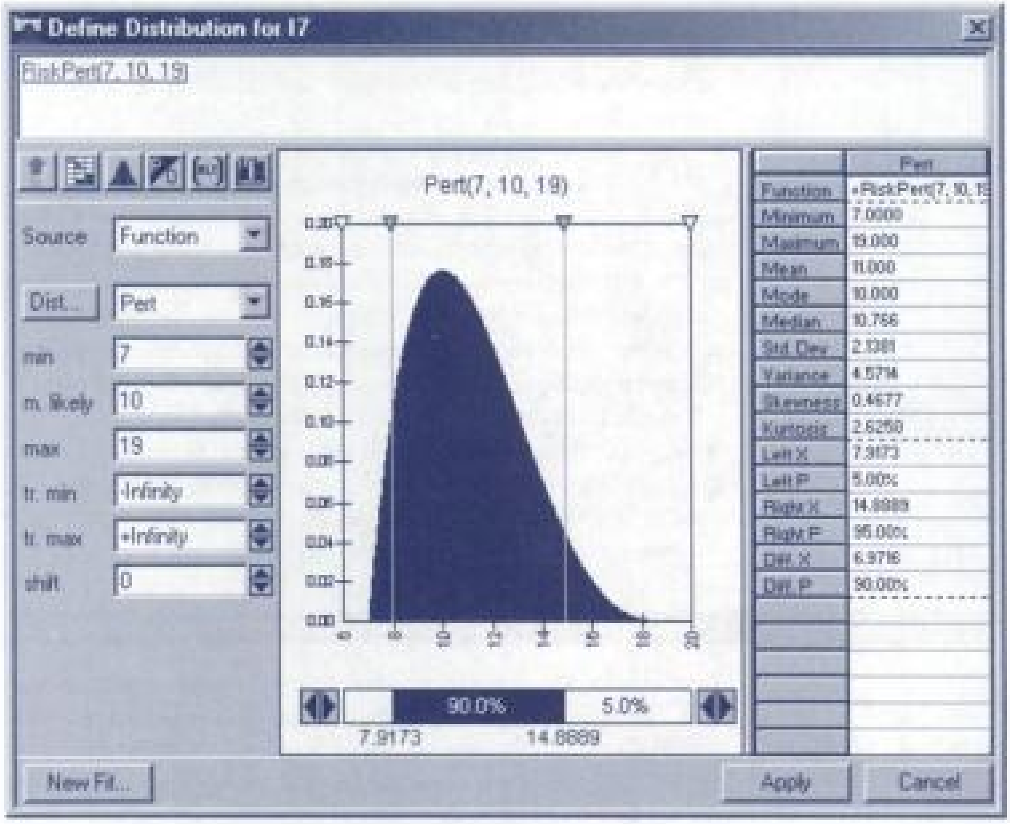


FIGURA 20
Distribución de Pert

distribución que se ha vuelto popular en la programación de proyectos, llamada *distribución de Pert*.[†] Como se ilustra en la figura 20, es una versión "redondeada" de la distribución triangular que se especifica mediante tres parámetros: un valor mínimo, un valor más probable y un valor máximo. La distribución de la figura utiliza los valores 7, 10 y 19 para estos tres valores, lo que significa una media de 11. Se usará esta distribución para la actividad C. De manera similar, para las otras actividades, se eligen parámetros para la distribución de Pert que dio como resultado las medias de la tabla 7. En realidad, esto se habría hecho de otra manera. El contratista estimaría los parámetros mínimo, el más probable y máximo para las distintas actividades, y de aquí se deducirían las medias.

Desarrollo del modelo de simulación La clave para el modelo es representar la red del proyecto en forma de actividad en arco, como en la figura 21, y luego se encuentra E_j para cada j, donde E_j es el tiempo más próximo de llegar al nodo j. Cuando se numera a los nodos de modo que los arcos vayan de los nodos con el menor número a los nodos con el número mayor, se pueden calcular las E_j mediante iteraciones, empezando con $E_1 = 0$, con la ecuación

$$E_j = \max(E_i + t_{ij}) \tag{1}$$

Aquí, el máximo se toma en los arcos que conducen hacia el nodo j, y t_{ij} es el tiempo de actividad en tal arco. Entonces E_n es el tiempo para completar el proyecto, donde n es el índice del nodo terminal. Esto hará muy fácil calcular la duración del proyecto.

También se requiere un método para identificar las actividades críticas para algunos tiempos de actividad determinados. Por definición, una actividad es crítica si un incremento pequeño en su tiempo de actividad causa que se incremente el tiempo del proyecto. Por consiguiente, se seguirá la pista de estos dos conjuntos de tiempos de actividad y los tiem-

[†]El nombre es en honor al acrónimo PERT (Program Review and Evaluation Technique) que es sinónimo de programación de proyectos en un ambiente incierto.

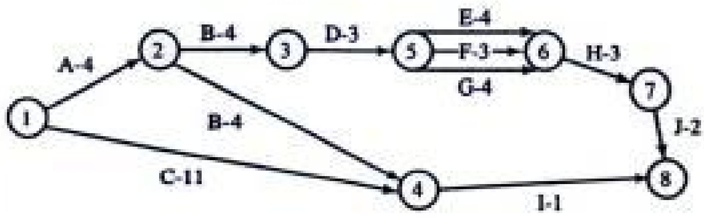


FIGURA 21
Red para el proyecto de construir una habitación

FIGURA 22
Modelo de simulación de programación de proyecto

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Room construction project									
2										
3	Data on activity network				Parameters of PERT distributions					
4	Activity	Code	Numeric index	Predecessors	Min	Most likely	Max	Implied mean	Duration	Duration+
5	Prepare foundation	A	1	None	1.5	3.5	8.5	4	2.158	2.159
6	Put up frame	B	2	A	3	4	5	4	4.513	4.513
7	Order custom windows	C	3	None	7	10	19	11	9.572	9.572
8	Erect outside walls	D	4	B	2	2.5	6	3	3.322	3.322
9	Do electrical wiring	E	5	D	3	3.5	7	4	3.282	3.282
10	Do plumbing	F	6	D	2	2.5	6	3	2.377	2.377
11	Put in duct work	G	7	D	2	4	6	4	4.668	4.668
12	Hang dry wall	H	8	E,F,G	2.5	3	3.5	3	3.197	3.197
13	Install windows	I	9	B,C	0.5	1	1.5	1	1.384	1.384
14	Paint and clean up	J	10	H	1.5	2	2.5	2	1.677	1.677
15										
16	Index of activity to increase	1								
17										
18	Event times									
19	Node	Event time	Event time+							
20	1	0	0							
21	2	2.158	2.159							
22	3	6.671	6.672							
23	4	9.572	9.572							
24	5	9.993	9.994							
25	6	14.661	14.662							
26	7	17.858	17.859							
27	8	19.536	19.537							
28										
29	Increase in project time?	1								
30										

pos de proyecto asociados. El primero utiliza los tiempos de actividad simulados. El segundo agrega una pequeña cantidad, como por ejemplo 0.001 al día, a un tiempo de actividad "seleccionado". Al usar la función RISKSIMTABLE con una lista tan larga como el número de actividades, se puede lograr que cada actividad sea la actividad seleccionada en este método. El modelo de hoja de cálculo aparece en la figura 22 y los detalles son como se describe a continuación. (Véase el archivo Projectsim.xls.)

Projectsim.xls

Entradas Introduzca los parámetros de las distribuciones de tiempos de actividad de Pert en las celdas sombreadas y a continuación las medias. Como ya se explicó, en realidad se eligen los valores mínimo, más probable y máximo mientras se está en el modelo @Risk de Window para obtener las medidas en la tabla 7. Observe que algunas de estas distribuciones son simétricas respecto al valor más probable, en tanto que las otras están sesgadas.

Tiempos de actividad Genere los tiempos de actividad aleatorios en la columna I introduciendo la fórmula

=RISKPERT(E5,F5,G5)

en la celda I5 y cópiela para el resto de las celdas.

Tiempos de actividad aumentados Se quiere agregar de manera sucesiva una pequeña cantidad a cada tiempo de actividad para determinar si está en la trayectoria crítica. Para hacer esto, introduzca la fórmula

=RISKSIMTABLE({1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10})

Name	Event time
Cell	B27 Output (Sim#1)
Minimum	15.69254
Mean	20.42262
Maximum	25.50042
Std Dev	1.602013
Variance	2.566447
Skewness	0.292087
Kurtosis	2.924874
Mode	20.30279
Left X	20
Left P	42.75847%
Right X	23
Right P	94.2309%
Diff X	3
Diff P	51.47242%
5th Perc.	17.9489
95th Perc.	23.1927
#Errors	0
Filter Min	
Filter Max	
#Filtered	0

FIGURA 23
Histograma de tiempo de terminación de proyecto

	Name	Cell	Sim#	Minimum	Mean	Maximum
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	1	0	0.998	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	2	0	0.998	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	3	0	0.002	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	4	0	0.998	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	5	0	0.446	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	6	0	0.063	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	7	0	0.491	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	8	0	0.998	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	9	0	0.002	1
Output 2	Increase in project time? / Event time	B29	10	0	0.998	1

FIGURA 24
Probabilidades de actividades que son críticas

De manera similar, los valores en los cuadros Right X y Right P implican que la probabilidad del proyecto que dura más de 23 días es ligeramente mayor que 5%. Esto de hecho no son buenas noticias para Lingley, y podría recurrir a la aceleración como se analizó en el capítulo 8.

Las medidas del resumen para la celda de salida B29 aparecen en la figura 24. Cada "simulación" en este resultado representa una actividad seleccionada que se incrementa ligeramente. La columna Mean indica la fracción de iteraciones donde el tiempo de proyecto se incrementa como resultado del incremento del tiempo de la actividad seleccionada. Por consiguiente, representa la probabilidad de que esta actividad sea crítica. Por ejemplo, la primera actividad (A) siempre es crítica, la tercera actividad (C) nunca es crítica y la quinta actividad (E) es crítica cerca de 45% del tiempo. Más específicamente, se ve que la trayectoria crítica siempre incluye las actividades A, B, D, H, J y una de las tres actividades "paralelas" E, F y G.

PROBLEMAS

Grupo A

1 La ciudad de Bloomington está a punto de construir una nueva planta de tratamiento de aguas. Una vez que esté diseñada la planta (D), se puede seleccionar el sitio (S), el contratista (C) y el personal de operación (P). Una vez seleccionado el sitio, se puede erigir el edificio (B). Se puede pedir la máquina de tratamiento de aguas (W) y preparar el manual de operaciones (M) sólo después que se selecciona el contratista. Se puede comenzar la capacitación (T) de los operadores cuando estén completados el manual de operaciones y el personal de operación. Cuando estén terminados el edificio y la planta de tratamiento, se puede instalar la máquina de tratamiento (I). Una vez que se instaló la máquina de tratamiento y se capacitó a los operadores, se puede obtener una licencia de operación (L). La media estimada y la desviación estándar del tiempo (en meses) necesario para completar cada actividad se dan en la tabla 8. Utilice la simulación para estimar la probabilidad de que el proyecto se completará en (a) menos de 50 días y (b) más de 55 días. También estime las probabilidades de que B, I y T son actividades críticas.

TABLA 8

	Media	Desviación estándar
Actividad D	6	1.5
Actividad S	2	3.0
Actividad C	4	1.0
Actividad P	3	1.0
Actividad B	24	6.0
Actividad W	14	4.0
Actividad M	3	0.4
Actividad T	4	1.0
Actividad I	6	1.0
Actividad L	3	6.0

2 Para completar una ampliación al edificio de negocios, es necesario terminar las actividades de la tabla 9 (los tiempos están en meses). El proyecto se completa una vez que se destruyó la habitación 111 y se construyó la estructura principal.

a Estime la probabilidad de que tomará por lo menos tres años completar la ampliación.

b Para cada actividad, estime la probabilidad de que ésta será una actividad crítica.

3 Para construir el nuevo edificio de leyes de la Universidad de Indiana, es necesario completar las actividades de la tabla 10 (los tiempos están en meses).

a Estime la probabilidad de que la terminación del proyecto tomará menos de 30 meses.

b Estime la probabilidad de que completar el proyecto tomará más de tres años.

c Para cada una de las actividades A, B, C y G, estime la probabilidad de que se trate de una actividad crítica.

TABLA 9

	Predecesores	Tiempo promedio	Desviación estándar
Actividad A: contratar trabajadores	—	4	0.6
Actividad B: excavar	A	9	2.5
Actividad C: colar los cimientos	B	5	1.0
Actividad D: destruir la habitación	A	7	2.0
Actividad E: construir la estrutura principal	C	10	1.5

TABLA 10

	Predecesores	Tiempo promedio	Desviación estándar
Actividad A: obtener fondos	—	6	0.6
Actividad B: diseñar el edificio	A	8	1.3
Actividad C: preparar el sitio	A	2	0.2
Actividad D: trazar la cimentación	B, C	2	0.3
Actividad E: levantar muros y contruir muros	D	3	1.0
Actividad F: terminar los exteriores	E	3	0.6
Actividad G: terminar los interiores	D	7	1.5
Actividad H: trabajos de jardinería	F, G	5	1.2

23.4 Confiabilidad y modelado de garantía

En el mundo actual de alta tecnología, es muy importante poder calcular la probabilidad de que un sistema compuesto por máquinas trabaje durante una cantidad deseada de tiempo. El tema de estimar la distribución de los tiempos de falla de máquina y la distribución de tiempo para la falla de un sistema se conoce como **teoría de confiabilidad.**

Hidden page

	A	B	C
1			
2	**Hubble Telescope**		
3		Mirror 1	49.30487
4		Mirror 2	30.19602
5		Mirror 3	38.99237
6		Mirror 4	37.64995
7			
8		Time all 4 work	30.19602
9		Time till last one fails	49.30487
10		Last time 2 are working	38.99237

FIGURA 27

	F	G	H	I
10	Name	Time all 4 \	Time till las	Last time 2
11	Descriptior	Output	Output	Output
12	Cell	C8	C9	C10
13	Minimum	3.733206	31.46502	27.71785
14	Maximum	66.0223	101.8234	80.49436
15	Mean	35.63382	64.18716	54.32821
16	Std Deviati	10.08293	9.306231	8.747266
17	Variance	101.6655	86.60596	76.51466
18	Skewness	-0.104045	0.121514	-2.73E-02
19	Kurtosis	2.737432	3.290648	2.910271
20	Errors Calc	0	0	0
21	Mode	34.15707	62.93507	58.45681
22	5% Perc	18.52796	49.15086	39.91564
23	10% Perc	22.40516	52.22929	42.77759
24	15% Perc	24.85496	54.84017	44.97655
25	20% Perc	26.80984	56.5674	46.99073
26	25% Perc	28.67021	57.84864	48.3152
27	30% Perc	30.25738	59.51218	49.89228
28	35% Perc	31.90257	60.52841	50.94405
29	40% Perc	33.26531	61.73524	52.26505
30	45% Perc	34.4916	62.83329	53.25808
31	50% Perc	35.7727	63.89499	54.54087
32	55% Perc	37.04685	65.06183	55.4865
33	60% Perc	38.58305	66.16101	56.72353
34	65% Perc	39.88355	67.578	58.00496
35	70% Perc	41.17931	68.97778	58.9762
36	75% Perc	42.88946	70.39309	60.089
37	80% Perc	44.47398	71.75684	61.61526
38	85% Perc	46.13106	73.66335	63.45758
39	90% Perc	48.46651	76.06507	65.64239
40	95% Perc	51.94818	79.72974	68.19598
41	Filter Minimum			
42	Filter Maximum			
43	Filter Type			
44	# Values F	0	0	0
45	Scenario #	>75%	>75%	>75%
46	Scenario #	<25%	<25%	<25%
47	Scenario #	>90%	>90%	>90%
48	Target #1 (	60	84	72
49	Target #1 (	99.54%	98.29%	98.00%

FIGURA 28

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Refrigerator**					
3		**Warranty**					
4							
5		Number	Lasts	Cost			
6		1	8.113087	0			
7		2	6.91762	0			.027^5
8		3	7.233594	0			1.43489E-08
9		4	8.776642	0			
10		5	7.120917	0			
11			Total Cost	0			
12							

FIGURA 29

No se está seguro de cuántos refrigeradores de reemplazo se tendrían que proveer a los clientes. Seleccionando el icono Define Distributions cuando se está en la celda C6, se pueden mover los dispositivos deslizantes sobre la densidad Weibull y determinar la probabilidad de que se tenga que remplazar un refrigerador determinado. Se encuentra que hay sólo una probabilidad de 2.7% que un refrigerador tenga que ser remplazado. Entonces la probabilidad de que por lo menos cinco refrigeradores tengan que ser remplazados es $(0.027)^5 = .000014$. Así, generando sólo cinco tiempos de vida de refrigerador se debe obtener una estimación precisa del costo total. Por lo tanto, se copia la fórmula RISKWEIBULL de C6 a C7:C10. Véase la figura 29.

En la celda D6, se calcula el costo asociado con un refrigerador vendido con la fórmula

=IF(C6<5,500,0)

En las celdas D7:D10, se calcula el costo (si existe) asociado con cualquier refrigerador de reemplazo copiando de D7 a D8:D10 la fórmula

=IF(AND(D6>0,C7<5),500,0)

Con esta fórmula se obtiene el costo de un reemplazo si y sólo si falló el refrigerador anterior y el refrigerador actual dura menos de cinco años.

En la celda D11, se calcula el costo total con la fórmula

=SUM(D6:D10)

Después de ejecutar 1000 iteraciones y hacer de la celda D11 una celda de salida (véase a continuación), se encuentra que el costo de garantía promedio por refrigerador es de 14.50 dólares. Observe que el costo máximo fue de 1000 dólares, así que en por lo menos una iteración, es necesario remplazar dos refrigeradores.

	F	G	H	I	J	K	L	M
11								
12		Name	Workbook	Worksheet	Cell	Minimum	Mean	Maximum
13	Output 1	Total cost / Co:	refrigerator	Sheet1	D11	0	**14.5**	1000

	B	C	D	E	F	G
1	**EXAMPLE OF**					
2	**RISKGENERAL**					
3	**DISTRIBUTION**					
4						
5			Minimum	0		
6			Maximum	60		
7			**Specified Points**			
8			10	1		
9			20	6		
10			45	8		
11			50	7		
12			55	6		
13	35.75	=RISKGENERAL(0,60,{10,20,45,50,55},{1,6,8,7,6})				

FIGURA 30

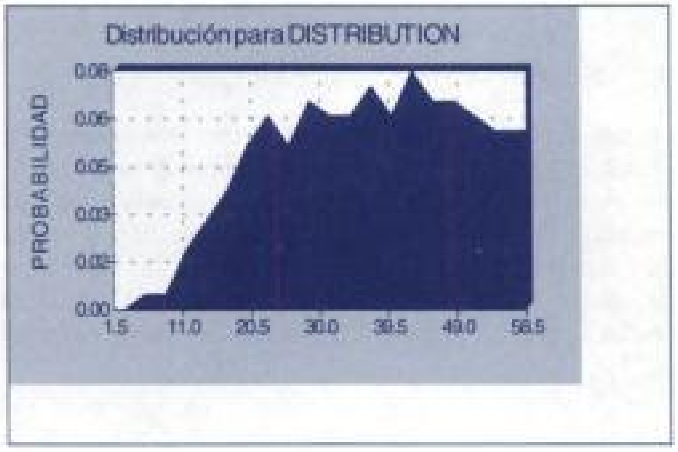


FIGURA 31

	C	D
29	Share	Likelihood
30	0	0
31	10	1
32	20	6
33	45	8
34	50	7
35	55	6
36	60	0

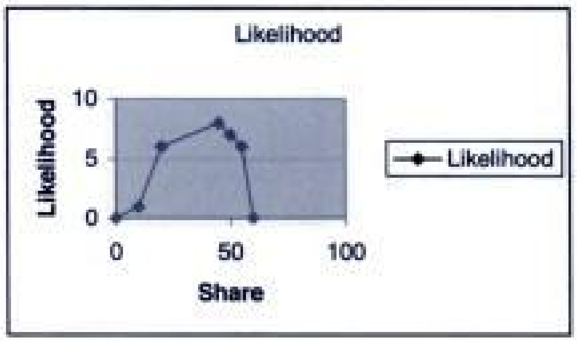


FIGURA 32

La sintaxis de RISKGENERAL es como sigue.

- Comience con los valores más pequeños y más grandes posibles.
- Luego encierre entre { } los números para los que considere que pueda comparar las verosimilitudes relativas.
- Por último, encierre entre { } las verosimilitudes relativas de los números que listó previamente.

Al ejecutar esto en @Risk se obtiene el resultado de la figura 31. Observe que 20 es 6/8 tan probable como 45; 10 es 1/8 tan probable como 45; 50 es 7/8 tan probable como 45;

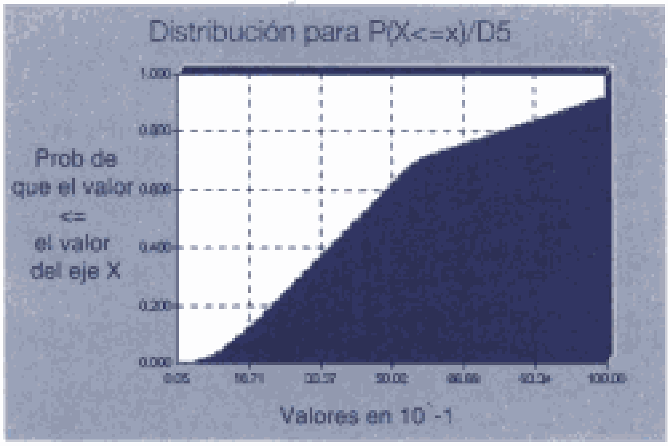


FIGURA 35

Solución **Cumulative.xls** El trabajo está en el archivo Cumulative.xls. Véase la figura 34. La función RISKCUMULATIVE toma como entradas (en orden) las siguientes cantidades:

- El valor más pequeño que toma la variable aleatoria.
- El valor más grande que toma la variable aleatoria.
- Valores intermedios que toma la variable aleatoria.
- Para cada valor intermedio, la probabilidad acumulada de que la variable aleatoria sea menor o igual que el valor intermedio.

En la celda D5, se introduce la siguiente fórmula para simular el ingreso neto anual de NAO:

=RISKCUMUL(B3,B4,A6:A8,B6:B8)

También se podría haber usado la siguiente fórmula en la celda D4:

=RISKCUMUL(0,10,{1,5,9},{0.1,0.7,0.9})

@Risk ahora asegura que

- Para el ingreso neto x entre 0 y \$1000 millones, la probabilidad acumulada de que el ingreso neto sea menor o igual que x aumenta con una pendiente igual a $\frac{.1-0}{1-0} = .1$.
- Para el ingreso neto x entre \$1000 millones y \$5000 millones, la probabilidad acumulada de que el ingreso neto sea menor o igual que x aumenta con una pendiente igual a $\frac{.7-.1}{5-1} = .15$.
- Para el ingreso neto x entre \$5000 millones y \$9000 millones, la probabilidad acumulada de que el ingreso neto sea menor o igual que x aumenta con una pendiente igual a $\frac{.9-.7}{9-5} = .05$.
- Para el ingreso neto x mayor que \$9000 millones, la probabilidad acumulada de que el ingreso neto sea menor o igual que x aumenta con una pendiente igual a $\frac{1-.9}{10-9} = .10$.

Después de ejecutar 1 600 iteraciones se encontró el resultado de la figura 34. Observe que el percentil 10 de la variable aleatoria es cercano a 1, el percentil 70 es cercano a 5 y el percentil 90 es cercano a 9. En la figura 35 se muestra una gráfica ascendente acumulada del ingreso neto. Observe que (como se describió antes) la pendiente de la gráfica es relativamente constante entre 0 y 1, entre 1 y 5, entre 5 y 9 y entre 9 y 10.

	B	C	D	E	F
54	Scenario #3 =	>90%		36% chance we fail to meet target	
55	**Target #1 (Value)**	**4**			
56	**Target #1 (Perc%)**	**35.72%**			
57					

	B	C	D
17	Name	Total!! / Actual	
18	Description	Output	
19	Cell	E8	
20	Minimum =	1.858541	
21	Maximum =	6.71191	
22	Mean =	4.300031	
23	Std Deviation =	0.895158	
24	Variance =	0.801308	
25	Skewness =	-5.82E-02	
26	Kurtosis =	2.894021	
27	Errors Calculated	0	
28	Mode =	4.470891	
29	5% Perc =	2.756473	
30	10% Perc =	3.186955	
31	15% Perc =	3.364678	
32	20% Perc =	3.554199	
33	25% Perc =	3.715597	
34	30% Perc =	3.854618	
35	35% Perc =	3.96633	
36	40% Perc =	4.080534	
37	45% Perc =	4.173182	
38	50% Perc =	4.306374	
39	55% Perc =	4.413318	
40	60% Perc =	4.530555	
41	65% Perc =	4.632649	
42	70% Perc =	4.7776	
43	75% Perc =	4.907873	
44	80% Perc =	5.04496	
45	85% Perc =	5.216321	
46	90% Perc =	5.456462	
47	95% Perc =	5.758535	

FIGURA 42

Paso 1 Genere el ingreso real de América Latina en la celda E4 con la fórmula

=RISKNORMAL(C4,D4,RISKCORRMAT($C$11:$F$14,A4))

Esto asegura que la correlación del ingreso de América Latina con otros ingresos se crea de acuerdo con la primera columna de C11:F14. También, el ingreso de América Latina tendrá una distribución normal, con una media de $400 millones y desviación estándar de $100 millones.

Paso 2 Copiando la fórmula en E4 a E5:E7 (respectivamente) se genera el ingreso neto en cada región y le indica a @Risk que utilice las correlaciones en C11:F14.

Paso 3 En la celda E8, calcule el ingreso total con la fórmula

=SUM(E4:E7)

Paso 4 Se ha designado a la celda E8 como la celda de salida. Se encuentra a partir de los objetivos (valor de 4) que hay 36% de probabilidades de que no se satisfaga el objetivo de $4000 millones. También, la desviación estándar del ingreso neto es de $895 millones. Véase la figura 42.

	B	C	D	E	F
3	Actual	Forecast	Actual/Forecast	Unbiased forecast	%age error
4	80000	44396	1.8019641	60516.733	1.3219484
5	100000	99209	1.0079731	135233.01	0.7394644
6	120000	94808	1.265716	129233.95	0.9285486
7	150000	96813	1.5493787	131966.99	1.1366479
8	180000	172862	1.0412931	235630.31	0.7639085
9	200000	108770	1.8387423	148265.72	1.3489295
10	55000	53052	1.0367187	72315.832	0.7605527
11		mean	1.3631123	stdev	0.2677479

FIGURA 46

FIGURA 47

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
13	Scenario	Year 2	Year 3	Year 4	Year 5	Year 6	Year 7	Year 8	Year 9	Year 10
14	1	1.43	1.33	0.93	0.75	0.57	0.40	0.37	0.38	0.24
15	2	1.39	1.13	0.96	0.59	0.49	0.45	0.46	0.40	0.24
16	3	1.30	1.38	0.98	0.84	0.80	0.65	0.57	0.48	0.35
17	4	1.47	1.49	1.36	1.15	1.20	1.15	0.93	0.99	0.71
18	5	1.23	1.06	0.73	0.45	0.39	0.31	0.28	0.23	0.15
19	6	1.26	1.22	1.08	0.79	0.77	0.70	0.60	0.60	0.49
20	7	1.30	1.02	0.84	0.62	0.45	0.32	0.27	0.24	0.22

Paso 2 Por lo tanto, se pueden crear pronósticos insesgados en la columna E copiando la fórmula

=$D$11*C4

de E4 a E5:E10.

Paso 3 En la columna F, se calcula el error de porcentaje de los pronósticos insesgados. En la celda F4, se calcula el error de porcentaje para el producto 1 con la fórmula

=B4/E4

Copiando esta fórmula de F4 a F5:F10 se generan los errores de porcentaje para los otros productos.

Paso 4 En la celda F11, se calcula la desviación estándar (26.7%) de estos errores de porcentaje con la fórmula

=STDEV(F4:F10)

Ahora se está listo para modelar 10 años de ventas para el nuevo producto. Para generar las ventas del año 1, éstas se modelan suponiendo que tienen una distribución normal, con una media de 1.36*90 000 y una desviación estándar de .267*(90 000*1.267). Para modelar la ventas de los años 2 a 10, se usa @Risk para elegir al azar uno de los siete patrones de cambio de volumen (o **escenarios**) de la figura 47. Luego se utiliza el escenario elegido para generar el crecimiento de las ventas para los años 2 a 10.

Paso 5 En la celda G4, se elige un escenario con la fórmula

=RISKDUNIFORM(A14:A20)

Esta fórmula da una probabilidad de 1/7 de elegir cada escenario.

Paso 5 ¿Por lo menos una de las tres curvas al parecer tiene algún valor predictivo? Compruebe la gráfica para esto, o considere el valor p de la regresión; éste debe ser $\leq .15$. Si es así, modele la incertidumbre asociada con la relación entre X y Y como sigue:

- Si la línea recta es el mejor ajuste, entonces modele a Y como

  =RISKNORMAL(predicción, desviación estándar de los errores reales (no de porcentaje).

- Si la curva de potencia o la curva exponencial es el mejor ajuste, entonces modele a Y como

  =RISKNORMAL(predicción, predicción*(desviación estándar de los errores de porcentaje).

EJEMPLO 12 Modelado del costo de capacidad de desarrollo

No se está seguro del costo de la capacidad de desarrollo para un nuevo fármaco, pero se cree que los costos serán 50% más (en términos reales) que para el fármaco Zozac. En la tabla 12 se dan los datos acerca de los costos en que se incurrió cuando se desarrolló la capacidad para Zozac.

Por ejemplo, cuando se desarrollaron 110 000 unidades de capacidad para Zozac, el costo fue de $654 000 (en dólares actuales). ¿Cómo modelaría el costo indefinido de la capacidad de desarrollo para el nuevo producto?

Capacity.xls

Solución Véase el archivo Capacity.xls.

Paso 1 Para empezar, se grafica la recta del mejor ajuste, la curva de potencia y la curva exponencial. Para esto, se usa el asistente para gráficas (opción 1 X-Y) y se da clic en los puntos hasta que se tornan dorados. A continuación, elija la curva deseada y seleccione R-SQ y la opción Equation. Se obtienen las gráficas de las figuras 49-51

Paso 2 En C3:E8 (véase la figura 52), se calculan las predicciones para cada curva. En C3:C8, se calculan las predicciones de la recta copiando de C3 a C3:C8 la fórmula

=5.0623*A3+77.516

En D3:D8, se calcula la predicción de la curva de potencia copiando de D3 a D3:D8 la fórmula

=13.483*A3^0.8229

En E3:E8, se calculan las predicciones de la curva exponencial copiando de E3 a E3:E8 la fórmula

=164.52*EXP(0.0114*A3)

Paso 3 En F3:H8, se usa

$$\frac{\text{Valor real de } Y - \text{valor predicho de } Y}{\text{Valor predicho de } Y}$$

TABLA 12

Capacidad (miles)	Costo ($ miles)
20	156
50	350
80	490
110	654
140	760
160	890

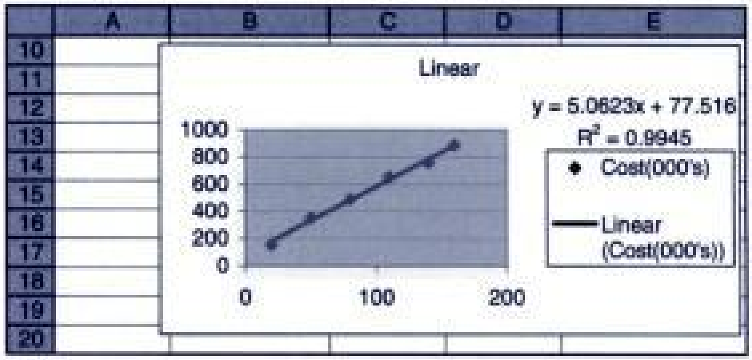


FIGURA 49

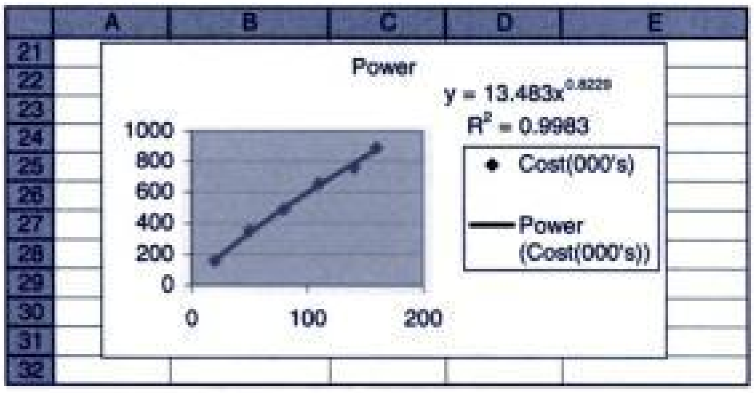


FIGURA 50

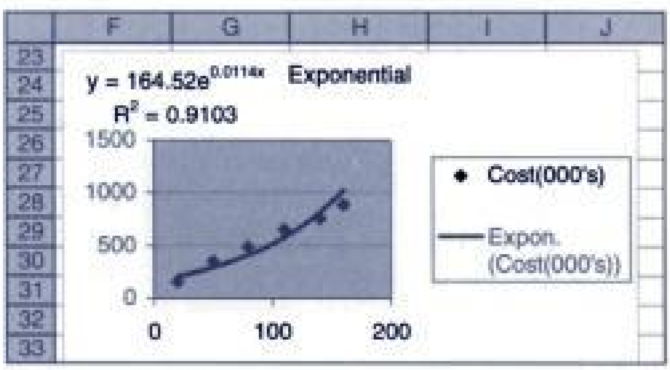


FIGURA 51

	A	B	C	D	E
1	Capacity Cost Modeling				
2	Capacity(0	Cost(000's)	Linear Prediction	Power Prediction	Exponential Prediction
3	20	156	178.762	158.6369	206.6511577
4	50	350	330.631	337.1855	290.9152953
5	80	490	482.5	496.4086	409.5390027
6	110	654	634.369	645.132	576.5327482
7	140	760	786.238	786.7474	811.6199132
8	160	890	887.484	878.1261	1019.463863

FIGURA 52

	F	G	H	I	J	K
1						
2	%age Error Linear	%age Error Power	%age Error Exponential	APE Linear	APE Power	APE Exponential
3	-0.127331	-0.016622	-0.2451046	0.127331	0.016622	0.24510464
4	0.058582	0.038004	0.20309934	0.058582	0.038004	0.20309934
5	0.015544	-0.01291	0.19646724	0.015544	0.01291	0.19646724
6	0.030946	0.013746	0.13436748	0.030946	0.013746	0.13436748
7	-0.033372	-0.033997	-0.0636011	0.033372	0.033997	0.06360109
8	0.002835	0.013522	-0.1269921	0.002835	0.013522	0.12699211
9	St dev	0.026132		0.044768	0.021467	0.16160532
10				MAPE		

FIGURA 53

para calcular el error de porcentaje para cada modelo. (Véase la figura 53.) Para hacer esto, simplemente copie la fórmula

=($B3-C3)/C3

de F3 a F3:H8.

Paso 4 En I3:K9, calcule el MAPE para cada ecuación. Se empieza por calcular el error de porcentaje absoluto para cada punto y cada curva copiando la fórmula

=ABS(F3)

de I3:K8.
A continuación se calcula el MAPE para cada ecuación copiando la fórmula

=AVERAGE(I3:I8)

de I9:K9.

Paso 5 Se encuentra que la curva de potencia (véase J9) tiene el MAPE menor. Por lo tanto, se modela el costo de agregar capacidad con una curva de potencia. Introduciendo en G9 la fórmula

=STDEV(G3:G8)

se encuentra que 2.6% es la desviación estándar de los errores de porcentaje para la curva de potencia. Ahora se modela el costo de agregar capacidad para el nuevo producto con la fórmula

=1.5*RISKNORMAL(13.483*(Capacity)^.8229,.026*13.483*(Capacidad)^.8229)

Es decir, la mejor estimación para el costo de añadir capacidad tiene una media igual al pronóstico de la curva de potencia y una desviación estándar igual a 2.6% del pronóstico.

EJEMPLO 13 Licitación en un proyecto de construcción

Se oferta contra un competidor por un proyecto de construcción y se quiere modelar su propuesta. En el pasado, su oferta ha estado relacionada de manera estrecha con nuestro costo (estimado) de completar el proyecto. Véase el archivo Biddata.xls y la figura 54.

Biddata.xls

Las figuras 55 a 57 dan las mejores curvas de ajuste lineal, de potencia y exponencial.

Como en el ejemplo 12, se calculan las predicciones y los MAPE para cada curva (véase la figura 58). La curva lineal tiene el MAPE más pequeño. Calculando los errores reales para las predicciones de la curva lineal (en la columna F) y su desviación estándar, se encuentre una desviación estándar de .94. Por lo tanto, la propuesta de nuestro competidor se modela como

=RISKNORMAL(1.489*(nuestro costo) – 1.7893,.94)

FIGURA 64

	F	G
6	000's	000's
7	Units produced	Cost
8	40	813.323
9	50	999.459
10	60	1230.911
11	70	1399.077
12	80	1592.645
13	90	1812.399
14	100	2013.139
15	110	2709.943
16	120	3405.542
17	130	4096.212
18	140	4815.177
19	150	5516.294
20	160	6200.432
21	170	6914.829
22	180	7613.689
23	190	8320.617
24	200	9012.181

Después del año 1, las ventas disminuirán a una tasa anual constante. Para productos similares, las tasas de disminución han sido 5, 6, 8, 9, 10, 4, 3 y 8 por ciento.

Cada año se le cargarán $45 dólares por el producto.

El costo de producción variable de cada año dependerá del número de unidades vendidas. Para un fármaco con estructura de costos similar, el costo variable como una función de las unidades producidas fue como se muestra en la figura 64. Por ejemplo, durante el año 1, se produjeron 40 000 unidades, y el costo fue de $813 323. (Véase el archivo Sim3data.xls.)

Suponga que los flujos de efectivo se descuentan al 10% y se podría considerar que los flujos de efectivo para los años 2005 a 2010 se reciben a mitad del año (30 de junio).

a Después de ejecutar 900 iteraciones, se está 95% seguro de que el VPN real obtenido por el fármaco (en dólares del 10/09/04) está entre ______ y ______.

b ¿Cuál es el punto clave del VPN del fármaco?

FIGURA 65

	K	L
11	Actual	Forecast
12	20000	26000
13	30000	35000
14	10000	14000
15	40000	48000
16	50000	62000

[*Sugerencia*: al modelar el costo variable anual, no es necesario calcular el error de porcentaje absoluto promedio (MAPE). A partir de la gráfica adecuada debe quedar claro el modelo apropiado].

6 GM está considerando producir un nuevo automóvil. Se supone que el ingreso neto actual de GM para cada uno de los seis años siguientes es de $100 millones, que se supone se reciben el 30 de junio de los años 2004 a 2009. La tasa tributaria es 40%. Suponga que ningún otro proyecto de GM tiene que ver con depreciación. El costo fijo de desarrollar el nuevo automóvil estará entre $20 millones y $40 millones, con un valor más probable de $25 millones. El 30 de junio de 2004 se incurre en el costo fijo total y se deprecia de manera uniforme durante los años 2005 a 2009. Los flujos de efectivo futuros se reciben a mediados del año. Se supone que el automóvil se vende durante los años 2005 a 2009. El pronóstico para las ventas unitarias de 2005 es de 15 000. Los pronósticos pasados y las ventas reales durante el primer año de modelos similares son como se muestra en la figura 65.

Durante los años 2006 a 2009, se supone que las ventas disminuyen a la misma tasa cada año. Esta tasa estará entre 5 y 20%, con una tasa de disminución de 12% con el doble de probabilidad que una tasa de disminución de 8% y una tasa de disminución de 16% con el triple de probabilidad que una tasa de disminución de 8%. Durante 2005, el automóvil se venderá en 13 000 dólares. El precio aumentará el mismo porcentaje cada año, con incrementos equiprobables de precio de 1, 2 y 3%. Durante 2006 a 2009, los costos variables aumentarán por el mismo porcentaje, con incrementos equiprobables de 2, 4 y 6%. Descuente los flujos de efectivo a 15%. ¿GM debe producir el automóvil?

23.11 Simulación y licitación

En situaciones en las que se debe ofertar contra competidores, se puede usar la simulación para determinar una oferta apropiada. Por lo general no se sabe lo que ofrecerá un competidor, pero se puede tener una idea acerca del alcance de las ofertas que podría elegir un competidor. En esta sección, se muestra cómo usar la simulación para determinar una oferta que maximiza su ganancia esperada. Primero, se analizan de manera breve la generación a partir de una variable aleatoria distribuida de manera uniforme.

Variables aleatorias uniformes

Se dice que una variable aleatoria uniforme tiene una distribución uniforme en el intervalo cerrado $[a, b]$ (escrito $U(a, b)$) si la variable aleatoria tiene las mismas probabilidades de tomar cualquier valor entre a y b inclusive. Para generar las muestras de una variable aleatoria $U(a, b)$, escriba la fórmula

=RISKUNIFORM(a,b)

en la celda.

Ahora se muestra cómo usar la simulación para determinar una oferta que maximiza la ganancia esperada.

EJEMPLO 15 Oferta

Usted hará una oferta en un proyecto de construcción. Usted cree que le costará \$10 000 completar el proyecto. Cuatro competidores también harán ofertas. Con base en informes anteriores, usted cree que la oferta de cada competidor es independiente de las ofertas de los otros competidores. ¿Qué oferta maximiza su ganancia esperada?

Solución En nuestra solución todas las cantidades estarán en miles de dólares. El enunciado del problema indica que la oferta de cada competidor es $U(10, 30)$, y las ofertas de los competidores son independientes. Nuestra simulación se muestra en la figura 66 (archivo Bid.xls). Se procede como sigue.

Bid.xls

Paso 1 En la celda C3, se escribe el costo del proyecto.

Paso 2 En la celda C4, se introducen las diez ofertas posibles (11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20) con la fórmula

=RISKSIMTABLE({11,12,13,14,15,16,17,18,19,20})

	A	B	C	D	E	F
1	**Bidding Example**					
2						
3	My cost(thousands)		10			
4	My bid(thousands)		11			
5	Competitor 1 Bid		15.23686647			
6	Competitor 2 Bid		24.37239289			
7	Competitor 3 Bid		23.26008201			
8	Competitor 4 Bid		25.59600472			
9	Profit(thousands)		1			
10						
11		Cell	Name	Minimum	Mean	Maximum
12						
13		C9	(Sim#1) Profit(thousa...	0	0.81	1
14		C9	(Sim#2) Profit(thousa...	0	1.3	2
15		C9	(Sim#3) Profit(thousa...	0	1.575	3
16		C9	(Sim#4) Profit(thousa...	0	1.66	4
17		C9	(Sim#5) Profit(thousa...	0	1.5625	5
18		C9	(Sim#6) Profit(thousa...	0	1.41	6
19		C9	(Sim#7) Profit(thousa...	0	1.155	7
20		C9	(Sim#8) Profit(thousa...	0	0.96	8
21		C9	(Sim#9) Profit(thousa...	0	0.7425	9
22		C9	(Sim#10) Profit(thous...	0	0.55	10

FIGURA 66
Simulación de oferta

Paso 3 3 En C5, se genera la oferta del primer competidor introduciendo la fórmula

=RISKUNIFORM(C\$3,3*C\$3)

Copiando esta fórmula al intervalo C6:C8 se generan las ofertas de los otros tres competidores. (¿Por qué esto asegura que sus ofertas sean independientes?)

Paso 4 En la celda C9, se calcula la ganancia real para esta prueba introduciendo la fórmula

=IF(C4<=MIN(C5:C8),C4-C3,0)

Esto asegura que si se gana la licitación (C4≤MIN(C5:C8)), entonces nuestra ganancia es igual a nuestra oferta menos el costo del proyecto de $10 000; si no se gana la licitación (C4>MIN(C5:C8)), entonces no se obtiene ganancia. Esta afirmación supone que se ganan los empates, pero la probabilidad de una oferta con empate es insignificante (¿por qué?), así que esto en realidad no importa. Para ver cómo funcionan las cosas, pulse el botón de recálculo (F9) y vea cómo cambian las celdas de la hoja de cálculo.

Paso 5 Para determinar la oferta que maximiza la ganancia esperada, se ejecutan 400 iteraciones de este hoja de cálculo para cada oferta con @Risk. De la figura 66, parece que una oferta entre $13 000 y 15 000 maximizará la ganancia esperada (con una ganancia esperada de $1 660).

Paso 6 Para centrarse en la oferta que maximiza la ganancia esperada, se remplaza la fórmula de la celda C4 con

=RISKSIMTABLE({13.2,13.4,13.6,13.8,14,14.2,14.4,14.6,14.8})

Cien iteraciones de esta hoja de cálculo indican que una licitación de alrededor de $14 200 maximiza la ganancia esperada (se obtiene una ganancia esperada de alrededor de $1 800).

PROBLEMAS

Grupo A

1 Si el número de competidores en el ejemplo 15 fuera el doble, ¿cómo cambiaría la oferta óptima?

2 Si la oferta promedio para cada competidor permaneciera igual, pero sus ofertas mostraran menos variabilidad, ¿aumentaría o disminuiría la oferta óptima? Para estudiar esta pregunta, suponga que la oferta de cada competidor sigue cada una de las variables aleatorias siguientes:

a $U(15, 25)$
b $U(18, 22)$

3 Warren Millken está intentando comprar Biotech Corporation. El valor de Biotech depende del éxito o fracaso de varios fármacos en desarrollo. Warren ignora el valor real (por acción) de Biotech, pero los dueños actuales de Biotech conocen el valor real de la compañía. Warren supone que el valor real de Biotech tiene las mismas probabilidades de estar entre 0 y 100 dólares por acción. Biotech aceptará la oferta de Warren si excede el valor verdadero de la compañía. Por ejemplo, si los dueños actuales piensan que Biotech vale $40 por acción y Warren ofrece $50 por acción, ellos aceptarán la oferta. Si los dueños actuales aceptan la oferta de Warren, entonces las ventajas corporativas de Warren incrementan de inmediato el valor en el mercado de Biotech en 50%. ¿Cuánto debe ofrecer Warren?

23.12 Juego de dados con @Risk

El juego de dados es muy complejo. Con @Risk, es fácil estimar la probabilidad de ganar en el juego de dados.

En el juego de dados, un jugador lanza dos dados. Si el primer lanzamiento produce 2, 3 o 12, el jugador pierde. El jugador gana si obtiene 7 u 11 en el primer lanzamiento. De otro modo, el jugador continúa lanzando los dados hasta que iguale el número obtenido en el primer lanzamiento (llamado el *punto*) u obtenga un 7. Se gana si en un lanzamiento se obtiene el punto antes de obtener un 7. Se pierde si en un lanzamiento se obtiene un 7 antes que el punto. Mediante cálculos complejos, se puede demostrar que un jugador gana en los dados 49.3% de las veces. Utilice @Risk para verificar esto.

Solución La observación importante es que no se sabe cuántas veces se tienen que lanzar los dados. Suponga que el juego no termina en el primer lanzamiento. Los puntos menos probables son 4 y 10, cuya probabilidad de aparecer es 3/36 = 1/12. Por lo tanto, después del primer lanzamiento, hay por lo menos una probabilidad de (1/12) + probabilidad de 7 = (1/12) + (1/16) = (1/14) de que el juego termine en cada lanzamiento. Así, la probabilidad de que el juego aún continúe es a lo sumo $.75^{49}$ = 7 en 10 000 0000. Por consiguiente, se puede parar el juego después de 50 lanzamientos y olvidarse de los juegos (menos de 1 en un millón) que vayan más allá de los 50 lanzamientos. Después de cada lanzamiento de los dados, se sigue de cerca el estado del juego:

0 = juego perdido

1 = juego ganado

2 = juego en curso

Craps.xls

La celda de salida seguirá el estado del juego después del lanzamiento número 50. Un 1 indicará un triunfo y un 0 indicará una derrota. El trabajo está en el archivo Craps.xls. Véase la figura 67.

Paso 1 En B2, se usa la función RISKDUNIFORM($AD$9:$AD$14)
La función RISKDUNIFORM asegura que cada uno de sus argumentos tiene las mismas probabilidades. Por lo tanto, cada dado tiene una probabilidad igual (1/6) de producir un 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Copiando esta fórmula al intervalo B2:AY3 se generan los 30 lanzamientos de ambos dados. Observe que se han ocultado los lanzamientos 8 a 28.

FIGURA 67

	A	B	C	D	E	F	G	H	AX	AY
1	TOSS#	1	2	3	4	5	6	7	49	50
2	Die Toss 1	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
3	Die Toss 2	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
4	Total	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5	GAME STATUS	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	0=LOSS	WIN??	1							
7	1=WIN									
8	2=STILL GOING	95% CI								
9	LOWER									
10	UPPER									

Paso 2 En B4:AY4, se calcula el resultado total de los dados en los 30 lanzamientos copiando de B4 a C4:AY4 la fórmula

=SUM(B4:C4)

Paso 3 En la celda B5, se determina el estado del juego después del primer lanzamiento con la fórmula

=IF(OR(B4=2,B4=3,B4=12),0,IF(OR(B4=7,B4=11),1,2))

Observe que se pierde si sale 2, 3 o 12, y se gana si sale un 7 u 11. Con cualquier otro resultado el juego continúa.

Paso 4 En la celda C5, se calcula es estado del juego después del segundo lanzamiento con la fórmula

=IF(OR(B5=0,B5=1),B5,IF(C4=$B4,1,IF(C4=7,0,2)))

Observe que si el juego terminó en el primer lanzamiento, se mantiene el estado del juego. Si se logra el punto, se registra un triunfo con un 1. Si se obtiene un 7, se registra una derrota. De lo contrario, el juego continúa.

Copiando esta fórmula de C5 a D5:AY5 se registra el estado del juego después de dos a 50 lanzamientos. El resultado del juego está en AY5, que se copia a C6 para que se pueda ver con facilidad. Después de ejecutar 4000 iteraciones con la celda de salida C6, se obtiene una probabilidad de ganar de 48.3%. Con 10 000 iteraciones, por lo general se obtiene una probabilidad muy cercana a 49.3 por ciento.

23.13 Simulación de las finales de la NBA

Los Pacers de Indiana estuvieron a dos juegos (una falta cuestionable atribuida a Dale Davis en el juego 6 y tiro perdido por Travis Best en el juego 4) de ganar el campeonato del año 2000. Antes de la serie, ¿cuál era la probabilidad de que los Lakers ganaran la serie? En las clasificaciones de Sagarin (encontradas en http://www.kiva.net/~jsagarin/), se encontró que los Lakers están unos cuatro puntos mejor que los Pacers. El equipo de casa tiene una ventaja de tres puntos y los juegos se realizan de acuerdo a una distribución normal, con media igual a nuestra predicción y una desviación estándar de 12 puntos. En los registros se observa que las predicciones de Sagarin no muestran ningún sesgo. En el archivo Finals.xls y la figura 68, se simulan las finales NBA del año 2000. Recuerde que los Lakers estuvieron en casa durante los juegos 1, 2, 6 y 7, en tanto que los Pacers estuvieron en casa durante los juegos 3 a 5. (*Nota*: una serie se va a siete juegos porque no se sabe cuando terminará en realidad.) Si los Lakers ganan por lo menos cuatro de los siete juegos, ganan la serie, lo cual se indica en la celda I14 con un 1. Se nombraron las celdas en D2:D5 con los nombres de intervalo dados en C2:C5.

Paso 1 En G5:G11, se generan los pronósticos para cada juego copiando la fórmula

=IF(F5="LA",HE+LA-IND,-HE+LA-IND)

de G5 a G6:G11.

Paso 2 En H5:H11, se genera el margen de victoria de los Lakers en cada juego como distribuido normalmente con una desviación estándar de 12 y media dada en la columna G. Sólo copie de H5 a H6:H11 la fórmula

=RISKNORMAL(G5,STDEV)

Hidden page

(1) Cada semana, invierta 10% de su dinero.

(2) Cada semana, invierta 30% de su dinero.

(3) Cada semana, invierta 50% de su dinero.

Simule 100 semanas de cada estrategia 50 veces. ¿Cuál estrategia al parecer es mejor? En general, si puede multiplicar su inversión por M con probabilidad p y perder su inversión con probabilidad q, se debe invertir una fracción $(p(M-1)-q)/(M-1)$ de su dinero cada semana. Esta estrategia maximiza (para un juego favorable) la tasa de crecimiento esperada de su fortuna y se conoce como **criterio de Kelly**.

3[†] El fondo mutuo de Magellan ha superado al Standard and Poor's 500 durante 11 de los últimos 13 años. Las personas utilizan esto como un argumento de que se puede "superar el mercado". A continuación se menciona otra forma de considerarlo que muestra que no es inusual el hecho de que Magellan supere el mercado 11 de 13 veces. Considere 50 fondos mutuos, cada uno de los cuales tiene una probabilidad de 50% de superar el mercado durante un año determinado. Por medio de la simulación estime la probabilidad de que durante un periodo de 13 años el "mejor" de los 50 fondos mutuos superará el mercado durante por lo menos 11 de 13 años. Esta probabilidad resulta ser mayor de 40%, lo que significa que no es una ocurrencia inusual el hecho de que el mejor fondo mutuo supere el mercado 11 de 13 años.

4 Usted ha llegado a la ronda final de "Hagamos un trato". Usted sabe que hay un millón de dólares detrás de la puerta 1, 2 o 3. Existe la misma probabilidad de que el premio esté detrás de alguna de las tres puertas. Las dos puertas sin un premio no tienen nada detrás. Usted elige al azar la puerta 2. Antes de que usted vea si el premio está detrás de la puerta 2, Monty elige abrir una puerta que no tiene premio. Por concreción, suponga que antes de que se abra la puerta 2, Monty revela que no hay premio detrás de la puerta 3. Usted tiene la oportunidad de cambiar y elegir al puerta 1. ¿Debe usted cambiar?

Utilice una hoja de cálculo para simular esta situación 400 veces. Para cada "intento" utilice una función de @Risk para generar la puerta detrás de la cual está el premio. Luego utilice otra función de @Risk para generar la puerta que abrirá Monty. Suponga que Monty juega como sigue: Monty sabe dónde está el premio y abrirá una puerta vacía, pero no puede abrir la puerta 2. Si el premio está realmente detrás de la puerta 2, Monty tiene las mismas probabilidades de abrir la puerta 1 o la 3. Si en realidad el premio está detrás de la puerta 1, Monty debe abrir la puerta 3. Si el premio está detrás de la puerta 3, Monty debe abrir la puerta 1.

5 Los amantes de la comedia Star-crossed, Noé y Julia, tuvieron una gran discusión. María, la hermana de Julia, quiere que Noé y Julia hagan las paces, así que ella les dice que vayan al mirador romántico a la 1 p.m. Desafortunadamente, Noé y Julia no son puntuales. Cada uno tiene las mismas probabilidades de presentarse en el mirador en cualquier momento entre la 1 y las 2 p.m. Suponiendo que cada uno esperará durante 20 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que se reúnan? La llegada de cada persona se puede modelar por medio de la variable aleatoria RISKUNIFORM. Por ejemplo, RISKUNIFORM(1,2) tiene las mismas probabilidades de elegir cualquier número entre 1 y 2 (incluyendo los puntos terminales 1 y 2).

6 El juego de Chuck-a-Luck se juega como sigue: Usted elige un número entre 1 y 6 y se lanzan tres dados. Si su número no aparece, usted pierde $1. Si su número aparece x veces, usted gana $$x$. En promedio, ¿cuánto dinero gana o pierde en cada jugada?

7 Yo lanzó un dado varias veces hasta que el número total de puntos que he visto es por lo menos 13. ¿Cuál es el total más probable que ocurrirá?

Grupo B

8[†] Cuando el equipo va atrás en las postrimerías del juego, un entrenador de hockey por lo general espera hasta que quede un minuto antes de sacar al portero y sustituirlo por un atacante. En realidad los entrenadores deben sacar a sus porteros mucho más pronto. Suponga que si ambos equipos están a su máximo, cada equipo anota un promedio de .05 goles por minuto. También suponga que si saca su portero, anota un promedio de .08 goles por minuto, en tanto que su oponente anota un promedio de .12 goles por minuto. Suponga que su equipo tiene una desventaja de un gol con cinco minutos restantes de juego; considere las dos estrategias siguientes:

Estrategia 1: Saque su portero si está atrás en el marcador en cualquier punto de los últimos cinco minutos del juego; reingrese al portero si empata el marcador o va adelante.

Estrategia 2: Saque su portero si va atrás en el marcador en cualquier punto del último minuto del juego; vuelva a meterlo si empata el marcador o va adelante.

¿Qué estrategia maximiza sus posibilidades de ganar o empatar el juego? Simule el juego usando incrementos de tiempo de diez segundos. Utilice la función RISKBINOMIAL para determinar si un equipo anota un gol en un determinado segmento de diez segundos. Es aceptable hacer esto porque la probabilidad de anotar dos o más goles en un periodo de diez segundos es casi 0.

9 Suponga que se lanza un dado ordinario cinco veces. Un cuatro directo ocurre si exactamente 4 (no 5) de los lanzamientos son enteros consecutivos. Por ejemplo, si se lanza 1, 2, 3, 4, 6, se tiene un cuatro directo. También, 3, 4, 5, 6, 1, es un cuatro directo. Sin embargo, 2, 3, 4, 5, 6 no es un cuatro directo. Después de ejecutar 4 000 iteraciones, se tiene una confianza de 95% que la probabilidad de lanzar un cuatro directo está entre _____ y _____.

10 Buffie la Vampira Asesina se va a Las Vegas a descansar. Ella va a jugar el siguiente juego de blackjack. Buffie lanza un par de dados hasta que el total acumulado de sus lanzamientos sea por lo menos 4. Si el total es 8 o más, ella pierde. Suponiendo que Buffie no ha perdido aún, la banca lanza los dados hasta que su total es por lo menos 4. Si el total del Spike es 8 o más, entonces Buffie (suponiendo que no hizo un total de 8 o más) gana. De lo contrario, se comparan los totales de la banca y Buffie. Gana el total con más puntos, y en caso de empate gana la banca. Después de ejecutar 900 iteraciones, se tiene una confianza de 95% que la probabilidad de Buffie de ganar el juego está entre _______ y _______.

11 Wheaties está produciendo cereales con cinco conjuntos diferentes de tarjetas comerciales:

- Estrellas de rock
- Estrellas de la NBA
- Estrellas de hockey
- Estrellas de fútbol

[†]Basado en Marcus (1990).

[‡]Basado en Morrison y Wheat (1984).

TABLA 1
Ventas de Lowland

Mes	Ventas de TV	Ventas de DC	Ventas de AA	Mes	Ventas de TV	Ventas de DC	Ventas de AC
1	30	40	13	13	38	79	36
2	32	47	7	14	30	82	21
3	30	50	23	15	35	80	47
4	39	49	32	16	30	85	81
5	33	56	58	17	34	94	112
6	34	53	60	18	40	89	139
7	34	55	90	19	36	96	230
8	38	63	93	20	32	100	201
9	36	68	63	21	40	100	122
10	39	65	39	22	36	105	84
11	30	72	37	23	40	108	74
12	36	69	29	24	34	110	62

pronóstico para el periodo $t + 1$ hecho después de observar x_t. En cuanto al método promedio móvil.

$$\begin{aligned} f_{t,1} &= \text{promedio de las últimas } N \text{ observaciones} \\ &= \text{promedio de } x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-N+1} \end{aligned}$$

donde N es un parámetro dado.

Para ejemplificar el método del promedio móvil, escogemos $N = 3$ y aplicamos el método para pronosticar las ventas de TV de los primeros 6 meses de datos proporcionados en la tabla 1. Los resultados se presentan en la tabla 2. En cuanto a los meses 1 a 3, todavía no hemos observado tres meses de información, de modo que (para $N = 3$) no podemos desarrollar un pronóstico de promedio móvil para las ventas de estos meses. Por lo que se refiere al mes 4, encontramos el pronóstico $f_{3,1} = \frac{30+32+30}{3} = 30.67$. Para el mes 5, el pronóstico es $f_{4,1} = \frac{32+30+39}{3} = 33.67$. Para el mes 6, el pronóstico es $f_{5,1} = \frac{30+39+33}{3} = 34$.

Obsérvese que a partir de uno de los periodos al siguiente, el pronóstico se "desplaza" para "reemplazar" a la observación "más antigua" en el promedio por la observación más reciente.

Elección de *N*

¿Cómo se elige N, el número de periodos usados para calcular el promedio móvil? Para dar respuesta a esta pregunta, es necesario definir una medida de precisión en el pronóstico. Se usa la **desviación absoluta media** (mean absolute deviation, MAD) como medida de la precisión del pronóstico. Antes de definir la MAD, se requiere definir el concepto de un **error de pronóstico**. Dado el pronóstico para x_t, se define e_t como el error de pronóstico de x_t, el cual se obtiene con

$$e_t = x_t - (\text{pronóstico para } x_t)$$

De acuerdo con la tabla 2, encontramos $e_4 = 39 - 30.67 = 8.33$, $e_5 = 33 - 33.67 = -0.67$, y $e_6 = 34 - 34 = 0$. La MAD es simplemente el promedio de los valores absolutos de todas las e_t. Por lo tanto, para los periodos 1 a 6, el pronóstico por promedio móvil proporciona una MAD de

$$\text{MAD} = \frac{|e_4| + |e_5| + |e_6|}{3} = \frac{8.33 + 0.67 + 0}{3} = 3$$

Por consiguiente, en promedio, el pronóstico para las ventas de televisores es erróneo por tres televisores por mes.

TABLA 2
Pronóstico con promedio móvil ($N = 3$) para las ventas de TV

Mes	Ventas reales	Ventas pronosticadas
1	30	—
2	32	—
3	30	—
4	39	$\frac{30+32+30}{3}$
5	33	$\frac{32+30+39}{3}$
6	34	$\frac{30+39+33}{3}$

Pretendemos pronosticar las ventas de los meses siguientes de televisores como un promedio de ventas reales de los últimos N meses. ¿Qué valor de N minimizará el error absoluto medio (obtenido al promediar el error real incurrido durante cada mes)? Trataremos con $N = 1, 2, \ldots, 12$.

Empezaremos con una explicación de la función de Excel DESREF (OFFSET, en el paquete en inglés). Esta función permite escoger un intervalo de celdas relacionado con una ubicación dada en la hoja de cálculo. La sintaxis de la función DESREF se indica enseguida:

DESREF(ref, filas, columnas, alto, ancho)

- **Ref** es la celda a partir de la cual usted establece las referencias de renglón y columnas.
- **Filas** ayuda a ubicar la esquina superior izquierda del intervalo de DESREF. Filas se mide por la cantidad de renglones hacia arriba y hacia abajo (hacia arriba es negativo y hacia abajo es positivo) a partir de la referencia de las celdas.
- **Columnas** ayuda a ubicar la esquina superior izquierda del intervalo de DESREF. Las columnas se miden por la cantidad de ellas a la izquierda o a la derecha (a la izquierda es negativo y a la derecha es positivo) a partir de la referencia de las celdas.
- **Alto** es el número de renglones en el intervalo seleccionado.
- **Ancho** es la cantidad de columnas en el intervalo seleccionado.

Offsetexample.xls

El archivo Offsetexample.xls contiene algunos ejemplos de cómo trabaja la función OFFSET (DESREF, en el paquete en español). Vea la figura 1. Lo curioso de la función OFFSET es que se puede copiar como cualquier fórmula. En la sección siguiente se muestra la efectividad real de la función OFFSET.

Tvsales.xls

El trabajo siguiente se encuentra en el archivo Tvsales.xls. Inicia con la estimación de un pronóstico en el mes 13, porque ése es el primer mes en el cual ya se cuenta con 12 meses de información previa. Véanse figuras 2 y 3.

Paso 1 Al copiar la fórmula siguiente de C17 a C18:C28,

=AVERAGE(OFFSET(B17,-$D$3,0,$D$3,1))

se obtiene el promedio de los últimos D3 meses de datos.

- B17 asegura que definimos el intervalo relativo a la celda directamente a la izquierda de la celda donde entra la fórmula.
- -$D$3 asegura que el intervalo empieza D3 renglones por arriba del renglón donde entra la fórmula.
- El 0 da la certeza de que el intervalo de OFFSET siempre está en la columna B.
- $D$3 asegura que promediamos las últimas observaciones D3.
- 1 ofrece la certeza de que el intervalo de OFFSET incluye una sola columna.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2				# OF PERIODS				
3				1				
4	Month	TV Sales Actual	Moving average forecast	Abs error	MAD	5		
5	1.00	30						
6	2.00	32						
7	3.00	30						
8	4.00	39					# of periods	5
9	5.00	33					1	5
10	6.00	34					2	3.666666667
11	7.00	34					3	3.361111111
12	8.00	38					4	3.333333333
13	9.00	36					5	3.016666667
14	10.00	39					6	3.111111111
15	11.00	30					7	3.226190476
16	12.00	36					8	3.21875
17	13.00	38	36	2			9	3.055555556
18	14.00	30	38	8			10	3.083333333
19	15.00	35	30	5			11	3.045454545
20	16.00	30	35	5			12	3.111111111
21	17.00	34	30	4			Min	3.016666667
22	18.00	40	34	6			best #	5
23	19.00	36	40	4				
24	20.00	32	36	4				
25	21.00	40	32	8				
26	22.00	36	40	4				
27	23.00	40	36	4				
28	24.00	34	40	6				

FIGURA 3

Paso 2 Al copiar la fórmula siguiente desde D17 a D18:D28

=ABS(B17-C17)

se calcula el valor absoluto del error en el pronóstico de cada mes (con base en un promedio móvil del mes D3).

Paso 3 En la celda F4 se calcula el promedio de los errores absolutos (llamado a menudo MAD) mediante la fórmula

=AVERAGE(D17:D28)

Paso 4 Se escribe el número de prueba de los periodos para el promedio móvil (1 a 12) en G9:G20, y, en la celda H8, se escribe el MAD con la fórmula

=F4

Paso 5 Después de seleccionar el intervalo de la tabla G8:H20 y elegir en una dirección una tabla de datos con la columna de entrada de la celda D3 se encuentra que un promedio móvil de 5 periodos genera el MAD más pequeño (3.02).

Paso 6 Se obtiene el MAD mínimo en la celda H21 mediante la fórmula

=MIN(H9:H20)

Paso 7 Al escribir la fórmula siguiente en la celda H22

=MATCH(H21,H9:H21,0)

se estima el número de periodos (5) que genera el MAD más pequeño.

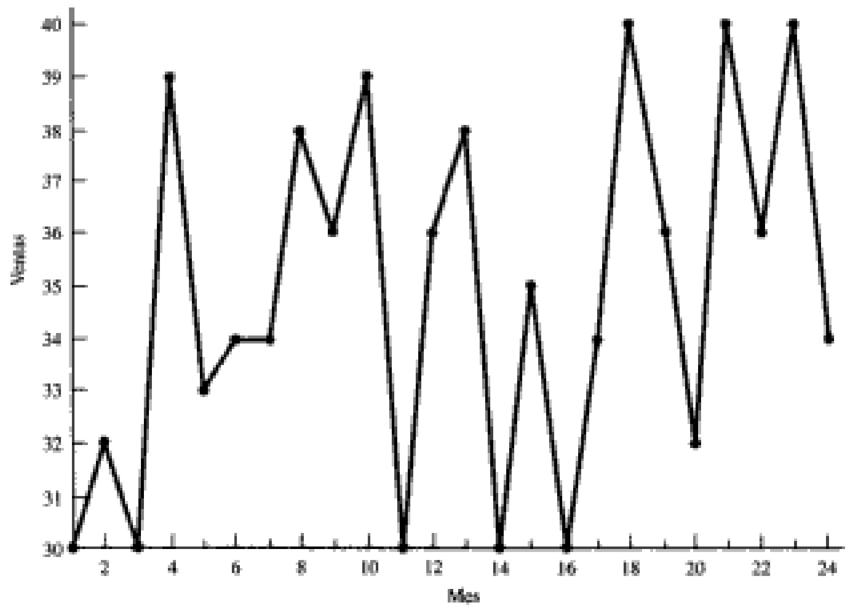


FIGURA 4
Ventas de TV

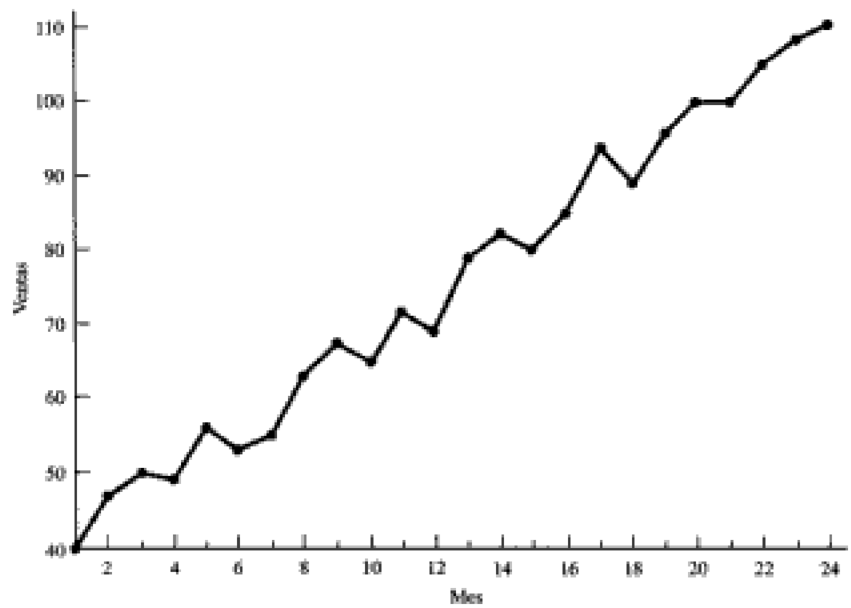


FIGURA 5
Ventas de DC

Los pronósticos por promedios móviles son efectivos en una serie de tiempo que fluctúa respecto a **un nivel base** constante. De acuerdo con la figura 4, parece que las ventas mensuales de televisores fluctúan respecto a un nivel base de 35. Con más formalidad, los pronósticos promedio móvil funcionan mejor si

$$x_t = b + \varepsilon_t \tag{1}$$

donde b es el nivel base para la serie y ε_t es la variación aleatoria en el periodo t respecto al nivel base.

De acuerdo con las figuras 5 y 6, observamos que las ventas de los aparatos que tocan DC y acondicionadores de aire no están muy bien descritas en la ecuación (1). Según la figura 5, vemos que hay una **tendencia** ascendente en las ventas de DC, de modo que no fluctúan respecto a un nivel base. En la figura 6 encontramos que las ventas de acondicionadores de aire muestran **estacionalidad**: los picos y los valles de la serie se repiten a intervalos regulares de 12 meses. Además, en la figura 6 también se observa que las

Por consiguiente, el nuevo pronóstico $A_t = f_t$, 1 es igual al pronóstico antiguo (A_{t-1}) más una fracción del error del periodo t (e_t). De aquí se infiere que si "damos un exceso de predicción" a x_t, disminuye el pronóstico, y si "disminuimos" la predicción de x_t, elevamos el pronóstico. En cuanto a valores grandes de la constante de suavizamiento α, se da más peso a la observación más reciente (véase la observación 3 al final de la sección).

Ejemplificamos el suavizamiento exponencial simple (con $\alpha = 0.1$) para los primeros seis meses de las ventas de televisores. Los resultados se proporcionan en la tabla 3. Suponemos que se vendieron 32 televisores en el último mes, de modo que empezamos el procedimiento con $A_0 = 32$. Enseguida se proporcionan algunos ejemplos de los cálculos:

$$
\begin{aligned}
A_t &= 0.1x_1 + 0.9A_0 = 0.1(30) + 0.9(32) = 31.8 \\
f_{0,1} &= A_0 = 32 \\
e_1 &= x_1 - A_0 = 30 - 32 = -2 \\
f_{1,1} &= A_1 = 31.8 \\
e_2 &= x_2 - A_1 = 32 - 31.8 = 0.2 \\
A_2 &= 0.1x_2 + 0.9A_1 = 0.1(32) + 0.9(31.8) = 31.82
\end{aligned}
$$

Por lo que se refiere a los meses 1 a 6, el MAD del pronóstico se estima con

$$
\begin{aligned}
\text{MAD} &= \frac{|-2| + |0.2| + |-1.82| + |7.36| + |0.63| + |1.56|}{6} \\
&= 2.26
\end{aligned}
$$

En cuanto al periodo completo de 24 meses, es posible determinar (mediante el uso de una tabla de datos en una dirección) el valor de una α que genera el MAD más bajo. Los resultados se ofrecen en la tabla 4. Al parecer, un valor de α entre 0.20 y 0.30 genera el MAD más bajo.

OBSERVACIONES

1 Como $\alpha < 1$, el suavizamiento exponencial "elimina" las variaciones en una serie de tiempo no dando el peso total a la última observación.

2 Si $\alpha = \frac{2}{N+1}$, el suavizamiento exponencial simple (con parámetro de suavizamiento α) y un pronóstico con promedio móvil de N periodos producirán pronósticos similares. Por ejemplo, $\alpha = 0.33$ equivale casi a un promedio móvil de cinco periodos.

3 Para entender por qué el método del suavizamiento *exponencial* recibe este nombre, considere (2) para $t - 1$:

$$A_{t-1} = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha)A_{t-2} \tag{5}$$

Al sustituir (5) en (2) se tiene

$$
\begin{aligned}
A_t &= \alpha x_t + (1 - \alpha)[\alpha x_{t-1} + (1 - \alpha)A_{t-2}] \\
&= \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + (1 - \alpha)^2 A_{t-2}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Obsérvese que

$$A_{t-2} = \alpha x_{t-2} + (1 - \alpha)A_{t-3} \tag{7}$$

TABLA 3
Suavizamiento exponencial simple para las ventas de televisores ($\alpha = .1$)

Mes	Ventas reales	Pronóstico	A_t	e_t
1	30	32	31.8	−2.00
2	32	31.8	31.82	0.20
3	30	31.82	31.64	−1.82
4	39	31.64	32.37	7.36
5	33	32.37	32.44	0.63
6	34	32.44	32.60	1.56

Si deseamos calcular L_t, tomamos un promedio ponderado de las dos cantidades siguientes:

1 x_t, que es una estimación del nivel base del periodo t a partir del periodo actual.

2 $L_{t-1} + T_{t-1}$, que es una estimación del nivel base del periodo t según datos anteriores.

Para calcular T_t consideramos un promedio ponderado de las dos cantidades siguientes:

1 Una estimación de la tendencia a partir del periodo actual dada por el incremento en la base suavizada a partir del periodo $t - 1$ al periodo t.

2 T_{t-1}, que es la estimación anterior de la tendencia.

Al igual que en el caso anterior, definimos $f_{t,k}$ como el pronóstico para x_{t+k} hecha al final del periodo t. Entonces,

$$f_{t,k} = L_t + kT_t \tag{11}$$

Para empezar con el método de Holt, necesitamos una estimación inicial (llámela L_0) de la base y una estimación inicial (llámela T_0) de la tendencia. Podríamos hacer a T_0 igual al incremento promedio mensual de la serie de tiempo durante al año anterior, y a L_0 igual a la observación del último mes.

De acuerdo con la figura 5, es evidente que las ventas del aparato que toca DC muestra una tendencia ascendente, pero ningún patrón estacional obvio está presente. Por lo tanto, el método de Holt debe ofrecer un buen pronóstico. Supongamos que las ventas de los aparatos que tocan CD durante cada uno de los últimos 12 meses son 4, 6, 8, 10, 14, 18, 20, 22, 24, 28, 31 y 34. Entonces,

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{(6 - 4) + (8 - 6) + (10 - 8) + \cdots + (34 - 31)}{11} \\ &= \frac{34 - 4}{11} = 2.73 \end{aligned}$$

Luego estimamos que $L_0 = 34$.

Si aplicamos el método de Holt a los primeros seis meses de ventas (usando $\alpha = 0.30$ y $\beta = 0.10$) obtenemos los resultados que se presentan en la tabla 5. Enseguida se muestran algunos ejemplos de los cálculos:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0.30x_1 + 0.70(L_0 + T_0) = 0.3(40) + 0.7(34 + 2.73) = 37.71 \\ T_1 &= 0.1(L_1 - L_0) + 0.9T_0 = 0.1(37.71 - 34) + 0.9(2.73) = 2.83 \\ f_{1,1} &= L_1 + T_1 = 37.71 + 2.83 = 40.54 \\ e_2 &= x_2 - f_{1,1} = 47 - 40.54 = 6.46 \end{aligned}$$

TABLA 5

Método de Holt para las ventas de CD (usando $\alpha = 0.30$, $\beta = 0.10$)

Mes	Ventas	L_t	T_t	$f_{t-1,1}$ $(L_{t-1} + T_{t-1})$	e_t $(x_t - f_{t-1,1})$
1	40	37.71	2.83	36.73	3.27
2	47	42.48	3.02	40.54	6.46
3	50	46.85	3.16	45.50	4.50
4	49	49.70	3.13	50.01	−1.01
5	56	53.78	3.22	52.83	3.17
6	53	55.80	3.10	57.00	−4.00

FIGURA 7
Método de Holt

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		HOLT	METHOD	ALPHA	BETA	MAD=				
2				0.3	0.1	2.84686937				
3	MONTH	CD SALES	Lt	Tt	f(t-1,1)	et	|et|			
4	0		34	2.73						
5	1	40	37.711	2.8281	36.73	3.27	3.27			
6	2	47	42.47737	3.021927	40.5391	6.4609	6.4609			
7	3	50	46.8495079	3.15694809	45.499297	4.500703	4.500703			
8	4	49	49.7045192	3.12675441	50.006456	-1.006456	1.00645599			
9	5	56	53.7818915	3.2218162	52.8312736	3.1687264	3.1687264			
10	6	53	55.8025954	3.10170497	57.0037077	-4.0037077	4.00370772			
11	7	55	57.7330103	2.98457596	58.9043004	-3.9043004	3.90430038			
12	8	63	61.4023104	3.05304837	60.7175862	2.28241378	2.28241378			
13	9	68	65.5187511	3.15938761	64.4553587	3.54464127	3.54464127			
14	10	65	67.5746971	3.04904345	68.6781387	-3.6781387	3.67813872			
15	11	72	71.0366184	3.09033123	70.6237406	1.37625945	1.37625945			
16	12	69	72.5888647	2.93652274	74.1269496	-5.1269496	5.12694962			
17	13	79	76.5677712	3.04076112	75.5253875	3.47461252	3.47461252			
18	14	82	80.3259726	3.11250515	79.6085324	2.39146765	2.39146765			
19	15	80	82.4069345	3.00935081	83.4384778	-3.4384778	3.4384778			
20	16	85	85.2913997	2.99686226	85.4162853	-0.4162853	0.41628527			
21	17	94	90.0017834	3.1682144	88.2882619	5.71173805	5.71173805			
22	18	89	91.9189984	3.04311447	93.1699978	-4.1699978	4.16999776			
23	19	96	95.273479	3.07425108	94.9621129	1.0378871	1.0378871			
24	20	100	98.8434111	3.12381918	98.3477301	1.65226989	1.65226989			
25	21	100	101.377061	3.06480227	101.96723	-1.9672303	1.96723025			
26	22	105	104.609304	3.08154636	104.441863	0.55813656	0.55813656			
27	23	108	107.783596	3.09082084	107.690851	0.30914923	0.30914923			
28	24	110	110.612091	3.06458835	110.874416	-0.8744164	0.87441638			
29					BETA					
30	2.84686937	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
31	0.1	2.85549229	2.79917857	2.73752333	2.70190155	2.74959079	2.79516165	2.83287197	2.86298631	2.92313769
32	0.2	2.76620734	2.73280037	2.76089108	2.78733151	2.84068253	2.92107922	2.97420106	2.98283649	2.99339222
33	0.3	2.84686937	2.87216928	2.90902939	2.95265285	2.98980036	3.04270174	3.13130108	3.21889032	3.2935572
34	0.4	2.96069374	3.0030147	3.05465632	3.110774	3.17038284	3.23467306	3.30196817	3.35141111	3.38544721
35	0.5	3.0707409	3.1289783	3.19166282	3.25002095	3.31027756	3.36404349	3.42489473	3.50405565	3.58298443
36	0.6	3.19398831	3.26198014	3.33253292	3.39877183	3.48348934	3.58574625	3.68496609	3.78162671	3.87646977
37	0.7	3.31493308	3.39345284	3.47449093	3.59818192	3.71792621	3.83504256	3.95075646	4.06889148	4.21031682
38	0.8	3.43163015	3.52755966	3.66950469	3.80654215	3.940503	4.07309251	4.26812614	4.4709749	4.67844324
39	0.9	3.53843635	3.69071551	3.844996	4.02099412	4.2282208	4.45607616	4.68692747	4.9520137	5.24579003

24.4 Método de Winter: suavizamiento exponencial con estacionalidad

El apropiadamente llamado **método de Winter** (método de invierno) se utiliza para pronosticar series temporales en las cuales están presentes la tendencia y la estacionalidad. Como ya se mencionó, las ventas de acondicionadores de aire muestran una tendencia ascendente y estacionalidad, lo cual se ilustra en la figura 6, por lo que el método de Winter es el candidato lógico para predecir estas ventas.

Para explicar el método de Winter se requieren dos definiciones. Sea c = número de periodos en la duración del patrón estacional ($c = 4$ para la información trimestral y $c = 12$ si los datos son mensuales). Sea s_t una estimación de un factor multiplicativo estacional para el mes t, obtenido después de observar x_t. Por ejemplo, suponga que el mes 7 es julio y $s_7 = 2$. Luego de observar las ventas de acondicionadores de aire del mes 7, opinamos que las ventas de acondicionadores de julio (con todos los otros factores iguales) serán el doble de las ventas esperadas durante un mes promedio. Si el mes 24 es diciembre y $s_{24} = 0.4$, entonces, después de observar las ventas del mes 24, pronosticaremos que las ventas de acondicionadores en diciembre serán 40% de las ventas esperadas durante un mes promedio. En lo siguiente, L_t y T_t significan lo mismo que en el método de Holt. Cada periodo, L_t, T_t y s_t están actualizados (en ese orden) por medio de las ecuaciones (12) a (14). Una vez más, α, β, y γ son constantes de suavizamiento, cada una de las cuales está entre 0 y 1.

$$L_t = \alpha \frac{x_t}{s_{t-c}} + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \tag{12}$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} \tag{13}$$

$$s_t = \gamma \frac{x_t}{L_t} + (1 - \gamma)s_{t-c} \tag{14}$$

Mediante la ecuación (12) se actualiza la estimación de la base de la serie, tomando un promedio ponderado de las dos cantidades siguientes:

1 $L_{t-1} + T_{t-1}$, que es la estimación del nivel base antes de observar x_t

2 La observación desestacionalizada $\frac{x_t}{s_{t-c}}$, la cual es una estimación de la base obtenida a partir del periodo actual

La ecuación (13) es idéntica a la ecuación (10) de T_t usada para actualizar la tendencia en el método de Holt.

Por otro lado, la ecuación (14) actualiza la estacionalidad del mes t considerando un promedio ponderado de las dos cantidades siguientes:

1 La estimación más reciente de la estacionalidad del mes t (s_{t-c})

2 $\frac{x_t}{L_t}$, la cual es una estimación de la estacionalidad del mes t, obtenida a partir del mes actual.

Al final del periodo t, la predicción ($f_{t,k}$) por el mes $t + k$ se obtiene con

$$f_{t,k} = (L_t + kT_t)s_{t+k-c} \tag{15}$$

Por lo tanto, para pronosticar el valor de la serie durante el periodo $t + k$ se multiplica la estimación de la base ($L_t + kT_t$) del periodo $t + k$ por la estimación más reciente del factor de estacionalidad (s_{t+k-c}) del mes ($t + k$).

Inicio del método de Winter

Para obtener buenos pronósticos por medio del método de Winter, se requiere obtener buenas estimaciones iniciales de la base, tendencia y todos los factores estacionales. Sean

$$\begin{aligned} L_0 &= \text{estimación de la base al inicio del mes 1} \\ T_0 &= \text{estimación de la tendencia al inicio del mes 1} \\ s_{-11} &= \text{estimación del factor estacional de enero al inicio del mes 1} \\ s_{-10} &= \text{estimación del factor estacional de febrero al inicio del mes 1} \\ &\vdots \\ s_0 &= \text{estimación del factor estacional de diciembre al inicio del mes 1} \end{aligned} \tag{16}$$

Se dispone de una gran diversidad de métodos para estimar los parámetros en (16). Escogemos un método simple que requiere dos años de información. Suponga que las ventas de los últimos dos años (por mes) fueron como se señala:

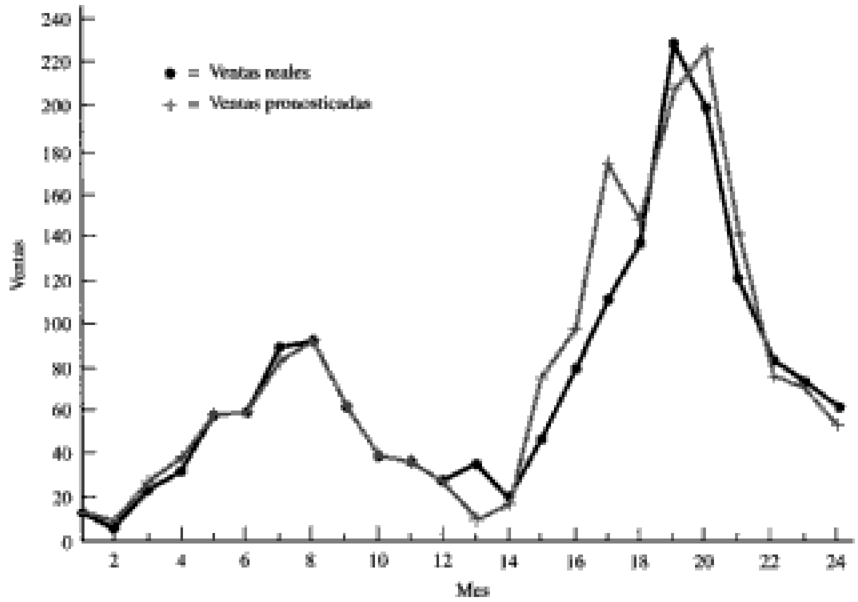


FIGURA 8
Pronósticos sobre las ventas de acondicionadores de aire

Observamos que, en la mayor parte de las situaciones donde se requiere un pronóstico, saber algo relacionado con la precisión probable del pronóstico es casi tan importante como el pronóstico real. Por lo tanto, ¡esta pequeña subsección es muy importante!

PROBLEMAS

Grupo A

1 Un suavizamiento exponencial simple (con $\alpha = 0.2$) se usa para pronosticar las ventas mensuales de cerveza en la vinatería Gordon's. Después de observar la demanda de abril, la demanda pronosticada para mayo es 4000 envases de cerveza.

a A principios de mayo, ¿cuál es el pronóstico para las ventas de cerveza en julio?

b La demanda real durante mayo y junio es como sigue: mayo, 4500 latas de cerveza; junio, 3500 latas de cerveza. Después de observar la demanda de junio, ¿cuál es el pronóstico para la demanda de julio?

c La demanda durante mayo y junio promedia $\frac{4500+3500}{2}$ = 4000 latas por mes. Esto es lo mismo que el pronóstico para las ventas mensuales antes de que observáramos los datos de mayo y junio. Todavía después de observar la demanda de cerveza de mayo y de junio, el pronóstico para la demanda de julio decreció desde lo que era al final de abril. ¿Por qué?

2 Estamos haciendo un pronóstico de las ventas trimestrales de bebidas carbonatadas en la vinatería de Gordon's mediante el método de Winter. Contamos con la siguiente información:

Factores de estacionalidad: otoño = 0.8, primavera = 1.2, invierno = 0.7, verano = 1.3
Estimación de la base actual = 400 envases por trimestre
Estimación de la tendencia actual = 40 envases por trimestre
$\alpha = 0.2 \quad \beta = 0.3 \quad \gamma = 0.5$

Ahora se observa la venta de 650 envases durante el trimestre del verano.

a Utilice esta información para actualizar las estimaciones de base, tendencia y estacionalidad.

b Después de observar la demanda del verano, pronostique la demanda para el trimestre del otoño y del trimestre del invierno.

3 Estamos utilizando el método de Winter e información mensual para pronosticar el PIB. (Todos lo números están en miles de millones de dólares). Al final de enero de 2005, L_t = 600 y T_t = 5. Contamos con las estacionalidades siguientes: enero, 0.80; febrero, 0.85; diciembre, 1.2. Durante febrero de 2005, el PIB está en el nivel de 630. ¿Cuál es la predicción para el nivel de diciembre de 2005 del PIB al final de febrero? Utilice $\alpha = \beta = \gamma = 0.5$.

4 Mediante el método de Holt queremos predecir las ventas mensuales de videocaseteras en Highland Appliance. A fines de octubre de 2005, L_t = 200 y T_t = 10. Durante noviembre de 2005, se vendieron 230 videocaseteras. Al final de noviembre, MAD = 25 y estamos 95% seguros de que las ventas de videocaseteras para diciembre de 2005 estarán entre _____ y _______. Utilice $\alpha = \beta = 0.5$.

5 Mediante suavizamiento exponencial simple queremos predecir las ventas mensuales de las rasuradoras eléctricas en la tienda Hook's. Al final de octubre de 2006, el pronóstico de las ventas de diciembre de 2006 era de 40. En noviembre se vendieron 50 rasuradoras y 45 durante diciembre. Suponga que $\alpha = 0.50$. Al final de diciembre de 2006, ¿cuál es el pronóstico para el número total de rasuradoras que se venderán durante marzo y abril de 2007?

6 Usamos suavizamiento exponencial simple para predecir las ventas mensuales de autos en la Ford de Bloomington. La compañía cree que las ventas no manifiestan tendencia o estacionalidad, por eso esta técnica ha proporcionado pronósticos satisfactorios en la mayor parte. No obstante, la compañía observa cada marzo que las ventas tienden a sobrepasar el pronóstico por suavizamiento exponencial simple (A_{Feb}) en 200. Suponga que al final de febrero de 2004, $A_t = 600$. Durante marzo de 2004, se vendieron 900 automóviles.

a Si $\alpha = 0.3$ determine (al final de marzo de 2004) un pronóstico para las ventas de automóviles de abril de 2004.

b Suponga que al final de marzo, MAD = 60. Estamos 95% seguros de que las ventas de abril estarán entre ______ y ______.

7 La unión de crédito de la universidad abre de lunes a sábado. El método de Winter se utiliza para predecir ($\alpha = \beta = \gamma = 0.5$) la cantidad de clientes que llega al banco cada día. Después de incorporar los arribos de octubre 16, $L_t = 200$ clientes, $T_t = 1$ cliente y las estacionalidades son como se indican: lunes, 0.90; martes, 0.70; miércoles, 0.80; jueves, 1.1; viernes, 1.2; sábado, 1.3. Esto quiere decir que un lunes representativo, la cantidad de clientes es 90% de los clientes que llegan al banco en un día promedio. El martes, 17 de octubre, llegan 182 clientes al banco. Al cerrar el negocio el 17 de octubre, dé un pronóstico del número de clientes que llegarán el día 25 de octubre al banco.

8 Se utiliza el método de Holt (suavizamiento exponencial con tendencia y sin estacionalidad) para predecir las ventas de automóviles por semana en la Ford TOD. En la actualidad, se estima que la base es de 50 automóviles por semana, y la tendencia se estima en 6 automóviles por semana. Durante la semana que corre, se han vendido 30 automóviles. Después de observar las ventas actuales de la semana, pronostique la cantidad de automóviles que se venderán durante la semana que inicia tres semanas después de la finalización de la semana presente. Utilice $\alpha = \beta = 0.3$.

9 Se aplica el método de Winter para pronosticar (con $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.1$ y $\gamma = 0.5$) el número de clientes atendidos cada día en el Last National Bank. El banco abre de lunes a viernes. En la actualidad se han estimado las estacionalidades presentes: lunes, 0.80; martes, 0.90; miércoles, 0.95; jueves, 1.10; viernes, 1.25. Una estacionalidad de 0.80 para el lunes quiere decir que en un lunes, la cantidad de clientes atendidos en el banco tiende a ser de 80% de promedio. En la actualidad, se estima que la base es 20 clientes, y que la tendencia es igual 1 cliente. Después de observar que en lunes se atienden a 30 clientes en el banco, pronostique la cantidad de clientes atendidos el miércoles.

10 Se nos ha asignado el trabajo de pronosticar la cantidad de motores para avión que pide cada mes la Engine Company. Al final de febrero, el pronóstico es que se pedirán 100 motores durante abril. Durante marzo se pedirán 120 motores.

a Con $\alpha = 0.3$ dé (a fines de marzo) un pronóstico para el número de pedidos hechos durante abril. Conteste la misma pregunta para mayo.

b Suponga que a fines de marzo, MAD = 16. A fines de marzo tenemos 68% de seguridad de que los pedidos de abril estarán entre ______ y ______.

11 El método de Winter se aplica para predecir las ventas al menudeo trimestrales de Estados Unidos (en miles de millones de dólares). Al final del primer trimestre, $L_t = 300$, $T_t = 30$, y los índices estacionales son como se indica a continuación: trimestre 1, 0.90; trimestre 2, 0.95; trimestre 3, 0.95; trimestre 4, 1.20. Durante el segundo trimestre, las ventas al menudeo son de 360 miles de millones. Suponga $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.4$ y $\gamma = 0.5$.

a Al final del segundo trimestre, elabore un pronóstico para las ventas al menudeo durante el cuarto trimestre del año.

b Al finalizar el segundo trimestre dé un pronóstico para el segundo trimestre del año próximo.

Grupo B

12 Se utiliza suavizamiento exponencial simple con $\alpha = 0.3$ para pronosticar las ventas de radios de Lowland Appliance. Los pronósticos se hacen con base en la información mensual. Después de observar las ventas de los radios en agosto, el pronóstico para septiembre es de 100 radios.

a Durante septiembre se vendieron 120 radios. Después de observar las ventas de septiembre, ¿cuál es el pronóstico para las ventas de radios en octubre? ¿Y para noviembre?

b Resulta que las ventas de junio registraron 10 radios vendidos. Pero en realidad se vendieron 100 radios en junio. Luego de corregir el error, ¿cuál sería el pronóstico para la venta de radios de octubre?

13 En la explicación del método de Winter, una estacionalidad mensual de, por ejemplo, 0.80 para enero significa que, durante enero, se espera que las ventas de acondicionadores de aire sean 80% de las ventas esperadas en un mes promedio. Un método opcional para modelar la estacionalidad es hacer que el factor de estacionalidad para cada mes represente qué tan lejos por encima del promedio estarán las ventas de acondicionadores de aire durante el mes actual. Por ejemplo, si $s_{enero} = -50$, entonces se espera que las ventas de estos aparatos durante enero sean 50 menos que las ventas durante un mes promedio. Si $s_{julio} = 90$, entonces se espera que las ventas de acondicionadores durante julio sean 90 más que las ventas de aparatos durante un mes promedio. Sean

s_t = la estacionalidad para el mes t después de que se ha observado la demanda del mes t. Sea

L_t = la estimación de la base después de que se observa la demanda del mes t

T_t = la estimación de la tendencia después de observar la demanda del mes t

Entonces, las ecuaciones para el método de Winter dadas en el texto se modifican como se indica (* significa multiplicación)

$$L_t = \alpha * (I) + (1 - \alpha) * (L_{t-1} + T_{t-1})$$
$$T_t = \beta * (L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta) * T_{t-1}$$
$$s_t = \gamma * (II) + (1 - \gamma) * s_{t-12}$$

a ¿Qué deben ser I y II?

b Suponga que el mes 13 es enero, $L_{12} = 30$, $T_{12} = -3$, $s_1 = -50$, y $s_2 = -20$. Sea $\alpha = \gamma = \beta = 0.5$. Suponga que se vendieron 12 acondicionadores de aire durante el mes 13. Al final del mes 13, ¿cuál es el pronóstico sobre las ventas de acondicionadores de aire durante el mes 14?

14 En el método de Winter se supone una estacionalidad multiplicativa y una tendencia aditiva. Por ejemplo, una tendencia de 5 quiere decir que la base se incrementa 5 unidades por periodo. Suponga que hay en realidad una tendencia multiplicativa. Entonces (ignorando la estacionalidad) si la estimación actual de la base es de 50 y la estimación actual de la tendencia es de 1.2, pronosticaríamos que la demanda se incrementaría 20% por periodo. Si ignoramos la estacionalidad, pronosticaríamos, por lo tanto, la demanda del periodo siguiente como 50(1.2) y la demanda de dos periodos en el futuro como $50(1.2)^2$.

Si queremos usar una tendencia multiplicativa en el método de Winter, debemos usar las ecuaciones siguientes:

$$L_t = \alpha * \left(\frac{x_t}{s_{t-c}}\right) + (1-\alpha) * (I)$$
$$T_t = \beta * (II) + (1-\beta) * T_{t-1}$$
$$s_t = \gamma * \left(\frac{x_t}{L_t}\right) + (1-\gamma) * s_{t-12}$$

a Determine qué deben ser I y II.

b Suponga que estamos trabajando con información mensual y que el mes 12 es diciembre, el mes 13 es enero, y así sucesivamente. Asimismo, suponga que $L_{12} = 100$, $T_{12} = 1.2$, $s_1 = 0.90$, $s_2 = 0.70$, y $s_3 = 0.95$. Suponga que $s_{13} = 200$. Al final del mes 13, ¿cuál es el pronóstico para x_{15}? Suponga $\alpha = \beta = \gamma = 0.5$.

15 En el método de Holt se supone una tendencia aditiva. Por ejemplo, una tendencia de 5 significa que la base se incrementará 5 unidades por periodo. Suponga que, en realidad, hay una tendencia multiplicativa. Por lo tanto, si la estimación actual de la base es 50 y la estimación actual de la tendencia es 1.2, pronosticaríamos un incremento en la demanda de 20% por periodo. De modo que pronosticaríamos la demanda del siguiente periodo como 50(1.2) y la demanda dos periodos en el futuro como $50(1.2)^2$. Si queremos utilizar una tendencia multiplicativa en el método de Holt debemos usar las ecuaciones siguientes:

$$L_t = \alpha * (x_t) + (1-\alpha) * (I)$$
$$T_t = \beta * (II) + (1-\beta) * T_{t-1}$$

a Determine qué deben ser I y II.

b Suponga que estamos trabajando con información mensual y que el mes 12 es diciembre, el mes 13 es enero y así sucesivamente. Asimismo, suponga que $L_{12} = 100$ y $T_{12} = 1.2$, y, además, que $x_{13} = 200$. Al final del mes 13, ¿cuál es el pronóstico para x_{15}? Suponga que $\alpha = \beta = 0.5$.

16 Es posible utilizar una versión del suavizamiento exponencial simple para predecir el resultado de los eventos deportivos. Para ejemplificarlo, considere el futbol americano profesional. Primero suponemos que todos los partidos se juegan en un campo neutral. El día anterior al juego, suponemos que cada equipo tiene una calificación. Por ejemplo, si la calificación de los Osos es +10 y la de los Bengalíes es de +6, pronosticaríamos que los Osos vencen a los Bengalíes por 10 − 6 = 4 puntos. Suponga que los Osos juegan contra los Bengalíes y ganan por 20 puntos. Por lo que se refiere a estas observaciones, estaríamos dando un "subpronóstico" para el desempeño de los Osos de 20 − 4 = 16 puntos. La mejor α para el futbol profesional es 0.10. Después del juego aumentamos, por lo tanto, la calificación de los Osos en 16(0.1) = 1.6, y disminuimos la calificación de los Bengalíes en 1.6 puntos. En un nuevo encuentro, los Osos serían los favoritos por (10 + 1.6) − (6 − 1.6) = 7.2 puntos.

a ¿De qué modo se relaciona este enfoque con la ecuación $A_t = A_{t-1} + \alpha(e_t)$?

b Suponga que la ventaja por jugar en casa en el futbol americano profesional es de 3 puntos; es decir, los equipos locales tienden a superar en el puntaje a los equipos visitantes por un promedio de 3 puntos por juego. ¿Cómo podría la ventaja de jugar en casa ser incorporado en el sistema?

c ¿Cómo podríamos determinar la mejor α para el futbol americano profesional?

d ¿Cómo podríamos determinar calificaciones para cada equipo al iniciar la temporada?

e Suponga que pretendemos aplicar el método del inciso anterior para predecir lo que sucede en el futbol profesional americano (calendario de 16 partidos), futbol americano colegial (calendario de 11 partidos), basquetbol colegial (calendario de 30 juegos) y basquetbol profesional (calendario de 82 partidos). ¿Qué deporte tendría la α mínima óptima? ¿Qué deporte tendría la α máxima óptima?

f ¿Por qué probablemente este enfoque generaría pronósticos malos para las ligas mayores de beisbol?

24.5 Pronósticos *ad hoc*

Suponga que desea determinar cuántos cajeros deben estar trabajando cada día en un banco con el fin de brindar un servicio adecuado. Con objeto de usar los modelos de colas del capítulo 20 para contestar esta pregunta, necesita ser capaz de pronosticar la cantidad de clientes que llegarán diario al banco. El gerente del banco opina que el mes del año y el día de la semana influyen en el número de clientes que llegan al banco. (El banco está abierto de lunes a sábado, excepto los días feriados.) ¿Será posible desarrollar un modelo sencillo de pronóstico para ayudar al banco a pronosticar la cantidad de clientes que acudirán diario?

La cantidad de clientes que llegó al banco diario durante el año anterior se presenta en la tabla 7. Hemos usado 1 = lunes, 2 = martes, . . . , 6 = sábado y 7 = domingo para designar los días de la semana. Una "Y" en la columna AH quiere decir que ese día es el día posterior a que el banco estuviera cerrado por ser día feriado.

Sea x_t = número de clientes que llegan al banco el día t. Planteamos que $x_t = B \times DW_t \times M_t \times \varepsilon_t$, donde

B = nivel base del tránsito de clientes que corresponde a un día promedio
DW_t = factor del día de la semana que corresponde al día de la semana en el cual cae t.
M_t = factor del mes que corresponde al mes durante el cual ocurre el día t
ε_t = término del error aleatorio cuyo valor promedio es igual a 1.

TABLA 7
(Continuación)

Mes	Día M	Día W	Cliente	AH	Pronóstico
2	17	6	501		363.87
2	18	7			
2	19	1	556		504.45
2	20	2	510		407.58
2	21	3	436		424.69
2	22	4	512		425.33
2	23	5	547		571.97
2	24	6	319		363.87
2	25	7			
2	26	1	637		504.45
2	27	2	474		407.58
2	28	3	487		424.69
2	29	4	402		425.33
3	1	5	778		574.26
3	2	6	374		365.32
3	3	7			
3	4	1	544		506.46
3	5	2	485		409.21
3	6	3	361		426.39
3	7	4	315		427.03
3	8	5	423		574.26
3	9	6	357		365.32
3	10	7			
3	11	1	649		506.46
3	12	2	351		409.21
3	13	3	405		426.39
3	14	4	404		427.03
3	15	5	483		574.26
3	16	6	411		365.32
3	17	7			
3	18	1	309		506.46
3	19	2	453		409.21
3	20	3	515		426.39
3	21	4	380		427.03
3	22	5	426		574.26
3	23	6	427		365.32
3	24	7			
3	25	1	489		506.46
3	26	2	341		409.21
3	27	3	471		426.39
3	28	4	517		427.03
3	29	5	647		574.26
3	30	6	415		365.32
3	31	7			
4	1	1	363		483.02
4	2	2	337		390.27
4	3	3	314		406.65

(Continúa)

TABLA 7
(Continuación)

Mes	Día M	Día W	Cliente	AH	Pronóstico
4	4	4	465		407.26
4	5	5	584		547.67
4	6	6	313		348.41
4	7	7			
4	8	1	376		483.02
4	9	2	292		390.27
4	10	3	484		406.65
4	11	4	227		407.26
4	12	5	496		547.67
4	13	6	395		348.41
4	14	7			
4	15	1	625		483.02
4	16	2	430		390.27
4	17	3	454		406.65
4	18	4	372		407.26
4	19	5	455		547.67
4	20	6	253		348.41
4	21	7			
4	22	1	432		483.02
4	23	2	469		390.27
4	24	3	392		406.65
4	25	4	467		407.26
4	26	5	684		547.67
4	27	6	349		348.41
4	28	7			
4	29	1	750		483.02
4	30	2	409		390.27
5	1	3	348		373.31
5	2	4	230		373.88
5	3	5	630		502.78
5	4	6	358		319.85
5	5	7			
5	6	1	269		443.43
5	7	2	107		358.27
5	8	3	360		373.31
5	9	4	208		373.88
5	10	5	547		502.78
5	11	6	325		319.85
5	12	7			
5	13	1	473		443.43
5	14	2	337		358.27
5	15	3	317		373.31
5	16	4	341		373.88
5	17	5	338		502.78
5	18	6	369		319.85
5	19	7			
5	20	1	618		443.43

(Continúa)

TABLA 7
(Continuación)

Mes	Día M	Día W	Cliente	AH	Pronóstico
5	21	2	458		358.27
5	22	3	457		373.31
5	23	4	572		373.88
5	24	5	668		502.78
5	25	6	318		319.85
5	26	7			
5	27	1	300		443.43
5	28	2	469		358.27
5	29	3	434		373.31
5	30	4	419		373.88
5	31	5			
6	1	6	432	Y	354.08
6	2	7			
6	3	1	463		490.89
6	4	2	457		396.62
6	5	3	273		413.27
6	6	4	327		413.90
6	7	5	554		556.60
6	8	6	256		354.08
6	9	7			
6	10	1	465		490.89
6	11	2	479		396.62
6	12	3	437		413.27
6	13	4	585		413.90
6	14	5	616		556.60
6	15	6	318		354.08
6	16	7			
6	17	1	724		490.89
6	18	2	390		396.62
6	19	3	550		413.27
6	20	4	266		413.90
6	21	5	410		556.60
6	22	6	303		354.08
6	23	7			
6	24	1	514		490.89
6	25	2	353		396.62
6	26	3	397		413.27
6	27	4	539		413.90
6	28	5	411		556.60
6	29	6	413		354.08
6	30	7			
7	1	1	583		484.44
7	2	2	477		391.42
7	3	3	410		407.85
7	4	4			
7	5	5	615	Y	549.29
7	6	6	288		349.44

(Continúa)

TABLA 7
(Continuación)

Mes	Día M	Día W	Cliente	AR	Pronóstico
8	23	5	488		562.56
8	24	6	326		357.88
8	25	7			
8	26	1	465		496.15
8	27	2	384		400.87
8	28	3	280		417.70
8	29	4	292		418.33
8	30	5	649		562.56
8	31	6	493		357.88
9	1	7			
9	2	1			
9	3	2	459	Y	391.76
9	4	3	353		408.21
9	5	4	287		408.82
9	6	5	471		549.77
9	7	6	266		349.74
9	8	7			
9	9	1	505		484.87
9	10	2	528		391.76
9	11	3	342		408.21
9	12	4	551		408.82
9	13	5	525		549.77
9	14	6	304		349.74
9	15	7			
9	16	1	479		484.87
9	17	2	258		391.76
9	18	3	263		408.21
9	19	4	450		408.82
9	20	5	540		549.77
9	21	6	297		349.74
9	22	7			
9	23	1	399		484.87
9	24	2	264		391.76
9	25	3	479		408.21
9	26	4	459		408.82
9	27	5	915		549.77
9	28	6	247		349.74
9	29	7			
9	30	1	725		484.87
10	1	2	197		390.39
10	2	3	326		406.78
10	3	4	374		407.39
10	4	5	477		547.85
10	5	6	367		348.52
10	6	7			
10	7	1	317		483.17
10	8	2	205		390.39

(Continúa)

De igual manera, tenemos

$$DW_t \text{ para el martes } = 0.907$$
$$DW_t \text{ para el miércoles } = 0.945$$
$$DW_t \text{ para el jueves } = 0.947$$
$$DW_t \text{ para el viernes } = 1.273$$
$$DW_t \text{ para el sábado } = 0.809$$

Si deseamos estimar M_t (digamos, para mayo), escribimos

$$M_t \text{ para mayo } = \frac{\begin{array}{c}\text{número promedio de llegadas en el día}\\ \text{de mayo en que el banco está abierto}\end{array}}{B}$$

$$= \frac{395}{438.33} = 0.901$$

Determinamos, de modo igual, que M_t para los meses restantes es:

$$M_t \text{ para enero } = 1.004$$
$$M_t \text{ para febrero } = 1.025$$
$$M_t \text{ para marzo } = 1.029$$
$$M_t \text{ para abril } = 0.982$$
$$M_t \text{ para junio } = 0.998$$
$$M_t \text{ para julio } = 0.984$$
$$M_t \text{ para agosto } = 1.008$$
$$M_t \text{ para septiembre } = 0.985$$
$$M_t \text{ para octubre } = 0.982$$
$$M_t \text{ para noviembre } = 1.069$$
$$M_t \text{ para diciembre } = 1.037$$

Con el fin de mostrar cómo se generaron los pronósticos de la tabla 7, considere cómo obtendríamos un pronóstico del número de clientes que entran al banco el jueves 1 de febrero del presente año. Suponiendo que ε_t es igual a su valor promedio de 1, pronosticaríamos que entrarían $B \times$ (DW_t para el jueves) $\times$ (M_t para febrero) $= 438.33(0.947)(1.025) =$ 425.48 clientes. (La diferencia entre los resultados impresos de la tabla se debe al redondeo de los valores DW_t y M_t.) Para pronosticar las llegadas de los clientes para un día futuro (por ejemplo, sábado 8 de febrero del año próximo), tendríamos $B \times$ (DW_t para el sábado) $\times$ (M_t para febrero) $= 438.33\ (0.809)(1.025) = 363.47$ clientes.

En cuanto a los datos dados en la tabla 7, el modelo simple generó un MAD de 79.1. Si este método se utilizara para generar pronósticos para el año venidero, es probable que el MAD fuera mayor que 79.1. Esto es así porque tenemos que ajustar los parámetros a los datos anteriores; no hay garantía de que los datos futuros "sepan" que deben seguir el mismo patrón que los datos anteriores. Asimismo, no hemos considerado de si está presente o no una tendencia ascendente en los datos (véase problema 3).

Suponga que el gerente del banco observa que el día siguiente a un día feriado el tráfico en el banco es superior al modelo predicho. La información de la tabla 8 señala que en verdad éste es el caso. ¿Cómo podemos aprovechar estos datos para obtener pronósticos más precisos acerca de la clientela para los días posteriores a los días feriados? De acuerdo con la tabla 8, el valor promedio de Real/Pronosticado para los días posteriores a los días feriados es 1.15. Por lo tanto, para cualquier día después de un día feriado obtenemos un nuevo pronóstico multiplicando simplemente nuestro pronóstico anterior por 1.15.

TABLA 8
Tráfico en el banco el día siguiente a un día feriado

Día siguiente a un día feriado	Real	Pronóstico (redondeado)	Real/Pronóstico
2 de enero	431	399	1.08
1 de junio	432	354	1.22
5 de julio	615	549	1.12
3 de septiembre	459	392	1.17
29 de noviembre	701	596	1.18
26 de diciembre	491	430	1.14

PROBLEMAS

Grupo A

1 Suponga que el banco es una unión de crédito de una universidad y que las llegadas al banco son mayores a lo usual en los días cuando los profesores de la universidad reciben su pago. Suponiendo que los profesores universitarios reciben su pago el primer día de la semana de cada mes, ¿cómo podemos incorporar este hecho en el procedimiento de pronóstico explicado en esta sección?

2 Suponga otra vez que el banco es una unión de crédito de una universidad, pero ahora el personal recibe su pago cada dos viernes. De nuevo, el tráfico en el banco es mucho mayor en los días de pago que lo acostumbrado. ¿Cómo podríamos incorporar este hecho en el procedimiento de pronóstico que se explica en esta sección?

3 Suponga que la cantidad de clientes que llega al banco está aumentando alrededor de 20% por año. ¿Cómo podríamos incorporar este hecho en el procedimiento de pronóstico que se explica en esta sección?

24.6 Regresión lineal simple

A menudo tratamos de predecir el valor de una variable (llamada **variable dependiente**) a partir del valor de otra variable (**variable independiente**). Algunos ejemplos son

Variable dependiente	Variable independiente
Ventas de productos	Precio del producto
Ventas de automóviles	Tasa de interés
Costo de producción total	Unidades fabricadas

Si la variable dependiente y la variable independiente se relacionan de un modo lineal, entonces se puede aplicar la regresión lineal simple para estimar esta relación. En la sección 24.7 se trata cómo estimar relaciones no lineales.

Recordemos el problema de Giapetto (ejemplo 1 del capítulo 3) con el fin de ilustrar la regresión lineal simple. Para plantear este problema necesitamos determinar el costo de producción de un soldado y el costo de producción de un tren. Supongamos que deseamos estimar el costo de producción de un tren. Para hacerlo, hemos observado durante diez semanas el número de trenes producidos cada semana y el costo total de producción de aquellos trenes. Esta información se proporciona en la tabla 9.

Los datos de la tabla 9 se grafican en la figura 9. Obsérvese que, al parecer, hay una fuerte relación lineal entre x_i (número de trenes producidos durante la semana i) y y_i (costo de producción de los trenes hechos durante la semana i). La recta trazada en la figura 9 parece, en un modo que se precisa más adelante, apegarse a la relación lineal entre unidades producidas y costos de producción. Pronto se explica cómo se escoge esta recta.

TABLA 9
Información de los costos por semana de los trenes

Semana	Trenes fabricados	Costo de producción de los trenes
1	10	$257.40
2	20	$601.60
3	30	$782.00
4	40	$765.40
5	45	$895.50
6	50	$1133.00
7	60	$1152.80
8	55	$1132.70
9	70	$1459.20
10	40	$970.10

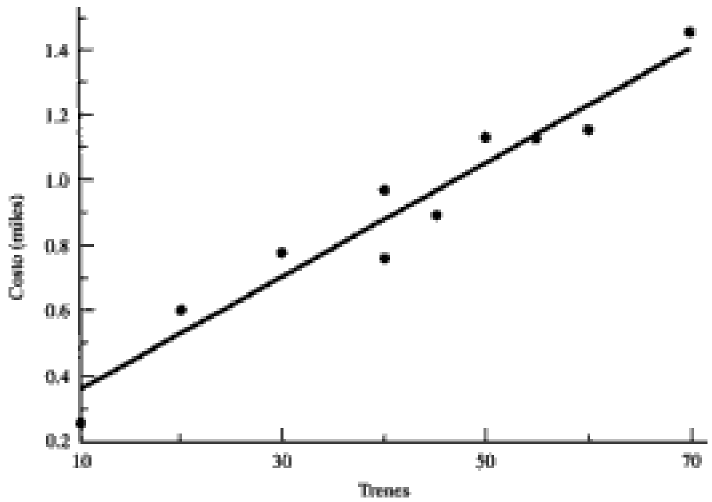


FIGURA 9
Gráfica de dispersión del costo de producción de los trenes

Para iniciar modelamos la relación lineal entre x_i y y_i mediante la ecuación siguiente

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

donde ε_i es un término de error que representa el hecho de que en una semana durante la cual se producen x_i trenes, el costo de producción podría no ser siempre igual a $\beta_0 + \beta_1 x_i$. Si $\varepsilon_i > 0$, el costo de producción de x_i trenes durante la semana i será mayor que $\beta_0 + \beta_1 x_i$, en tanto que si $\varepsilon_i < 0$, el costo de producción de x_i trenes durante la semana i será menor que $\beta_0 + \beta_1 x_i$. Sin embargo, esperamos que ε_i alcance un promedio de 0, de modo que el costo esperado durante una semana en la cual x_i trenes se fabrican es $\beta_0 + \beta_1 x_i$.

Los valores verdaderos de β_0 y β_1 son desconocidos. Supongamos que estimamos β_0 por medio de $\hat{\beta}_0$ y determinamos β_1 por medio de $\hat{\beta}_1$. Entonces las predicciones para y_i (puesto que el valor promedio de $\varepsilon_i = 0$) se obtienen mediante $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$.

Suponga que tenemos puntos dato de la forma $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. ¿Cómo debemos escoger los valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ que generan buenas estimaciones de β_0 y β_1? Seleccionamos valores de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ que hagan las predicciones $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ cercanas a los puntos dato reales (x_i, y_i). Para formalizar esta idea, defina e_i = error o residuo para los puntos dato i = (costo real y_i) − (costo pronosticado $\hat{y}_i$) $= y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i$. Ahora escogemos $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ para que minimicen

$$F(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

TABLA 11
Cálculo de los errores

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i
10	257.4	343.5	−86.1
20	601.6	522.1	79.5
30	782.0	700.7	81.3
40	765.4	879.3	−113.9
45	895.5	968.5	−73.0
50	1 133.0	1 057.8	75.2
60	1 152.8	1 236.4	−83.6
55	1 132.7	1 147.1	−14.4
70	1 459.2	1 415	44.2
40	970.1	879.3	90.8

2 $\sum e_i = 0$. La recta de mínimos cuadrados "divide" a los puntos dato en el sentido de que la suma de las distancias verticales desde los puntos que se localizan por arriba de la recta de mínimos cuadrados hasta dicha recta, es igual a la suma de las distancias verticales desde los puntos que se encuentran abajo de la misma recta.

¿Cómo lograr un buen ajuste?

¿De qué modo determinar qué tan bien se ajusta la recta de mínimos cuadrados a nuestros datos? Para contestar a esta pregunta necesitamos analizar tres componentes de la variación: **suma del total de cuadrados** (*sum of squares total*, SST), **suma de los errores cuadráticos** (*sum of squares error*, SSE) y **suma de los cuadrados de la regresión** (*sum of squares regression*, SSR). La suma total de cuadrados se obtiene con $\text{SST} = \sum(y_i - \bar{y})^2$. SST mide la variación total de y_i respecto a su media $\bar{y}$. La suma de los errores cuadráticos es $\text{SSE} = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2$. Si la recta de mínimos cuadrados pasa por todos los puntos dato, SSE = 0. Por lo tanto, una SSE pequeña indicaría que la recta de mínimos cuadrado se ajusta muy bien a los datos. Definimos la suma de los cuadrados de la regresión como $\text{SSR} = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$. Se puede demostrar que

$$\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE} \tag{19}$$

Obsérvese que SST es una función sólo de los valores de y. Si hay un buen ajuste, SSE tendrá un valor pequeño, de modo que (19) muestra que SSR tendrá un valor grande en un buen ajuste. Podríamos definir, con más formalidad, el **coeficiente de determinación** (R^2) para y mediante:

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = \text{porcentaje de variación en } y \text{ explicado por } x$$

En forma equivalente, la ecuación (19) permite expresar

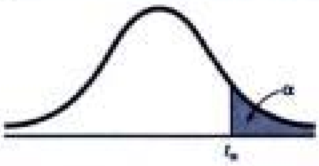
$$1 - R^2 = \frac{\text{SSE}}{\text{SST}} = \text{porcentaje de variación en } y \text{ no explicado por } x$$

Según los resultados que da la computadora, vemos que SST = 1 021 762 y SSE = 61 705. Entonces, con la ecuación (19) se obtiene SSR = SST − SSE = 960 057. Por lo tanto, encontramos que $R^2 = \frac{960\,057}{1\,021\,762} = 0.94$. Esto significa que la cantidad de trenes fabricados durante una semana explica el 94% de la variación en el costo semanal de la producción de trenes. Todos los otros factores combinados explican a lo más 6% de la variación en el costo semanal, de modo que podemos tener la seguridad de que la relación lineal entre x y y es fuerte.

Una medida de la asociación lineal entre x y y es la **correlación lineal de la muestra** r_{xy}. Una correlación de la muestra cercana a +1 indica una fuerte relación lineal positiva

TABLA 12

Puntos del porcentaje de la distribución t†



df	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

†Calculada por P. J. Hildebrand. Reimpreso con autorización de PWS-KENT Publishing Company.

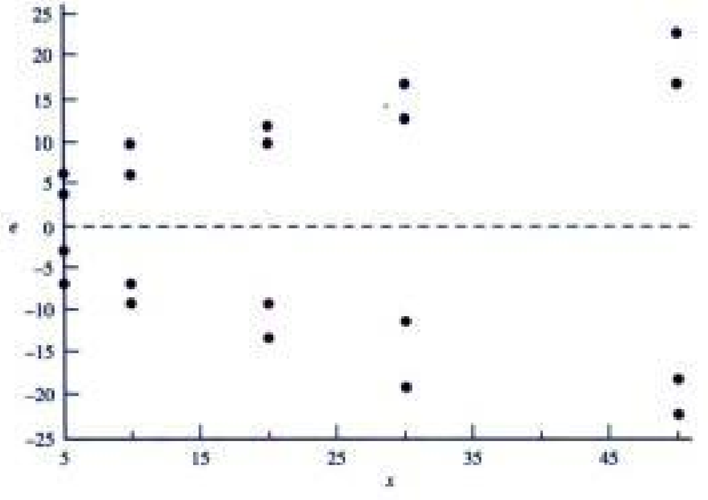


FIGURA 11
Heterocedasticidad

La validez de esta suposición se comprueba graficando los errores en una sucesión de series temporales. En la figura 12 se observa que los errores tenían los signos siguientes: $+ + + + + + - - - - - -$. Esta sucesión de errores expresa el patrón siguiente: a un error positivo (que corresponde a una subpredicción del valor real de y) le sigue otro error positivo, a un error negativo (que corresponde a una sobrepredicción del valor real de y) le sigue, por lo regular, otro error negativo. Este patrón manifiesta que errores sucesivos no son independientes; a esto se le conoce como **autocorrelación positiva**. En otras palabras, la autocorrelación positiva indica que los errores sucesivos tienen una correlación lineal positiva y no son linealmente independientes. Si la sucesión de errores en una sucesión de tiempo se parece a la figura 13, tenemos entonces una **autocorrelación negativa**. En este caso, la sucesión de errores es $+ - + - + - + - + - + -$. Esto significa que hay una tendencia a que a un error positivo le siga uno negativo, y viceversa. La conclusión es que errores sucesivos tienen una relación lineal negativa y no son independientes. La siguiente sucesión de errores: $+ + - + + - + - + + + -$, se muestra en la figura 14. No se observa ningún patrón obvio, por lo que, al parecer, se cumple la suposición de independencia. Obsérvese que los errores "alcanzan un promedio" de 0, de modo que contaríamos con que alrededor de la mitad de los errores sean positivos y la mitad sean negativos. Por lo tanto, si no hay un patrón en los errores, esperaríamos que los errores cambien de signo alrededor de la mitad de las veces. Esta observación nos permite formalizar la explicación anterior como sigue:

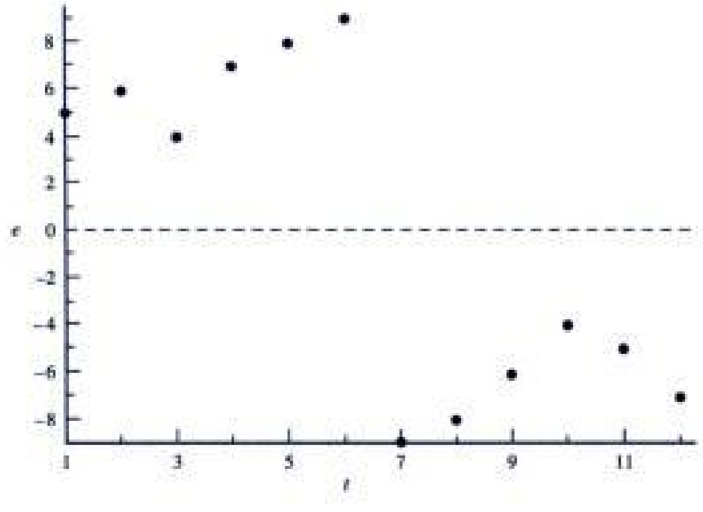


FIGURA 12
Autocorrelación positiva

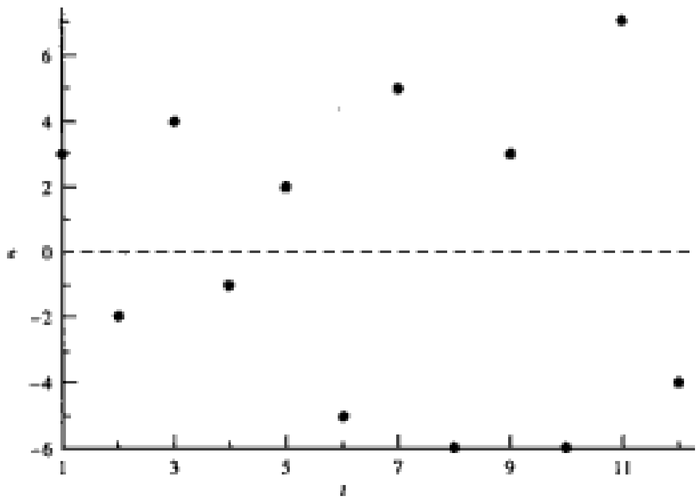


FIGURA 13
Autocorrelación negativa

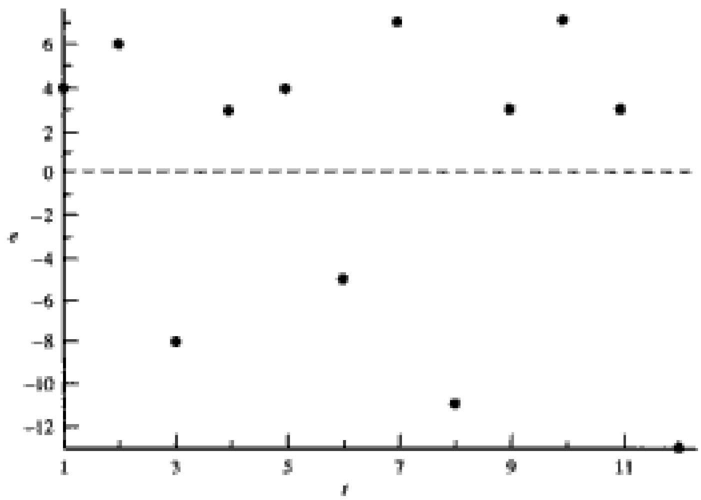


FIGURA 14
Ninguna autocorrelación

1 Si es muy raro que los errores cambien de signo (mucho menos que la mitad de las veces), entonces quizá incumplan la suposición de independencia, y probablemente esté presente la autocorrelación positiva.

2 Si los errores cambian de signo con mucha frecuencia (mucho más que la mitad de las veces), quizá incumplan la suposición de independencia, por lo que es probable que esté presente la autocorrelación negativa.

3 Si los errores cambian de signo alrededor de la mitad de las veces, es probable que satisfagan la suposición de independencia.

Si está presente la autocorrelación positiva o negativa, la corrección de la autocorrelación dará por resultado, con frecuencia, pronósticos mucho más precisos. Refiérase a las páginas 215 a 221 de Pindyck y Rubinfeld (1989) si desea más detalles.

Ejecución de regresiones con ayuda de Excel

Cost.xls

En la figura 15 (archivo Cost.xls) se ilustra el modo de ejecutar una regresión con Excel. Los datos de la tabla 9 se han escrito en el intervalo de celdas A2:B11, y luego, en Tools (Herramientas), seleccione Data Analysis (Análisis de datos), y ahí, Regression (Regre-

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	trains	cost	yihatr	e				
2	10	257.4	9.32060032	248.0794	COST	REGRESSION		
3	20	601.6	18.6412006	582.958799	EXAMPLE			
4	30	782	27.961801	754.038199				
5	40	765.4	37.2824013	728.117599				
6	45	895.5	41.9427014	853.557299				
7	50	1133	46.6030016	1086.397				
8	60	1152.8	55.9236019	1096.8764				
9	55	1132.7	51.2633018	1081.4367				
10	70	1459.2	65.2442022	1393.9558				
11	40	970.1	37.2824013	932.817599				
12								
13								
14								
15		SUMMARY OUTPUT						
16								
17		*Regression Statistics*						
18		Multiple R	0.9693343					
19		R Square	0.9396089					
20		Adjusted R Sq.	0.93206					
21		Standard Error	87.824643					
22		Observations	10					
23								
24		ANOVA						
25			*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*	
26		Regression	1	960057.16	960057.16	124.4698887	3.72837E-06	
27		Residual	8	61705.344	7713.168			
28		Total	9	1021762.5				
29								
30			*Coefficients*	*Standard Err*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
31		Intercept	164.87791	72.743329	2.2665708	0.053174264	-2.8686199	332.62443
32		trains	17.859336	1.6007855	11.156607	3.72837E-06	14.16791514	21.550756
33								
34								
35								
36								

FIGURA 15

sión).[†] Llene el cuadro de diálogo como se indica en la figura 16. En el Y range (el rango Y) B1:B11 se encuentra el nombre de la variable dependiente y los valores de la misma. En el X range (rango X) A1:A11 se encuentran el nombre de la variable independiente y los valores de la variable independiente. Como el primer renglón de los rangos X y Y llevan rótulos (labels), marque el cuadro de Labels. Marque la celda B15 como la esquina superior izquierda de Output Range (Rango de salida). No marque el cuadro de Residuals (Residuos). Si lo hiciera, obtendría el valor pronosticado y los residuos para cada observación. Los resultados de la regresión se presentan en la figura 15.

Examinemos qué significan los números importantes. (Se omite el análisis de las partes que son irrelevantes para nuestro estudio de la regresión).

R Square (R cuadrada) Es $r^2 = .939609$.

Multiple R (R múltiple) Es la raíz cuadrada de r^2, cuyo signo es el mismo que el de la pendiente de la recta de regresión.

Standard Error (Error estándar) Es $s_e = 87.82$.

Observations (Observaciones) Es la cantidad de puntos (10).

[†] Si no se muestra el Analysis Tool Pak (Análisis de datos) cuando selecciona Tools Data (Herramientas), vaya a Tools Add Ins (Complementos) y marque los cuadros de Analysis Tool Pak y Analysis Tool Pak Vba (Herramientas para análisis y Herramientas para análisis-VBA).

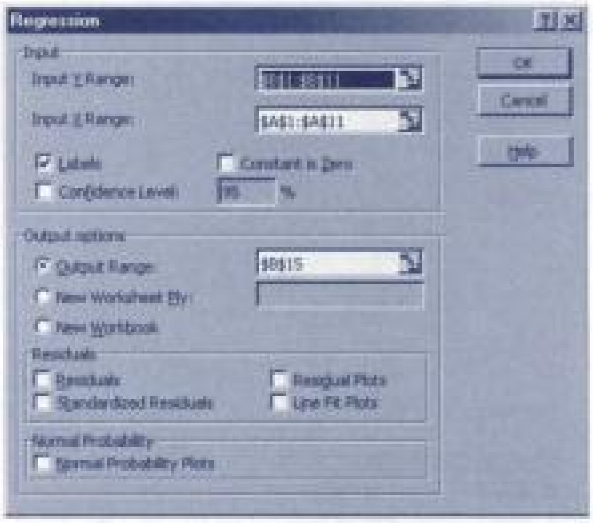


FIGURA 16

SS column (columna SS) La entrada de regresión (96 057.16) es SSR. La entrada del residuo (61 705.34) es SSE. La entrada del Total (1 021 762.5) es SST.

Coefficients column (columna de coeficientes) La entrada de la ordenada al origen (164.88) da el valor de $\hat{\beta}_0 = 164.88$, y la entrada de los trenes (17.86) da el valor de $\hat{\beta}_1 = 17.86$.

t stat (variable t) Proporciona la variable t observada (coeficiente/error estándar) para la ordenada al origen y la variable Trenes.

Standard Error column (columna del error estándar) La entrada de la ordenada al origen proporciona el error estándar $\hat{\beta}_0 = 72.74$, y la entrada de Trenes da el error estándar $\hat{\beta}_1 = 1.60$. El coeficiente dividido entre el error estándar es la variable t para la ordenada al origen o la pendiente (tabulada en la columna siguiente).

P-value (valor p) Para la ordenada al origen y la pendiente, éste da Probabilidad($|t_{n-2}| \geq$ |variable t observada|. Por ejemplo, si el valor p para los Trenes es menor que α, rechazamos H_0: $\beta_1 = 0$; si no es así, aceptamos $\beta_1 = 0$. Para $\alpha = .05$, rechazamos $\beta_1 = 0$. Para un valor de p de .05, no está muy definido si aceptamos o no la hipótesis $\beta_0 = 0$.

Se obtiene $\hat{y}_1$ en la celda C2 mediante la fórmula =D$14+A2*C$20. Determinamos e_1 en la celda D2 con la fórmula =B2−C2. Al copiar desde el intervalo C2:D2 a C2:D11 generamos pronósticos y errores para todas las observaciones.

Cómo obtener un diagrama de dispersión con Excel

Para generar un diagrama de dispersión, sea el rango X el intervalo donde está la variable independiente. Entonces, el intervalo donde está la variable dependiente es el rango Y. Luego marque X-Y (dispersión) en el cuadro que sale al seleccionar el icono de gráficas.

24.7 Ajuste de relaciones no lineales

Una gráfica de puntos de la forma (x_i, y_i) a menudo no es una función lineal de x. En estos casos, la gráfica podría indicar que hay una relación no lineal entre x y y. Por ejemplo,

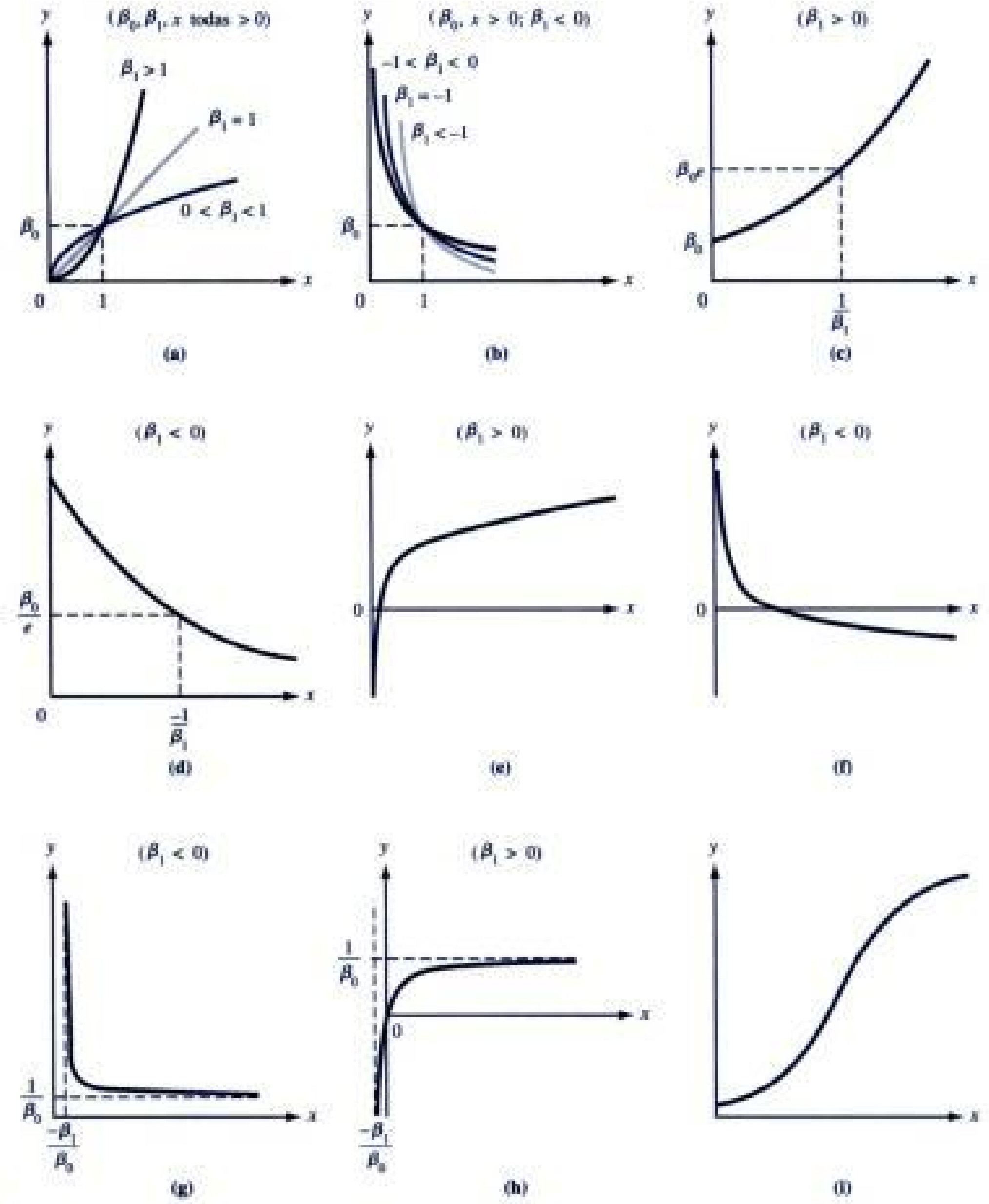


FIGURA 17
Gráficas de funciones linealizables†

†Reimpreso con autorización de C. Daniel y F. Wood, Fitting Functions to Data. Copyright 1980, John Wiley and Sons.

si el diagrama de (x_i, y_i) se ve como algunas de las partes (a) a (i) de la figura 17, entonces hay una relación no lineal entre x y y.

El procedimiento que sigue es uno de tantos que se puede usar para estimar una relación no lineal.

Paso 1 Localice los puntos y determine qué parte de la figura 17 se ajusta mejor a los datos. Supongamos, por ejemplo, que los datos se parecen a la parte (c).

Paso 2 La segunda columna de la tabla 13 proporciona la relación funcional entre x y y. Por lo que toca a la parte (c), podría ser $y = \beta_0 \exp(\beta_1 x)$.

Paso 3 Transforme cada punto dato de acuerdo con las reglas de la tercera columna de la tabla 13. Por lo tanto, si la parte (c) de la figura es relevante, transforme cada valor de y en $\ln y$ y cada valor de x en x. Dada la relación en la segunda columna de la tabla 13, los da-

TABLA 13
Modo de ajustar una relación no lineal

Si la gráfica se ve como una parte de la figura 17	Se tiene la relación funcional	Transforme (x_i, y_i) en	Estimación de la relación funcional
(a) o (b)	$y = \beta_0 x^{\beta_1}$	$(\ln x_i, \ln y_i)$	$\hat{y} = \exp(\hat{\beta} + s_e^2/2)x^{\hat{\beta}_1}$
(c) o (d)	$y = \beta_0 \exp(\beta_1 x)$	$(x_i, \ln y_i)$	$\hat{y} = \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + s_e^2/2)$
(e) o (f)	$y = \beta_0 + \beta_1(\ln x)$	$(\ln x_i, y_i)$	$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (\ln x)$
(g) o (h)	$y = \dfrac{x}{\beta_0 x + \beta_1}$	$\left(\dfrac{1}{x_i}, \dfrac{1}{y_i}\right)$	$\hat{y} = \dfrac{x}{\hat{\beta}_0 x + \hat{\beta}_1}$
(i)	$y = \exp\left(\beta_0 + \dfrac{\beta_1}{x}\right)$	$\left(\dfrac{1}{x_i}, \ln y_i\right)$	$\hat{y} = \exp(\hat{\beta}_0 + \dfrac{\hat{\beta}_1}{x} + s_e^2/2)$

tos transformados de la misma tabla deben, al graficarse, indicar una relación de línea recta. Para la parte (c), por ejemplo, si $y = \beta_0 \exp(\beta_1 x)$, entonces, al calcular los logaritmos naturales de ambos miembros se tiene $\ln y = \ln(\beta_0) + \beta_1 x$, de modo que en realidad sí existe una relación lineal entre x y $\ln y$.

Paso 4 Estime la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos transformados. Si $\hat{\beta}_0$ es la ordenada al origen de la recta de mínimos cuadrados (para los datos transformados), $\hat{\beta}_1$ es la pendiente de la recta de mínimos cuadrados (para los datos transformados) y s_e es el error estándar de la estimación de la regresión, entonces lea la relación estimada en la columna final de la tabla 13. Por lo tanto, si la parte (c) fuera relevante, estimaría que $\hat{y} = \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + s_e^2/2)$.

Para ejemplificar la idea, suponga que queremos predecir las ventas de videocaseteras en una tienda de enseres domésticos. Las ventas de los últimos 24 meses se proporcionan en la tabla 14 y se grafican en la figura 18 (donde cada punto indica las ventas reales). Usaremos x = número del mes como variable independiente. En la figura 18 se observa una relación en forma de "S" entre x = número del mes y y = ventas durante el mes (como la parte (i) de la figura 17). De modo que, según la tabla 13,

$$y = \exp\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x}\right)$$

Al recorrer la tercera columna de la tabla 13, estimamos la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(\frac{1}{1}, \ln 23)$, $(\frac{1}{2}, \ln 156)$, . . . , $(\frac{1}{24}, \ln 3495)$. Encontramos $\hat{\beta}_0 = 8.387$, $s_e = .276$ y $\hat{\beta}_1 = -5.788$. La relación estimada entre x y y la obtenemos de acuerdo con la última columna de la tabla 13:

$$\hat{y} = \exp\left(8.387 + .5(.276)^2 - \frac{5.788}{x}\right)$$
$$= \exp\left(8.425 - \frac{5.788}{x}\right)$$

Para ilustrar el uso de esta fórmula en la predicción de ventas, supongamos que queremos pronosticar las ventas de videocaseteras durante el mes 26. Para $x = 26$, podríamos pronosticar que se venderían

$$y = \exp\left(8.425 - \frac{5.788}{26}\right) = 3\,649.3 \text{ videocaseteras}$$

OBSERVACIONES **1** Para la regresión en los puntos $(\frac{1}{1}, \ln 23)$, $(\frac{1}{2}, \ln 156)$, . . . , $R^2 = 0.95$. Esto significa que 95% de la variación en $\ln y$ se explica por la variación en $\frac{1}{x}$. Infortunadamente, esto no nos dice nada respecto a qué tan precisas serán probablemente nuestras predicciones de las ventas reales (y). Para esto, calculamos las ventas pronosticadas para cada mes, y e_i = (ventas reales del mes i) − (ventas pronosticadas

TABLA 14
Ventas de videocaseteras

Mes	Venta de videocaseteras
1	23
2	156
3	330
4	482
5	1209
6	1756
7	2000
8	2512
9	2366
10	2942
11	2872
12	2937
13	3136
14	3241
15	3149
16	3524
17	3542
18	3312
19	3547
20	3376
21	3375
22	3403
23	3697
24	3495

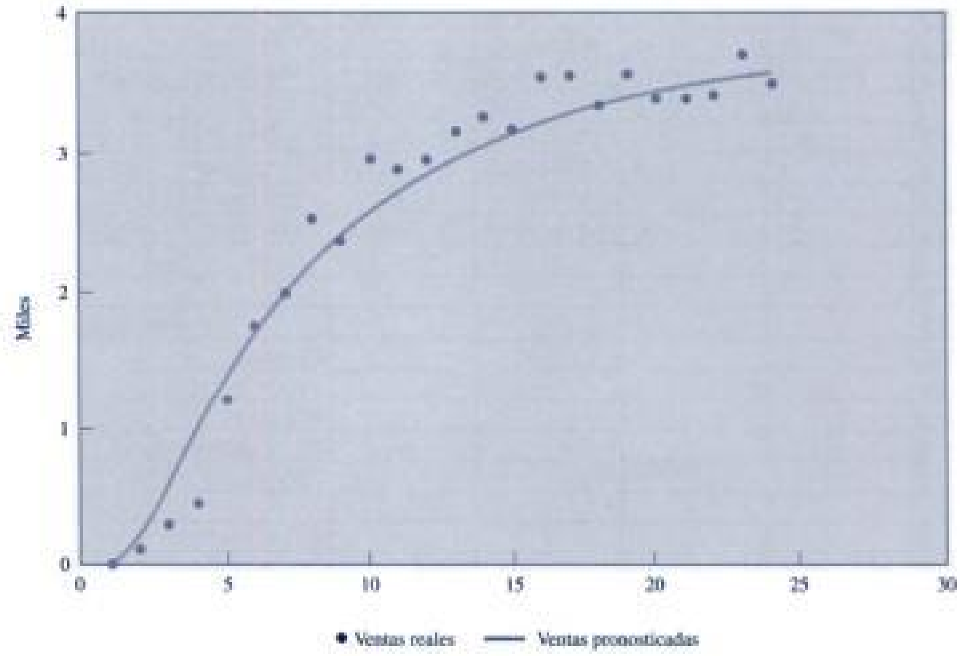


FIGURA 18
Ventas de videocaseteras

del mes i). Al promediar $|e_i|$ para los 24 meses, encontramos que el MAD de las predicciones es 170.3. Al aplicar la ecuación (17) estimaríamos que la desviación estándar de los pronósticos es 1.25(170.3) = 212.88. Por lo tanto, 95% de las veces esperaríamos que las predicciones de las ventas de videocaseteras fueran precisas dentro de 2(212.88) = 425.76 videocaseteras.

2 Si, en forma errónea, hubiéramos tratado de ajustar una recta a estos datos, habríamos obtenido s_e = 546, de modo que ajustar la curva en forma de "S" mejora en gran medida los pronósticos.

Uso de una hoja de cálculo para ajustar una relación no lineal

VCR.xls

En la figura 19 (archivo VCR.xls) se ilustra el modo de usar una hoja de cálculo para ajustar una curva a los datos en la tabla 14. Primero se introducen los datos en el intervalo de celdas A2:B26. Las variables transformadas 1/MONTH y LNSALES se generan en las co-

FIGURA 19

A	A	B	C	D	E	F	G	H
1		MAD=	170.2927		VCR	EXAMPLE		
2	MONTH	SALES	1/MONTH	LNSALES	PREDICT	ERROR	ABSERR	
3	1	23	1	3.1354942	13.969974	9.0300255	9.0300255	
4	2	156	0.5	5.049856	252.37307	-96.37307	96.373067	
5	3	330	0.3333333	5.7990927	662.20451	-332.2045	332.20451	
6	4	482	0.25	6.1779441	1072.6714	-590.6714	590.6714	
7	5	1209	0.2	7.0975489	1432.6874	-223.6874	223.6874	
8	6	1756	0.1666667	7.4707938	1737.5658	18.434166	18.434166	
9	7	2000	0.1428571	7.6009025	1994.303	5.6969922	5.6969922	
10	8	2512	0.125	7.8288345	2211.4573	300.54274	300.54274	
11	9	2366	0.1111111	7.768956	2396.5747	-30.57475	30.574747	
12	10	2942	0.1	7.9868449	2555.765	386.23499	386.23499	
13	11	2872	0.0909091	7.9627639	2693.8455	178.15445	178.15445	
14	12	2937	0.0833333	7.9851439	2814.5945	122.4055	122.4055	
15	13	3136	0.0769231	8.0507034	2920.9846	215.01543	215.01543	
16	14	3241	0.0714286	8.0836372	3015.3711	225.62887	225.62887	
17	15	3149	0.0666667	8.0548402	3099.6364	49.363637	49.363637	
18	16	3524	0.0625	8.167352	3175.2979	348.70211	348.70211	
19	17	3542	0.0588235	8.1724468	3243.5904	298.40965	298.40965	
20	18	3312	0.0555556	8.1053075	3305.5268	6.47315	6.47315	
21	19	3547	0.0526316	8.1738575	3361.9455	185.05446	185.05446	
22	20	3376	0.05	8.1244469	3413.5452	-37.54522	37.545218	
23	21	3375	0.047619	8.1241506	3460.9127	-85.91273	85.912726	
24	22	3403	0.0454545	8.1324127	3504.5442	-101.5442	101.54423	
25	23	3697	0.0434783	8.215277	3544.8619	152.13809	152.13809	
26	24	3495	0.0416667	8.1590887	3582.2271	-87.22711	87.227114	
27								
28								
29						Regression Output:		
30					Constant			8.3867886
31					Std Err of Y Est			0.2761082
32					R Squared			0.9527748
33					No. of Observations			24
34					Degrees of Freedom			22
35								
36					X Coefficient(s)		-5.787996	
37					Std Err of Coef.		0.2747317	
38								
39								
40								
41								

TABLA 15
Datos del mantenimiento del camión

y	x_1	x_2
\$832	6	8
\$733	7	7
\$647	9	6
\$553	11	5
\$467	13	4
\$373	15	3
\$283	17	2
\$189	18	1
\$96	19	0

TABLA 16
Resultados por computadora para el ejemplo 1

Variable	Constante	Error estándar de estimación	Valor t
Constante	17.73846	31.0271	0.57171
x_1	4.061538	1.56742	2.59123
x_2	98.50769	2.756428	35.73744

Error estándar de estimación = 2.106157

te año, y x_2 = antigüedad del camión (en años) a principios del año actual. Contamos con la información de la tabla 15.

Solución El resultado que proporciona la computadora se presenta en la tabla 16. Al recorrer la columna Coeficiente y redondear a dos cifras decimales, obtenemos $\hat{\beta}_0 = 17.74$, $\hat{\beta}_1 = 4.06$ y $\hat{\beta}_2 = 98.51$. Por lo tanto, pronosticaríamos un costo de mantenimiento anual para un camión a partir de

$$\hat{y} = 17.74 + 4.06x_1 + 98.51x_2 \tag{20}$$

En el caso de un vehículo de cinco años de antigüedad que recorrió 10 000 millas durante un año, pronosticaríamos costos de mantenimiento anual de 17.74 + 4.06(10) + 98.51(5) = \$550.89.

De acuerdo con la ecuación (20), concluimos que (conservando constante la edad del vehículo) recorrer unos miles de millas extra durante un año incrementa los costos de mantenimiento anual en $\hat{\beta}_1 = \$4.06$, y que un incremento de un año en la edad del vehículo (conservando constantes las millas recorridas) aumenta los costos de mantenimiento anual en $\hat{\beta}_2 = \$98.51$.

Bondad de ajuste revisado

Por lo que se refiere a la regresión múltiple, SSR, SSE y SST se definen en la sección 24.6. También encontramos que $R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}}$ = porcentaje de variación en y explicado por las k variables independientes y $1 - R^2$ = porcentaje de variación en y no explicada por las k variables independientes. Si definimos el error estándar de la estimación como

$$s_e = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{(n - k - 1)}}$$

entonces (como en la sección 24.6) contamos con que aproximadamente 68% de los valores y estén dentro de s_e de $\hat{y}$ y alrededor de 95% de los valores y estén dentro de $2s_e$ de $\hat{y}$. Ya se vio en la tabla 16 que $s_e = 2.106$. Por lo tanto, 95% del tiempo esperamos que los pronósticos de los gastos al año de mantenimiento del camión sean precisos dentro de 4.21 dólares.

Prueba de hipótesis

Si hemos incluido las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ en una regresión múltiple, queremos probar a menudo

H_0: $\beta_i = 0$ (x_i no tiene un efecto significativo sobre y cuando las otras variables independientes están incluidos en la ecuación de regresión)

contra

H_a: $\beta_i \neq 0$ (x_i no tiene un efecto significativo sobre y cuando las otras variables independientes están comprendidas en la ecuación de regresión)

Para probar estas hipótesis, estimamos

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{\mathrm{EE}(\hat{\beta}_i)}$$

donde $\mathrm{EE}(\hat{\beta}_i)$ mide la cantidad de incertidumbre presente en la estimación de β_i. $\mathrm{EE}(\hat{\beta}_i)$ (y con frecuencia la variable t) se toma de los resultados de la computadora. Como un nivel de significancia α, rechazamos H_0 si $|t| > t_{(\alpha/2, n-k-1)}$. De acuerdo con la tabla 16, encontramos que (t para x_1) = 2.59 y (t para x_2) = 35.74. Suponga que $\alpha = 0.05$. Puesto que $t_{(.025, 9-2-1)} = 2.447$, rechazamos H_0 para cada variable independiente, y concluimos que tanto como las millas recorridas como la edad del vehículo tienen un importante efecto en el costo de mantenimiento anual.

Por lo regular, las variables incluidas en una ecuación de regresión deben tener estadísticas t significativas. ($\alpha = 0.10$ o $\alpha = 0.05$ son niveles que se usan habitualmente en el análisis de regresión). Si una variable independiente tiene una t no significativa, eliminamos por lo general la variable independiente de la ecuación, y obtenemos nuevas estimaciones de mínimos cuadrados. Con el fin de ilustrar este concepto, suponga que contamos con los datos de la tabla 17 sobre ventas del restaurante Bloomington Happy Chicken durante los últimos 20 años (archivo Chicken.xls). (POP = población dentro de 10 millas del restaurante Happy Chicken, AD = miles de dólares gastados en publicidad durante el año actual, LAGAD = miles de dólares gastados en publicidad durante el año anterior y SALES = ventas en miles de dólares).

Chicken.xls

Pretendemos estimar el modelo

$$\text{SALES} = \beta_0 + \beta_1\text{YEAR} + \beta_2\text{POP} + \beta_3\text{AD} + \beta_4\text{LAGAD} + \varepsilon$$

Usamos YEAR como una variable independiente con la esperanza de mejorar una posible tendencia ascendente en las ventas. LAGAD se utiliza como variable independiente porque opinamos que la publicidad del año anterior podría afectar las ventas del presente año. Obtenemos la siguiente ecuación de regresión estimada (la estadística t para cada variable independiente está entre paréntesis):

$$\widehat{\text{SALES}} = 10\,951.51 + \underset{(1.91)}{169.51\,\text{YEAR}} - \underset{(-.70)}{.059\,\text{POP}} + \underset{(13.84)}{122.38\,\text{AD}} + \underset{(28.92)}{276.93\,\text{LAGAD}} \qquad (21)$$

No podemos usar datos del primer año, porque LAGAD está indefinida. Como $t_{(.05, 19-4-1)} = 1.761$, entonces todas las variables independientes excepto POP son significativas para $\alpha = 0.10$. Por lo tanto, YEAR, AD y LAGAD tienen, al parecer, un efecto

TABLA 17
Datos de las ventas de Happy Chicken

Year	POP	AD	LAGAD	Sales
1	96 020	30	—	13 000
2	102 558	20	30	15 713
3	101 792	15	20	12 937
4	104 347	25	15	12 872
5	106 180	30	25	16 227
6	106 562	15	30	15 388
7	105 209	25	15	13 180
8	109 185	35	25	17 199
9	109 976	40	35	20 674
10	110 659	20	40	20 350
11	111 844	25	20	14 444
12	111 576	35	25	17 530
13	113 784	5	35	16 711
14	112 482	12	5	19 715
15	116 487	16	12	12 248
16	117 316	21	16	13 856
17	117 830	22	21	15 285
18	118 148	24	22	15 620
19	118 481	26	24	17 158
20	121 069	28	26	17 800

importante en las ventas. Después de eliminar la variable no significativa POP de la ecuación, obtenemos la ecuación de regresión estimada siguiente:

$$\widehat{\text{SALES}} = 5150.94 + \underset{(8.29)}{108.58\,\text{YEAR}} + \underset{(14.10)}{121.59\,\text{AD}} + \underset{(31.72)}{274.30\,\text{LAGAD}}$$

Todas las variables independientes son significativas. Asimismo, encontramos que $R^2 = 0.99$ y $s_e = 309$. Por lo tanto, estamos razonablemente satisfechos con esta ecuación y esperamos que 95% del tiempo, nuestros pronósticos de las ventas estén dentro de 618 000 dólares de las ventas reales.

Elección de la mejor ecuación de regresión

¿De qué modo podemos escoger entre varias ecuaciones de regresión que tienen diferentes conjuntos de variables independientes? Queremos escoger, por lo regular, la ecuación con el valor mínimo de s_e, ya que proporcionará los pronósticos más exactos. Asimismo, queremos que la t sea significativa para todas las variables de la ecuación. Estos dos objetivos podrían entrar en conflicto, en cuyo caso es difícil determinar cuál es la "mejor" ecuación. Si se cuenta con los resultados obtenidos mediante computadora, y éstos contienen la estadística C_p, entonces la regresión elegida debe tener un valor C_p cercano a (número de variables independientes en la ecuación) + 1. Por ejemplo, si una regresión con tres variables independientes tiene $C_p = 80$, entonces podemos estar seguros de que no es una "buena" regresión. En realidad, si C_p de una regresión es mucho más grande que p, esto significa que ha sido omitida por lo menos una variable importante en la regresión. (Véase un análisis acerca de C_p en Daniel y Wood (1980)).

TABLA 18
Clientes en la unión de crédito de la universidad

Número del día	Día de la semana	¿Día de pago de la universidad?	Clientes que llegan a la unión de crédito
1	Lunes	No	515
12	Martes	No	360
18	Miércoles	Sí	548
23	Miércoles	No	386
24	Jueves	No	440
46	Lunes	Sí	687
48	Miércoles	No	350
52	Martes	No	430
54	Jueves	No	370
55	Viernes	No	496
70	Viernes	No	506
81	Lunes	No	509
89	Jueves	Sí	508
104	Jueves	No	396
106	Lunes	No	600
108	Miércoles	No	266
122	Martes	No	360
130	Viernes	Sí	521
152	Martes	No	398

Ahora incluimos $x_1, x_2, \ldots, x_{c-1}$ (junto con otras variables independientes pertinentes) en la ecuación estimada de regresión.

Para ilustrar el uso de las variables ficticias, suponga que pretendemos pronosticar el número de clientes que entran todos los días a la unión de crédito de la universidad. El gerente del banco opina que el tráfico en el banco depende del día de la semana (la unión de crédito está abierta de lunes a viernes) y de si es día de pago para los empleados de una universidad. Contamos con el número de personas que entran al banco durante 18 días elegidos al azar. (El día 1 es el día actual, el día 6 es dentro de una semana, y así sucesivamente). La información pertinente es encuentra en la tabla 18.

En esta situación, hay dos variables categóricas que interesan: el día de la semana ($c = 5$) y si es día de pago o no ($c = 2$). En cuanto al día de la semana definimos como valor 1 = lunes, valor 2 = martes, valor 3 = miércoles, valor 4 = jueves y valor 5 = viernes. Entonces, hacemos

$x_1 = 1$	Si el día es un lunes	$x_1 = 0$	Si no es así
$x_2 = 1$	Si el día es un martes	$x_2 = 0$	Si no es así
$x_3 = 1$	Si el día es un miércoles	$x_3 = 0$	Si no es así
$x_4 = 1$	Si el día es un jueves	$x_4 = 0$	Si no es así

Por lo que se refiere a si es día de pago o no, definimos $c - 1 = 1$ variables ficticias. Si hacemos que valor 1 = día de pago y valor 2 = no es día de pago, definimos

$x_5 = 1$ Si el día es día de pago $x_5 = 0$ Si no es así

Para explicar una posible tendencia en la cantidad de clientes incluimos T = número del día como una variable independiente. Para ilustrar cómo codificar esta información en la computadora, "codificamos" las dos últimas observaciones:

TABLA 19
Datos de las sucursales de la compañía de seguros

Sucursal	Costo de operación anual	Número de pólizas de seguros para casas	Número de pólizas de seguros para automóviles
1	\$124 000	400	1 200
2	\$71 000	350	360
3	\$136 000	600	800
4	\$219 000	800	1 800
5	\$230 000	900	1 600
6	\$75 000	200	1 000
7	\$56 000	120	900
8	\$110 000	340	1 100
9	\$120 000	490	900
10	\$144 000	700	800

Branch.xls

pañía de seguros dependen del número de pólizas de seguros a casas y automóviles que se han logrado. En la tabla 19 se proporciona la información pertinente para diez sucursales de la compañía de seguros (archivo Branch.xls).

Para establecer el modelo $Y = \beta_0 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$, donde Y = costo de operación anual, x_1 = pólizas de seguros para casa y x_2 = pólizas para asegurar automóviles, introduciríamos a la computadora los puntos de la forma (ln 124 000, ln 400, ln 1200) y así sucesivamente. Las estimaciones de mínimos cuadrados obtenidas son

$$\text{Estimación del término constante} = 5.339$$
$$\text{Estimación para } \beta_1 = 0.583$$
$$\text{Estimación para } \beta_2 = 0.409$$

Esta regresión genera una R^2 de 0.998, lo cual indica un muy buen ajuste. La estimación del término constante es una estimación de ln β_0, de modo que la estimación real de β_0 es $e^{5.339} = 208.3$, y estimamos que $Y = 208.3x_1^{0.583}x_2^{0.409}$. Para ilustrar el uso de esta ecuación, pronosticamos el costo de operación anual para una sucursal de la aseguradora redactando 500 pólizas para casa y 1200 pólizas para automóviles. Para esta sucursal obtenemos $Y = 208.3(500)^{0.583}(1200)^{0.409} = \$141\ 767$.

Heterocedasticidad y autocorrelación en la regresión múltiple

Cuando de grafican los errores en sucesiones de series de tiempo se podría verificar (según se explica en la sección 24.6) si los errores en una regresión múltiple son independientes. Si está presente la autocorrelación y los errores al parecer no son independientes, entonces la corrección por autocorrelación generará mejores pronósticos.

Al graficar los errores (en el eje de las y) contra el valor pronosticado de y (en el eje de las x) es posible determinar si está presente la homocedasticidad o la heterocedasticidad. Si la que existe es la homocedasticidad, entonces, la gráfica no debe mostrar un patrón obvio (es decir, la gráfica debe ser similar a la de la figura 10), en tanto que si la que está presente es la heterocedasticidad, se debe observar, en la gráfica, un patrón obvio que indica que los errores dependen, por alguna razón, del valor pronosticado de y (quizá como en la figura 11). Si existe heterocedasticidad, las pruebas t explicadas en esta sección no son válidas.

Organización de la regresión múltiple en una hoja de cálculo

Credit.xls

En las figuras 22 y 23 (archivo Credit.xls) se muestra la regresión ejecutada con los datos de la tabla 18. Se introduce la cuenta de clientes de cada día en el intervalo A3:A21, y el número del día en las celdas B3:B21. En las celdas H3:H21 se escribe el día de la semana para cada observación (1 = Monday (lunes), . . . , 5 = Friday (viernes). Una variable ficticia en las celdas G3:G21 indica si es día de pago o no. Luego se utiliza el enunciado =IF para generar las variables ficticias para el día de la semana. La fórmula =IF(H3=1,1,0) se escribe en la celda C3. De esta manera se coloca un 1 en C3, lo cual señala que la primera observación es en Monday (lunes). En la celda D3 se escribe la fórmula =IF(H3=2,1,0); en la celda E3, =IF(H3=3,1,0) y en la celda F3, =IF(H3=4,1,0). Al copiar del intervalo C3:F3 hasta C3:F21 se generan los valores de las variables ficticias de todas las observaciones. Para ejecutar la regresión, seleccione el rango Y de A2:A21 y el rango X de B2:G21. La regresión se podría interpretar de la manera siguiente:

Ordenada al origen Es $\hat{\beta}_0 = 496.0857$.

Error estándar Es $s_e = 48.84517$.

R cuadrado Es $R^2 = .845927$. Esto quiere decir que juntas, todas las variables independientes en la regresión, explican 84.6% de la variación en la cantidad de clientes que llega cada día.

Observaciones Es la cantidad de puntos datos (19).

GL totales Son los grados de libertad ($n - k - 1 = 19 - 6 - 1$) usados para la prueba t de H_0: $\beta_i = 0$ contra H_1: $\beta \neq 0$.

Coeficientes Esta columna proporciona el coeficiente de las variables independientes que se encuentren en la ecuación de mínimos cuadrados. Por ejemplo, $\hat{\beta}_T = -0.36222$.

Error estándar Este renglón da EE $\hat{\beta}_i$, para cada variable independiente. Por ejemplo, EE $\hat{\beta}_T = 0.279852$. El coeficiente X dividido entre el error estándar del coeficiente da el valor de t para probar H_0: $\beta_i = 0$ contra H_1: $\beta_i \neq 0$.

Valor de *t* Esto da el valor de la estadística t observada (coeficiente/error estándar) para la ordenada al origen y todas las variables independientes. Por ejemplo, t para lunes es 1.87.

Columna del error estándar La ordenada al origen da el error estándar $\hat{\beta}_0 = 37.66$, y los datos de los coeficientes proporcionan el error estándar para cada una de las variables independientes. Por ejemplo, error estándar $\hat{\beta}_{\text{Monday}} = 38.07$. La entrada del coeficiente

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		CREDIT	UNION	EXAMPLE				
2	CUSTOMEI	DAY#	MON	TUES	WED	THUR	PAYDAY?	DAYWK
3	515	1	1	0	0	0	0	1
4	360	12	0	1	0	0	0	2
5	548	18	0	0	1	0	1	3
6	386	23	0	0	1	0	0	3
7	440	24	0	0	0	1	0	4
8	687	46	1	0	0	0	1	1
9	350	48	0	0	1	0	0	3
10	430	52	0	1	0	0	0	2
11	370	54	0	0	0	1	0	4
12	496	55	0	0	0	0	0	5
13	506	70	0	0	0	0	0	5
14	509	81	1	0	0	0	0	1
15	508	89	0	0	0	1	1	4
16	396	104	0	0	0	1	0	4
17	600	106	1	0	0	0	0	1
18	266	108	0	0	1	0	0	3
19	360	122	0	1	0	0	0	2
20	521	130	0	0	0	0	1	5
21	398	152	0	1	0	0	0	2

FIGURA 22
Ejemplo de la unión de crédito

Suavizamiento exponencial simple

$$A_t = \text{promedio suavizado al final del periodo } t$$
$$= f_{t,k} = \text{pronóstico para el periodo } t + k \text{ efectuado al final del periodo } t$$
$$A_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)A_{t-1}$$

Elija α que minimice a MAD.

Método de Holt

El método de Holt se utiliza cuando hay una tendencia presente, pero no estacionalidad.

$$L_t = \text{estimación de la base al final del periodo } t$$
$$T_t = \text{estimación de la tendencia por periodo al final del periodo } t$$
$$L_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$
$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$
$$f_{t,k} = L_t + kT_t$$

Método de Winter

Este método se aplica cuando opinamos que tanto tendencia como estacionalidad podrían estar presentes.

$$s_t = \text{estimación para el factor estacional del mes } t$$
$$L_t = \frac{\alpha x_t}{s_{t-c}} + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$
$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}$$
$$s_t = \frac{\gamma x_t}{L_t} + (1 - \gamma)s_{t-c}$$
$$f_{t,k} = (L_t + kT_t)s_{t+k-c}$$

Por lo que se refiere a todos los métodos de extrapolación, contamos con que 68% de nuestros pronósticos estará dentro de $s_e = 1.25$ MAD del valor real, y 95% de los pronósticos estarán dentro de $2s_e$ del valor real.

Regresión lineal simple

Dados los puntos dato $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, estimamos una relación lineal entre x y y mediante $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$, donde

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}$$

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = \text{porcentaje de variación en } y \text{ explicado por } x$$

r_{xy} = correlación lineal de la muestra entre x y y
(r_{xy} indica la fuerza de la relación lineal entre x y y)

$$s_e = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n - 2}}$$

Esperamos que 68% de los pronósticos estén dentro de s_e del valor real y 95% de las predicciones, dentro de $2s_e$ del valor real.

Una estadística t que sea mayor que $t_{(\alpha/2,n-2)}$ en valor absoluto es prueba (en el nivel de significancia α) que hay una relación lineal significativa entre x y y.

Ajuste de una relación no lineal

Paso 1 Grafique los puntos y determine qué parte de la figura 17 se ajusta mejor a los datos.

Paso 2 La segunda columna de la tabla 13 representa la relación funcional entre x y y.

Paso 3 Transforme cada punto dato de acuerdo con las reglas de la tercera columna de la tabla 13.

Paso 4 Estime la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos transformados. Si $\hat{\beta}_0$ es la ordenada al origen de la recta de mínimos cuadrados (para los datos transformados), y $\hat{\beta}_1$ es la pendiente de la recta de mínimos cuadrados (para los datos transformados), entonces obtenga la relación estimada de la columna final de la tabla 13.

Regresión múltiple

Se utiliza cuando se requiere más de una variable independiente para predecir y.

$$R^2 = \text{porcentaje de variación en } y \text{ explicado por las variables independientes}$$

Rechace H_0: $\beta_i = 0$ en el nivel de significancia α si (t para x_i) $\geq t_{(\alpha/2,n-k-1)}$, donde k es el número de variables independientes que se utilizan para predecir y.

Si hay una fuerte relación lineal entre dos o más variables independientes, entonces $\hat{\beta}_i$ podría ser una estimación poco confiable para β_i. En estos casos, decimos que existe **multicolinealidad**.

Si se cree que una variable independiente no cuantitativa (cualitativa), como el día de la semana o el mes del año, influye en una variable dependiente, se podrían usar variables ficticias para modelar el efecto de la variable independiente cualitativa sobre la variable dependiente. Si la variable cualitativa es capaz de asumir c valores, utilice sólo $c - 1$ variables ficticias.

PROBLEMAS DE REPASO

Grupo A

1 La información de la tabla 25 se relaciona con las ventas de cerdos (archivo Pork.xls). El precio está en dólares por cada cien libras vendidas, la cantidad vendida está en miles de millones de dólares, el ingreso per cápita está en dólares, la población estadounidense está en millones y el Producto Interno Bruto está en miles de millones de dólares.

a Utilice estos datos para desarrollar una ecuación de regresión que se pueda usar para pronosticar la cantidad de cerdos vendida en periodos futuros. ¿Es un problema la autocorrelación, heterocedasticidad o la multicolinealidad?

b Suponga que durante cada uno de los dos trimestres siguientes, precio = 45 dólares, población de E.U. = 240, PIB = 2620 e ingreso per cápita = 10 000 dólares. Pronostique la cantidad de cerdos vendidos durante cada uno de los dos trimestres próximos.

c Contamos con que 68% de las veces nuestras predicciones de las ventas de cerdo sean exactas dentro de ____________.

d Mediante el método de Winter, desarrolle un pronóstico para las ventas de cerdo durante los dos trimestres siguientes. (Use los dos primeros años para empezar.)

2 Vamos a pronosticar las ventas para una cadena de moteles de acuerdo con la información de la tabla 26 (archivo Motel.xls).

a Utilice esta información y la regresión múltiple para predecir las ventas de la cadena de moteles durante los cuatro trimestres siguientes. Suponga que la publicidad durante cada uno de los cuatro trimestres siguientes, es de 50 000 dólares.

TABLA 31

Mes	Ventas	Precio
1	400	5
2	1042	4
3	1129	8
4	1110	6
5	1336	6
6	1363	10
7	1177	9
8	603	8
9	582	12
10	697	9
11	586	8
12	673	9
13	546	10
14	334	11
15	27	8
16	76	9
17	298	10
18	746	6
19	962	7
20	907	8

9 El PIB de E.U., durante los años 1975 a 1984, se proporciona en la tabla 32 en miles de millones de dólares (archivo GNP.xls).

a Grafique x = años después de 1974 contra el PIB, y utilice la gráfica para explicar cómo ajustar una curva que se pueda usar para predecir el PIB durante los años venideros.

b Cuando la regresión sobre los datos transformados se ejecuta, encontramos que $\hat{\beta}_0 = 6.86$ y $\hat{\beta}_1 = 0.105$. ¿Cuál es la predicción para el PIB de 1985?

TABLA 32

Año	PIB
1975	1060
1976	1170
1977	1305
1978	1455
1979	1630
1980	1800
1981	2000
1982	2220
1983	2450
1984	2730

Grupo B

10 Suponga que la verdadera relación entre Y y el tiempo t está dada por

$$Y = \beta_0 e^{\beta_1 t} + \varepsilon$$

donde $\beta_1 > 0$. Si tratamos de ajustar nuestro modelo lineal $Y = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon$ a los datos, ¿será probable que encontremos autocorrelación? ¿Y heterocedasticidad? ¿Y multicolinealidad?

BIBLIOGRAFÍA

Para mayor información sobre los métodos de extrapolación, se recomienda:

Hax, A. y D. Candea. *Production and Inventory Management.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1984.

Makridakis, S. y S. Wheelwright. *Forecasting: Methods and Applications.* Nueva York: Wiley, 1986.

Si desea mayor información sobre regresión, refiérase a:

Chatterjee, S. y B. Price. *Regression Analysis by Example.* Nueva York: Wiley, 1990.

Daniel, C. y F. Wood. *Fitting Equations to Data.* Nueva York: Wiley, 1980.

Montgomery, D. y E. Peck. *Introduction to Linear Regression Analysis.* Nueva York: Wiley, 1991.

Pindyck, R. y D. Rubinfeld. *Econometric Models and Economic Forecasts.* Nueva York: McGraw-Hill, 1989.

Etiqueta Macro

Véase la figura 4. La etiqueta Macro permite a @Risk ejecutar un macro antes o después de cada iteración de una simulación. Por ejemplo, si se marca After Each Iteration's Recalc y se introduce Macro 1 después de evaluar cada celda de salida daría como resultado la siguiente secuencia de sucesos:

- Calcular las funciones de @Risk y calcular las celdas de salida.
- Ejecutar Macro 1.
- Calcular las funciones de @Risk y calcular las celdas de salida, etcétera.

Select Output Cells (Seleccionar las celdas de salida)

Este icono le permite seleccionar una celda de salida o celdas para las que @Risk creará estadísticas. Simplemente seleccione un intervalo de celdas y dé clic en el icono para seleccionar el intervalo de las celdas de salida. Se podrían seleccionar tantos intervalos como se desee.

List Input and Output Cells (Listar las celdas de entrada y salida)

Este icono lista todas las celdas de salida. También lista las celdas que contienen funciones de @Risk. Estas se llaman celdas de entrada. De esta lista, se pueden cambiar los nombres de las celdas de salida o borrar las celdas de salida.

Run Simulation (Ejecutar la simulación)

Este icono inicia la simulación. El *status* de la simulación se muestra en la esquina inferior izquierda de la pantalla. Pulsar la tecla Escape le permite terminar la simulación.

Show Results (Mostrar resultados)

Este icono le permite ver los resultados. Hay dos ventanas:

- Summary Results, que contiene las celdas Minimun, Mean y Máximum para las celdas de entrada y salida.
- Simulation Statistics, que contiene estadísticas más detalladas.

Al pulsar el icono Hide le enviará de regreso a su hoja de trabajo. Para pegar sus estadísticas en su hoja de trabajo, simplemente seleccione una ventana y Edit Copy Paste en la hoja de trabajo.

Icono Define Distribution

Este icono le permite ver la función de masa o función de densidad para cualquier variable aleatoria. Se podría usar directamente este icono para introducir cualquier fórmula de @Risk en una celda.

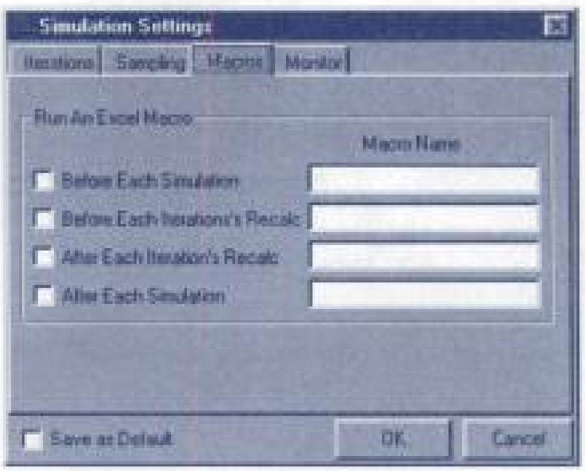


FIGURA 4

FIGURA 7
Gráfica descendente acumulada

Targets

En la parte inferior de la ventana Simulation Statistics está la opción Target. Se puede introducir un Valor o Percentil y @Risk llena el que queda libre. Para

=RISKNORMAL(100,15)

se obtienen los siguientes resultados:

```
Target #1 (Value)=        85
Target #1 (Perc%)=        15.87%
Target #2 (Value)=        130
Target #2 (Perc%)=        97.75%
Target #3 (Value)=        114.9159
Target #3 (Perc%)=        84%
```

- Se introdujo Target#1(Value) de 85 y @Risk reportó que la celda fue ≤ 85 15.87% de las veces.
- Se introdujo Target#2(Value) de 130 y @Risk informó que la celda fue ≤ 130 97.75% del tiempo.
- Se introdujo Target#3(Perc%) de 84% y @Risk reportó que 84% del tiempo, la celda fue ≤ 114.92.

Extracción de datos

Algunas veces es posible que se desee ver los valores de las funciones de @Risk y las celdas de salida que @Risk creó en la ejecución de las iteraciones. En caso afirmativo, seleccione Collect Distribution Samples en Simulation Settings y luego dé clic en Data en la ventana Results. Entonces se puede Editar Copiar y Pegar los datos en la hoja de cálculo y someterlos a análisis posterior.

Sensibilidad

Si se quiere una gráfica de tornado, dé clic con el botón derecho del ratón en la celda de salida y seleccione Tornado Graph. Esto también requiere que seleccione Collect Distribution Samples. Se puede elegir una gráfica de Correlación o Regresión. Las gráficas de tornado le permiten saber cuáles celdas de entrada tienen la influencia más grande en su celda o celdas de salida.

Funciones de @Risk

Ahora se ilustran algunas de las funciones más útiles de @Risk.

Función RISKFDISCRETE

Esta genera una variable aleatoria discreta que toma un número finito de valores con probabilidades conocidas. Véase la figura 8. Primero, introduzca los valores posibles de la

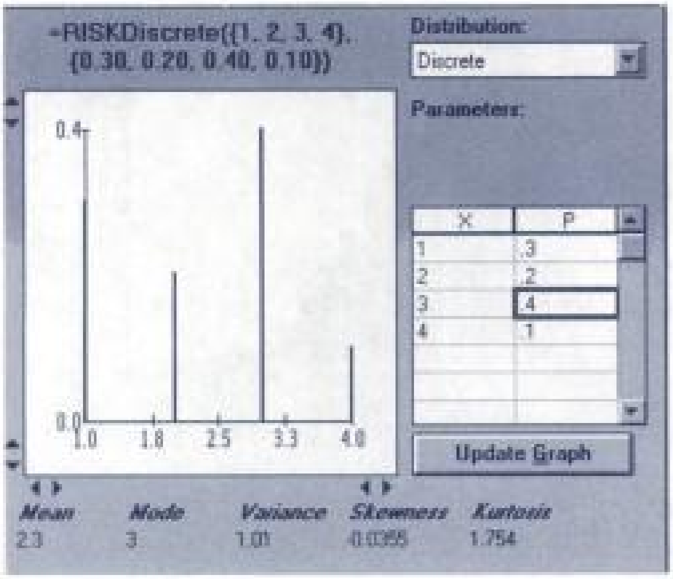


FIGURA 8

variable aleatoria y luego la probabilidad para cada valor. Así, =RISKDISCRETE({1,2,3,4},{.3,.2,.4,.1}) generaría 1 30% del tiempo, 2 20% del tiempo, 3 40% del tiempo y 4 10% del tiempo.

Si se introdujeran los valores y las probabilidades en A2:B5, se podría haber introducido esta variable aleatoria con la fórmula

=RISKDISCRETE(A2:A5, B2:B5)

Función RISKSIMTABLE

Suponga que se introduce

=RISKSIMTABLE({100,150,200,250,300})

en la celda A5 y #Iterations es 100. Si se cambia #Simulations a 5, entonces en la primera simulación, se ejecutan 100 iteraciones con 100 en la celda A5. En la segunda simulación, se ejecutan 100 iteraciones con 150 en la celda A5. Por último, en la quinta simulación, se ejecutan 100 iteraciones con 300 en la celda A5. Si los cinco argumentos para la función =RISKSIMTABLE estuvieran en B1:B5, se podría haber introducido la función =RISKSIMTABLE como

=RISKSIMTABLE(B1:B5)

Función RISKDUNIFORM

Véase la figura 9. Se utiliza la función RISKDUNIFORM cuando una variable aleatoria asume varios valores igualmente probables. Así,

=RISKDUNIFORM({1,2,3,4})

tiene las mismas probabilidades de generar 1, 2, 3 o 4. Si se introdujeran los valores 1, 2, 3, 4 en A1:A4, entonces se podría haber escrito

=RISKDUNIFORM(A1:A4)

Función RISKBINOMIAL

Véase la figura 10. Utilice la función =RISKBINOMIAL cuando se tengan ensayos independientes repetidos, cada uno con la misma probabilidad de éxito. Por ejemplo, si hay 5 competidores que podrían introducir una industria este año, cada competidor tie-

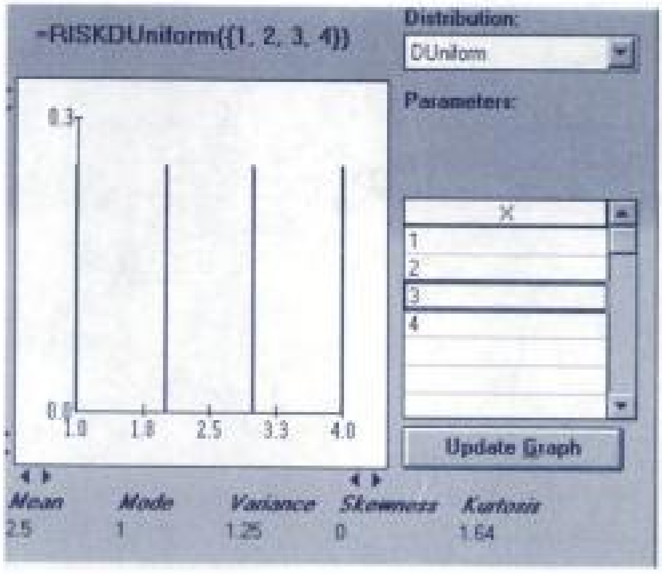


FIGURA 9

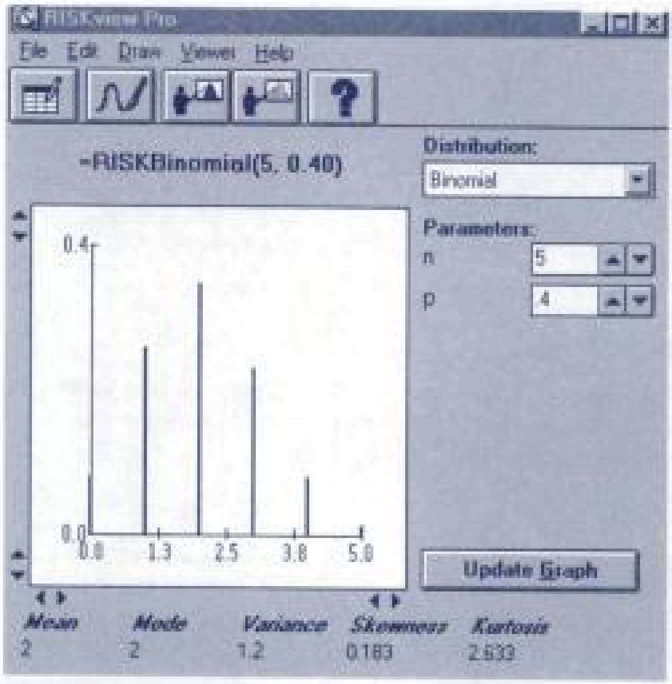


FIGURA 10

ne una probabilidad de 40% de entrar, y si los competidores son independientes, entonces esta situación se podría modelar con la fórmula

=RISKBINOMIAL(5,.4)

Función RISKNORMAL

Véase la figura 11. Use esta función para modelar una variable aleatoria simétrica, continua (o de forma de campana). La fórmula

=RISKNORMAL(100,15)

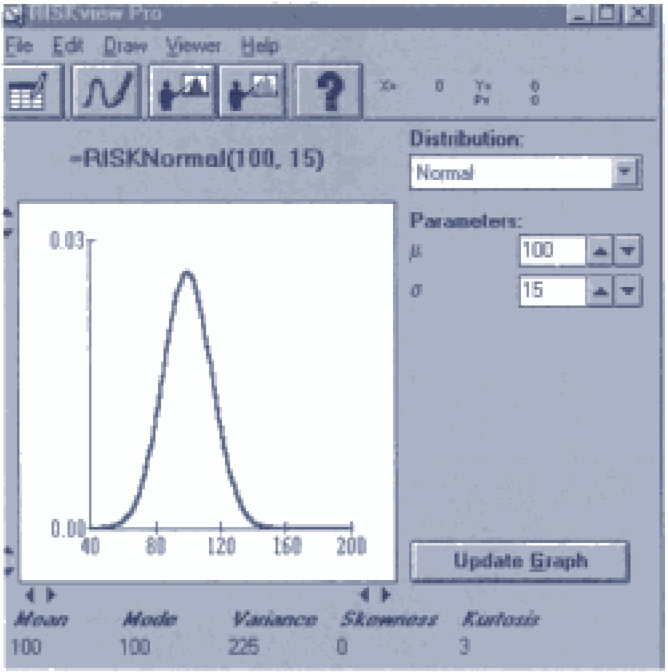


FIGURA 11

producirá

- un valor entre 85 y 115 68% del tiempo
- un valor entre 70 y 130 95% del tiempo
- un valor entre 55 y 145 99.7% del tiempo

Función RISKTRIANG

Véase la figura 12. Esta función permite modelar una variable aleatoria continua no simétrica. Ésta generaliza la idea bien conocida de los escenarios del mejor caso, peor caso y el caso más probable. Por ejemplo,

=RISKTRIANG(.2,.4,.8)

se podría usar para modelar la participación en el mercado si se considera que la participación en el mercado del peor caso fue 20%, la del caso más probable 40% y la del mejor caso 80%. Observe que la probabilidad de que la participación en el mercado esté entre 30% y 40% sería el área bajo este triángulo entre .3 y .4. El triángulo completo tiene un área de 1. Este hecho determina la altura del triángulo.

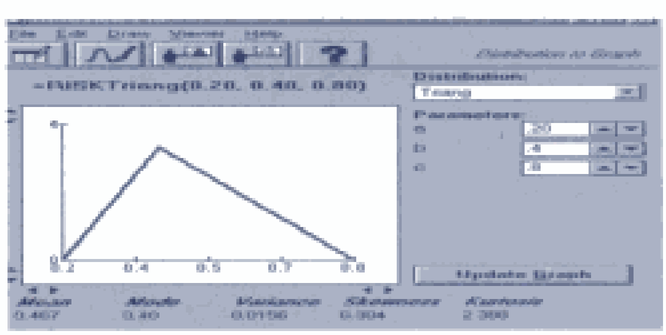


FIGURA 12

Función RISKTRIANG

Véase la figura 13. Algunas veces se quiere usar una variable aleatoria triangular, pero no se está seguro de las posibilidades absolutas mejor y peor. Se podría creer que hay una probabilidad de 10% de que la participación en el mercado será menor o igual que 30%, que la participación más probable es 40% y que hay una probabilidad de 10% de que la participación exceda 75%. En esta situación se usa la fórmula RISKTRIGEN. La fórmula

=RISKTRIGEN(.3,.4,.75,10,90)

sería apropiada para esta situación. Entonces @Risk traza un triángulo que produce

- Una probabilidad de 10% de que la participación en el mercado sea menor que o igual a 30%. Esto requiere que la peor posible participación en el mercado sea de alrededor de 20%.
- Una participación en el mercado más probable de 40%.
- Una probabilidad de 10% de que la participación en el mercado sea mayor que o igual a 75%. Esto requiere que la mejor posible participación en el mercado sea de alrededor de 95%.

De nuevo, la probabilidad de una participación en el mercado entre 20% y 50% es el área bajo el triángulo entre 20% y 50%.

Función RISKUNIFORM

Véase la figura 14. Suponga que la oferta de un competidor tiene las mismas probabilidades de estar entre 10 y 30 mil dólares. Esto se puede modelar mediante una variable aleatoria uniforme con la fórmula

=RISKUNIFORM(10,30)

De nuevo, esta función hace que cualquier oferta entre 10 y 30 mil dólares tenga las mismas probabilidades. La probabilidad de una oferta entre 15 y 28 mil sería el área del rectángulo limitada por $x = 15$ y $x = 28$. Esto sería igual a $(28 - 15)(.05) = .65$.

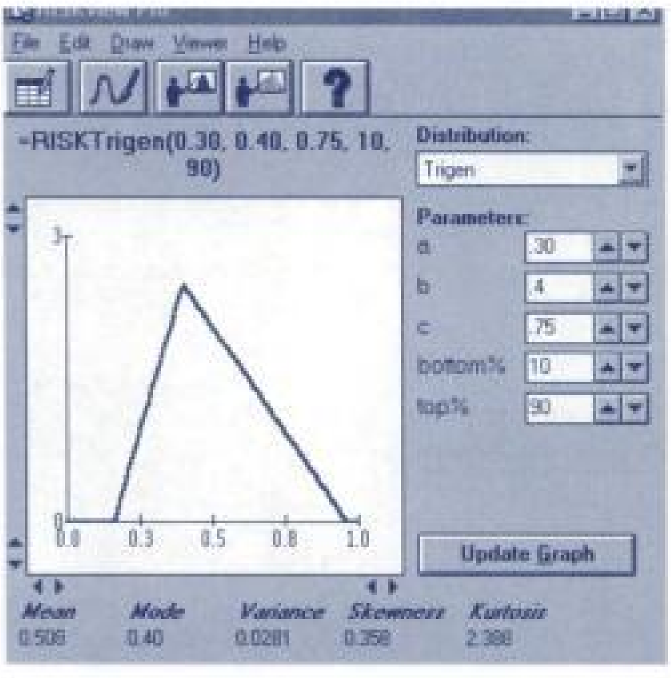


FIGURA 13

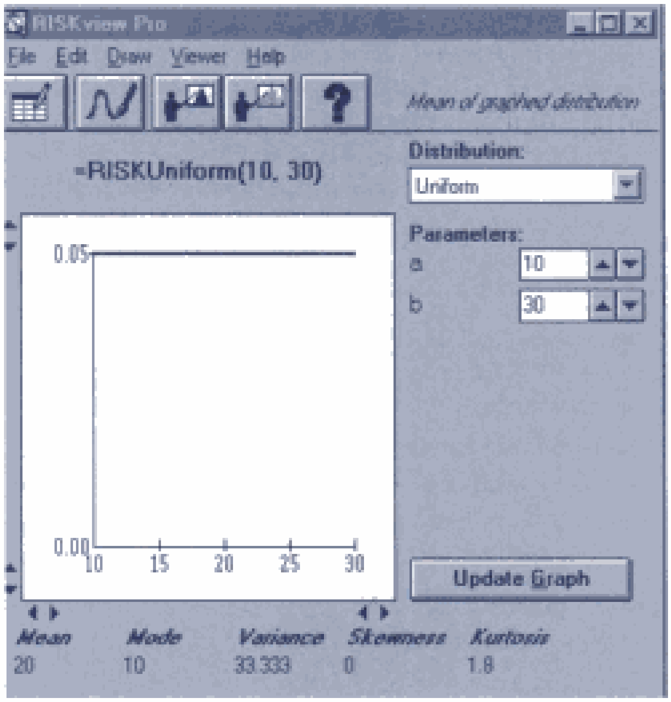


FIGURA 14

Función RISKGENERAL

¿Qué pasa si una variable aleatoria continua al parecer no sigue una distribución normal o triangular? Podemos modelarla con la función =RISKGENERAL.

Suponga que una participación en el mercado de entre 0 y 60% es posible, y una participación de 45% es más probable. Hay cinco niveles de participación en el mercado para los cuales nos sentimos confortables acerca de comparar la probabilidad relativa. (Véase la tabla 1.) Así, una participación en el mercado de 45% es 8 veces tan probable como 10%; 20% y 55% tienen las mismas probabilidades, etcétera. Observe que la distribución no puede ser triangular, debido a que entonces 20% sería (20/45) tan probable como el máximo de 45%, y 20% sería .75 tan probable como 45%. Para modelar esto, introduzca la fórmula

=RISKGENERAL(0,60,{10,20,45,50,55},{1,6,8,7,6})

La sintaxis de RISKGENERAL es como sigue:

- Comience con los valores más grande y más pequeño posibles.
- Luego encierre entre {} los números para los que usted sienta que puede comparar las probabilidades relativas.
- Por último, encierre entre {} las probabilidades relativas de los números que listó antes.

TABLA 1

Participación en el mercado	Probabilidad relativa
10%	1
20%	6
45%	8
50%	7
55%	6

Para cada variable, teclee enfrente de la distribución real de la variable la sintaxis

=Función de Risk real, RISKCORRMAT(Matriz, i)

Aquí, Matriz (C27:E29 en este caso) indica donde reside la matriz de correlación, e *i* es la columna de la matriz de correlación que contiene las correlaciones para la variable *i*. Así, para la variable 1, las correlaciones vienen de la primera columna de la matriz de correlación. Si ejecuta una simulación y extrae los datos para las celdas D31:D33, encontrará que

- Cada celda tiene una media de alrededor de 0 y una desviación estándar de alrededor de 1.
- Cada celda sigue una distribución normal.
- D31 tiene una correlación de alrededor de .7 con D32.
- D31 tiene una correlación de casi .8 con D33.
- D32 tiene una correlación de alrededor de .75 con D33.

Truncamiento de variables aleatorias

Suponga que usted cree que la participación en el mercado para un producto tiene una distribución más o menos normal, con media .6 y desviación estándar .1. Esta variable aleatoria podría ser mayor que 1 o ser negativa, lo cual sería inconsistente con el hecho de que la participación en el mercado debe estar entre 0 y 1. Para resolver esto, se podría introducir una variable aleatoria desde el icono Define Distribution como se muestra en la figura 17.

También se podría escribir la fórmula

=RISKNORMAL(.6,.1,RISKTRUNCATE(0,1))

Entonces @Risk genera una variable aleatoria normal con media .6 y desviación estándar .1. Si la variable aleatoria asume un valor entre 0 (el menor valor de truncamiento) y 1(el valor superior de truncamiento), se retiene ese valor. De lo contrario, se genera otro valor. Los valores de truncamiento deben estar dentro de 5 desviaciones estándar de la media.

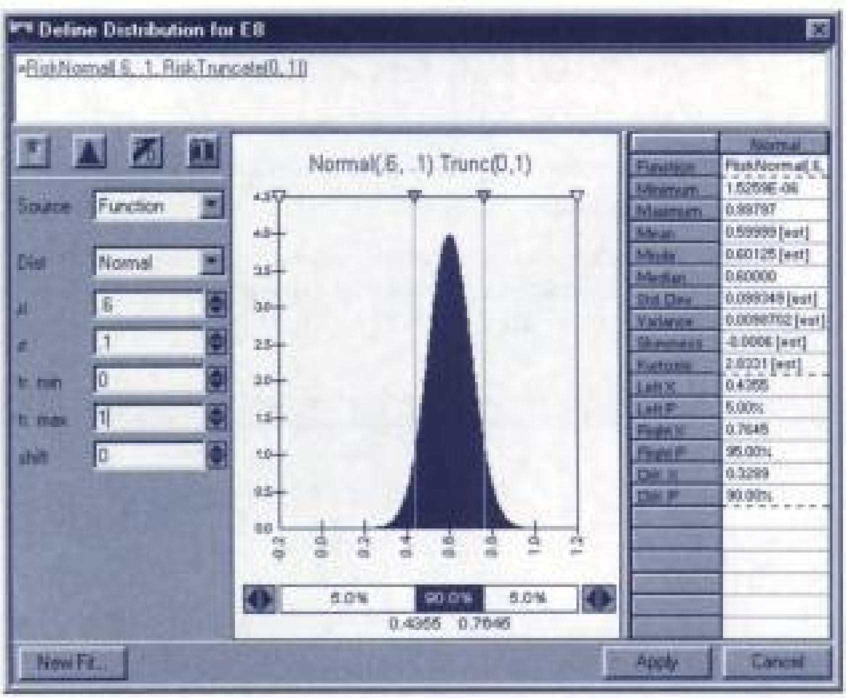


FIGURA 17

Casos

Jeffrey B. Goldberg

UNIVERSIDAD DE ARIZONA

CASO 1

¡Me estoy haciendo viejo!

Perfil de un profesor universitario:

- Persona del sexo masculino de 45 años de edad antes atlético.
- 97 kilos de peso.
- 1.8 m de estatura.
- Se ejercita no más de una vez a la semana. Camina media milla al día hacia y desde el automóvil mientras lleva un portafolio de 10 libras.
- Historia familiar de diabetes en la edad adulta.

¡Necesito ayuda! Mi dieta es terrible; he estado ganando peso y sintiéndome más cansado.

He escuchado que el profesor George Dantzig de Stanford una vez utilizó la programación lineal para elaborar una dieta. Sería fabuloso si *usted* pudiera decirme qué comer durante el día. Por consiguiente, debido a que soy un firme creyente de los modelos matemáticos, quiero usar la programación lineal para establecer una dieta razonable con la cual me alimente durante una semana. Su trabajo consiste en reunir datos para usarlos en el modelo.

Tengo los siguientes requisitos para la dieta:

- Me gusta la variedad. Usted no puede prescribir una dieta en la que yo coma sólo un alimento durante toda la semana (como diez cajas de cereal Total). Me gustaría comer al menos 15 alimentos distintos durante la semana.
- Usted tiene que darme algo de cada uno de los cuatro grupos básicos de alimentos (productos lácteos, frutas y vegetales, carne y cereales) –nada de Mccomida, alimentos congelados, pizza o alimentos insertados en un palito.
- Me gusta nutrirme. No me puede prescribir una dieta que no satisfaga las cantidades necesarias mínimas por día de minerales y vitaminas esenciales. Usted no puede prescribir una dieta en la yo gane mucho peso. Sí podría perder algunos kilos.
- Odio comer coles de Bruselas, papas dulces, peras y órganos comestibles como hígado y riñones.
- Olvídese de frutas o verduras enlatadas. ¡Qué asco!
- No como cerdo o productos derivados del cerdo.
- No tomo leche con ningún alimento, excepto en el desayuno.
- Trabajo para la universidad, así que mi presupuesto para la comida es limitado. Intente mantener el costo menor a $100 dólares por semana (mientras más bajo mejor).
- Podría considerar tomar vitaminas para obtener los cantidades necesarias nutricionales, pero preferiría ingerir comidas.

Preguntas clave

- ¿Qué debo comer en cada comida?
- Si restringiera la variedad, ¿cambiaría su recomendación?
- Si accediera a gastar más de $100 dólares por semana, ¿cambiaría su recomendación? ¿Cómo?
- ¿Qué minerales y vitaminas importantes restringen la solución?

CASO 2

Energía solar para su casa

A medida que disminuye nuestra capacidad para extraer y procesar combustibles fósiles, muchas personas están en busca de recursos renovables para satisfacer sus necesidades de energía. En particular, la energía solar se está convirtiendo en una técnica avanzada que promete ahorros. Puede haber suficiente energía para abastecer una casa en regiones con gran insolación. La cantidad de energía solar que llega a la Tierra cada año es mucho mayor que la demanda de energía mundial; por supuesto, ésta varía con el lugar, la hora del día y la estación del año. La luz del sol también es un recurso disperso y se puede captar casi desde cualquier parte de la Tierra.

Hay dos categorías de sistemas solares domésticos: pasivos y activos. En un sistema pasivo, la energía solar calienta un material que se utiliza de una manera productiva. Por ejemplo, en Arizona es común usar un sistema solar pasivo para calentar albercas y el agua utilizada en casa. La energía solar se utiliza en todos los edificios para satisfacer alguna parte de sus necesidades de calentamiento. La luz solar que pasa por las ventanas es una fuente de calor, y el valor del calentamiento solar pasivo se incrementa mediante el aislamiento adecuado del edificio. Un edificio muy bien aislado requiere menos energía para calentarse; por lo tanto, mucha de la carga de calentamiento se puede satisfacer mediante características solares pasivas. El diseño solar pasivo óptimo comienza con el esquema de un lote de construcción; una casa debe estar orientada de modo que pueda aprovechar la energía solar disponible.

Los sistemas activos son más complejos y, por lo general, convierten la energía solar en energía eléctrica. Las celdas fotovoltaicas (FV) utilizan la energía del sol para producir electricidad. No producen ninguna de las emisiones de invernadero o gases ácidos que se asocian comúnmente con el uso de combustibles fósiles para generar electricidad. El principal obstáculo para incrementar el uso de esta tecnología es el costo. Un material semiconductor utilizado en las celdas FV es un cristal de silicio. Las celdas de silicio son, por lo general, el tipo más eficaz de celdas fotovoltaicas: convierten tanto como 23% de la energía solar entrante en electricidad. El problema principal con ellas es su costo de producción. Las celdas de silicio policristalino son menos caras en cuanto a manufactura, pero menos eficaces que las celdas de cristal único (15 a 17%). Las películas delgadas (0.001-0.002 mm de espesor) o silicio amorfo o no cristalizado son otra opción para las FV. Estas películas delgadas son baratas y se podrían depositar con toda facilidad en materiales como vidrio y metal, y de este modo tendría lugar su producción en masa. Las celdas FV de película delgada de silicio amorfo se utilizan mucho en dispositivos electrónicos comerciales, los cuales suministran energía a relojes y calculadoras. Sin embargo, estas celdas no son particularmente eficaces –12% en el laboratorio, 7% para celdas comerciales– y se degradan con el tiempo, perdiendo algo así como 50% de su eficacia con la exposición al sol.

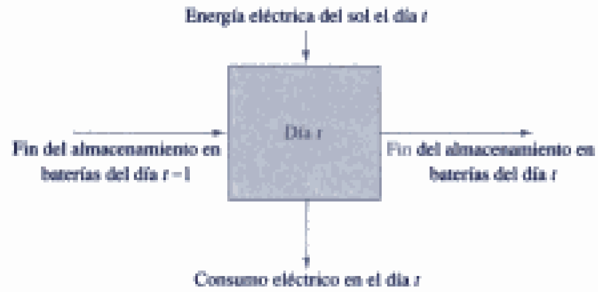
La energía solar es una fuente intermitente de electricidad. Si las celdas FV son su única fuente, entonces podría ser necesario almacenar electricidad. La electricidad para una casa se puede almacenar en baterías, lo cual puede ser caro. También, para generar suficiente electricidad, se requiere una gran área de colectores en el techo o en alguna parte de la propiedad. La cantidad de energía solar capturada depende del área superficial de los colectores y su rendimiento de conversión. Un sistema de energía solar se puede considerar a menudo como un sistema de conservación. En la figura 1 se ilustra una forma de ver el flujo diario de energía.

Su trabajo es comenzar a diseñar un sistema solar activo para una casa de su zona. Para el análisis, usted tendrá que reunir datos acerca de:

- costo del sistema y rendimiento,
- insolación diaria en su zona (por lo general medida en watt/metro^2; esta información se puede encontrar en la localidad donde se almacenan y recopilan datos), y
- la cantidad necesaria característica de energía diaria para una casa de su zona.

Los costos del sistema comprenden, por lo general, un componente fijo y componentes variables que dependen del área total de los colectores FV, el tipo de material utilizado en el colector (normalmente se elige un solo material) y la cantidad necesaria de almacenamiento en baterías. Su análisis debe cubrir por lo menos seis meses de datos (12 meses sería mejor, debido a que a usted le gustaría que su diseño sea apropiado para todo el año). Usted debe suponer que este sistema satisfará *la* energía necesaria para su casa (no se usará gas natural para calentar o cocinar, por ejemplo).

FIGURA 1
Flujo diario de energía



Su diseño debe comprender lo siguiente:

- el área de los colectores FV y la cantidad de almacenamiento en baterías que necesite,
- una estimación del costo del sistema (se puede incluir las ventajas tributarias que se acumulen de la compra de sistemas de energía solar),
- un perfil de los niveles de almacenamiento en baterías al final de cada día durante un periodo de seis meses,
- una estimación del ahorro (o pérdida) por la compra de energía eléctrica de la compañía de luz.

CASO 3

Golf Sport: operaciones administrativas

Golf Sport es una compañía mediana que produce componentes de alta calidad para personas que construyen sus propios palos de golf y preconstruyen conjuntos de palos. Hay cinco componentes –varillas de acero, varillas de grafito, cabezas de hierro forjado, cabezas de madera con metal y cabezas de madera y metal con insertos de titanio– hechos en tres plantas, Chandler, Glendale y Tucson, en el sistema de Golf-Sport. Cada planta puede producir cualquiera de los componentes, aunque cada planta tiene un conjunto distinto de restricciones individuales y costos unitarios. Estas restricciones cubren la mano de obra y el tiempo de máquina en el empaquetado (todos los componentes utilizan la máquina); los valores específicos para cada combinación componente-planta se dan en las tablas 1 a 3. Observe que aunque los componentes son idénticos en las tres plantas, se utilizan procesos de producción distintos y, por lo tanto, los productos utilizan diferentes cantidades de recursos en plantas diferentes.

Además de las ventas de los componentes, la compañía toma los componentes y fabrica conjuntos de pa-

TABLA 1
Restricciones producto-recurso: Chandler

Productos	Recursos: Mano de obra (minutos/unidad)	Empaque (minutos/unidad)	Publicidad ($/unidad)
Varillas de acero	1	4	1.0
Varillas de grafito	1.5	4	1.5
Cabezas de hierro forjado	1.5	5	1.1
Cabezas de madera con metal	3	6	1.5
Cabezas con inserciones de metal	4	6	1.9
Disponibilidad mensual (minutos)	12000	20000	—

TABLA 2
Restricciones producto-recurso: Glendale

Productos	Recursos: Mano de obra (minutos/unidad)	Empaque (minutos/unidad)	Publicidad ($/unidad)
Varillas de acero	3.5	7	1.1
Varillas de grafito	3.5	7	1.1
Cabezas de hierro forjado	4.5	8	1.1
Cabezas de madera con metal	4.5	9	1.2
Cabezas con inserciones de metal	5.0	7	1.9
Disponibilidad mensual (minutos)	15000	40000	—

TABLA 3
Restricciones producto-recurso: Tucson

Productos	Recursos: Mano de obra (minutos/unidad)	Empaque (minutos/unidad)	Publicidad ($/unidad)
Varillas de acero	3	7.5	1.3
Varillas de grafito	3.5	7.5	1.3
Cabezas de hierro forjado	4	8.5	1.3
Cabezas de madera con metal	4.5	9.5	1.3
Cabezas con inserciones de metal	5.5	8.0	1.9
Disponibilidad mensual (minutos)	22000	35000	—

los de golf. Cada conjunto requiere 13 varillas, 10 cabezas de hierro y 3 cabezas de madera. Las varillas del conjunto deben ser del mismo tipo (acero o grafito) y las cabezas de madera deben ser del mismo tipo (metal o metal con inserciones). Los tiempos de ensamble para los conjuntos en cada planta se muestran en la tabla 4.

Cada planta de Golf-Sport tiene una tienda para vender los componentes y conjuntos, y la planta específica es el único proveedor de su establecimiento comercial. Las cantidades mínima y máxima de demanda para cada par planta-producto se dan en la tabla 5. Observe que, aunque se deben satisfacer los mínimos, no es necesario satisfacer la demanda hasta la cantidad máxima.

Este problema de planificación es para dos meses. Los costos de la tabla 6 se incrementan en 12% para cada mes, y los tiempos de producción son estacionarios. Los costos de inventario se basan en el inventario de fin del periodo para cada conjunto de producto y suman 8% de los valores de costo de la tabla 6. En la tabla 7 se lista el ingreso generado por cada producto. Al inicio no hay inventario.

La corporación controla el capital disponible para gastos; los requerimientos de efectivo para cada producto se dan en la última columna de las tablas 1 a 3. Hay un total de \$20 000 dólares disponibles para publicidad de todo el sistema durante cada mes, y el dinero que no se gasta en un mes no está disponible para el siguiente. La corporación también controla el grafito; cada varilla requiere 4 onzas de grafito; un total de 1 000 libras está disponible para cada uno de los dos meses.

Su trabajo consiste en presentar una recomendación para la compañía. Una recomendación debe incluir un plan para producción y ventas. Además, debe atender también las siguientes cuestiones del análisis de sensibilidad en su recomendación:

- Si pudiera conseguir más grafito o efectivo para publicidad, ¿cuánto le gustaría, cómo lo usaría y qué estaría dispuesto a pagar?
- ¿En cuál(es) sitio(s) le gustaría agregar horas extra de máquina de empaquetado u horas extra de mano de obra, o ambas? ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por hora y cuántas horas extra le gustarían?
- El departamento de comercialización intenta lograr que Golf-Sport considere un programa de publicidad que promete un incremento de 50% en su demanda máxima. ¿Se puede manejar esto con el sistema actual o son necesarios más recursos? ¿Cuánto más va a costar la producción si se considera la demanda adicional?

TABLA 4

Planta	Tiempo (minutos por conjunto)	Tiempo total disponible (Minutos)
Chandler	65	5 500
Glendale	60	5 000
Tucson	65	6 000

TABLA 6
Costos de material, producción y ensamble (\$) por parte o conjunto

	Plantas		
Productos	Chandler	Glendale	Tucson
Varillas de acero	6	5	7
Varillas de grafito	19	18	20
Cabezas de hierro forjado	4	5	5
Cabezas de madera o metal	10	11	12
Cabezas con inserciones de titanio	26	24	27
Conjunto: acero, metal	178	175	180
Conjunto: acero, inserción	228	220	240
Conjunto: grafito, metal	350	360	370
Conjunto: grafito, inserción	420	435	450

TABLA 5
Demanda de producto máxima y mínima por mes

	Tienda (o planta)		
Productos	Chandler	Glendale	Tucson
Varillas de acero	[0, 2 000]	[0, 2 000]	[0, 2 000]
Varillas de grafito	[100, 2 000]	[100, 2 000]	[50, 2 000]
Cabezas de hierro forjado	[200, 2 000]	[200, 2 000]	[100, 2 000]
Cabezas de madera o metal	[30, 2 000]	[30, 2 000]	[15, 2 000]
Cabezas con inserciones de titanio	[100, 2 000]	[100, 2 000]	[100, 2 000]
Conjunto: acero, metal	[0, 200]	[0, 200]	[0, 200]
Conjunto: acero, inserción	[0, 100]	[0, 100]	[0, 100]
Conjunto: grafito, metal	[0, 300]	[0, 300]	[0, 300]
Conjunto: grafito, inserción	[0, 400]	[0, 400]	[0, 400]

TABLA 7
Ingreso por parte o conjunto ($)

Productos	Plantas		
	Chandler	Glendale	Tucson
Varillas de acero	10	10	12
Varillas de grafito	25	25	30
Cabezas de hierro forjado	8	8	10
Cabezas de madera o metal	18	18	22
Cabezas con inserciones de titanio	40	40	45
Conjunto: acero, metal	290	290	310
Conjunto: acero, inserción	380	380	420
Conjunto: grafito, metal	560	560	640
Conjunto: grafito, inserción	650	650	720

CASO 4

Vision Corporation: producción, planificación y envío

Vision es una gran compañía que produce dispositivos de captura de video para aplicaciones militares, como misiles, cámaras de largo alcance y aviones teledirigidos. Cuatro tipos distintos de cámaras (que difieren sobre todo por el tipo de lentes) se manufacturan en tres plantas del sistema. Cada planta puede producir alguno de los cuatro tipos de cámaras, aunque cada planta tiene sus propias restricciones y costos unitarios. Estas restricciones cubren las restricciones de mano de obra y maquinado, y los valores específicos se dan en las tablas 8 a 10. Observe que aun cuando los productos son idénticos en las tres plantas, se utilizan procesos de producción distintos y, por consiguiente, los productos utilizan cantidades diferentes de recursos en cada una de las plantas. La corporación controla el material que se utiliza en las lentes; el material necesario para cada producto se da en la última columna de las tablas 8 a 10. Se cuenta con un total de 3 500 libras de material para el sistema completo durante el periodo de planificación.

TABLA 8
Restricciones de producto-recurso: planta 1

Productos	Recursos		
	Mano de obra (horas/unidad)	Máquina (horas/unidad)	Material (Lb./unidad)
Pequeño	3	8	1.0
Mediano	3	8.5	1.1
Grande	4	9	1.2
Precisión	4	9	1.3
Total disponible	6 000	10 000	—

TABLA 9
Restricciones de producto-recurso: planta 2

Productos	Recursos		
	Mano de obra (horas/unidad)	Máquina (horas/unidad)	Material (Lb./unidad)
Pequeño	3.5	7	1.1
Mediano	3.5	7	1.0
Grande	4.5	8	1.1
Precisión	4.5	9	1.4
Total disponible	5 000	12 500	—

TABLA 10
Restricciones de producto-recurso: planta 3

Productos	Recursos		
	Mano de obra (horas/unidad)	Máquina (horas/unidad)	Material (Lb./unidad)
Pequeño	3	7.5	1.1
Mediano	3.5	7.5	1.1
Grande	4	8.5	1.3
Precisión	4.5	8.5	1.3
Total disponible	3 000	6 000	—

Transport tiene tres clientes principales (RAYco, HONco y MMco) para sus productos. Las ventas máximas para cada para cliente-producto se dan en la tabla 11. Los precios de venta de producto se dan en la tabla 12 y los costos de envío de cada planta a cada cliente se detallan en la tabla 13. La tabla 14 contiene los costos de producción para cada par planta-producto.

Los envíos de las plantas 1 y 2 que van a RAYco o HONco deben pasar una inspección especial. Estas unidades se envían a un sitio central, se inspeccionan y luego se envían a su destino. La capacidad de este sitio de inspección especial es de 1 500 piezas.

Su trabajo es plantear una recomendación para la compañía. Una recomendación debe incluir un plan para producción y envío, así como el costo e ingreso generado de cada planta. Además, debe atender las siguientes cuestiones posibles en su recomendación:

- Si usted pudiera conseguir más material, ¿cuánto le gustaría? ¿Cómo lo usaría? ¿Qué estaría dispuesto a pagar?
- Si pudiera tener más capacidad de inspección, ¿cuánto le gustaría? ¿Cómo la usaría? ¿Qué estaría dispuesto a pagar?
- ¿A qué planta(s) le gustaría agregar horas extra de máquina? ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por hora? ¿Cuántas horas extra le gustarían?

TABLA 11
Ventas de producto máximas ($) por unidad

	Clientes		
Productos	RAYco	HONco	MMco
Pequeño	200	400	200
Mediano	300	300	400
Grande	500	200	300
Precisión	200	400	300

TABLA 12
Precio de ventas de producto ($) por unidad

	Clientes		
Productos	RAYco	HONco	MMco
Pequeño	17	16	16
Mediano	18	18	17
Grande	22	22	23
Precisión	29	26	27

TABLA 13
Costos de envío ($) por unidad

	Clientes		
Planta	RAYco	HONco	MMco
1	1.0	1.6	1.1
2	1.2	1.5	1.0
3	1.4	1.5	1.3

TABLA 14
Costos de producción ($) por unidad

	Planta		
Productos	1	2	3
Pequeño	14	13	14
Mediano	16	17	15
Grande	18	20	19
Precisión	26	24	23

- El departamento de comercialización trata de lograr que RAYco considere un incremento de 50% en su demanda. ¿Puede manejar esto con el sistema actual o son necesarios más recursos? ¿Cuánto dinero más se puede hacer si se acepta la demanda adicional?

CASO 5

Control de material en una oficina general de correos†

Durante más de 200 años, el servicio postal de Estados Unidos (USPS) ha entregado correo en todo el país. La entrega diaria se hace en unos 137 millones de hogares; en 2001, el USPS procesó y entregó más de 207 miles de millones de piezas de correo a una red de entrega que creció en 1.7 millones de nuevas direcciones. Resulta claro que el USPS es el gestor de material más grande (en términos de piezas) en el mundo. Las estadísticas registradas por Pricewaterhouse Coopers muestra que 94% del correo de primera clase destinado para entrega al día siguiente recibió servicio nocturno, y esto fue un desempeño récord durante un segundo año consecutivo. A pesar del alto volumen, el USPS se las arregló para reducir los costos en $900 millones en 2001 a la vez que mantenía un desempeño de servicio récord y altos niveles de satisfacción del cliente.

Para procesar el correo con más rapidez, se debe usar mecanización avanzada. Las máquinas de clasificación de correo pueden procesar 10 cartas por segundo (ya pasaron los días de clasificar a mano el correo). La clasificación por medio del estándar zip+4 puede dar como resultado una clasificación de correo hasta una secuencia de recorrido de cada portador, lo cual ahorra bastante tiempo de portador.

En cada carta se pueden llevar a cabo cinco operaciones importantes, y cada operación tiene su propia máquina:

Máquina automática para afrontar y cancelar (AFC) Esta máquina cancela el timbre postal y orienta las cartas de modo que el timbre esté en la esquina superior derecha. Esta máquina también separa el correo en una tres corrientes –automatización, mecanización o manual.

Máquina clasificadora de cartas (LSM) Esta máquina está semiautomatizada y ayuda a los operadores humanos a clasificar el correo. El operador lee la dirección y luego teclea un código de destino. Luego, la máquina dirige la carta al recipiente apropiado.

Lector óptico de caracteres (OCR) Esta máquina lee las direcciones escritas a mano o mecanografiadas y luego imprime en el sobre un código de barras legible para máquina.

†Basado en el trabajo hecho conjuntamente con Ron Askin y Sanjay Jagdale, 1994.

Clasificador de código de barras (BCS) Esta máquina lee el código de barras en la carta (ya sea impreso por el OCR o por el equipo del remitente) y luego la asigna a un recipiente.

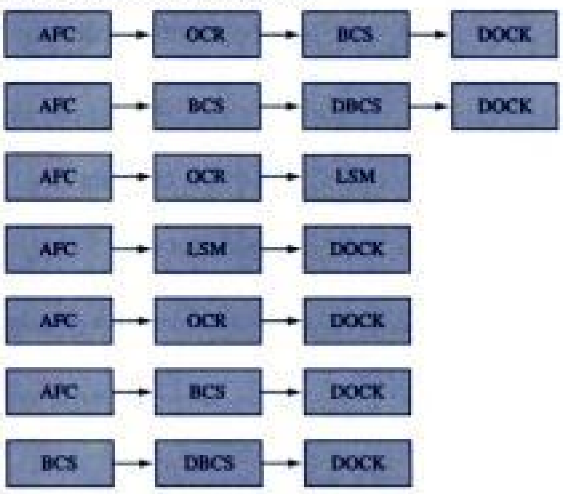
Clasificador de código de barras para entrega (DBCS) Esta máquina realiza una clasificación de dos pasos que utiliza códigos de barras con el código zip+4 y clasifica hasta casi una secuencia de recorrido. Al usar el DBCS, el resultado es tal que un portador requiere poco o ningún proceso en la estación portadora para entregar el correo.

El sistema también procesa los elementos *planos* (por ejemplo revistas y sobres de 8.5 × 11 pulgadas). En un proceso semiautomatizado se utiliza una máquina clasificadora de elementos planos (FSM). Un operador coloca una pieza en la máquina y teclea un código basado en la dirección del elemento; la máquina dirige entonces la pieza a un recipiente apropiado.

Una carta que entra a una instalación de correo general (GMF) sigue una ruta que depende de la legibilidad de la dirección en la máquina y la presencia de un código de barras existente. Aunque son posibles muchas rutas, las principales se dan en la figura 2. Una vez que las cartas pasan por el AFC, se almacenan en bandejas de plástico o cartón que contienen aproximadamente 400 cartas. Las cartas se mueven en estas bandejas por la oficina, y cada máquina clasifica el correo en diferentes bandejas.

Como parte del mejoramiento de la calidad, la oficina postal siempre está buscando formas de reducir costos mientras se agiliza el proceso de correo. Para satisfacer los objetivos de entrega durante la noche y la entrega por todo el país en un plazo de tres días, las cartas que llegan a las 6 p.m. de los buzones deben ser procesadas esa noche y estar en los aviones o camiones

FIGURA 2
Rutas de proceso para las cartas



para el destino siguiente. Debido a que las máquinas de clasificación y lectura de caracteres cuestan millones de dólares cada una, incrementar el uso de la máquina y evitar la compra de incluso una máquina en una GMF es un logro importante.

Una de las claves para agilizar el proceso e incrementar la utilización es un sistema efectivo de datos y manejo de material. Cada bandeja tiene un código de barras que describe las características notables de su correo. Cuando una máquina de clasificación está lista para operación (digamos, por ejemplo, que vamos a clasificar hasta un grupo de 10 códigos de código postal (zip)), una llamada sale para traer las bandejas con el correo apropiado a la máquina BCS adecuada. El sistema de datos debe (1) conocer dónde se localizan las bandejas, (2) ir por ellas, (3) llevarlas al área de entrada de la máquina y (4) salir del área. Mientras más rápido se haga esto, mejor. La red para nuestra GMF se da en la figura 3. Cada máquina tiene un punto de entrada y salida. Por ejemplo, los nodos 1 a 28 son las entradas y la salida, respectivamente, para AFC 1. Para esta aplicación, el sistema de manejo de material es un monorriel aéreo. Los portadores que llevan una bandeja circulan alrededor del sistema para recoger y entregar bandejas; descansan en el estacionamiento cuando no está en uso. Los arcos en el diagrama son los enlaces para el monorriel; los enlaces son unidireccionales. Las líneas discontinuas de la figura representan enlaces que están arriba del nivel de la máquina y ofrecen atajos a través de la instalación. La instalación también contiene conmutadores (nodos 29, 18 y 32) que permiten a los portadores cambiar de dirección. El nodo 34 es el enlace para la plataforma de embarque, y las bandejas entran y salen del sistema en este punto.

Los portadores viajan a aproximadamente una milla por hora, y debe haber 15 pies entre portadores en el mismo enlace. Para la finalidad de este estudio, suponga que hay una derivación en cada nodo para que un portador pueda pasar otros portadores que están detenidos en operaciones de carga o descarga. Suponga también que los conmutadores operan con rapidez con respecto a la velocidad de los vehículos de modo, que no ocurren colisiones y la capacidad de conmutación no es una restricción. La figura 3 está trazada más o menos a escala. La instalación tiene alrededor 220 pies de largo por 160 pies de ancho. A un portador le toma alrededor de 2.5 minutos, a 1 milla por hora, recorrer la distancia de la instalación (del nodo 14 al nodo 1, por ejemplo).

La tabla 15 contiene las cargas de movimiento de las bandejas para la hora pico. Cada carga tiene un nodo de origen, un nodo de destino y el número de bandejas que debe moverse. Cada carga es un tramo en la ruta para una bandeja particular de correo. El sistema debe tener capacidad para mover un portador vacío desde el esta-

FIGURA 3
Instalación de correo general: esquema de rutas

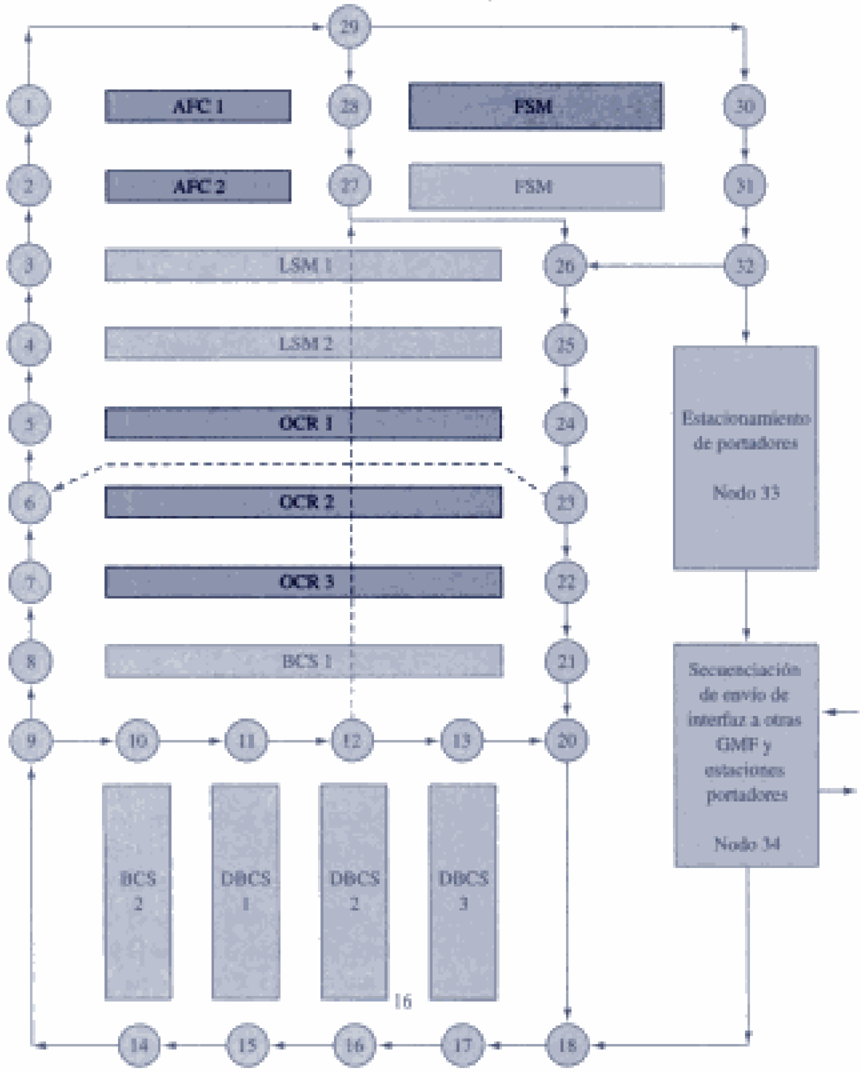


TABLA 15
Datos de carga para la hora de máxima afluencia

Número de carga	Nodo de origen	Nodo de destino	Número de bandejas
1	33	1	15
2	28	4	20
3	22	14	30
4	10	33	30
5	24	8	15
6	21	33	30
7	24	4	5
8	25	33	15
9	27	17	15
10	13	33	40

cionamiento al origen, cargar la bandeja, moverla al destino, descargar la bandeja y luego volver al estacionamiento. Los portadores de despachan desde el estacionamiento porque esto simplifica la lógica del programador. Por capacidad, debe haber un número suficiente de vehículos y no se debe exceder la capacidad en cada enlace entre nodos. Suponga que toma un minuto llevar a cabo una operación de carga o descarga.

Sus tareas son

- Determinar si este sistema tiene suficiente capacidad de control del material para mover las bandejas en la hora pico (por lo general se diseña para la hora pico para que se tenga la seguridad de que el sistema no se atascará cuando la demanda es alta).
- Recomendar dónde se podría agregar otras pistas para aliviar la congestión de capacidad. Esto se debe minimizar debido a que el costo de una pista es alto.
- Determinar los flujos de las bandejas por la red durante la hora pico. ¿Qué rutas se eligen en cada carga?

- Determinar los lugares de la red que son riesgosos; es decir, si se interrumpe el funcionamiento de un enlace, se puede desconectar a las máquinas del sistema de manejo de material.
- Estimar la distancia de recorrido total del portador durante la hora pico.
- Investigar el efecto de reducir la separación entre portadores. Se requiere espacio entre portadoras para evitas colisiones. Si se colocan mejores sensores en el frente de los portadores, se pueden detener con más rapidez y se puede tener menor separación.

Algunos consejos:

- Éste es un problema difícil. Tenga paciencia y no se desaliente.
- No olvide los movimientos de portador vacío al origen y desde el destino.
- Calcule la capacidad en cada arco. Al inicio, suponga una sola vía. Para incrementar la capacidad, considere varias vías entre nodos o considere agregar arcos para tener más trayectorias entre los nodos de origen y los nodos de destino.
- Una formulación precisa de este problema puede ser más grande que para la mayor parte de los problemas que ha visto. No se debe intentar resolver una formulación de gran tamaño a menos que se tenga algún programa que pueda resolver problemas grandes. Algunas formulaciones aproximadas son más manejables, pero aún requieren cientos de variables y restricciones.

CASO 6

Selección de programas de capacitación corporativos†

Introducción

La capacitación se ha convertido en un costo principal de hacer negocios. Un estudio de 1995 de los negocios de Estados Unidos con 100 o más empleados reveló que se gastaron en capacitación alrededor de $52 miles de millones; se estimó que $90 000 a $100 000 millones se gastan en capacitación. Las estrategias de desarrollo para poner en práctica la capacitación cruzada es un tema actual en las publicaciones de investigación de operaciones (OR). Los asesores en administración recomiendan el desarrollo educacional y profesional persistente a fin de ser competitivos en los mercados globales y locales. Los empleados esperan, en la actualidad, que el desarrollo en el trabajo y de habilidades sea un componente importante de sus deberes.

El incremento de los costos de capacitación se debe a muchas razones. Los empleados ven que la capacitación en la forma de grados formales y habilidades técnicas documentadas es importante para la seguridad en el trabajo. Los métodos técnicos están cambiando a un paso muy rápido. Se afirma que las escuelas de nivel medio y las universidades no están generando las habilidades que requiere la industria, así que ésta debe capacitar y reeducar a los recién graduados. Para los graduados del bachillerato, esto podría incluir la capacitación en habilidades técnicas; para los graduados universitarios, esto podría significar el desarrollo de habilidades no técnicas, como liderazgo, comunicaciones, relaciones interpersonales y ética.

Ambiente del problema

Para una corporación, el principal propósito de la capacitación es asegurar que los empleados tienen las habilidades clave necesarias para manejar y operar de manera efectiva el negocio. Hay muchas opciones para proveer capacitación. Por ejemplo, para capacitar al personal en habilidades de cómputo, una corporación debe usar las estrategias siguientes:

- contratar un asesor externo que desarrolle y presente un curso de capacitación en el lugar;
- usar personal de la corporación para desarrollar y presentar un curso de capacitación en las instalaciones;
- comprar un curso de capacitación y pedir a los empleados que lo utilicen para que estudien por su cuenta;
- contratar la capacitación con una universidad local, o bien;
- enviar empleados a un seminario de capacitación fuera de las instalaciones.

Las posibilidades anteriores son para una sola habilidad. Sin embargo, el propósito de muchos programas de capacitación es dar a los empleados un amplio conjunto de habilidades. A menudo, los conjuntos de habilidades de dos o más programas se traslapan en parte. Cuando esto sucede, la corporación debe elegir el conjunto de programas que dan a los empleados las habilidades requeridas para sus trabajos y a los empleados apropiados para cada programa de capacitación. En cualquier caso, las decisiones de capacitación tomadas de una manera "páguese por el uso hecho" *ad-hoc* serán ineficaces y, por lo general, dan como resultado un gasto adicional. Las suposiciones siguientes son apropiadas para dar la estructura del problema de decisión:

- Se tiene un periodo de estudio conocido; por ejemplo, los siguientes tres o cinco años, durante los cua-

†Basado en el trabajo hecho de manera conjunta con John V. Farr y David A. Thomas en USMA, 1995.

TABLA 19
Programas interferentes

Número de programa (días de duración)	Programas que interfieren			
Programa 1 (2)	3	5	8	
Programa 2 (2)	3	7	10	
Programa 3 (4)	1	2	12	
Programa 4 (3)	6	7	14	
Programa 5 (2)	1	9	12	
Programa 6 (3)	4	7	11	14
Programa 7 (5)	2	4	6	
Programa 8 (2)	1	10	13	
Programa 9 (3)	5	15		
Programa 10 (3)	2	8		
Programa 11 (2)	6	12	15	
Programa 12 (4)	3	5	11	
Programa 13 (3)	8	14		
Programa 14 (4)	4	6	13	
Programa 15 (3)	9	11		

grandes, hay muchos empleados en cada clase, así que no es necesario modelar y programar cada empleado. Concéntrese en cambio en la asignación de clasificaciones a programas e ignore la asignación de individuos específicos a programas. Existen también recursos suficientes para desarrollar programas de capacitación internos; por lo tanto debe considerar los costos de desarrollo del programa, así como los costos del empleado (tiempo de trabajo perdido, viajes, hospedaje, alimentos, materiales del curso). Una corporación grande puede usar el modelo para planificar el desarrollo de cursos. Esto ayudará a determinar (1) los costos de desarrollo del programa para que los programas internos sean efectivos en cuanto a costos y (2) programas apropiados para la clasificación de cada empleado de modo que, en promedio, haya tiempo suficiente para completar los programas asignados dentro del tiempo disponible.

Para negocios pequeños, el interés suele ser distinto. Por lo común, estas compañías no desarrollan programas internos porque no capacitan suficientes empleados para justificar los costos de desarrollo. Debido a que el número de empleados es pequeño, es importante modelar hasta el nivel de empleado y programar a los empleados de modo que se puedan completar las tareas de capacitación y trabajo.

Su empresa de Investigación de operaciones ha sido contratada para diseñar un programa de capacitación para una compañía pequeña. No hay clases internas, y los vendedores proporcionan toda la capacitación. La compañía ha determinado 41 habilidades que son importantes para sus empleados; éstas se listan en la tabla 16. Hay seis empleados; el nivel de salario y las habilidades requeridas para cada persona se dan en la tabla 17. Se puede suponer que hay 250 días de trabajo por año. Hay 15 programas disponibles para usar; la tabla 18 contiene el costo por persona y las habilidades cubiertas por cada programa. En la tabla 18, un 1 en el renglón para el programa p y la columna para la habilidad s significa que el programa p contiene la habilidad s. En la tabla 19 se listan los programas que tienen al paso del tiempo conflicto con otros programas (por ejemplo, los programas 3, 5 y 8 tienen conflicto con el programa 1). Un empleado no puede tomar dos programas al mismo tiempo. La política de la compañía es que cada empleado esté limitado a 15 días para la capacitación por año.

Preguntas importantes

Su trabajo consiste en elaborar una recomendación para la compañía con el fin de atender sus necesidades de capacitación. En particular, debe considerar las siguientes preguntas importantes:

- ¿Qué programas de capacitación se debe usar? ¿Cuál es la asignación de personal en esos programas?
- Identifique los programas con uso intenso que podrían justificar el desarrollo de un curso interno. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por ese desarrollo si pudiera usar el programa durante los siguientes tres años?
- Se tiene la oportunidad de negociar precios para los programas. ¿Qué programas sugeriría que son candidatos para negociación?
- ¿Qué habilidades son especialmente caras como para que las cubramos de nuestra parte?
- ¿Cambiaría su recomendación si se permitieran más días de capacitación por año?

CASO 7

BestChip: estrategia de expansión

BestChip (BC) es una gran corporación a escala nacional que produce golosinas con bajo contenido de grasa para un mercado en expansión (pretendido juego de palabras). Básicamente, BC toma la materia prima (maíz, trigo y papas) y la convierte en dos tipos de golosinas: *chips* (regular y cebolla verde) y *party mix* (una variedad). BC se está expandiendo en el occidente de Estados Unidos y está considerando sitios para ubicar instalaciones de producción.

En la actualidad BC tiene ocho sitios posibles. En la tabla 20 se muestran los precios de compra de los sitios y el costo de compra y envío por tonelada de materia prima a cada sitio.

El costo de compra representa el costo amortizado anual de abrir y operar el sitio (exclusivo de los costos

TABLA 20
Información del lugar y costo de envío de materia prima

Ubicación del sitio	Costo de compra ($/año)	Costo de envío de la materia prima ($/tonelada)		
		Maíz	Trigo	Papas
Yuma, AZ	125 000	10	5	16
Fresno, CA	130 000	12	8	11
Tucson, AZ	140 000	9	10	15
Pomona, CA	160 000	11	7	14
Santa Fe, NM	150 000	8	14	10
Flagstaff, AZ	170 000	10	12	11
Las Vegas, NV	155 000	13	12	9
St. George, UT	115 000	14	15	8

TABLA 21
Información de demanda

Compañía	Ubicación	Demanda		
		Regular	Cebolla verde	Party Mix
Jones	Salt Lake City	1 300	900	1 700
YZCO	Albuquerque	1 400	1 100	1 700
Square Q	Phoenix	1 200	800	1 800
AJ Stores	San Diego	1 900	1 200	2 200
Sun Quest	Los Angeles	1 900	1 400	2 300
Harm's Path	Tucson	1 500	1 000	1 400

de envío). Cada sitio puede producir unas 20 000 toneladas de producto por año.

BC tiene seis clientes principales, y la demanda se envía en camión desde la planta al almacén del cliente. El costo de envío depende del tonelaje y la distancia y llega a ser de $0.15 por tonelada-milla. Los clientes, su ubicación y su demanda anual en toneladas para cada producto se listan en la tabla 21. Usted debe satisfacer la demanda.

La composición de los productos no depende de la planta de producción. En la tabla 22 se dan los datos de combinación producto-ingrediente. La compañía requiere que consolidemos nuestro negocio, así que no se puede ubicar plantas en más de dos estados.

Para este análisis, ignore las diferencias en las tasas de propiedad e impuestos sobre los ingresos entre los estados (esto, por lo general, es crítico, pero nos aparta del tema importante de la programación matemática). Además, muchos factores decisivos determinan en realidad las ubicaciones; por ejemplo, el método de financiar la compra del sitio también será un factor importante en la decisión, pero eso se ignora también.

Su trabajo es determinar cómo se debe llevar a cabo la expansión en el occidente y dar opciones. Las preguntas que debe contestar son

TABLA 22
Combinación producto-ingrediente

Producto	Ingrediente		
	Maíz	Trigo	Papas
Chips regulares	70	20	10
Chips cebolla verde	30	15	55
Party mix	20	50	30

- ¿Qué sitios deben ser elegidos? ¿Cómo se debe atender a los clientes?
- Si encarece la gasolina y cambian los costos de transporte, entonces ¿cómo se afecta la recomendación?
- Si se incrementan los costos de carga por ferrocarril para el envío de materia prima, entonces ¿cómo se afecta la recomendación?

Por favor tome en cuenta otros temas del análisis de sensibilidad que considere importantes para el proceso de toma de decisiones del administrador.

Cuando se despacha a los vehículos en una llamada, sale primero el vehículo disponible más cercano. Si no hay vehiculos disponibles, entonces la llamada se debe enviar a un proveedor privado; estas respuestas cuestan a la ciudad 5 000 dólares por llamada médica, 15 000 por llamada de incendio y 200 por falsa alarma. No hay cola de espera. La red de calles es en gran parte rectangular, y el departamento de bomberos estima que el costo por milla de recorrido es $1.50 para las bombas y escaleras y $0.75 por milla para unidades paramédicas. Su trabajo es diseñar un sistema para el departamento de bomberos. Las preguntas que debe considerar son éstas:

- ¿Qué sitios deben ser seleccionados y cómo se deben distribuir los vehículos?
- Si se encarece el recorrido, ¿cómo se afecta la recomendación?
- Si se incrementa el costo de usar al proveedor privado, entonces ¿cómo se debe cambiar el sistema?
- ¿Es necesario todo este equipo para atender al público?
- ¿Cuánta demanda adicional se puede manejar con el complemento total de vehículos?

Su recomendación debe incluir una descripción de sus modelos y las suposiciones hechas en la formulación del modelo. Usted tendrá que hacer suposiciones simplificadoras debido a que este problema tiene detalles que podría ser difíciles de modelar. Hay *muchas* formas de modelar las partes de este sistema, y usted puede usar métodos diferentes para contestar distintas preguntas. Puede usar Excel o LINDO, o bien, métodos heurísticos. Su recomendación dependerá de sus técnicas de modelado.

Sugerencia: este caso es menos específico y tiene componentes vagos; simplifique como un primer acercamiento y luego profundice. Si intenta incluir todo, se verá frustrado porque esto no concuerda con ningún paradigma de modelado estándar.

CASO 9

System Design: administración de proyecto†

System Desing (SD) es una pequeña corporación que administra sistemas y proyectos de ingeniería industrial por contrato. En este caso se debe administrar el diseño y construcción de un sistema de colección y procesamiento de datos de una central eléctrica. La función de SD en el proyecto es contratar a subcontratistas, asegurar que cada tarea se complete dentro de la especificación, determinar cuánta mano de obra asignar a cada tarea y, por lo general, asegurar el éxito del proyecto.

La compañía es, en realidad, un subcontratista dentro del proyecto más grande de construir la central eléctrica. En la tabla 24 se detallan las tareas de construcción de la planta y diseño del sistema de datos de SD. SD está directamente a cargo de las tareas 2, 6, 7, 10, 14, 15 y 19. Las tareas restantes de la tabla 24 interactúan con las que tiene a cargo SD. Suponga que las tareas restantes (1) empezarán siempre que se completen las tareas que las preceden y (2) terminarán exactamente después de su duración.

Para acortar las siete tareas de SD se debe pagar más mano de obra y gastos generales. En la tabla 25 se listan las funciones que puede usar para calcular el costo de cambiar la duración de cada tarea a un nuevo valor. (*Nota*: t_j es la duración original de la tarea j; d_j es la duración mínima de la tarea j.) En la tabla también se lista el valor mínimo posible de duración de la tarea. No se puede incrementar la duración de ninguna tarea.

El ingreso que obtiene SD del proyecto depende no sólo de sus tareas, sino también de cuándo se completa todo el proyecto. El proyecto vence el día 900 y SD recibe el precio de contrato de $600 000 si para entonces está terminado. Si el proyecto se termina con x días de anticipación, entonces SD recibe un ingreso total de $600 000 + $15 000$x^{0.7}$. Si SD termina x días después, entonces el ingreso que recibe es de $600 000 − $20 000$x^{1.4}$.

Agilizar las tareas puede ser rentable y necesario para satisfacer las fechas límite, aunque los empleados no están de acuerdo. La calidad de terminación de la tarea es función del tiempo de finalización de la misma, y sería deseable tener una alta calidad. Esto podría tener conflicto con el objetivo de maximizar la ganancia. Debido a que la calidad afecta los ingresos futuros, es difícil estimar el impacto en dólares de la mala calidad. Si t_j es la duración original de la tarea j y x_j la duración agilizada de la tarea j, entonces la calidad, medida en una escala de 0 a 100 (con 100 como la mejor), se puede representar mediante la función

$$100 - \min\,[100, (t_j - x_j)^{2.2}]$$

Ésta es sólo la calidad para una tarea. No está claro cómo se podría cuantificar la calidad del proyecto.

Su trabajo es determinar cómo llevar a cabo las tareas. Su análisis debe contestar algunas de las siguientes preguntas:

- ¿Qué tareas son críticas para la terminación del proyecto? ¿Qué tareas agilizará?
- ¿Cómo está midiendo la calidad del sistema y cómo se desempeña su recomendación con respecto al objetivo?

†Este material se amplía a partir de un problema de tarea en *Applied Mathematical Programing* de Wayne Wiston.

sos estudios de mercado de sus clientes; en la tabla 26 se muestran sus estimaciones para la demanda de sus equipos el año entrante.

Cada equipo contiene los artículos individuales mostrados en la tabla 27, que se listan con sus tamaños base en libras. Help-You, por ejemplo, puede comprar paquetes de comprimidos de paracetamol extra fuerte. Cada paquete contiene 12 tabletas y le cuestan a Help-You $1.50 dólares.

Help-You compra cada uno de los artículos y luego forma los equipos con base en lo que requiere cada parte de cada equipo, como se ilustra en la tabla 28.

Éstos son los requerimientos mínimos en los que el cliente espera por lo menos la cantidad listada de cada artículo en cada equipo específico. Por ejemplo, en el equipo para los campistas, debe haber por lo menos cuatro cobertores y por lo menos tres unidades frías (seis paquetes fríos), así como los demás artículos.

Hay dos estrategias disponibles para formar los equipos:

- En el *ensamblaje directo* se colocan en cada equipo las cantidades necesarias exactas.
- En el *ensamblaje modular* se desarrolla uno o más de los módulos estándar que se puede formar y combinar en un equipo con módulos suficientes de modo que se satisfagan las cantidades mínimas de cada artículo. En la figura 5 se detalla una gráfica de la técnica.

TABLA 26
Demanda de equipo

Tipo	Número de equipos vendidos
Automóviles	1 000
Excursionistas	800
Campistas	100
Equipos deportivos	200
Grupos de exploración	300

TABLA 27
Costo del artículo y tamaño base

Artículo	Costo ($)	Unidad base	Peso de unidad base (Lb.)
Curitas	1	10 por paquete	0.20
Vendaje elástico	2	1 vendaje	0.20
Bengalas	4	3 por paquete	1.00
Cobertores	15	1 coberto	2.00
Cinta adhesiva	2.50	1 rollo	0.40
Paquetes fríos	4	2 por paquete	0.80
Crema para quemadura de sol	3.50	1 tubo	0.40
Crema antiséptica	2	1 tubo	0.50
Comprimidos de paracetamol extra fuerte	1.50	12 tabletas	0.30
Guantes de hule	1.50	3 pares	0.20

Si usted diseña un módulo, por ejemplo, que tiene dos unidades de curitas (así como otros artículos) y coloca tres de estos módulos en un equipo de exploración, entonces el equipo tendrá $3*2 = 6$ unidades de curitas: esto satisfará el requerimiento de cuatro unidades de curitas para los equipos de exploración. En este ejemplo, hay un "excedente de mercancías" de dos unidades extra de curitas que cuestan

$$2 * \$1 \text{ por unidad} = \$2$$

por cada equipo de explorador demandado. También, el contenido total de unidades en un módulo no puede pesar más de 15 libras (un requisito de ensamblaje).

El ensamblaje directo satisface las cantidades necesarias de manera exacta, aunque por lo general tiene mayores costos de mano de obra que el ensamblaje modular. Para el inventario de almacenaje, es más fácil usar los módulos porque tienden a ser más pequeños que los equipos.

Desarrolle una estrategia para el ensamblaje modular. Los costos clave del sistema modular son los excedentes de mercancías que ocurren. Su estrategia debe abarcar lo siguiente:

- el número de módulos que está diseñando (mientras más módulos tenga, se pueden comparar las cantidades necesatias con más exactitud, aunque los costos de ensamblaje e inventario son mayores);
- el contenido de unidades de cada módulo diseñado, y
- una estimación del número total de cada módulo requerido.

Su análisis debe tomar en consideración cuestiones como

- la relación entre el número de módulos diferentes diseñados y el costo promedio total (no necesita probar más de cinco módulos distintos –¿por qué?);

planes de operaciones son importantes para las compañías productoras de electricidad, este estudio es en un nivel superior. Nuestro interés se centra en la capacidad de potencia durante el año y no en las fluctuaciones de uso de energía día con día o de una hora a la siguiente.

Al comienzo de 2005, Brite tendrá plantas con 60 megawatts de capacidad. Las estimaciones de demanda de energía de la compañía para los años 2005 a 2020 se listan en la tabla 29.

Los aspectos financieros de una planta alimentada con carbón mineral se ejecutan de acuerdo con una *ley de energía*; es decir, el costo de una nueva planta en dólares constantes (a veces llamados "dólares del año 0") se rige por la siguiente regla de estimación:

$$\text{costo de la planta con capacidad K} = \left[\frac{\text{capacidad K}}{\text{capacidad de la planta de tamaño base}}\right]^{0.8} * \text{costo de la planta de tamaño base}$$

Para este análisis, la capacidad de producción de la planta base es 5 megawatts; su costo es de $18 millones de dólares. La compañía estima la inflación en 4% por año para la duración del horizonte de tiempo. La compañía utiliza una tasa de descuento de 12% anual; esto supone que en el análisis se utilizan dólares actuales [1 dólar actual en el año 1 es equivalente a 1/(1.12) = .89 dólares actuales en el año 0].

El tiempo requerido para construir una nueva planta es dos años. El proyecto requiere 65% del costo al inicio del primer año; el 35% restante se gasta al inicio del segundo año. Si Brite Power comienza una nueva planta en 2007, por ejemplo, entonces 65% de los costos ocurren en 2007 y 35% en 2008; entonces la planta entra en funcionamiento y se puede usar para satisfacer la demanda en 2009. Con este tiempo de espera, es evidente que Brite Power necesita llevar a cabo una planificación avanzada.

Brite Power puede construir plantas con capacidades de 5, 10, 15 y 20 megawatts. Si la compañía invierte ahora en investigación de nuevos métodos ($3 millones por año durante 5 años), entonces esto puede reducir el exponente en el modelo de potencia de 0.8 a 0.65.

Además de construir nueva capacidad, Brite Power debe operar las plantas; los costos de operación se basan en la cantidad de capacidad utilizada. Si la demanda en el año t es D_t megawatts y la capacidad total en el año t es C_t megawatts, entonces el costo de operaciones en dólares constantes para el año es:

$$\left(\frac{C_t}{D_t}\right)^{0.5} * D_t * \$400\,000$$

En general, la compañía debe satisfacer toda la demanda del año, aunque hay oportunidades de comprar 3 megawatts por año a compañías vecinas a 600 000 dólares/megawatt (en dólares constantes).

TABLA 29

Año	Demanda (megawatts)	Año	Demanda (megawatts)
2005	54	2013	87
2006	58	2014	87
2007	63	2015	90
2008	63	2016	90
2009	69	2017	100
2010	75	2018	110
2011	77	2019	110
2012	77	2020	120

Preguntas importantes

- Al consejo de Brite le gustaría saber cuándo aumentar la capacidad. ¿Qué tan grande debe ser la expansión? ¿Cuándo deben empezar?
- ¿Cuáles son los dólares actuales gastados durante el tiempo de horizonte para adquirir y satisfacer la demanda? ¿Cuál es el valor descontado de estos gastos?
- ¿Debe invertir la compañía en investigación para reducir el coeficiente de la ley de potencia?
- Si las estimaciones de demanda aumentan o disminuyen, entonces ¿cómo cambiaría el plan?
- Si cambia el valor de $400 000 en el costo de las operaciones, entonces ¿cómo cambiaría el plan?

Respuesta a los problemas seleccionados

Capítulo 2

SECCIÓN 2.1

1 **a** $-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ -7 & -8 & -9 \end{bmatrix}$

b $3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{bmatrix}$

c No está definida $A + 2B$.

d $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

e $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

f $AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 15 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}$

g BA no está definido.

2 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0.10 \\ 0.30 & 0.70 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0.60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

SECCIÓN 2.2

1 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ o $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{array}\right]$

SECCIÓN 2.3

1 Sin solución.

2 Número infinito de soluciones de la forma $x_1 = 2 - 2k$, $x_2 = 2 + k$, $x_3 = k$.

3 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

SECCIÓN 2.4

1 Linealmente dependiente.

2 Linealmente independiente.

SECCIÓN 2.5

2 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3 A^{-1} no existe.

8 **a** $\frac{1}{100}B^{-1}$.

SECCIÓN 2.6

2 30.

PROBLEMAS DE REPASO

1 Número infinito de soluciónes de la forma $x_1 = k - 1$, $x_2 = 3 - k$, $x_3 = k$.

3 $\begin{bmatrix} U_{t+1} \\ T_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0.20 & 0.90 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_t \\ T_t \end{bmatrix}$

4 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

13 Linealmente independiente.

14 Linealmente dependiente.

15 **a** Sólo si a, b, c y d son distintos de cero jerarquizarán $A = 4$. Por consiguiente, A^{-1} existe si y sólo si a, b, c y d son distintos de cero.

b Aplicando el método de Gauss-Jordan, se encuentra si a, b, c y d son distintos de cero,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$$

18 -4.

Capítulo 3

SECCIÓN 3.1

1 $\max z = 30x_1 + 100x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad x_1 + x_2 &\le 7 && \textbf{(Restricción de tierra)}\\ 4x_1 + 10x_2 &\le 40 && \textbf{(Restricción de trabajo)}\\ 10x_1 &\ge 30 && \textbf{(Restricción de gobierno)}\\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2 No, la restricción de gobierno no se satisface.

b No, la restricción de trabajo no se satisface.

c No, $x_2 \ge 0$ no se satisface.

SECCIÓN 3.2

1 $z = \$370$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2.8$.

3 $z = \$14$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

4 **a** Se quiere hacer x_1 más grande y x_2 más pequeña, así que se va hacia abajo y a la derecha.

b Se quiere hacer x_1 más pequeña y x_2 más grande, así que nos movemos hacia arriba y a la izquierda.

b Se quiere hacer más pequeñas a x_1 y x_2, así que nos movemos abajo y a la izquierda.

SECCIÓN 3.3

1 Ninguna solución factible.

2 Soluciones óptimas alternativas.

3 PL no acotado.

SECCIÓN 3.4

1 Para $i = 1, 2, 3$, sea x_i = toneladas de desechos procesados de la fábrica i. Entonces el PL apropiado es

$$\min z = 15x_1 + 10x_2 + 20x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad 0.10x_1 + 0.20x_2 + 0.40x_3 &\ge 30 && \textbf{(Contaminante 1)}\\ 0.45x_1 + 0.25x_2 + 0.30x_3 &\ge 40 && \textbf{(Contaminante 2)}\\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Se tiene duda acerca de que si el costo de procesamiento es proporcional a la cantidad de desecho procesado. Por ejemplo, es probable que procesar 10 toneladas de desecho no sea 10 veces tan costoso como procesar 1 tonelada de desecho. Al parecer son razonables las suposiciones de divisibilidad y las restricciones de certidumbre.

SECCIÓN 3.5

1 Sea x_1 = número de empleados de tiempo completo (TTC) que comienzan a trabajar el domingo, x_2 = el número de TTC que comienzan a trabajar el lunes, $\ldots$, x_7 = número de TTC que comienzan a trabajar el sábado; x_8 = número de empleados de tiempo parcial (ETP) que comienzan a trabajar el domingo, $\ldots$, x_{14} = número de ETP que comienza a trabajar el sábado. Entonces el PL apropiado es

$$\begin{aligned} \min z = {} & 15(8)(5)(x_1 + x_2 + \cdots + x_7)\\ & + 10(4)(5)(x_8 + x_9 + \cdots + x_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & 8(x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + 4(x_8 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) \ge 88 && \textbf{(Domingo)}\\ & 8(x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7) + 4(x_8 + x_9 + x_{12} + x_{13} + x_{14}) \ge 136 && \textbf{(Lunes)}\\ & 8(x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7) + 4(x_8 + x_9 + x_{10} + x_{13} + x_{14}) \ge 104 && \textbf{(Martes)}\\ & 8(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7) + 4(x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{14}) \ge 120 && \textbf{(Miércoles)}\\ & 8(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 4(x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12}) \ge 152 && \textbf{(Jueves)}\\ & 8(x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 4(x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13}) \ge 112 && \textbf{(Viernes)}\\ & 8(x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + 4(x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) \ge 128 && \textbf{(Sábado)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 20(x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14})\\ & \le 0.25(136 + 104 + 120 + 152 + 112 + 128 + 88) \end{aligned}$$

(Con la última restricción se asegura que el trabajo de tiempo parcial cumplirá con a lo sumo el 25% de los requerimientos de trabajo)

Todas las variables ≥ 0

3 Sea x_1 = número de empleados que comienzan a trabajar el domingo y trabajan cinco días, x_2 = número de empleados que comienzan a trabajar el lunes y trabajan cinco días, $\ldots$, x_7 = número de empleados que comienzan a trabajar el sábado y trabajan cinco días. También, sea o_1 = número de empleados que empiezan a trabajar el domingo y trabajan seis días, $\ldots$, o_7 = número de empleados que empiezan a trabajar el sábado y trabajan seis días. Entonces el PL apropiado es

$$\min z = 250(x_1 + x_2 + \cdots + x_7)$$

$$\min z = + 312(o_1 + o_2 + \cdots + o_7)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + o_1 + o_3 + o_4 + o_5 + o_6 + o_7 \ge 11 && \textbf{(Domingo)}\\ & x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + o_1 + o_2 + o_4 + o_5 + o_6 + o_7 \ge 17 && \textbf{(Lunes)}\\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + o_1 + o_2 + o_3 + o_5 + o_6 + o_7 \ge 13 && \textbf{(Martes)}\\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + o_1 + o_2 + o_3 + o_4 + o_6 + o_7 \ge 15 && \textbf{(Miércoles)}\\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + o_1 + o_2 + o_3 + o_4 + o_5 + o_7 \ge 19 && \textbf{(Jueves)}\\ & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + o_1 + o_2 + o_3 + o_4 + o_5 + o_6 \ge 14 && \textbf{(Viernes)}\\ & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + o_2 + o_3 + o_4 + o_5 + o_6 + o_7 \ge 16 && \textbf{(Sábado)} \end{aligned}$$

Todas las variables ≥ 0

Hidden page

Hidden page

FIGURA 2

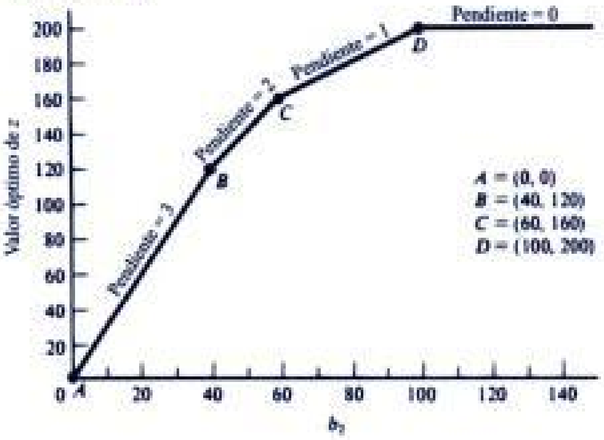


FIGURA 3

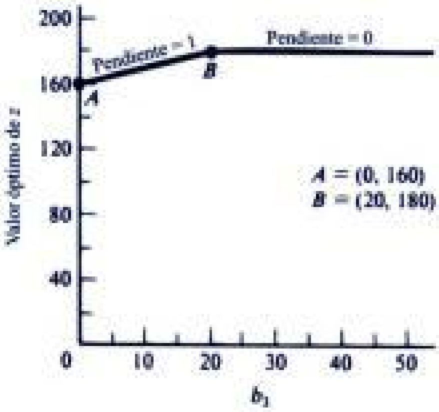
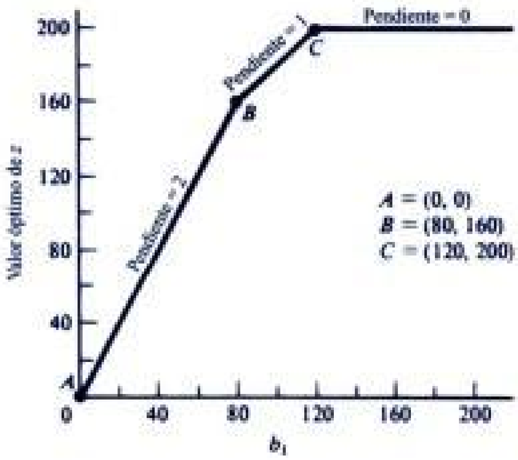


FIGURA 4



PROBLEMAS DE REPASO

1 **a** $1 046 667.

b Sí.

c $33.33.

b $333.33.

7 **a** Las variables de decisión permanecen sin cambio. El nuevo valor de z es $1 815 000.

b Pague $0 dólares por 100 pies tablón adicionales de madera. Pague $1 350 por 100 horas más de trabajo.

c $1 310 000.

d $1 665 000.

Capítulo 6

SECCIÓN 6.1

1 Las variables de decisión son las mismas. El nuevo valor de z es $210.

SECCIÓN 6.2

1
$$\begin{aligned} z \quad + 4s_1 + 5s_2 &= 28 \\ x_1 + s_1 + s_2 &= 6 \\ x_2 + s_1 + 2s_2 &= 10 \end{aligned}$$

SECCIÓN 6.3

3 $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8, z = 280$ (igual que la solución original).

5 No se deben producir las mesas de computadora doméstica.

6 **a** La ganancia para la barra de caramelo 1 ≤ 6¢. Si el tipo de barra de caramelo 1 obtiene una ganancia de 7¢, la nueva solución óptima es $z =$ \$3.50, $x_1 = 50$, $x_2 = x_3 = 0$.

b 5¢ ≤ ganancia de la barra de caramelo 2 ≤ 15¢. Si la ganancia de la barra de caramelo 2 es 13¢, las variables de decisión son las mismas, pero la ganancia ahora es $4.50.

c $\frac{100}{3} \leq$ azúcar ≤ 100.

d $z =$ \$3.40, $x_1 = 0$, $x_2 = 20$, $x_3 = 40$. Si hay 30 oz de azúcar, ya no es óptima la base actual y se debe resolver de nuevo el problema.

e Elabore barras de caramelo tipo 1.

f Elabore barras de caramelo tipo 4.

8 **a** $16 667.67 ≤ costo de comedia ≤ $350 000.

b 4 millones ≤ HIW ≤ 84 millones. Para 40 millones de exposiciones de HIW, la nueva solución óptima es $x_1 = 5.4$, $x_2 = 1.1$, $z =$ \$350 000.

c Anúnciese en el programa de noticias.

SECCIÓN 6.4

1 Sí.

2 No.

4 Sí.

c La nueva solución óptima es $z = 10$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

SECCIÓN 6.12

4 Sólo SEFR es ineficiente.

PROBLEMAS DE REPASO

1 a $\min w = 6y_1 + 3y_2 + 10y_3$

1 a s.a $y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4$

$2y_1 - y_2 + y_3 \geq 1$

y_1 nrs; $y_2 \leq 0$; $y_3 \geq 0$

La solución óptima para el dual es $w = \frac{58}{3}$, $y_1 = -\frac{2}{3}$, $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{7}{3}$.

b $9 \leq b_3 \leq 12$. Si $b_3 = 11$, la nueva solución óptima es $z = \frac{65}{3}$, $x_1 = \frac{16}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

2 $c_1 \geq \frac{1}{2}$.

3 a $\min w = 6y_1 + 8y_2 + 2y_3$

s.a $y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 5$

$y_1 + y_3 \geq 1$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

La solución óptima del dual es $w = 9$, $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{5}{6}$, $y_3 = \frac{7}{6}$.

b $0 \leq c_1 \leq 6$.

c $c_2 \leq \frac{7}{6}$.

4 a Nuevo valor de $z = 32\,540 + 10(88) = \$33\,420$. Las variables de decisión son las mismas.

b No se puede decir, puesto que el incremento permisible es < 1.

c \$0.

d $32\,540 + (-2)(-20) = \$32\,580$.

e Si debe producir jeeps.

8 a Nuevo valor de $z = \$266.20$.

b Nuevo valor de $z = \$270.70$. Las variables de decisión son las mismas.

c \$12.60.

d 20¢.

e Produzca el producto 3.

17 $z = -16$, $x_1 = 8$, $x_2 = 0$.

20 Solución óptima del primal: $z = 13$, $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 2$. Solución óptima del dual: $w = 13$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$.

21 a $c_1 \geq 3$.

b $c_2 \leq \frac{4}{3}$.

c $0 \leq b_1 \leq 9$.

d $b_2 \geq 10$.

28 Solución óptima de el PL: $z = 550$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 5$. Solución óptima para el dual de el PL 2: $w = 550$, $y_1 = y_2 = \frac{100}{3}$.

36 $b_2 \geq 3$.

Capítulo 7

SECCIÓN 7.1

1

	CLIENTE 1	CLIENTE 2	CLIENTE 3	SUMINISTRO
Almacén 1	15	35	25	40
Almacén 2	10	50	40	30
Escasez	90	80	110	20
DEMANDA	30	30	30	

3

1-RT	7	8	9	10	11	12	0	200
1-OT	11	12	13	14	15	16	0	100
2-RT	*M*	7	8	9	10	11	0	200
2-OT	*M*	11	12	13	14	15	0	100
3-RT	*M*	*M*	7	8	9	10	0	200
3-OT	*M*	*M*	11	12	13	14	0	100
4-RT	*M*	*M*	*M*	7	8	9	0	200
4-OT	*M*	*M*	*M*	11	12	13	0	100
5-RT	*M*	*M*	*M*	*M*	7	8	0	200
5-OT	*M*	*M*	*M*	*M*	11	12	0	100
6-RT	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	7	0	200
6-OT	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	11	0	100
	200	260	240	340	190	150	420	

5

	MES 1	MES 2	FICTICIO	SUMINISTRO
Daisy	800	720	0	5
Laroach	710	750	0	5
DEMANDA	3	4	3	

b

	L.A.	DETROIT	ATLANTA	HOUSTON	TAMPA	FICTICIO	
L.A.	0	M	100	90	225	0	5 100
Detroit	M	0	111	110	119	0	6 900
Atlanta	105	115	0	113	78	0	4 000
Houston	89	109	121	0	M	0	4 000
Tampa	210	117	82	M	0	0	4 000
	4 000	4 000	4 000	6 400	5 500	100	

c

	L.A.	DETROIT	ATLANTA	HOUSTON	TAMPA	FICTICIO	
L.A.	0	140	100	90	225	0	5 100
Detroit	145	0	111	110	119	0	6 900
Atlanta	105	115	0	113	78	0	4 000
Houston	89	109	121	0	5	0	4 000
Tampa	210	117	82	5	0	0	4 000
	4 000	4 000	4 000	6 400	5 500	100	

PROBLEMAS DE REPASO

3 Satisfaga la demanda de enero con 30 unidades de la producción de de enero. Satisfaga la demanda de febrero con 5 unidades de la producción de enero, 10 unidades de la producción de febrero y 15 unidades de la producción de marzo. Satisfaga la demanda de marzo con 20 unidades de la producción de marzo.

4 La criada 1 limpia el baño, la criada 2 hace un arreglo general, la criada 3 limpia la cocina, la criada 4 tiene el día libre y la criada 5 pasa la aspiradora.

7 Enviar una unidad de W_i a W_j significa que un estudiante blanco del distrito i va a la escuela en el distrito j. Enviar 1 unidad de B_i a B_j significa que un estudiante negro del distrito i va a la escuela en el distrito j. Los costos de M aseguran que no pueden ocurrir los envíos de W_i a B_j o de B_j a W_j (la tabla se muestra en la página siguiente).

8 La solución óptima es $z = 1\,580$, $x_{11} = 40$, $x_{12} = 10$, $x_{13} = 10$, $x_{22} = 50$, $x_{32} = 10$, $x_{34} = 30$.

13 La solución óptima es $z = 98$, $x_{13} = 5$, $x_{21} = 3$, $x_{24} = 7$, $x_{32} = 3$, $x_{33} = 7$, $x_{34} = 5$.

25 Venda la pintura 1 al cliente 1, la pintura 2 al cliente 2, la pintura 3 al cliente 3 y la pintura 4 al cliente 4.

	W_1	B_1	W_2	B_2	W_3	B_3	SUMINISTRO
W_1	0	M	3	M	5	M	210
B_1	M	0	M	3	M	5	120
W_2	3	M	0	M	4	M	210
B_2	M	3	M	0	M	4	30
W_3	5	M	4	M	0	M	180
B_3	M	5	M	4	M	0	150
DEMANDA	200	100	200	100	200	100	

Capítulo 8

SECCIÓN 8.2

2 1–2–5 (longitud 14).

3

	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3	Nodo 4	SUMINISTRO
Nodo 1	2	8	M	M	1
Nodo 2	0	5	4	12	1
Nodo 3	M	0	6	M	1
Nodo 4	M	M	0	10	1
DEMANDA	1	1	1	1	

M = número grande para evitar enviar una unidad por un arco inexistente.

5 Remplace el automóvil en los tiempos 2, 4 y 6. Costo total = $14 400.

SECCIÓN 8.3

1 max $z = x_0$

s.a $x_{so,1} \leq 6$, $x_{so,2} \leq 2$, $x_{12} \leq 1$, $x_{32} \leq 3$,
$x_{13} \leq 3$, $x_{3,si} \leq 2$, $x_{24} \leq 7$, $x_{4,si} \leq 7$

$x_0 = x_{so,1} + x_{so,2}$ **(Nodo *so*)**

$x_{so,1} = x_{13} + x_{12}$ **(Nodo 1)**

$x_{12} + x_{32} + x_{so,2} = x_{24}$ **(Nodo 2)**

$x_{13} = x_{32} + x_{3,si}$ **(Nodo 3)**

$x_{24} = x_{4,si}$ **(Nodo 4)**

$x_{3,si} + x_{4,si} = x_0$ **(Nodo *si*)**

Todas las variables ≥ 0

Flujo máximo = 6. El corte asociado con $V' = \{2, 3, 4, si\}$ tiene capacidad 6.

2 max $z = x_0$

1 s.a $x_{so,1} \le 2,\ x_{12} \le 4,\ x_{1,si} \le 3,\ x_{2,si} \le 2,$

$x_{23} \le 1,\ x_{3,si} \le 2,\ x_{so,3} \le 1$

$x_0 = x_{so,1} + x_{so,3}$ **(Nodo so)**

$x_{so,1} = x_{1,si} + x_{12}$ **(Nodo 1)**

$x_{12} = x_{23} + x_{2,si}$ **(Nodo 2)**

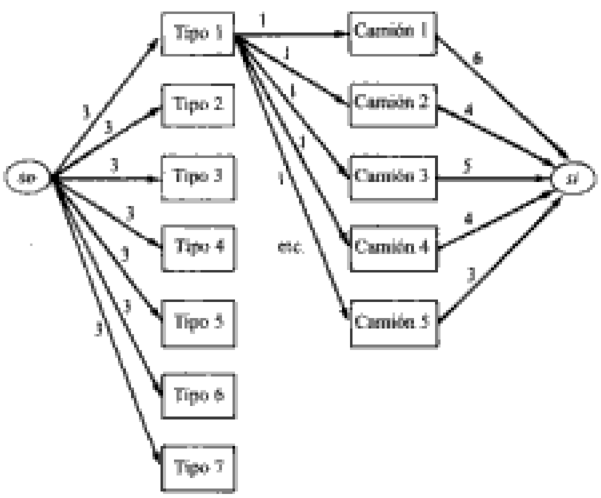
$x_{23} + x_{so,3} = x_{3,si}$ **(Nodo 3)**

$x_{1,si} + x_{2,si} + x_{3,si} = x_0$ **(Nodo si)**

Todas los variables ≥ 0

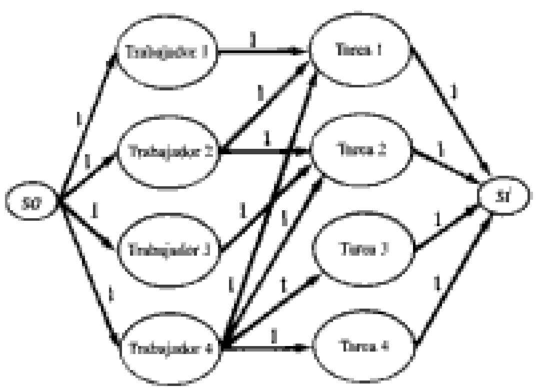
Flujo máximo = 3. El corte asociado con $V' = \{1, 2, 3, si\}$ tiene capacidad 3.

FIGURA 5



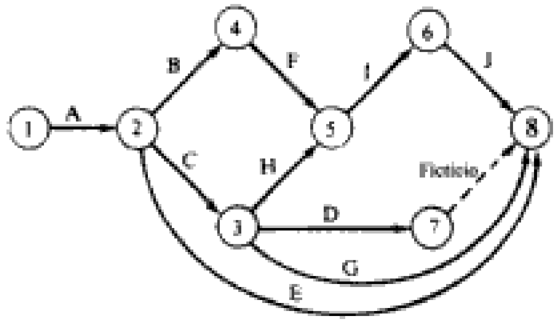
6 Véase la figura 5. Un arco de capacidad 1 va de cada nodo de tipo de paquete a cada nodo de camión. Si el flujo máximo = 21, se puede entregar todos los paquetes.

FIGURA 6



7 Véase la figura 6. Si el flujo máximo = 4, entonces se puede completar todas las tareas.

FIGURA 7



SECCIÓN 8.4

4 **a** Véase la figura 7.

b La ruta crítica es A–C–G (la duración del proyecto es de 14 días).

c Comience el proyecto el 13 de junio.

d min $z = x_8 - x_1$

s.a $x_2 \ge x_1 + 3$

$x_3 \ge x_2 + 6$

$x_4 \ge x_2 + 2$

$x_5 \ge x_4 + 3$

$x_5 \ge x_3 + 1$

$x_6 \ge x_5 + 1.5$

$x_8 \ge x_6 + 2$

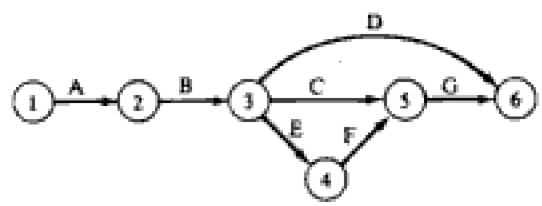
$x_8 \ge x_7 \quad (x_7 \ge x_3 + 2)$

$x_8 \ge x_2 + 3$

$x_8 \ge x_3 + 5$

Todas las variables nrs

FIGURA 8



5 **a** Véase la figura 8. A–B–E–F–G y A–B–C–G son rutas críticas. La duración del proyecto es de 26 días.

Actividad	Tiempo libre total	Tiempo libre
A	0	0
B	0	0
C	0	0
D	8	8
E	0	0
F	0	0
G	0	0

4 Sea $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los estudiantes del distrito } i \\ & \text{son enviados a la escuela } j \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

Entonces, el PE apropiado es

$$\min z = 110x_{11} + 220x_{12} + 37.5x_{21} + 127.5x_{22} + 80x_{31} + 80x_{32} + 117x_{41} + 36x_{42} + 135x_{51} + 54x_{52}$$

s.a $110x_{11} + 75x_{21} + 100x_{31} + 90x_{41} + 90x_{51} \geq 150$ **(Escuela 1 $\geq$ 150 estudiantes)**

$110x_{12} + 75x_{22} + 100x_{32} + 90x_{42} + 90x_{52} \geq 150$ **(Escuela 2 $\geq$ 150 estudiantes)**

$$0.20 \leq \frac{30x_{11} + 5x_{21} + 10x_{31} + 40x_{41} + 30x_{51}}{110x_{11} + 75x_{21} + 100x_{31} + 90x_{41} + 90x_{51}},$$

o $0 \leq 8x_{11} - 10x_{21} - 10x_{31} + 22x_{41} + 12x_{51}$

$$0.20 \leq \frac{30x_{12} + 5x_{22} + 10x_{32} + 40x_{42} + 30x_{52}}{110x_{12} + 75x_{22} + 100x_{32} + 90x_{42} + 90x_{52}},$$

o $0 \leq 8x_{12} - 10x_{22} - 10x_{32} + 22x_{42} + 12x_{52}$

$x_{11} + x_{12} = 1$

$x_{21} + x_{22} = 1$

$x_{31} + x_{32} = 1$

$x_{41} + x_{42} = 1$

$x_{51} + x_{52} = 1$

Todas las variables son 0 o 1

5 Sea $x_1 = \begin{cases} 1 & \text{si contratan a RS} \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si contratan a BS} \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

$x_3 = \begin{cases} 1 & \text{si contratan a DE} \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

$x_4 = \begin{cases} 1 & \text{si contratan a ST} \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

$x_5 = \begin{cases} 1 & \text{si contratan a TS} \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

Entonces, el PE es

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 \\ \text{s.a } & 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 12 \\ & x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Todas las variables son 0 o 1

10 Utilice dos monedas de 20 centavos, una de 50 centavos y una de 1 centavo.

13 No factible

26 Sea

$x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si el edificio } i \text{ se inicia durante el año } t \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

Entonces, el PE apropiado (en dólares) es

$$\max z = 100x_{11} + 50x_{12} + 60x_{21} + 30x_{22} + 40x_{31}$$

s.a $30x_{11} + 20x_{21} + 20x_{31} \leq 60$ **(Trabajadores en el año 1)**

$30(x_{11} + x_{12}) + 20(x_{21} + x_{22}) + 20(x_{31} + x_{32}) \leq 60$ **(Trabajadores en el año 2)**

$30(x_{12} + x_{13}) + 20(x_{22} + x_{23}) + 20(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \leq 60$ **(Trabajadores en el año 3)**

$30(x_{13} + x_{14}) + 20(x_{23} + x_{24}) + 20(x_{32} + x_{33} + x_{34}) \leq 60$ **(Trabajadores en el año 4)**

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\leq 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\leq 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leq 1 \end{aligned}\right\} \textbf{(No más de un edificio empieza durante cada año)}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 1 \end{aligned}\right\} \textbf{(Cada edificio es iniciado cuando mucho una vez)}$$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$ **(El edificio 2 se termina a finales del año 4)**

Todas las variables son 0 o 1

27 Sea $y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el camión } i \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se usa el camión } i \text{ para repartir el producto } j \\ 0 & \text{si no es así} \end{cases}$

Entonces, el PE apropiado es

$$\min z = 45y_1 + 50y_2 + 55y_3 + 60y_4$$

s.a $100x_{11} + 200x_{12} + 300x_{13} + 500x_{14} + 800x_{15} \leq 400y_1$

$100x_{21} + 200x_{22} + 300x_{23} + 500x_{24} + 800x_{25} \leq 500y_2$

$100x_{31} + 200x_{32} + 300x_{33} + 500x_{34} + 800x_{35} \leq 600y_3$

$100x_{41} + 200x_{42} + 300x_{43} + 500x_{44} + 800x_{45} \leq 1\,100y_4$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1$

Todas las variables son 0 o 1

PROBLEMAS DE REPASO

2 Sitúe la tienda en el punto 7. Ubique, en general, la tienda en la media aritmética de la ubicación de todos los clientes.

3 **a** Utilice $\frac{93}{8}$ unidades de materia prima, venda $\frac{93}{4}$ del producto 1 y $\frac{15}{2}$ unidades del producto 2.

c Pague ligeramente menos de 5 dólares por una unidad adicional de materia prima.

5 [1.18, 1.63).

7 Produzca 20 unidades durante cada uno de los tres meses.

18 Ubique la tienda en el punto 5; en general, sitúe la tienda en la mediana de las ubicaciones de los clientes.

Capítulo 12

SECCIÓN 12.1

1 $\dfrac{e^{10}-1}{2}$.

3 $Ih - \dfrac{dh}{2}$.

SECCIÓN 12.2

1 $2y(2y + y^2) - 3y + 2(y^2 - y)$.

SECCIÓN 12.3

1 **a** $\frac{2}{9}$.

c No.

e $\frac{1}{4}$.

SECCIÓN 12.4

1 $\frac{2}{3}$.

3 .001.

SECCIÓN 12.5

1 **a** Sea **S** = número vendido. Entonces, $E(\mathbf{S}) = \frac{290}{3}$, y var $\mathbf{S} = \frac{200}{9}$.

3 **a** $F(a) = 0$ para $a \leq 0$, $F(a) = 1 - e^{-a}$ para $a \geq 0$.

b $E(\mathbf{X}) = 1$ var $\mathbf{X} = 1$.

c $e^{-1} - e^{-2}$.

SECCIÓN 12.6

2 .8749.

PROBLEMAS DE REPASO

3 $\frac{25}{2}$.

5 **a** $E(\mathbf{X}) = 85$; var $\mathbf{X} = 9000$.

b $P\left(\mathbf{Z} \geq \dfrac{91-85}{(9\,000)^{1/2}}\right) = .476$.

7 **a** $\frac{1}{6}$.

b .004996.

Capítulo 13

SECCIÓN 13.1

1 Decisión maximin: campaña pequeña. Decisión maximax: campaña grande. Decisión de arrepentimiento minimax: campaña grande.

2 Decisión maximin: no construir. Decisión maximax: construir. Decisión de arrepentimiento maximax: construir. Decisión de valor esperado: construir.

5 Decisión maximin: licitación de 6 000, 8 000 u 11 000 dólares. Decisión maximax: oferta de 11 000 dólares. Decisión de arrepentimiento minimax: oferta de 11 000 dólares. Decisión del valor esperado: licitación de 11 000 dólares.

SECCIÓN 13.2

1 **a** Aversión al riesgo.

b Prefiera L_1; premio de riesgo para L_2 = \$339.

2 **a** Búsqueda de riesgo.

b Prefiera L_2; premio de riesgo para L_2 = −\$235.

6 **b** 1 900 dólares.

7 El curso de estadística.

13 Se prefiere L_1.

SECCIÓN 13.4

1 Contrate al geólogo. Si da un informe favorable, perfore; si no es así, no perfore. La ganancia esperada es 180 000 dólares; VEIM = 20 000 dólares; VEIP = 55 000 dólares.

4 Mercado sin pruebas. Ganancia esperada = 16 000 dólares; VEIM = 3 800; VEIP = 14 000.

9 Debe jugar con audacia durante el primer encuentro. Si gana el primer juego, debe jugar en forma conservadora durante el segundo. Si pierde el primer juego, debe jugar con audacia en el segundo. Si empata después de dos juegos, debe jugar con audacia durante el tercer juego.

12 **a** Comprar el oro ahora.

b Esperar el congreso y (si es posible) comprar el oro después.

SECCIÓN 13.5

2 Contrate al geólogo; si predice un sismo, construya en Roy Rogers; si no predice sismo alguno, construya en Diablo. Costo total esperado = 13 900 000 dólares. VEIM = 1 100 000 dólares; VEIP = 2 millones de dólares.

4 Contrate a la compañía. Si pronostica un éxito, saque al aire el espectáculo. Si predice un fracaso, no transmita el espectáculo. Ganancia esperada = 35 000 dólares; VEIM = 50 000 dólares; VEIP = 75 000 dólares.

SECCIÓN 13.6

1 **c** La función de utilidad nacional es de la forma $.3u_1(x_1) + .5u_2(x_2) + .2u_1(x_1)u_2(x_2)$.

6 **d** $k_3 > 0$.

Hidden page

Capítulo 15

SECCIÓN 15.2

1 **a** 4 000 galones.
b 12 pedidos por año.
c Un mes.
e Para un plazo de entrega de dos semanas, el punto en que hay que hacer un pedido = $\frac{48\,000}{26}$ = 1 846.15 galones. Para un plazo de entrega de 10 semanas, el punto de reabastecimiento = 1 230.77 galones.

3 **a** Enviar $\frac{30}{7.07}$ = 4.24 camionetas por hora.
b Enviar $\frac{30}{5}$ = 6 camionetas por hora.

12 **b** Seis representantes en cada programa.
c Efectuar 4.5 programas por año.
d 2.25 representantes.

SECCIÓN 15.3

1 Pida de 300 cajas por año. Haga 3.2 pedidos por año.

5 Pida 100 termómetros.

SECCIÓN 15.4

2 Tamaño óptimo de la corrida = 692.82. Haga 34.64 corridas por año.

SECCIÓN 15.5

2 Siempre que al distribuidor le falten 10 automóviles, se debe hacer un pedido de 50 automóviles. El déficit máximo debe ser de 10 automóviles.

SECCIÓN 15.6

1 La demanda es demasiado irregular como para justificar el uso de EOQ.

PROBLEMAS DE REPASO

1 **a** 268.33 escritorios.
b 22.36 pedidos por año.
c 2(22.36)(300) = $13 416.
d Para un plazo de entrega de una semana, el punto de reabastecimiento = 115.38 escritorios; para un tiempo de 5 semanas de plazo de entrega, punto de reabastecimiento = 40.93 escritorios.
e Pida 342.05 escritorios 17.54 veces al año.

3 La EOQ para el precio más bajo es óptimo. Por lo tanto, se deben pedir 417.79 cámaras.

Capítulo 16

SECCIÓN 16.2

1 **a** $q = 6$.
b $q = 2$.
c $E(q)$ no es una función convexa de q.

SECCIÓN 16.3

1 Pida de 35 automóviles.

3 q^* decrecerá.

5 **a** Pedido de 60 celdas.

SECCIÓN 16.4

2 775 000 dólares con $F(.25) = .60$.

3 107.5 árboles con $F(.25) = .60$.

SECCIÓN 16.5

1 Ubíquela en $\frac{2^{1/2}}{2}$.

SECCIÓN 16.6

1 Cantidad de pedido = 45.61, punto de reabastecimiento = 32.6, existencias de seguridad = 12.6.

2 **a** Punto de reabastecimiento = 57.9, existencias de seguridad = 17.9.
b Punto de reabastecimiento = 60.60, stock de seguridad = 20.60.

SECCIÓN 16.7

1

SLM_1	Punto de reabastecimiento
80%	11.06
90%	16.46
95%	20.24
99%	26.30

En el caso de SLM_2 = 0.5 de agotamiento de stock al año, el punto de reabastecimiento es 32 06.

3 **a** SLM_1 = 98.75%.
b $r = 20$ es el punto de reabastecimiento mínimo con SLM_1 que supera el 95%.
c Necesitamos un punto de reabastecimiento de por lo menos 30 unidades.

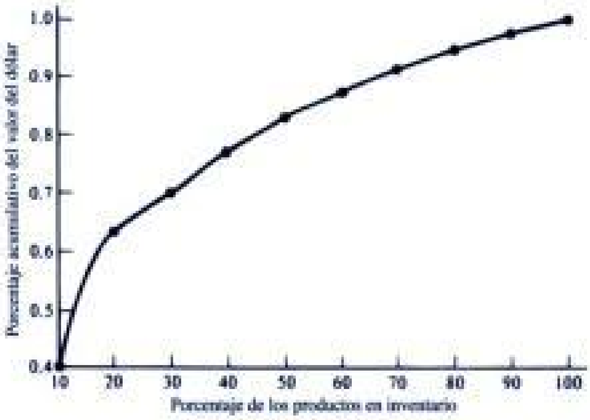
SECCIÓN 16.8

1 $R = 0.23$ años y $S = 3\,241$.

SECCIÓN 16.9

1 Productos tipo A: 1 y 2; productos tipo B: de 3 a 6; productos tipo C: de 7 a 10. Véase figura 12.

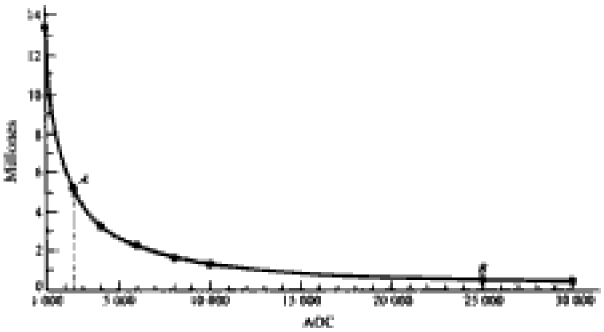
FIGURA 12



SECCIÓN 16.10

1 a Véase figura 13.

FIGURA 13



PROBLEMAS DE REPASO

1 a Hornee 40 docenas de galletas.
b Hornee 58.6 docenas de galletas.
c Hornee 55 docenas de galletas.

3 a Cantidad de pedido = 707.11, costo por déficit = 12.41 dólares.
b Cantidad de pedido = 707.11. Si se supone una penalización por pérdida de ventas de 8 − 5 = 3 dólares, el costo por déficit = 9.12 dólares.
c Un punto de reabastecimiento de cero hará el trabajo.

Capítulo 17

SECCIÓN 17.2

1
$$\begin{array}{c} \\ \text{Soleado} \\ \text{Nublado} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Soleado} & \text{Nublado} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} \end{array}$$

2 Estado
$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

4 Denotemos con SN el evento de que ayer estuvo soleado y hoy está nublado, y así sucesivamente.
$$\begin{array}{c|cccc} & SS & SN & NS & NN \\ \hline SS & .95 & .05 & 0 & 0 \\ SN & 0 & 0 & .40 & .60 \\ NS & .70 & .30 & 0 & 0 \\ NN & 0 & 0 & .20 & .80 \end{array}$$

SECCIÓN 17.3

1 a Urbana, .651; suburbana, .258; rural, .091.
b 31.5%.

SECCIÓN 17.4

1 2.

2 Sí.

3 a Estado 4.
b Estados 1, 2, 3, 5, y 6.
c {1, 3, 5} y {2, 6}.

4 P_1 es ergódica; P_2 no es ergódica.

SECCIÓN 17.5

1 Urbana, $\frac{38}{183}$; suburbana, $\frac{90}{183}$; rural, $\frac{55}{183}$.

3 a Estado 1, $\frac{3}{5}$; estado 2, $\frac{2}{5}$.

4 Reemplace un automóvil regular.

7 Precio esperado del stock 1 = 16.67 dólares; precio esperado del stock 2 = 16.00 dólares.

SECCIÓN 17.6

1 a 1.11 + 0.99 + 0.99 + 0.88 = 3.97.
b .748.

2 1 + 0.80 + 18 = 19.80 años.

11 a 14.3%.
b Reducir el periodo de garantía ahorrará \$715,000 − \$392,500 = \$322,500.

SECCIÓN 17.7

1 7 778 principiantes; 7 469 estudiantes de segundo año; 8 057 estudiantes del penúltimo año y 7 162 estudiantes del último año.

2 Cada adulto que trabaja tiene que contribuir con 2 000 dólares más.

PROBLEMAS DE REPASO

1 Se producirá un promedio de $\frac{260}{3}$ herramientas por día.

2 a .815.
b Ganancias anuales sin garantía = (3 000)(tamaño del mercado total)($\frac{1}{4}$). Ganancias anuales con garantía = (2 700)(tamaño del mercado total)($\frac{4}{9}$). Las ganancias con garantía son mayores.

3 Valor de la estrella = 4 400 000; dólares; valor del abridor = 3 199 000 dólares; valor del sustituto = 1 600 000 dólares.

4 a Se comprarán cada año 1 638 270 libros nuevos, 1 474 443 libros usados una vez, 1 179 554 libros usados dos veces y 707 733 libros usados tres veces.

Capítulo 18

SECCIÓN 18.1

1 Empiece por tomar 4 cerillas. En cada vuelta sucesiva, tome 5 −(número de cerillas que toma el contrincante en la última vuelta).

2 Los jugadores empiezan con 16.25, 8.75 y 5. 00 dólares.

donde x_{12} debe cumplir con $x_{12} \geq 0$ y $i + x_{12} \geq d_{12}$. En el caso de $t \leq 11$,

$$f_t(i_t, x_{t-1}) = \min_{x_t} \{c_t x_t + 5|x_t - x_{t-1}| + h_t(i + x_t - d_t) + f_{t+1}(i_t + x_t - d_t, x_t)\}$$

donde x_t debe satisfacer $x_t \geq 0$ y $i_t + x_t \geq d_t$. Trabajamos hacia atrás hasta que calculamos $f_1(20, 20)$.

SECCIÓN 18.7

1 Si el inventario inicial es de 200 unidades, la única modificación es producir 200 unidades menos durante el periodo 1.

2 Tanto el método de Wagner-Whitin como el de Silver-Meal proporcionan el programa de producción siguiente: periodo 1, 90 unidades; periodo 4, 230 unidades. El costo total es 176 dólares.

PROBLEMAS DE REPASO

1 El camino más corto desde el nodo 1 hasta el nodo 10 es 1–4–8–10. La ruta más corta desde el nodo 2 hasta el 10 es 2–5–8–10.

2 Mes 2, 1 unidad; mes 3, 4 unidades. Costo total: 12 dólares.

4 Por seis vuelos, la aerolínea gana 540 dólares con 3 a Miami, 2 a Los Ángeles y uno a Nueva York, o bien, tres a Miami y tres a Los Ángeles. En el caso de cuatro vuelos, la aerolínea gana 375 dólares con dos a Miami y dos a Los Ángeles.

5 Sin la moneda de 20 centavos, use una de 50, una de 25, una de a 10, una de a 5 centavos y una de un centavo. Con la moneda de 20 centavos, use una de a 50, dos de a 20 centavos y una de un centavo.

7 a Sea $f_t(w)$ el costo mínimo en que se incurre al cumplir con la demanda para los años $t, t+1, \ldots, 5$, dado que (antes de los contratos y las liquidaciones del año t) están disponibles w trabajadores.

h_t = trabajadores contratados al inicio del año t
d_t = trabajadores despedidos al inicio del año t
w_t = trabajadores necesarios durante el año t

Entonces,

$$f_t(w) = \min_{h_t, d_t} \{10\,000h_t + 20\,000d_t + 30\,000(w + h_t - d_t) + f_{t+1}(h_t + .9(w - d_t))\}$$

donde h_t y d_t deben satisfacer $0 \leq h_t$, $0 \leq d_t \leq w$, y $w + h_t - d_t \geq w_t$.

Capítulo 19

SECCIÓN 19.1

1 Dos galones de leche para cada tienda.

2 Dos millones de dólares a la inversión 1, 0 dólares a la inversión 2 y 2 millones de dólares a la inversión 3.

SECCIÓN 19.2

1 Produzca tres unidades durante el periodo 1, ninguna unidad en el periodo 2 y una unidad en el periodo 3.

2 Produzca en cualquier momento la cantidad de unidades necesarias para llevar el nivel del stock del periodo (antes de que se cumpla la demanda del periodo) a 2 unidades.

SECCIÓN 19.3

1 Ulanowsky debe jugar en forma atrevida durante el primer juego. Si gana el primer juego, entonces debe jugar de modo conservador en el segundo. Si pierde en el primer juego, entonces debe jugar valientemente en el segundo. Si hay un juego de desempate, Ulanowsky debe jugar con arrojo. Su probabilidad de ganar el partido es de .537.

2 En su primer tiro, Dickie debe apostar 2 dólares. Si pierde, está aniquilado, pero si gana, apuesta 1 dólar en el segundo tiro. Si gana en este tiro, debe detenerse. Si pierde en el segundo tiro, apuesta 2 dólares en el tercer tiro.

SECCIÓN 19.4

2 Sea $f_t(d)$ el estado de los activos máximo esperado de la compañía al final del año 10, dado que al principio del año t, la firma tiene d dólares en activos. Entonces,

$$f_{10}(d) = \max_i \left\{p \sum_y q_y(d + i + y) + (1-p)\sum_y q_y(d - i + y)\right\}$$

donde $0 \leq i \leq d$. Para $t \leq 9$,

$$f_t(d) = \max_i \left\{p \sum_y q_y f_{t+1}(d + i + y) + (1-p)\sum_y q_y f_{t+1}(d - i + y)\right\}$$

Trabajamos hacia atrás hasta que se calcula $f_1(10\,000)$.

5 Siempre debemos dar mantenimiento a una máquina que funciona y siempre reparar una máquina descompuesta.

6 Sea $f_t(p)$ los ingresos máximos esperados obtenidos al vender una parte de las acciones de Wivco durante los días $t, t+1, \ldots, 30$, dado que el precio de una acción al inicio del día t es p dólares. Entonces,

$$f_{30}(p) = p \qquad \textbf{(Acciones vendidas)}$$

y para $t \leq 29$,

$$f_t(p) = \max \left\{\begin{matrix} p & \textbf{(Acciones vendidas)} \\ \sum_x q(x) f_{t+1}((1 + x/100)p) & \textbf{(Acciones conservadas)} \end{matrix}\right\}$$

Trabajamos hacia atrás hasta que se determina $f_1(10)$, y así continuamos hasta que la acción óptima es vender las acciones.

7 Sara no debe aceptar al primer gato, pero debe aceptar cualquier gato posterior que es el mejor que Sara vio hasta ahora. La probabilidad de que Sara obtenga su gato preferido es $\frac{11}{24}$.

8 Defina $f_t(i)$ como el costo neto mínimo esperado en que se incurre en los periodos $t, t+1, \ldots, 100$, dado que el nivel de inventario es i al principiar el periodo t. Entonces,

$$f_{100}(i) = \min_x \left\{\sum_{d \leq i+x} q_d(i + x - d - rd) + \sum_{d > i+x} q_d(p(d - i - x) - r(i + x)) + c(x)\right\}$$

donde $x \geq 0$. Para $t \leq 99$,

$$f_t(i) = \min_x \left\{ \sum_{d \leq i+x} q_d(i + x - d - rd) + \sum_{d > i+x} (p(d - i - x) - r(i + x))q_d + c(x) + \sum_{d \leq i+x} q_d f_{t+1}(i + x - d) + \sum_{d > i+x} q_d f_{t+1}(0) \right\}$$

donde $x \geq 0$. Se trabaja hacia atrás hasta determinar $f_1(0)$.

10 Defina $f_t(d)$ como el número máximo esperado de unidades vendidas en los mercados $t, t + 1, \ldots, T$, dado que están disponibles d dólares para gastar en estos mercados. Entonces,

$$f_T(d) = c_T k_T p_T(d)$$

y para $t \leq T - 1$,

$$f_t(d) = \max_x \{c_t k_t p_t(x) + f_{t+1}(d - x)\}$$

donde $0 \leq x \leq d$. Se trabaja hacia atrás hasta calcular $f_1(D)$.

SECCIÓN 19.5

1 a

Inventario al comienzo del periodo	Nivel de producción del periodo
0	4
1	3
2	0
3	0

2 a Siempre cargue una tasa de interés de 11% en los préstamos.

PROBLEMAS DE REPASO

1 Asigne 2 representantes de ventas al distrito 1, 1 representante de ventas al distrito 2 y 2 representantes al distrito 3.

2 a Produzca 2 unidades durante el periodo 1. Durante el periodo 2, produzca 1 o 2 unidades si el inventario inicial es 0; si el inventario inicial para el periodo 2 es 1 o 2 unidades, no produzca unidades durante el periodo 2. Durante el periodo 3, produzca 1 unidad si el inventario inicial es 0; de lo contrario, no produzca unidades durante el periodo 3.

4 Sea $f_t(b)$ el beneficio neto máximo descontado obtenido durante los años $t, t + 1, \ldots, 2039$, dado que al comienzo del año t están disponibles b barriles de petróleo. Entonces

$$f_t(b) = \max_{d,x} \{u(x) - d + \beta p(d) f_{t+1}(b - x + 500\,000) + \beta(1 - p(d)) f_{t+1}(b - x)\}$$

donde $0 \leq d$ y $0 \leq x \leq b$. Se trabaja hacia atrás hasta determinar $f_{2004}(B)$ y luego se calcula la estrategia de consumo óptima.

5 a Intente contestar las dos primeras preguntas y luego deténgase. La cantidad de dinero esperado ganada es $9 000.

Capítulo 20

SECCIÓN 20.2

1 $\frac{6}{7}$.

2 $\frac{555}{11}$ minutos.

4 a $\frac{2e^{-2}}{3} = .09$.

b $1 - e^{-2} - 2e^{-2} = .594$.

SECCIÓN 20.3

2 b $\frac{121}{144}$.

c $\frac{1}{144}$.

SECCIÓN 20.4

1 a $\frac{5}{6}$.

b $\frac{25}{6}$ pasajeros.

c $\frac{1}{2}$ minuto.

3 a Sin cambio.

b Se reduce a la mitad.

c Sin cambio.

8 Dos puntos de revisión.

10 b 1 taxi.

c $120 por hora.

SECCIÓN 20.5

1 a 1.75 clientes por hora.

b $\frac{114}{130}$.

6 Ingreso promedio por hora del peluquero 1 = $53.23. Ingreso promedio por hora del peluquero 2 = $40.00.

SECCIÓN 20.6

1 Dos cajas registradoras.

3 a Finanzas, $\frac{1}{5}$ de día; comercialización, $\frac{1}{10}$ de día.

b 0.078 de día.

d .07.

4 4 Servidores.

13 $\frac{3}{4}$ de mecánico.

14 El sistema 1 es más efectivo.

SECCIÓN 20.7

1 5 200 miembros.

3 200 empresas. La probabilidad de que por lo menos haya 3200 empresas es cero.

SECCIÓN 20.8

1 $\frac{2}{3}$ de automóvil.

4 **a** $\frac{5}{6}$ de cliente.
b 9 minutos.
c $\frac{1}{3}$.

SECCIÓN 20.9

1 El supertrabajador es mejor.

2 **a** $\frac{81}{125}$.
b $\frac{6}{5}$ cachorros.

SECCIÓN 20.10

2 **a** 2.73 automóviles.
b 0.06 h.

4 $\frac{11}{3}$ estudiantes.

SECCIÓN 20.11

1 15 bombas contra incendio.

7 **b** 2 copias.

SECCIÓN 20.12

1 Usando cuatro categorías (cada una con $e_i = 6$), se acepta la hipótesis de que la duración de una llamada telefónica es exponencial con media de $\frac{1024}{24}$ segundos.

SECCIÓN 20.15

1 Los exámenes pasan un promedio de $\frac{19}{8}$ horas en el sistema, los trabajos de investigación pasan un promedio de $\frac{27}{4}$ horas en el sistema y las notas de clase pasan un promedio de $\frac{23}{2}$ horas en el sistema.

2 Prioridad más alta para $k = 1$ clientes, siguiente prioridad más alta para $k = 2$ clientes, etcétera.

PROBLEMAS DE REPASO

2 **a** 8 minutos.
b $\frac{(1.25)^2 e^{-1.25}}{2!} = .22$.
c $e^{-0.75} = .47$.

3 **a** 3 ventanas.
b 3 ventanas.

6 2 copiadoras

7 **a** $\frac{2}{3}$ de automóvil.
b 8.2 minutos.

8 Rente el terreno vacío. Entonces la ganancia perdida diaria esperada es 21(20)(0.008) = \$3.36.

9 $\frac{1}{2}$ hora.

11 Tener una tripulación de 100 trabajadores.

16 **a** Ambas líneas están libres $\frac{8}{13}$ del tiempo, una línea está libre $\frac{4}{13}$ del tiempo y ambas líneas están ocupadas $\frac{1}{13}$ del tiempo.
b $\frac{6}{13}$ de línea.
c $30(\frac{1}{13}) = \frac{30}{13}$ de personas que llaman por hora.

Capítulo 21

SECCIÓN 21.4

1 Aproximadamente 0.76 de minuto. La respuesta podría variar según los números aleatorios utilizados en los cálculos.

3 Véase la figura 15. Variables utilizadas en el modelo:

VALOR = valor mostrado en el lanzamiento de los dados

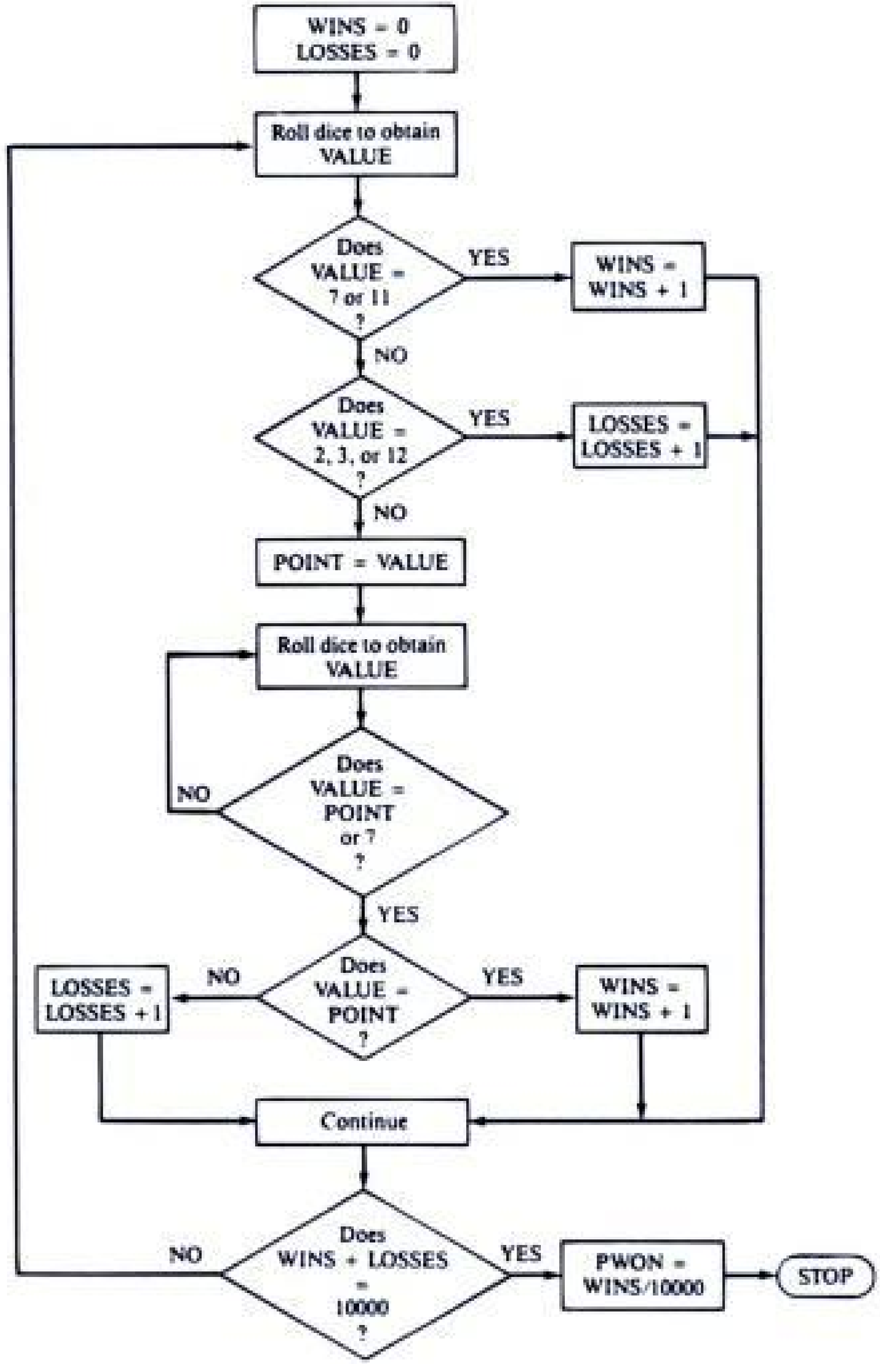
ÉXITOS = número total de veces que se gana hasta la simulación actual

FRACASOS = número total de veces que se pierde hasta la simulación actual

PUNTO = valor mostrado en el primer lanzamiento

PEXI = proporción de veces que se gana

FIGURA 15



SECCIÓN 21.5

1 MIT: genere un número aleatorio r.

If ($r \le 0.5$) then

Ifx = $2r$

else

Ifx = $3 - 2\sqrt{2 - 2r}$

endif

MAR: generar dos números aleatorios, r_1 y r_2.

Set $x^* = 3r_1$

If ($x^* \le 1$) then

Aceptar x^* como la variable aleatoria

else

If ($r_2 \le \frac{1}{2}(1 - r_1)$) then

Aceptar x^* como la variable aleatoria else

Hidden page

Promedie estas relaciones. Suponga que se obtiene 1.3. Entonces para obtener el pronóstico para un día en el que se paga a los profesores, calcule un pronóstico mediante el método básico y multiplique este pronóstico por 1.3.

SECCIÓN 24.8

1 **a** Estime beta = 0.88.

b Sí.

c 45%.

e 16.1%.

3 **a** $\widehat{\text{VENTAS}} = 52\,900 + 912.5T - 9\,859Q_1 - 8\,467Q_2 + 20\,129Q_4$, donde T = número de trimestre y Q_i = variable ficticia para el trimestre i.

d El modelo del inciso (b) tiene el error estándar más pequeño que el modelo del inciso (a) Así, el modelo del inciso (b) dará una mejor predicción.

4 $\widehat{\text{VENTAS}} = e^7\ \text{PRECIO}^{-0.67}$.

5 **b** Indica autocorrelación positiva.

Índice

Hidden page

Hidden page

Hidden page

Obra que se caracteriza por utilizar un lenguaje sencillo, atractivo para cualquier lector, ahora en su nueva edición de Investigación de Operaciones, Wayne L. Winston nos presenta además once casos al final del libro, a fin de aplicar todo lo estudiado en el curso. El nivel matemático que se requiere es cálculo, álgebra matricial y estadística básica; el capitulo 2 es un breve repaso de álgebra matricial y el 12 proporciona una revisión sobre los temas de probabilidad y cálculo que se utilizan en el resto del libro.

Características

- En la parte de modelado el autor incluye una metodología que ayuda al estudiante a que una vez identificado el problema, pueda traducirlo a lenguaje matemático.
- Dedica dos capítulos al análisis de sensibilidad y lo ilustra detalladamente con ejemplos y reportes generados con Lindo.
- Describe con detalle el uso del Solver de Excel, de los paquetes Lindo y Lingo e ilustra la utilización de Promodel y @Risk en el análisis y solución de problemas mediante simulación en sistemas de servicios, análisis de modelos financieros, de regresión y de series cronológicas.

THOMSON

MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. 52(55)1500-6000
Fax 52(55)5281-2656
editor@thomsonlearning.com.mx
México.D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
thomson@thomsonlearning.com.ar
Buenos Aires, ARGENTINA

EL CARIBE
Tel. (787) 641-1112
Fax (787) 641-1119
San Juan, PUERTO RICO

PACTO ANDINO
Tel. (571)340-9470
Fax (571)340-9475
cliente@thomsonlearning.com.co
Bogotá, COLOMBIA

ESPAÑA
Tel. (3491)446-3350
Fax (3491)445-6218
clientes@paraninfo.es
Madrid, ESPAÑA

ISBN 970-686-362-1