

Reconstrucción de escenas 3D a partir del movimiento

Nicolás Pérez de la Blanca Capilla
 Procesamiento de la Información Visual (VIP)
 Dpto de Ciencias de la Computación e I.A.
 Universidad de Granada

El problema

$f(a,b,c)=0$
 $(a,b) \rightarrow A$ (reconstrucción)
 $(a,b,c) \rightarrow (a,b,c)$ (calibración)
 $(a,b) \rightarrow c$ (transferencia)

Algunos ejemplos

- **MatchMoving**
 Calcular el movimiento de la cámara desde el vídeo (registrar objetos reales y virtuales en movimiento)
- **Reconstrucciones 3D**

¿Que vamos a ver?

- Conceptos de geometría
- Homografía
- Reconstrucción con 2 vistas
- Reconstrucción con 3 vistas
- Reconstrucción con n-vistas
- Reconstrucción de escenas deformable

Posibles situaciones

- **Una Vista:** Modelo de Cámara, Calibración, Geometría de una vista.
- **Dos Vistas:** Geometría epipolar, Reconstrucción 3D, Cálculo de F, Calculo de estructura,
- **Tres Vistas:** Tensor trifocal, Cálculo de T.
- **N Vistas:** N-Linealidades, Reconstrucción desde multiples vistas, Reconstrucción de Escenas dinámicas.

Geometría de la deformación

La reproduction interdite (Reproducción Prohibida), 1937, René Magritte.

Modelo de proyección central

illum in tabula per radios Solis, quàm in caelo contingit: hoc effi, si in caelo superior pars deliqui patiatur, in radiis apparebit inferior deficere, vt ratio exigit optica.

Soli deliquimus Anno Christi 1544. The 24th January Louanij

Sic nos exactè Anno .1544. Louanij eclipsim Solis obseruauimus, inuenimusq; deficere paulò plus q̄ dex-

N. Pérez de la Blanca
CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UII

Geometría proyectiva 2D

- Puntos, líneas y cónicas
- Transformaciones
- Razón-cruzada e invariantes

N. Pérez de la Blanca
CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UII

Coordenadas homogéneas

- Representación homogénea de líneas
 $ax + by + c = 0 \quad (a, b, c)^T \sim k(a, b, c)^T, \forall k \neq 0$
 Clases de equivalencia de vectores.
- Representación homogénea de puntos
 $ax + by + c = 0 \quad (x, y, 1)^T \sim k(x, y, 1)^T, \forall k \neq 0$

El punto x está en la línea l si y solo si $x^T l = l^T x = 0$

Coordenadas homogéneas $(x_1, x_2, x_3)^T$ pero solo 2GL
 Coordenadas afines $(x, y)^T$

N. Pérez de la Blanca
CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UII

Puntos ideales y la recta del infinito

Cruce de rectas paralelas

$l = (a, b, c)^T$ and $l' = (a, b, c')^T \quad l \times l' = (b, -a, 0)^T$

Example

$(b, -a)$ Vector tangente
 (a, b) Dirección normal

Puntos ideales $(x_1, x_2, 0)^T$
 Recta del infinito $l_\infty = (0, 0, 1)^T$

$\mathbf{P}^2 = \mathbf{R}^2 \cup l_\infty$ Notemos que en \mathbf{P}^2 no hay distinción entre los puntos ideales y los otros

N. Pérez de la Blanca
CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UII

Cónica y cónicas duales

$x^T C x = 0$ with $C = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$

Una línea tangente a la cónica C satisface $l^T C^* l = 0$

En general (C rango total): $C^* = C^{-1}$

Cónica dual = Cónica de líneas = Envolvente de la cónica

N. Pérez de la Blanca
CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UII

Aplicaciones entre planos

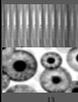
La proyección central puede expresarse por $x' = Hx$

N. Pérez de la Blanca
CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UII



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Transformaciones Projectivas

Definición:

Una *proyectividad* es una aplicación invertible h de P^2 en si mismo tal que tres puntos x_1, x_2, x_3 son colineales si y solo si $h(x_1), h(x_2), h(x_3)$ lo son.

Transformación proyectiva entre planos

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad x' = H x$$

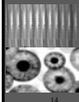
8 GL

proyectividad=colineación= transformación proyectiva =homografía

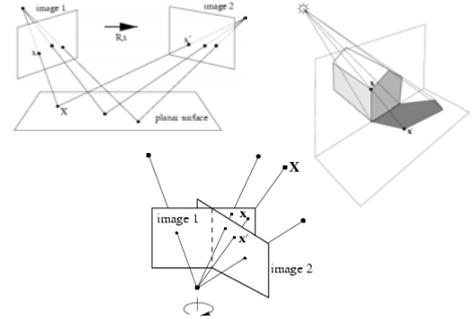


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

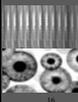


Más ejemplos



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Decomposición de transformaciones proyectivas

$$H = H_s H_A H_p = \begin{bmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ v^T & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & t \\ 0 & v \end{bmatrix}$$

$$A = sRK + tv^T$$

decomposición única (if $s > 0$)

K Triangular-superior, $\det K = 1$

Ejemplo:

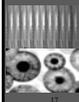
$$H = \begin{bmatrix} 1.707 & 0.586 & 1.0 \\ 2.707 & 8.242 & 2.0 \\ 1.0 & 2.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 \cos 45^\circ & -2 \sin 45^\circ & 1.0 \\ 2 \sin 45^\circ & 2 \cos 45^\circ & 2.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Transformación de líneas y cónicas

Para una transformación de puntos
 $x' = H x$

La transformación de líneas es

$$l' = H^{-T} l$$

La transformación de cónicas es

$$C' = H^{-T} C H^{-1}$$

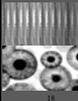
La transformación de cónicas duales es

$$C^* = H C^* H^T$$



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



La línea del infinito

$$l'_\infty = H_A^{-T} l_\infty = \begin{bmatrix} A^{-T} & 0 \\ -A^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = l_\infty$$

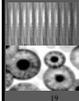
La línea del infinito l_∞ es una línea fija bajo una transformación proyectiva H si y solo si H es una afinidad

Nota: no es una aplicación fija punto a punto

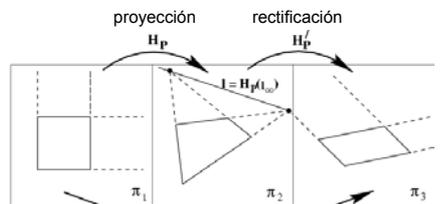


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Propiedades afines desde imágenes



$$H'_p = H_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \quad l_\infty = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^T, l_3 \neq 0$$

Rectificación afín

$v_2 = l_3 \times l_4$
 $v_1 = l_1 \times l_2$
 $l_\infty = v_1 \times v_2$

CURSO DE DOCTORADO
 Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
 UIJ

Los puntos circulares

“puntos circulares”

$x_1^2 + x_2^2 + dx_1x_3 + ex_2x_3 + fx_3^2 = 0$
 $x_3 = 0$

Algebraicamente definen direcciones ortogonales

$I = (1, i, 0)^T$
 $J = (1, -i, 0)^T$

$C_\infty^* = IJ^T + JI^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

CURSO DE DOCTORADO
 Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
 UIJ

Ángulos

Euclídeos: $l = (l_1, l_2, l_3)^T$ $m = (m_1, m_2, m_3)^T$

$\cos \theta = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2}{\sqrt{(l_1^2 + l_2^2)(m_1^2 + m_2^2)}}$

Projectivos: $\cos \theta = \frac{l^T C_\infty^* m}{\sqrt{(l^T C_\infty^* l)(m^T C_\infty^* m)}}$

$l^T C_\infty^* m = 0$ (ortogonal)

CURSO DE DOCTORADO
 Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
 UIJ

Propiedades métricas de C^*

$C_\infty^* = (H_p H_A H_S) C_\infty^* (H_p H_A H_S)^T$
 $= (H_p H_A) H_S C_\infty^* H_S^T (H_p H_A)^T$
 $= (H_p H_A) C_\infty^* (H_p H_A)^T$
 $= \begin{bmatrix} KK^T & KK^T v \\ v^T KK^T & v^T KK^T v \end{bmatrix}$

Transformación de rectificación usando SVD

$C_\infty^* = U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T$ $H = U$

CURSO DE DOCTORADO
 Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
 UIJ

Resumen de transformaciones

Invariantes

Proyectiva 8gl: $\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$ Concurrencia, colinealidad, orden de contacto (intersección, tangencia, inflexión, etc.), razón-cruzada

Afin 6gl: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Paralelismo, razón-áreas, razón-longitudes en líneas paralelas (ej. puntos medios), combinación lineal de vectores (centroides). **La línea del infinito l_∞ .**

Semejanza 4gl: $\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Razón-longitudes, ángulos. **Los puntos circulares I, J**

Euclídea 3gl: $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Longitudes y áreas

CURSO DE DOCTORADO
 Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
 UIJ

Geometría Projectiva 3D

- Puntos, líneas, planos y cuádricas
- Transformaciones
- Π_∞ , ω_∞ and Ω_∞

CURSO DE DOCTORADO
 Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
 UIJ

Jerarquía de transformaciones

Proyectiva
15 g.l. $\begin{bmatrix} A & t \\ v^T & v \end{bmatrix}$  **Invariantes**
Intersección y tangencia

Afin
12 g.l. $\begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$  Paralelismo de planos, Razón de volúmenes, centroides, **El plano del infinito π_∞**

Semejanza
7 g.l. $\begin{bmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$  **La cónica absoluta Ω_∞**

Euclídea
6 g.l. $\begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$  Volumen



El plano del infinito

$$\pi'_\infty = H_d^{-T} \pi_\infty = \begin{bmatrix} A^{-T} & 0 \\ -A t & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \pi_\infty$$

El plano del infinito π_∞ es un plano fijo bajo una transformación proyectiva H sii H es una afinidad

1. Posición canónica $\pi_\infty = (0,0,0,1)^T$
2. Contiene direcciones $D = (X_1, X_2, X_3, 0)^T$
3. Dos planos son paralelos \Leftrightarrow línea de intersección en π_∞
4. línea // línea (o plano) \Leftrightarrow punto de intersección en π_∞

La cónica absoluta

La cónica absoluta Ω_∞ es una cónica (puntos) en π_∞ .
En un referencial métrico:
 $\pi_\infty = (0,0,0,1)$ $\left. \begin{matrix} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \\ X_4 \end{matrix} \right\} = 0$

o cónica de direcciones: $(X_1, X_2, X_3) | (X_1, X_2, X_3)^T = 0$ (sin puntos reales)

La cónica absoluta Ω_∞ es una cónica fija bajo la transformación proyectiva H sii H es una semejanza

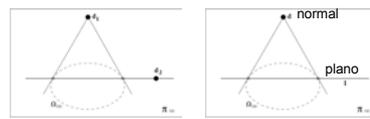
1. Ω_∞ es fija como un conjunto
2. Círculos intersecan Ω_∞ en dos puntos
3. Esferas intersecan π_∞ en Ω_∞

La cónica absoluta
(propiedades métricas)

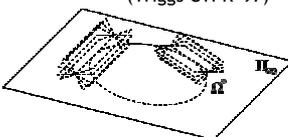
Euclídeo: $\cos \theta = \frac{(d_1^T d_2)}{\sqrt{(d_1^T d_1)(d_2^T d_2)}}$

Proyectivo: $\cos \theta = \frac{(d_1^T \Omega_\infty d_2)}{\sqrt{(d_1^T \Omega_\infty d_1)(d_2^T \Omega_\infty d_2)}}$

$d_1^T \Omega_\infty d_2 = 0$ (orthogonal=conjugado)



La cuádrlica dual absoluta
(Triggs CVPR '97)

$$\Omega_\infty^* = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$


La cuádrlica absoluta Ω_∞^* es una cuádrlica fija bajo la transformación proyectiva H sii H es una semejanza

1. 8 g.l.
2. Plano π_∞ es el vector nulo de Ω_∞
3. Angulos: $\cos \theta = \frac{\pi_1^T \Omega_\infty^* \pi_2}{\sqrt{(\pi_1^T \Omega_\infty^* \pi_1)(\pi_2^T \Omega_\infty^* \pi_2)}}$

Estimación de Transformaciones

Calcular las relaciones geometricas a partir de correspondencias ej. 2D

- Estimación Lineal (normalizada), no-lineal y de Máxima Verosimilitud
- Robusta (RANSAC)



Tipos de errores a minimizar

- Algebraico:** El que aparece al minimizar las ecuaciones de restricción directamente (LINEAL)

$$x'_i = Hx_i \Rightarrow x'_i \times Hx_i = 0 \Rightarrow A_i h = 0 \Rightarrow \text{Min} \|Ah\| \text{ con } \|h\| = 1$$

$$x_i^T Fx_i = 0 \Rightarrow A_i f = 0 \Rightarrow \text{Min} \|Af\| \text{ con } \|f\| = 1$$

$$x_i = PX_i \Rightarrow x_i \times PX_i = 0 \Rightarrow A_i p = 0 \Rightarrow \text{Min} \|Ap\| \text{ con } \|p\| = 1$$
 - Solución usando SVD
- Geométrico:** El que aparece al minimizar las distancias geometricas de las proyecciones con los verdaderos valores (NO LINEAL)
 - Error de reproyección
 - Solución iterativa por Levenberg-Marquardt

Error de reproyección

$$d(x, H^{-1}x')^2 + d(x', Hx)^2$$

$$d(x, \hat{x})^2 + d(x', \hat{x}')^2$$

Algoritmo DLT-homografía

Objetivo
 Dados $n \geq 4$ puntos en correspondencia 2D-2D $\{x_i \leftrightarrow x'_i\}$, determinar la matriz H de la homografía 2D tal que $x'_i = Hx_i$

Algoritmo

- Para cada correspondencia $x_i \leftrightarrow x'_i$ calcular un sistema lineal en H a partir de $x'_i \times Hx_i = 0$. Normalmente usando solo las dos primeras filas.
- Juntar las n 2x9 matrices A_i en una única $2nx9$ matriz A
- Obtener la SVD de A. La solución h es la última columna de V
- Obtener H desde h

Mínimos cuadrados No lineales

$$X = f(P) \quad \underset{P}{\text{argmin}} \|X - f(P)\|$$

- Newton iterativo
- Levenberg-Marquardt
- Levenberg-Marquardt disperso

Iteración Newton

Aproximación Taylor Jacobiano

$$f(P_0 + \Delta) \approx f(P_0) + J\Delta \quad J = \frac{\partial X}{\partial P}$$

$$\|X - f(P_1)\|$$

$$\|X - f(P_1)\| \approx \|X - f(P_0) - J\Delta\| = \|e_0 - J\Delta\|$$

$$\Rightarrow J^T J \Delta = J^T e_0 \Rightarrow \Delta = (J^T J)^{-1} J^T e_0$$

$P_{i+1} = P_i + \Delta$

$\Delta = (J^T J)^{-1} J^T e_0$ Ec.normal

$$\Delta = (J^T \Sigma^{-1} J)^{-1} J^T \Sigma^{-1} e_0$$

Levenberg-Marquardt

Ecuaciones normales

$$J^T J \Delta = N \Delta = J^T e_0$$

Ecuaciones normales aumentadas

$$N' \Delta = J^T e_0 \quad N' = J^T J + \lambda \text{diag}(J^T J)$$

$\lambda_0 = 10^{-3}$

éxito: $\lambda_{i+1} = \lambda_i / 10$ aceptar

fallo: $\lambda_i = 10 \lambda_i$ resolver de nuevo

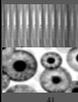
λ pequeño ~ Newton (convergencia cuadrática)

λ grande ~ descendente (decrecimiento garantizado)



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Levenberg-Marquardt

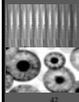
Requerimientos de la minimización

- Función de error a calcular f
- Valor de inicio P_0
- Opcionalmente, función para calcular J



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



La cámara



El Ciclope, c. 1914, Odile Redon

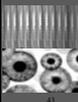
Modelo de Cámara

Calibración



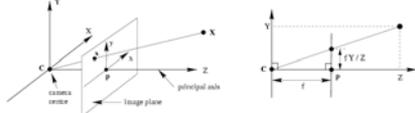
N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Modelo de cámara

El modelo "pinhole"



$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & p_x \\ 0 & f & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}$$

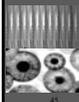


También cámaras afines



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Cámara proyectiva finita

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & p_x \\ & \alpha_y & p_y \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{R} [\mathbf{I} | -\tilde{\mathbf{C}}]$$

no-singular
11 g.l. (5+3+3)

Como descomponer \mathbf{P} en $\mathbf{K}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$?

$$\mathbf{P} = [\mathbf{M} | \mathbf{p}_4] \quad [\mathbf{K}, \mathbf{R}] = \mathbf{R} \mathbf{Q}(\mathbf{M}) \quad \tilde{\mathbf{C}} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}_4$$

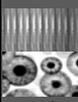
{cámaras finitas} = $\{\mathbf{P}_{4 \times 3} \ \& \ \det \mathbf{M} \neq 0\}$

Si rango $\mathbf{P}=3$, pero rango $\mathbf{M} < 3$, \Leftrightarrow cámara en el infinito

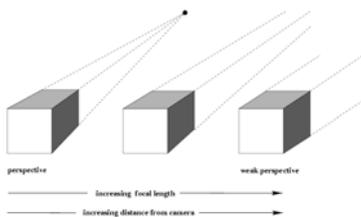


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

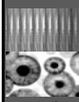


Cámara afín



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Resumen de cámaras afines

Cámara afín (8 g.l.)

$$\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} \alpha_x & s & t_1 \\ & \alpha_y & t_2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{1T} \\ \mathbf{r}^{2T} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & t_1 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_A = [3 \times 3 \text{ afín}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [4 \times 4 \text{ afín}]$$

1. Cámara afín=cámara con Π_∞ como plano principal
2. Cámara afín proyecta líneas paralelas en líneas paralelas
3. No tiene centro de proyección, pero si dirección de proyección $\mathbf{P}_A \mathbf{D} = 0$ (punto en Π_∞)

Importancia del centro de la cámara

$P = KR[I | -C]$ y $P' = K'R'[I | -C]$

$P' = K'R'(KR)^{-1}P$

$x' = P'X = K'R'(KR)^{-1}PX = K'R'(KR)^{-1}x$

$x' = H_{\infty}x$ con $H = K'R'(KR)^{-1} = K'R'^*K^{-1}$

¿Qué nos da la calibración?

$x = K[I | 0] \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$

$d = K^{-1}x$

$\cos \theta = \frac{d_1^T d_2}{\sqrt{(d_1^T d_1)(d_2^T d_2)}} = \frac{x_1^T (K^{-T}K^{-1})x_2}{\sqrt{(x_1^T (K^{-T}K^{-1})x_1)(x_2^T (K^{-T}K^{-1})x_2)}}$

Una línea l define un plano a través del centro de la cámara con vector normal $n=K'l$ medido en los ejes euclídeos de la cámara

La imagen de la cónica absoluta

$x = PX_{\infty} = KR[I | -\tilde{C}] \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = KRd$

La aplicación de π_{∞} en una imagen está dada por la homografía $x=Hd$, with $H=KR$

Imagen de la cónica absoluta (IAC)

$\omega = (KK^T)^{-1} = K^{-T}K^{-1} \quad (C \mapsto H^{-T}CH^{-1})$

(i) IAC solo depende de los intrínsecos
(ii) Angulos entre rayos $\cos \theta = \frac{x_1^T \omega x_2}{\sqrt{(x_1^T \omega x_1)(x_2^T \omega x_2)}}$
(iii) DIAC = $\omega^* = KK^T$
(iv) $\omega \Leftrightarrow K$ (factorización de Cholesky)
(v) Imagen de puntos circulares

Geometría de dos vistas

Geom. Epipolar
Reconstrucción 3D
Cálculo matriz-F
Cálculo Estruct.

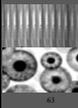
La geometría epipolar

C, C', x, x' y X son coplanares

Geometría epipolar

Matriz Fundamental $x'^T F x = 0$
 $F \rightarrow P, P'$

Matriz Esencial $\hat{x}'^T ([t]_x R) \hat{x} = 0$
 $E \rightarrow P, P'$



Transformación proyectiva e invariancia

$$\hat{x} = Hx, \hat{x}' = H'x' \Rightarrow \hat{F} = H'^{-T} F H^{-1}$$

F invariante a transformaciones 3D del espacio proyectivo

$$x = P X = (P H) (H^{-1} X) = \hat{P} \hat{X}$$

$$x' = P' X = (P' H) (H^{-1} X) = \hat{P}' \hat{X}$$

$$(P, P') \mapsto F \quad \text{única}$$

$$F \mapsto (P, P') \quad \text{no única}$$

Forma canónica

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ M & m \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} m \\ M \end{bmatrix} M$$



Cálculo de la Geometría epipolar

$$x'^T F x = 0$$

lineal (normalizada) :

$$(x'x, x'y, x'z, y'x, y'y, y'z, x, y, z, 1) \cdot f = 0$$

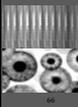
$$\text{mínima: } \det(F_1 + \lambda F_2) = 0$$

$$\text{EMV: } \sum_i d(x_i, \hat{x}_i)^2 + d(x'_i, \hat{x}'_i)^2 \text{ verificando } \hat{x}_i^T F \hat{x}'_i = 0$$

RANSAC

...

y emparejamiento automático de dos vistas



La matriz esencial

~ matriz fundam. para cámaras calibradas (K conocida)

$$E = \begin{bmatrix} t \\ R \end{bmatrix}, R = R[R^T t]_x$$

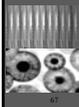
$$\hat{x}'^T E \hat{x} = 0 \quad (\hat{x} = K^{-1}x; \hat{x}' = K^{-1}x')$$

$$E = K'^T F K$$

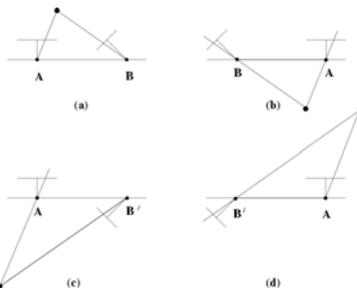
5 g.l. (3 para R; 2 para t salvo escala)

E es una matriz esencial si y solo si dos de sus valores singulares son iguales (y el tercero=0)

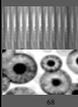
$$E = U \text{diag}(1, 1, 0) V^T$$



4 posibles cámaras a partir de E



Dada $P = [I | 0]$ existen 4 posibilidades para P' .
(solamente una solución tiene todos los puntos delante)



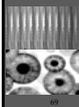
Reconstrucción de cámaras y estructura 3D

Problema de reconstrucción:

dados $x_i \leftrightarrow x'_i$, calcular P, P' y X_i

$$x_i = P X_i \quad x'_i = P' X_i \quad \text{Para todo } i$$

Sin información adicional y salvo una ambigüedad proyectiva



Pasos de la reconstrucción

- (i) Calcular F de las correspondencias
- (ii) Calcular las matrices de las cámaras desde F
- (iii) Calcular los puntos 3D para cada par de punto en correspondencia

Cálculo de F

Usar el algoritmo de 8-puntos (lineal), 7-puntos (non-linear) o 8+ (mínimos-cuadrados)

Cálculo de las matrices de las cámaras

usar $P = [I | 0]$ $P' = [[e'], F + e'v^T | \lambda e']$

Triangulación

Calcular la intersección de los dos rayos proyectados desde los puntos

Reconstrucción de los puntos 3D

$x = PX$ $x' = P'X$

$l = Fx'$ $l' = Fx$

image 1 image 2

Triangulación lineal

$x = PX$ $x' = P'X$

$x \times P'X = 0$ $AX = 0$

$x \begin{pmatrix} p_1^{3T} X \\ p_2^{3T} X \\ p_3^{3T} X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^{1T} X \\ p_2^{1T} X \\ p_3^{1T} X \end{pmatrix} = 0$

$y \begin{pmatrix} p_1^{3T} X \\ p_2^{3T} X \\ p_3^{3T} X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1^{2T} X \\ p_2^{2T} X \\ p_3^{2T} X \end{pmatrix} = 0$

$x \begin{pmatrix} p_1^{2T} X \\ p_2^{2T} X \\ p_3^{2T} X \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} p_1^{1T} X \\ p_2^{1T} X \\ p_3^{1T} X \end{pmatrix} = 0$

$A = \begin{bmatrix} xp^{3T} & -p^{1T} \\ yp^{3T} & -p^{2T} \\ x'p^{3T} & -p^{1T} \\ y'p^{3T} & -p^{2T} \end{bmatrix}$

Homogéneo invariante?
 $\|X\| = 1$ $(AH^{-1})(HX) = e$

No-homogéneo Error algebraico, sin restricciones (excepto en el afin)
 $(X, Y, Z, 1)$

Error geométrico

$d(x, \hat{x})^2 + d(x', \hat{x}')^2$ sujeto a $\hat{x}^T F \hat{x} = 0$
o equivalentemente sujeto a $\hat{x} = P\hat{X}$ y $\hat{x}' = P'\hat{X}$

Es posible calcular usando LM (para 2 o mas puntos)
o directamente (para 2 puntos)

Error geométrico

Reconstruir emparejamientos en ejes proyectivos minimizando el error de reproyección

$d(x_1, P_1 X)^2 + d(x_2, P_2 X)^2$

Solución óptima no-iterativa (see Hartley&Sturm, CVIU '97)

Solución óptima en el plano epipolar

Dado un plano epipolar, encontrar el mejor punto for (x_1, x_2)

Seleccionar los puntos mas cercanos (x_1', x_2') sobre las líneas epipolares
Obtener el punto 3D a través de la triangulación exacta
Garantizar mínimo error de reproyección (dado este plano epipolar)

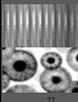
Imprecisión de la reconstrucción

Considerar los ángulos entre los rayos

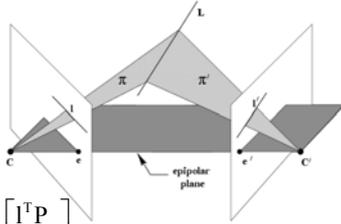


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Reconstrucción de líneas



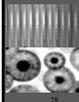
$$L = \begin{bmatrix} l^T P \\ l'^T P' \end{bmatrix}$$

No funciona para la geometría epipolar

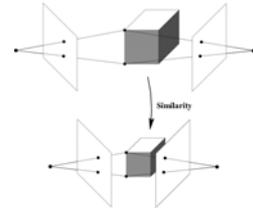


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Ambigüedad en la reconstrucción: semejanza



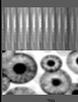
$$x_i = P X_i = (P H_S^{-1}) (H_S X_i)$$

$$P H_S^{-1} = K [R | t] \begin{bmatrix} R^T & -R^T t \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = K [R R^T | -R R^T t + \lambda t]$$

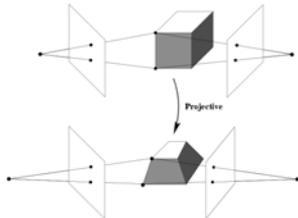


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Ambigüedad en la reconstrucción: proyectiva

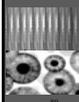


$$x_i = P X_i = (P H_P^{-1}) (H_P X_i)$$



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Terminología

$$x_i \leftrightarrow x'_i$$

Escena original X_i

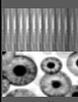
Reconstrucción proyectiva, afin, semejante
= reconstrucción que es idéntica salvo una transformación proyectiva, afin, semejante

Literatura: Reconstrucción Métrica y Euclídea
= reconstrucción semejante



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Teorema de reconstrucción proyectiva

Si un conjunto de puntos en correspondencia en dos vistas determina la matriz fundamental de forma única, entonces la escena y las cámaras pueden ser reconstruidas desde estas correspondencias solamente, y dos reconstrucciones desde estas correspondencias son proyectivamente equivalentes

$$x_i \leftrightarrow x'_i \quad (P_1, P_1', \{X_{1i}\}) \quad (P_2, P_2', \{X_{2i}\})$$

$$P_2 = P_1 H^{-1} \quad P_2' = P_1' H^{-1} \quad X_2 = H X_1 \quad (\text{excepto: } F x_i = x_i' F = 0)$$

Resultado ya conocido

$$P_2 (H X_{1i}) = P_1 H^{-1} H X_{1i} = P_1 X_{1i} = x_i = P_2 X_{2i}$$

\Rightarrow a lo largo del mismo rayo de P_2 , ídem for P_1

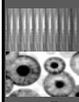
Dos posibilidades: $X_{2i} = H X_{1i}$, o puntos a lo largo de la "baseline"

Resultado clave:
permite reconstrucción desde imágenes no calibradas

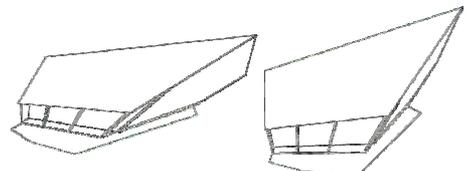


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Ejemplo



Reconstrucción estratificada

(i) Reconstrucción Projectiva
 (ii) Reconstrucción Afín
 (iii) Reconstrucción Métrica

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI

De proyectiva a afín

Recordemos el caso 2-D

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI

De proyectiva a afín

$(P, P', \{X_i\})$

$$\pi_\infty = (A, B, C, D)^T \mapsto (0, 0, 0, 1)^T$$

$$H^{-T} \pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^T$$

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \pi_\infty & D \end{bmatrix} \quad (\text{if } D \neq 0)$$

El teorema dice salvo una transformación proyectiva, pero proyectiva con π_∞ fijo es una transformación afín

Puede ser suficiente dependiendo de la aplicación, ej. Puntos medios, centroides, paralelismo

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI

Reconstrucción afín de la escena

Cocientes de distancias en una línea
 al igual que en el caso 2D el conocimiento del cociente de distancias permite determinar puntos del infinito

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI

Reconstrucción afín de la escena (cont.)

- Una de las cámaras es afín:
 - Sea $(P, P', \{X_i\})$ una reconstrucción proyectiva a partir de un conjunto de correspondencias para las cuales $P = [I|0]$. Supongamos que es conocido que P es afín, entonces puede obtenerse una reconstrucción afín con solo intercambiar las últimas dos columnas de P y P' y las últimas dos coordenadas de cada X_i

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI

Reconstrucción métrica

- La cónica absoluta es la clave para la reconstrucción métrica
 - Supongamos que la imagen de la cónica absoluta, ω , es conocida en alguna imagen, y que tenemos una reconstrucción afín cuya cámara correspondiente es $P = [M|m]$. Entonces la reconstrucción afín puede transformarse en métrica aplicando la transformación

$$H = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

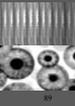
Donde A se obtiene por factorización de Cholesky de la ecuación $AA^T = (M^T \omega M)^{-1}$

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Restricciones sobre ω

Ortogonalidad

Puntos de anulación correspondientes a direcciones ortogonales

$$v_1^T \omega v_2 = 0$$

Líneas de anulación correspondientes a planos y los puntos de anulación de sus direcciones normales

$$l = \omega v$$

Parámetros internos conocidos

$$\omega = K^{-T} K^{-1}$$

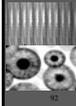
Píxeles rectangulares $s = 0$ $\omega_{12} = \omega_{21} = 0$

Píxeles cuadrados $\alpha_x = \alpha_y$ $\omega_{11} = \omega_{22}$



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Reconstrucción directa usando información de la escena

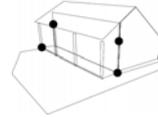
Usar puntos de control X_{Ei} con coordenadas conocidas Para ir desde el proyectivo al métrico



$$X_{Ei} = H X_i$$

$$x_i = P H^{-1} X_{Ei}$$

(2 ecu. ind. en H^{-1} por vista, o 3 ecu. desde dos vistas)

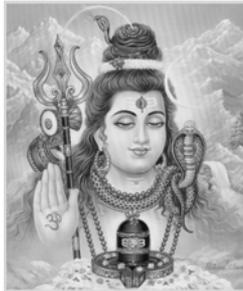


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Geometría de tres vistas

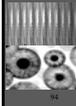


Lord Shiva, representación de 1920-40

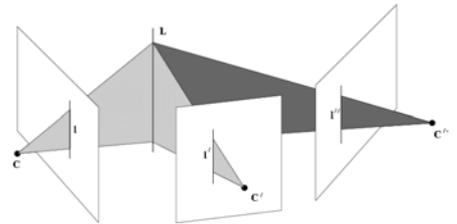


N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



El tensor trifocal



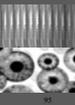
La retroproyección de tres líneas deben cortarse en una línea La relación de incidencia nos da restricciones sobre línea

Calculemos las relaciones de incidencia.....



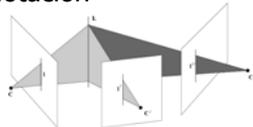
N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



Notación

$$l_i \leftrightarrow l'_i \leftrightarrow l''_i$$



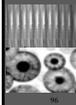
$$P = [I | 0] \quad P' = [A | a_4] \quad P'' = [B | b_4]$$

$$\pi = P^T l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi' = P'^T l' = \begin{pmatrix} A^T l' \\ a_4^T l' \end{pmatrix} \quad \pi'' = P''^T l'' = \begin{pmatrix} B^T l'' \\ b_4^T l'' \end{pmatrix}$$



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UJI



El tensor trifocal

Trifocal Tensor = $\{T_1, T_2, T_3\}$

$$l^T = l^T [T_1, T_2, T_3] l'' = (l^T T_1 l'', l^T T_2 l'', l^T T_3 l'')$$

Solo depende de las coordenadas imagen y es por tanto independiente de las bases proyectivas 3D

También $l^T = l^T [T_i] l''$ y $l''^T = l''^T [T_i] l'$ pero no hay una relación simple.

La expresión general no es tan simple como

$$T_i = a_i b_4^T - a_4 b_i^T$$

G.L: $T: 3 \times 3 \times 3 = 27$ elementos, 26 salvo escala relaciones de las 3 vistas: $11 \times 3 - 15 = 18$ g.l.

$8 (= 26 - 18)$ restricciones algebraicas sobre T (comparar con 1 para F , i.e. rango-2)

Homografías inducidas por un plano

$$l = H^T l''$$

$$l_i = l'^T T_i l''$$

$$H = [h_1, h_2, h_3] \text{ with } h_i = T_i^T l'$$

$$x'' = H_{13}(l') x \quad H_{13}(l') = [T_1^T, T_2^T, T_3^T] l'$$

$$x' = H_{12}(l'') x \quad H_{12}(l'') = [T_1, T_2, T_3] l''$$

Relación Línea-Línea-Línea

$$l^T = l'^T [T_1, T_2, T_3] l'' \text{ (salvo escala)}$$

Eliminar factor de escala: $(l'^T [T_1, T_2, T_3] l'') [l]_x = 0^T$

$$(l'^T [T_i] l'') [l]_x = 0^T$$

$$(l''^T [T_i^T] l') [l]_x = 0^T$$

Relación Punto-Línea-Línea

$$x^T l = \sum_i x^i l_i = 0 \quad l_i = l'^T T_i l''^T$$

$$l'^T \left(\sum_i x^i T_i \right) l''^T = 0$$

$(\sum_i x^i T_i)$ Matriz 3x3

Relación Punto-línea-punto

$$l'^T \left(\sum_i x^i T_i \right) l''^T = 0 \quad x' = H_{13}(l'') x = \left(\sum_i x^i T_i^T \right) l'$$

nota: válido para cualquier línea a través de x' ,

$$x'^T [x]_x = l'^T \left(\sum_i x^i T_i \right) [x'']_x = 0^T$$

Relación Punto-punto-punto

$$l'^T \left(\sum_i x^i T_i \right) [x'']_x = 0^T$$

nota: válido para cualquier línea a través de x' ,
ej. $l' = [x']_x, y'$ arbitrario

$$[x']_x \left(\sum_i x^i T_i \right) [x'']_x = 0_{3 \times 3}$$

Resumen de relaciones de incidencia

- (i) Line-line-line correspondence

$$l'^T [T_1, T_2, T_3] l'' = l'^T \text{ or } (l'^T [T_1, T_2, T_3] l'') [l]_x = 0^T$$
- (ii) Point-line-line correspondence

$$l'^T \left(\sum_i x^i T_i \right) l'' = 0 \text{ for a correspondence } x \rightarrow l' \rightarrow l''$$
- (iii) Point-line-point correspondence

$$l'^T \left(\sum_i x^i T_i \right) [x'']_x = 0^T \text{ for a correspondence } x \rightarrow l' \rightarrow x''$$
- (iv) Point-point-line correspondence

$$[x']_x \left(\sum_i x^i T_i \right) l'' = 0 \text{ for a correspondence } x \rightarrow x' \rightarrow l''$$
- (v) Point-point-point correspondence

$$[x']_x \left(\sum_i x^i T_i \right) [x'']_x = 0_{3 \times 3}$$

Configuración no válida

incidencia en la proyección no garantiza la incidencia en el espacio

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

103

Lineas Epipolares

Point-line-line correspondence

$$l'^T (\sum_i x^i T_i) l'' = 0$$

Si l' es una línea epipolar, entonces para l'' arbitraria satisface

$$l'^T (\sum_i x^i T_i) = 0^1$$

inversamente, $(\sum_i x^i T_i) l'' = 0$

Las líneas epipolares son los espacios nulos der. e izqdo de $(\sum_i x^i T_i)$

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

104

Epipolos

Correspondencia PLL

$$l'^T (\sum_i x^i T_i) l'' = 0$$

Con los puntos $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$
 $(\sum_i x^i T_i)$ llega a ser T_1 , T_2 and T_3 respectivamente

Epipolos son intersección sub-esp. nulos derch e izqdo respectivamente de T_1 , T_2 and T_3
($e=P^1C$ and $e''=P^3C$)

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

105

Transferencia epipolar

$x'' = (F_{31}x) \times (F_{32}x')$

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

107

Extracción de F

$$x' = ([T_1, T_2, T_3] l'') x$$

$$l' = [e'] \times ([T_1, T_2, T_3] l'') x$$

$$F_{21}$$

Buena elección para l'' es e'' ($v_3^T e'' = 0$)

$$F_{21} = [e'] \times [T_1, T_2, T_3] e''$$

$$F_{31} = [e''] \times [T_1^T, T_2^T, T_3^T] e'$$

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

108

Cálculo de P, P', P''

$$P = [I \mid 0] \quad \{P, P'\} \text{ and } \{P, P''\}$$

$$P' = [[T_1, T_2, T_3] e'' \mid e']$$

$$P'' = ? \left[[T_1^T, T_2^T, T_3^T] e' \mid e'' \right]$$

$\{P, P'\}$ y $\{P, P''\}$ ok, pero no $\{P, P', P''\}$

$$P'' = [[T_1^T, T_2^T, T_3^T] e' + e'' v^T \mid \lambda e'']$$

especificamente, (sin derivación)

$$P'' = [(e'' e''^T - I) [T_1^T, T_2^T, T_3^T] e' \mid e'']$$

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

109

Autocalibración



113

Motivación

- Permitir una adquisición flexible
 - Sin necesidad de calibración previa
 - Posibilidad de cambiar los intrínsecos
 - Uso de archivos de imágenes

115

Ambigüedad proyectiva

Reconstrucción con imágenes no calibradas
 ⇒ Ambigüedad proyectiva en la reconstrucción

$$m = PM = (PT^{-1})(TM) = P'M'$$


116

Estratificación de la geometría

Proyectiva	Afin	Métrica
		
15 GL	12 GL <i>Plano infinito paralelismo</i>	7 GL <i>conica absoluta angulos, dist.rea.</i>
	← Mas general	
	Mas estructura →	

117

Restricciones ?

- Restricciones de la escena
 - Paralelismo, puntos anulación, horizonte, ...
 - Distancias, posiciones, ángulos, ...
 - Escena desconocida → no hay restricciones
- Restricciones sobre los extrínsecos
 - Posición, orientación, ...
 - Si no se conoce el movimiento → no hay restricciones
- Restricciones sobre los intrínsecos
 - Longitud focal, punto principal, tamaño pixel & ortogonalidad
 - Cámaras generales de perspectiva → Algunas restricciones

118

Restricciones sobre los parámetros intrínsecos

$$K = \begin{bmatrix} f_x & s & u_x \\ & f_y & u_y \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Constantes
 ej. Cámara fija: $K_1 = K_2 = \dots$

Conocidos
 ej. Píxeles rectangulares : $s = 0$
 píxeles cuadrados : $f_x = f_y, s = 0$
 punto principal conocido: $(u_x, u_y) = \left(\frac{w}{2}, \frac{h}{2}\right)$

120

Autocalibración

Paso de estructura *proyectiva* a estructura *métrica* usando *restricciones sobre los parámetros intrínsecos* de la cámara

- Intrínsecos constantes (Faugeras et al. ECCV'92, Hartley'93, Triggs'97, Pollefeys et al. PAMI'98, ...)
- Algunos conocidos, otros variables (Heyden&Astrom CVPR'97, Pollefeys et al. ICCV'98, ...)
- Restricciones sobre intrínsecos y movimiento restringido (ej. Traslación pura, rotación pura, movimiento plano) (Moons et al.'94, Hartley '94, Armstrong ECCV'96, ...)

Mínimo número de imágenes

- Para pasar de proyectivo (15GL) a métrico (7GL) se necesitan al menos 8 restricciones
- La longitud de la secuencia mínima debe satisfacer

$$n \times (\# \text{conocidos}) + (n - 1) \times (\# \text{fijos}) \geq 8$$
- Independiente de algoritmos
- Supone movimiento general (i.e. no crítico)

Autocalibración: Planteamiento

- Una reconstrucción proyectiva $\{P_i, X_j\}$, en la cual $P^1 = [I | 0]$ puede transformarse a una reconstrucción métrica $\{P_i, H^{-1} H X_j\}$, siendo H una homografía de la forma

$$H = \begin{pmatrix} K & 0 \\ -p^T K & 1 \end{pmatrix}$$
 siendo K una matriz triangular superior. Además:
 - K=K¹ es la matriz de calibración de la primera cámara
 - Las coordenadas del plano del infinito en la reconstrucción proyectiva están dadas por $\pi_\infty = (p^T, 1)^T$

Ecuaciones Básicas

$$P_M^i = P^i H, \quad i=1, \dots, M, \quad \Rightarrow \begin{cases} K^i R^i = (A^i - a^i p) K^1 \\ P^i = [A^i | a^i] \end{cases} \quad \text{para } i = 2, \dots, m$$

o equivalentemente

$$K^i K^{iT} = (A^i - a^i p^T) K^1 K^{1T} (A^i - a^i p^T)^T$$

o en términos de la proyección de la CAD

$$\omega^{*i} = (A^i - a^i p^T) \omega^{*1} (A^i - a^i p^T)^T$$

o en términos de la proyección de la IAC

$$\omega^i = (A^i - a^i p^T)^{-T} \omega^1 (A^i - a^i p^T)^{-1}$$

Cuádriga dual absoluta (CDA) y autocalibración

Ecuación de Proyección:

$$\omega_i^* \propto P_i \Omega^* P_i^T \propto K_i K_i^T$$

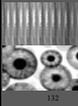
Traslada las restricciones sobre K a ecuaciones sobre los parámetros de Ω^*

Cónica Absoluta = Objeto de calibración que esta siempre presente pero que solo puede observarse a través de restricciones sobre los parámetros intrínsecos

Restricciones sobre ω^*

$$\omega^* = \begin{bmatrix} f_x^2 + s^2 + c_x^2 & sf_y + c_x c_y & c_x \\ sf_y + c_x c_y & f_y^2 + c_y^2 & c_y \\ c_x & c_y & 1 \end{bmatrix}$$

condición	restricción	tipo	#restricciones
Ortogonalidad de ejes	$\omega_{12}^* \omega_{33}^* = \omega_{13}^* \omega_{23}^*$	cuadrático	m
Punto principal en el origen	$\omega_{13}^* = \omega_{23}^* = 0$	lineal	$2m$
ortogonalidad (& p.p.)	$\omega_{12}^* = 0$	lineal	m
Dim. Pixel fijas & desconocidas (& p.p. & Ortog.)	$\omega_{11}^* \omega_{22}^* = \omega_{22}^* \omega_{11}^*$	cuadrático	$m-1$
Dim. Pixel conocid. (& p.p. & Ortog.)	$\omega_{11}^* = \omega_{22}^*$	lineal	m
Longitud focal (& p.p. & Ortog.)	$\omega_{33}^* = \omega_{11}^*$	lineal	m



Algoritmo lineal

(Pollefeys et al., ICCV '98/IJCV '99)

Suponer todo conocido, excepto la longitud focal

$$\omega^* \approx \begin{bmatrix} \hat{f}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{f}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{P}\Omega^* \mathbf{P}^T$$

$$(\mathbf{P}\Omega^* \mathbf{P}^T)_{11} - (\mathbf{P}\Omega^* \mathbf{P}^T)_{22} = 0$$

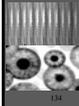
$$(\mathbf{P}\Omega^* \mathbf{P}^T)_{12} = 0$$

$$(\mathbf{P}\Omega^* \mathbf{P}^T)_{13} = 0$$

$$(\mathbf{P}\Omega^* \mathbf{P}^T)_{23} = 0$$

Tenemos 4 restricciones por imagen

Notemos que no se ha impuesto la restricción de rango-3 sobre Ω_∞^*

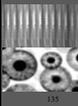
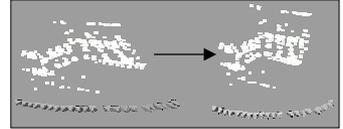


Proyectiva a métrica

Calcular \mathbf{H} a partir de

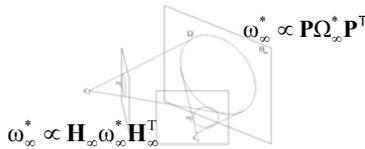
$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{H}\Omega_\infty^* \mathbf{H}^T \text{ o } \mathbf{H}^{-1} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{H}^{-T} = \Omega_\infty^* \text{ con } \tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$$

Usando la SVD sobre Ω_∞^* y obtener la reconstrucción métrica como $\mathbf{P}\mathbf{H}^{-1}$ y $\mathbf{H}\mathbf{M}$

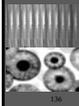


Alternativas: (Dual) imagen de la conica absoluta

- Equivalente a la CDA



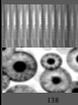
- Práctico cuando \mathbf{H}_∞ puede calcularse de antemano
 - Rotación pura (Hartley'94, Agapito et al.'98,'99)
 - Puntos de anulación, traslaciones puras, restricción de módulo, ...



Notemos que en cámaras ortogonales la IAC Puede ser mas práctica que la DIAC

$$\omega_\infty^* = \begin{bmatrix} f_x^2 + c_x^2 & c_x c_y & c_x \\ c_x c_y & f_y^2 + c_y^2 & c_y \\ c_x & c_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_\infty = \frac{1}{f_x^2 f_y^2} \begin{bmatrix} f_y^2 & 0 & -f_y^2 c_x \\ 0 & f_x^2 & -f_x^2 c_y \\ -f_y^2 c_x & -f_x^2 c_y & f_x^2 f_y^2 + f_y^2 c_x^2 + f_x^2 c_y^2 \end{bmatrix}$$

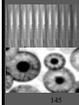


Refinamiento

- Ajuste métrico de rayos

$$\arg \min_{\mathbf{P}_k, \mathbf{M}_i} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n D(m_{ki}, \mathbf{P}_k(\mathbf{M}_i))^2$$

Impone restricciones o valores sobre los intrínsecos durante la minimización (esto es "self-calibration" para los fotogrametristas)



Geometría de múltiples vistas



Untitled, Asger Jorn, 1947

Cálculo con múltiples vistas

- Secuencial
- Ajuste global
- Factorización
 - Ortográfica
 - Perspectiva

Movimiento y estructura inicial

Geometría epipolar ↔ Calibración proyectiva

$$\mathbf{m}_2^T \mathbf{F} \mathbf{m}_1 = 0 \quad \mathbf{P}_1 = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e}_x \mathbf{F} + \mathbf{e} \mathbf{a}^T \end{bmatrix} \mathbf{e}$$

compatible con F

Da cámaras proyectivas correctas (Faugeras '92, Hartley '92)

Obtiene la estructura usando triangulación

Minimiza el error de reproyección
Evita las medidas en el espacio proyectivo

Determinar posición en la estructura existente

$$\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{M}$$

Calcular \mathbf{P}_{i+1} usando una aproximación robusta
Encontrar nuevos emparejamientos usando proyecciones de las estimaciones
Extender, corregir y refinar la reconstrucción

Colecciones de imágenes no-secuenciales

Problema: Las Características se pierden y se reinician como nuevas características

Solución: Emparejar con otras vistas cercanas

Relacionando mas vistas

Para cada vista l

- Extraer características
- Calcular geometría de dos vistas $i-1/l$ y emparejamientos
- Calcular geometría usando algoritmos robustos

Para toda vista *cercana* k

- Calcular geometría de dos vistas k/l y emparejamientos
- Inferir nuevos 2D-3D parejas y añadirlos a la lista

Refinamiento para estas parejas

- Refinar la estructura existente
- Inicializar una nueva estructura

Problema: Encontrar vistas cercanas en ejes proyectivos

Determinando vistas cercanas

- Si los puntos de vista están *cercanos* entonces muchos de los cambios de las imágenes pueden modelarse a través de *homografía de planos*
- *Medida cualitativa de distancia* se obtiene mirando el *error residual* de la mejor *homografía de planos* posible.

$$\text{Distance} = \min \text{median } D(\mathbf{H} \mathbf{m}, \mathbf{m}')$$

Colecciones de imágenes no secuenciales (2)

3792 points
4.8im/pt

2170 points
9.8im/pt

64 images

64 images

Refinando estructura y movimiento

- Minimizar el error de reproyección

$$\min_{\hat{P}_k, \hat{M}_i} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n D(m_{ki}, \hat{P}_k \hat{M}_i)^2$$

- Estimación de Máxima Verosimilitud (ruido gaussiano de media cero)
- Problemas grandes pero pueden resolverse de forma eficiente (Bundle adjustment)

Ejemplo de Reconstrucción

Estructura jerárquica y recuperación del movimiento

- Calcular reconstrucciones de 2-vistas
- Calcular reconstrucciones de 3-vistas
- Enlazar reconstrucciones de 3-vistas
- Mezclar y refinar la reconstrucción

Enlazando reconstrucciones de 3-vistas

Diferentes posibilidades

- Alinear (P_2, P_3) con (P'_1, P'_2) $\arg \min_H d_A(P_2, P'_1 H^{-1}) + d_A(P_3, P'_2 H^{-1})$
- Alinear X, X' (y C C') $\arg \min_H \sum_j d_A(X_j, HX'_j)$
- Minimizar error reproy. $\arg \min_H \sum_j d(PH^{-1}X'_j, x_j) + \sum_j d(P'HX'_j, x'_j)$
- EMV (mezclar) $\arg \min_{P, X} \sum_j d(PX_j, x_j)$

Refinando estructura y movimiento

- Minimizar el error de reproyección

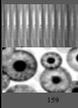
$$\min_{\hat{P}_k, \hat{M}_i} \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n D(m_{ki}, \hat{P}_k \hat{M}_i)^2$$

- Estimación de Máxima Verosimilitud (ruido gaussiano de media cero)
- Problemas grandes pero pueden resolverse de forma eficiente (Bundle adjustment)



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



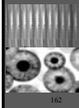
Levenberg-Marquardt disperso

- Complejidad N^3 para resolver $\Delta = N^{-1} J^T e_0$
 - imposible en grandes problemas (100 vistas 10,000 puntos ~30,000 incógnitas)
- Partir los parámetros
 - partición A (cámaras)
 - partición B (puntos)



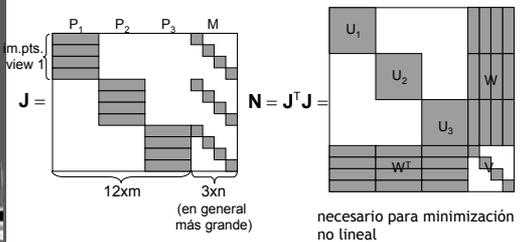
N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



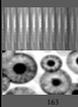
Ajuste disperso de rayos

Jacobiano de $\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n D(m_k, \hat{p}_i(M_i))^2$ tiene estructura dispersa



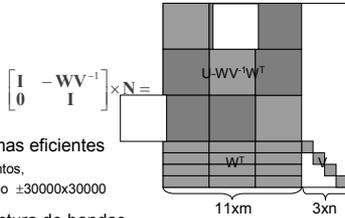
N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Ajuste disperso de rayos

- Elimina dependencia de los parámetros de cámara de los parámetros de estructura
- En general $3n \gg 11m$



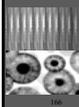
Permite calculos mas eficientes
ej. 100 vistas, 10000 puntos,
resolver $\pm 1000 \times 1000$, no $\pm 30000 \times 30000$

Frecuente estructura de bandas diagonales
usar algoritmos de algebra lineal dispersa



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Factorización

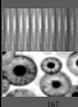
- Factoriza las observaciones en estructura de la escena y movimiento/calibración de la cámara
- En general usa **todos los puntos en todas las imágenes** al mismo tiempo

- ✓ Factorización afín
- ✓ Factorización proyectiva



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Cámara afín

Las ecuaciones de la proyección afín son

$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^x \\ P_i^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

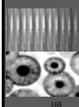
$$\begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^x \\ P_i^y \\ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{ij} - P_i^x \\ y_{ij} - P_i^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_i^x \\ \tilde{P}_i^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix}$$



N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ



Factorización ortográfica

(Tomasi Kanade'92)

Las ecuaciones de la factorización ortográfica son

$$\bar{m}_{ij} = \bar{P}_i \bar{M}_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

$$\text{donde } \bar{m}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \end{bmatrix}, \bar{P}_i = \begin{bmatrix} \tilde{P}_i^x \\ \tilde{P}_i^y \end{bmatrix}, \bar{M}_j = \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix}$$

Todas las ecuaciones pueden juntarse para i y j

$$\bar{m} = \bar{P} \bar{M}$$

$$\text{donde } \bar{m} = \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \dots & \bar{m}_{1n} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} & \dots & \bar{m}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{m}_{m1} & \bar{m}_{m2} & \dots & \bar{m}_{mn} \end{bmatrix}, \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_m \end{bmatrix}, \bar{M} = [M_1, M_2, \dots, M_n]$$

Notemos que \bar{P} y \bar{M} son matrices $2m \times 3$ y $3n \times n$ resp. y por tanto el rango de \bar{m} es como mucho 3

Factorización ortográfica (Tomasi Kanade'92)

Factoriza \mathbf{m} a través de la SVD

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$$

Una reconstrucción afín se obtiene como sigue:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{M}} = \Sigma\mathbf{V}^T$$

La aproximación de rango-3 más cercana da E.M.V.!

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & \bar{m}_{12} & \dots & \bar{m}_{1n} \\ \bar{m}_{21} & \bar{m}_{22} & \dots & \bar{m}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{m}_{m1} & \bar{m}_{m2} & \dots & \bar{m}_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 \\ \tilde{P}_2 \\ \vdots \\ \tilde{P}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \end{bmatrix} \right\|$$

Factorización ortográfica (Tomasi Kanade'92)

Factoriza \mathbf{m} usando SVD

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$$

Una reconstrucción afín se obtiene como sigue:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{U}, \tilde{\mathbf{M}} = \Sigma\mathbf{V}^T$$

Una reconstrucción métrica se obtiene como sigue

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{A}^{-1}, \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{M}}$$

Donde \mathbf{A} se calcula de

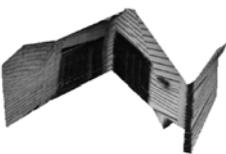
$$\tilde{\mathbf{P}}_i^* \mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}}_i^T \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_i^* \mathbf{L}_i^T = \mathbf{I}$$

3 eq. lineales por vista en cada matriz simétrica \mathbf{C} (6 g.l.)

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^* \mathbf{A} \tilde{\mathbf{P}}_i^T \mathbf{A}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_i^* \mathbf{L}_i^T = \mathbf{I}$$

\mathbf{A} puede obtenerse de \mathbf{C} a través de la factorización de Cholesky e inversa

Ejemplo



Tomasi Kanade'92, Poelman & Kanade'94

Otras aprox. de factorización

Factorización con incertidumbre (Irani & Anandan, IJCV'02)

Factorización para escenas dinámicas (Costeira and Kanade '94)

(Bregler et al. 2000, Brand 2001)

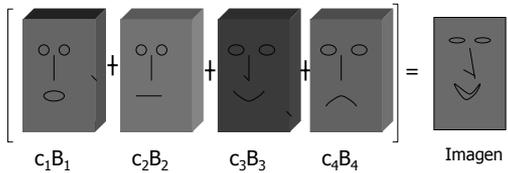
Escenas dinámicas



(c) 2000 MATTHEW BRADLEY / MERRILL

Modelo de Deformación

■ Modelo de observación



$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{P}(c_1\mathbf{B}_1 + c_2\mathbf{B}_2 + \dots + c_M\mathbf{B}_M)$$

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

Estructura afín no-rígida

- Hipótesis
 - Espacio de deformación lineal.
 - NO hay conocimiento a priori del espacio de deformación.
 - Modelo de proyección ortogonal con escala

Bregler, Hertzmann & Biermann, CVPR-2000
Brand, CVPR-2001

178

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

Estructura afín no rígida

$$P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & t_1 \\ r_4 & r_5 & r_6 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_i = \{S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iQ}\}$$

S - 4×1 homogeneous euclidean vector

$$x_{ij} = P_i \left(\sum_{k=1, M} l_{ik} S_{kj} \right) = \sum_{k=1, M} l_{ik} P_i S_{kj} = \sum_{k=1, M} l_{ik} \tilde{R}_i S_{kj} + T_i$$

$$W = \begin{pmatrix} \hat{x}_{11} & \dots & \hat{x}_{1Q} \\ \hat{x}_{21} & \dots & \hat{x}_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{x}_{F1} & \dots & \hat{x}_{FQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} \tilde{R}_1 & \dots & l_{1M} \tilde{R}_1 \\ l_{21} \tilde{R}_2 & \dots & l_{2M} \tilde{R}_2 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ l_{F1} \tilde{R}_F & \dots & l_{FM} \tilde{R}_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{S}_{11} & \dots & \tilde{S}_{1Q} \\ \tilde{S}_{21} & \dots & \tilde{S}_{2Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{S}_{M1} & \dots & \tilde{S}_{MQ} \end{pmatrix} = LR \cdot \tilde{S}$$

$2F \times Q$ $2F \times 3M$ $3M \times Q$

179

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

Estructura afín no rígida

- Desacoplo de los movimientos

$$(l_{i1} \tilde{R}_i \dots l_{iM} \tilde{R}_i) \rightarrow \begin{pmatrix} l_{i1} r_1 & l_{i1} r_2 & \dots & l_{i1} r_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{iM} r_1 & l_{iM} r_2 & \dots & l_{iM} r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{i1} \\ \vdots \\ l_{iM} \end{pmatrix} (r_1 \dots r_6)$$

$$W = U \cdot V = (UG) \cdot (G^{-1}V) = LR \cdot \tilde{S}$$

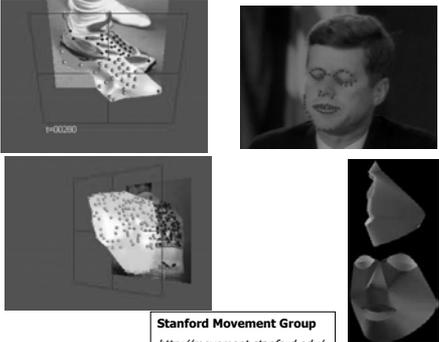
- G se estima por mínimos cuadrados (Tomasi & Kanade, IJCV, 1992)

180

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

Estructura afín no rígida



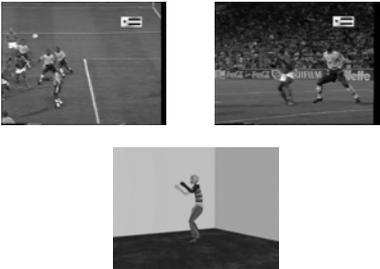
Stanford Movement Group
<http://movement.stanford.edu/nonrig/>

181

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

Reconstrucción a partir de modelos



182

N. Pérez de la Blanca

CURSO DE DOCTORADO
Técnicas Avanzadas de Visión por Computador
UIJ

¿Que queda?

- Mucho más sobre N-linealidades
- Escenas dinámicas
- Autocalibración
- Técnicas de ajuste global (Bundle)
- Dualidad
- Cheirality
- Configuraciones críticas
-

183



N. Pérez de la Haza

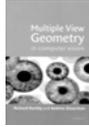
CURSO DE
DOCTORADO
Técnicas
Avanzadas de
Visión por
Computador
UIJ



184

Referencias Básicas

Multiple View Geometry in Computer Vision
by Richard Hartley and Andrew Zisserman
Cambridge University Press



The Geometry from Multiple Images
by Olivier Faugeras and Quan-Tuan Luong
MIT Press

